



СКЕЙЛИНГ В ДИНАМИКЕ ОСЦИЛЛЯТОРА ДУФФИНГА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ИМПУЛЬСОВ СО СЛУЧАЙНОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ ПАРАМЕТРОВ ВОЗДЕЙСТВИЯ

А.П. Кузнецов, Ю.В. Седова

В работе рассмотрен нелинейный осциллятор Дуффинга под импульсным возбуждением с двумя способами введения случайной имитирующей шум добавки – посредством модуляции амплитуды и периода следования импульсов. Продемонстрировано свойство скейлинга как по сценарию Фейгенбаума, так и в «трикритическом» случае.

Введение

Известно несколько основных сценариев перехода нелинейных систем от регулярного поведения к хаосу. Все они допускают описание с помощью метода ренорм-группы и поэтому обладают свойством универсальности относительно конкретного вида системы [1]. Одним из следствий возможности ренормгруппового подхода является свойство скейлинга – воспроизводимость во все более мелких и мелких масштабах характеристик динамики в окрестности критической точки перехода к хаосу. Свойство скейлинга можно наблюдать в устройстве бифуркационного дерева, на графике показателя Ляпунова, в структуре аттрактора и др. [1]. В реальных системах, однако, всегда присутствуют шумы, которые могут значительно повлиять на картину перехода. Так, в случае удвоений периода шума «размывают» тонкую структуру бифуркационного дерева, в результате чего может наблюдаться лишь конечное число удвоений периода (тем большее, чем меньше уровень шума). При этом известные иллюстрации скейлинга, вообще говоря, становятся невозможными, поскольку предполагают сколь угодно близкое приближение к критической точке. Замечательно, однако, что метод ренормгруппы может быть обобщен и на случай систем с шумом (например, [2–7]). Благодаря этому удается распространить на стохастические системы и свойство скейлинга. Для этого при переходе с одного уровня иерархии на другой следует перенормировать амплитуду шума на новые универсальные константы. Для ряда классов универсальности такие постоянные установлены [2, 5–8]. В то же время представляется важным дать соответствующие иллюстрации не только для формальных «канонических» моделей, но и для отображений, полученных «из первых принципов» для физических систем, когда установлена связь параметров с параметрами исходной физической системы. Кроме того, было бы интересно

представить иллюстрации свойства самоподобия в системах с удвоениями периода под действием шума на плоскости существенных параметров системы. В работе в этом контексте изучается нелинейный осциллятор Дуффинга с периодическим импульсным воздействием. Шум вносится в систему как случайная модуляция либо амплитуды импульсов, либо промежутков времени между соседними импульсами. Это позволяет получить соответствующие одномерные отображения аналитически.

Нами рассмотрены два класса универсальности, связанные с удвоениями периода. Первый является классическим фейгенбаумовским типом поведения и характеризуется, наряду с константами Фейгенбаума $\delta_F = 4.669201609\dots$ и $\alpha_F = -2.502907875\dots$, константой шума $\mu_F = 6.61903\dots$, найденной в работах Кратчфилда и др. [2] и Шраймана и др. [8]. Второй тип поведения предполагает обобщение сценария Фейгенбаума на случай двухпараметрических отображений. Он характеризуется универсальным самоподобным устройством плоскости параметров системы в окрестности концевых точек фейгенбаумовских линий – трикритических точек. Это устройство для систем без шума с помощью карт динамических режимов обсуждалось в [9]. Продемонстрированы закономерности скейлинга с помощью исследования двумерной картины распределения показателя Ляпунова как в системах без шума, так и в системах с шумом. Указаны соответствующие универсальные константы: $\delta_T = 7.284686217\dots$, $\alpha_T = -1.69030297\dots$ и константа шума $\mu_T = 8.2439\dots$

1. Исследуемая система

Итак, рассмотрим нелинейный осциллятор Дуффинга с периодическим импульсным воздействием. Предположим, что действие импульсов занимает очень короткое время, так что за это время координата осциллятора практически не успевает измениться, а скорость получает добавку, определяемую амплитудой импульса. Поведение такого осциллятора описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$\ddot{X} + \gamma\dot{X} + \omega_0^2 X + \beta X^3 = \sum_n C\delta(t - nT), \quad (1)$$

где X – динамическая переменная, γ – коэффициент затухания, ω_0 – собственная частота, β – параметр нелинейности, T – период следования внешних импульсов, C – их амплитуда.

В промежутке между импульсами динамика осциллятора является автономной, и в приближении метода медленно меняющихся амплитуд можно получить следующие зависимости координаты X и скорости V от времени t (подробный вывод см. в [10, 11]):

$$X(t) = R_n e^{-\gamma t/2} \cos\left(\omega_0 t + \frac{3\beta^2}{8\omega_0} R_n^2 \frac{1 - e^{-\gamma t}}{\gamma} + \varphi_n\right), \quad (2)$$

$$V(t) = -\omega_0 R_n e^{-\gamma t/2} \sin\left(\omega_0 t + \frac{3\beta^2}{8\omega_0} R_n^2 \frac{1 - e^{-\gamma t}}{\gamma} + \varphi_n\right). \quad (3)$$

Здесь R_n и φ_n – «начальные» амплитуда и фаза колебаний сразу после n -го импульса. После очередного, $(n+1)$ -го импульса скорость в соответствии с (1) получает

добавку C . Используя это обстоятельство, можно аналитически прийти к отображению Икеды¹ [10, 11]:

$$Z_{n+1} = A + BZ_n \exp \left(i \left(|Z_n|^2 + \psi \right) \right). \quad (4)$$

Здесь комплексная переменная Z выражается через координату и скорость осциллятора с помощью соотношения

$$Z = \left(iX + \frac{V}{\omega_0} \right) \sqrt{\frac{3\beta}{8\omega_0} \left(\frac{1 - e^{-\gamma T}}{\gamma} \right)}. \quad (5)$$

Параметры A , B и ψ определяются через параметры осциллятора следующим образом:

$$\begin{aligned} A &= \frac{C}{\omega_0} \sqrt{\frac{3\beta}{8\omega_0} \left(\frac{1 - e^{-\gamma T}}{\gamma} \right)}, \\ B &= e^{-\gamma T/2}, \\ \psi &= \omega_0 T. \end{aligned} \quad (6)$$

Пусть теперь амплитуды импульсов промодулированы случайным образом так, что ΔC_n – случайная добавка к амплитуде n -го импульса:

$$\ddot{X} + \gamma \dot{X} + \omega_0^2 X + \beta X^3 = \sum (C + \Delta C_n) \delta(t - nT). \quad (7)$$

Для системы (7) под действием импульсов со случайной амплитудой по аналогии с (4) без труда получаем следующее отображение:

$$Z_{n+1} = A \left(1 + \frac{\Delta C_n}{C} \right) + BZ_n \exp \left(i \left(|Z_n|^2 + \psi \right) \right). \quad (8)$$

Можно рассмотреть и другой способ введения флуктуаций в рассматриваемую систему. Считаем, что длительность промежутков времени между импульсами $T + \Delta T_n$ слегка колеблется около среднего периода T (ΔT_n – малая случайная величина), и что параметр γ много меньше собственной частоты ω_0 , что естественно для осциллятора. Тогда нетрудно видеть из (2), (3), что по истечении времени $T + \Delta T_n$ случайной добавкой к амплитуде осциллятора можно пренебречь по сравнению с добавкой к его полной фазе. Это значит, что мы приходим к следующей форме отображения Икеды со случайным воздействием

$$Z_{n+1} = A + BZ_n \exp \left(i \left(|Z_n|^2 + \psi + \omega_0 \Delta T_n \right) \right). \quad (9)$$

Отображения (8) и (9) пока еще двумерные (поскольку Z – комплексная переменная, содержащая действительную и мнимую части). Известно, однако, что в широкой области значений параметров (тем точнее, чем больше A) отображение Икеды

¹ Подробное обсуждение вопроса о переходе от исходной дифференциальной системы (1) к двумерному отображению Икеды см. в [10].

допускает описание с помощью одномерного отображения [9–11]. Проведем соответствующую процедуру для отображения (9). Вслед за [10–12] положим

$$Z = A + \tilde{Z}, \quad (10)$$

где \tilde{Z} - малая добавка. Подставим это выражение в левую и правую части уравнения (9) с учетом малости \tilde{Z} :

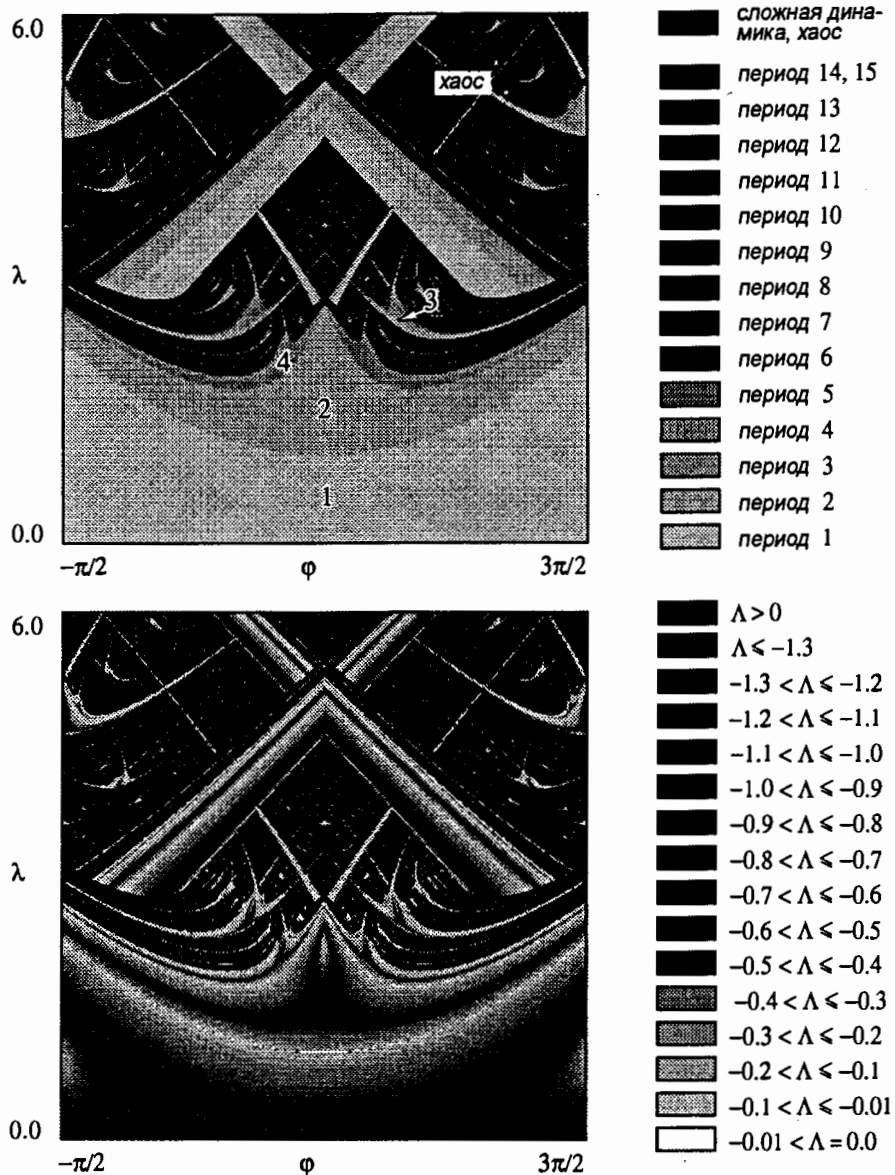


Рис. 1. Карта режимов (а) и карта показателя Ляпунова Λ (б), построенные для отображения косинуса (12) в отсутствие шума. Цифрами на фрагменте (а) обозначены области существования циклов основных периодов

$$\tilde{Z}_{n+1} = BA \exp \left(i \left(A^2 + 2ARe\tilde{Z}_n + \psi + \omega_0\Delta T_n \right) \right). \quad (11)$$

Положив далее $X_n = 2ARe\tilde{Z}_n + A^2 + \psi$, приходим к следующему одномерному отображению с шумовым воздействием:

$$X_{n+1} = \lambda \cos(X_n + \omega_0\Delta T_n) + \varphi, \quad (12)$$

где введены новые параметры

$$\lambda = 2A^2B, \quad \varphi = A^2 + \psi. \quad (13)$$

Далее мы полагаем, что $\omega_0\Delta T_n = \varepsilon\xi_n$, где ε - безразмерная амплитуда модуляции периода внешнего воздействия, а ξ_n - случайная величина.

Карты динамических режимов и показателя Ляпунова для отображения косинуса (12) при отсутствии внешнего шумового воздействия приведены на рис. 1. Диапазон изменения параметра φ выбран $(-\pi/2, 3\pi/2)$ в силу 2π -периодичности косинуса.

2. Однопараметрический переход к хаосу и скейлинг

Отображение косинуса (12) в отсутствие флуктуаций $X_{n+1} = \lambda \cos X_n + \varphi$ имеет множество квадратичных экстремумов. Поэтому для него характерным является сценарий перехода к хаосу через удвоения периода. При пересечении границы хаоса по типичному маршруту на плоскости параметров (λ, φ) будет наблюдаться классический каскад удвоений, характеризующийся закономерностями Фейгенбаума. Например, при $\varphi = 0$ фейгенбаумовский каскад накапливается к критической точке $\lambda = 1.974133\dots$ Иллюстрация скейлинга в системе с шумом на графике бифуркационного дерева дана на рис. 2. Самоподобие иллюстрируется серией рисунков, причем каждый последующий рисунок серии представляет собой увеличенный фрагмент предыдущего. При этом масштаб по оси динамической переменной X

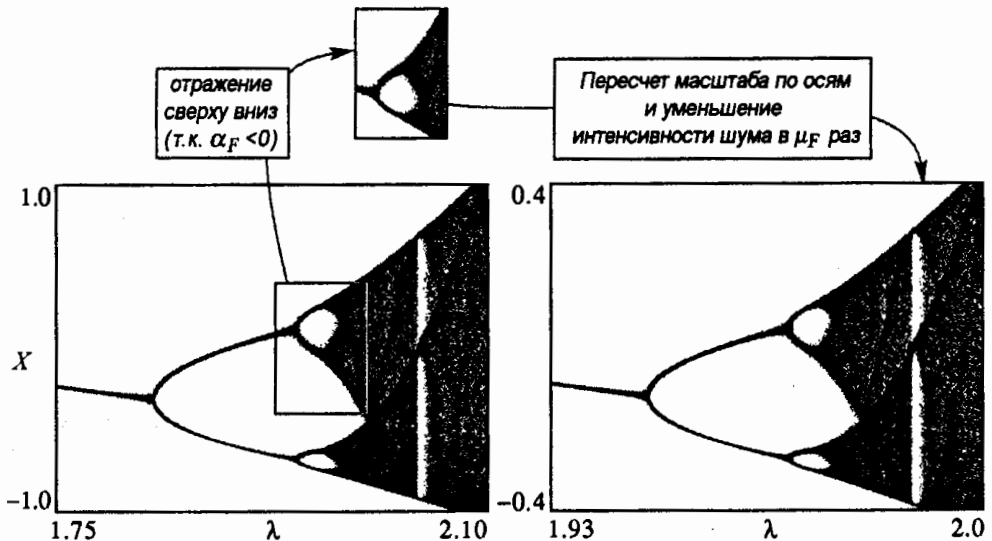


Рис. 2. Иллюстрация свойства фейгенбаумовского скейлинга на бифуркационном дереве отображения косинуса. Исходная интенсивность шума равна 0.003

пересчитывается в α_F раз относительно точки $X=0$ – одного из экстремумов отображения косинуса, а по оси управляющего параметра λ – в δ_F раз относительно критической точки 1.974133... В соответствии с изложенным во введении подходом, при переходе на более глубокий уровень иерархической картины исходная амплитуда шума уменьшается на константу Кратчфилда $\mu_F = 6.61903...$

Однако отображение (12) характеризуется двумя параметрами – λ и φ , поэтому на плоскости параметров можно наблюдать и трикритические точки. Как мы уже отмечали во введении, они являются для фейгенбаумовских линий «атрибутом» отображений, имеющих два квадратичных экстремума и более. В эти точки можно прийти также, наблюдая каскады удвоений вдоль линий, на которых максимум отображается точно в минимум [1]. Причина нефейгенбаумовского характера сходимости в этом случае состоит в том, что двукратно проитерированное отображение при таком условии имеет не квадратичный экстремум, а экстремум четвертой степени. Так, для отображения косинуса (12) при условии $\lambda = \pi - \varphi$ квадратичный максимум $X=0$ отображается точно в квадратичный минимум $X = \pi$. Таким образом, вдоль линии $\lambda = \pi - \varphi$ на плоскости параметров (λ, φ) должен наблюдаться нефейгенбаумовский каскад удвоений периода, накапливающийся к трикритической точке $\lambda_T = 2.18603861533...$, $\varphi_T = 0.9555540392...$ [9]. Рис. 3 представляет иллюстрацию скейлинга на графике бифуркационного дерева отображения (12) с характерными для трикритичности константами $\delta_T = 7.284686217...$ вдоль оси управляющего параметра и $\alpha_T = -1.6903029714...$ вдоль оси динамической переменной X . При переходе от одного уровня удвоений к другому величина ϵ уменьшается в $\mu_T = 8.2439...$ раз [13]. Итак, можно видеть, что скейлинг в системе с шумом хорошо выполняется, что свидетельствует об универсальности свойства скейлинга относительно конкретного вида отображения с перенормировкой уровня шума как для фейгенбаумовской, так и для трикритической динамики.

Отдельно стоит упомянуть о том, что были проведены исследования по чувствительности полученных результатов к различным видам шумового воздействия. Для этого был использован бинарный шум, шум с равномерным распределением и шум с гауссовым распределением. Как оказалось, во всех случаях свойство самоподобия выполняется, что говорит об универсальности свойства скейлинга и по отношению к виду шума. Для иллюстрации результатов данной работы для определенности было выбрано шумовое воздействие с равномерным распределением.

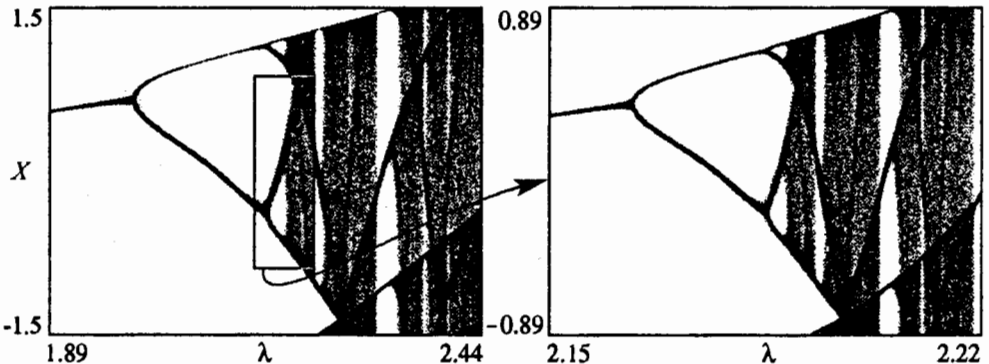


Рис. 3. «Трикритический» скейлинг на бифуркационном дереве отображения косинуса (12) в присутствии шума с исходной амплитудой 0.01

3. Двухпараметрический переход к хаосу и скейлинг

Перейдем теперь к двухпараметрическому анализу. Для систем без шума он предполагает либо анализ бифуркаций (построение бифуркационных линий на плоскости параметров), либо анализ карт динамических режимов. Для систем с шумом и тот и другой подходы невозможны. Поэтому используем построение карт показателя Ляпунова или «ляпуновских пространств» [14–17]. Для построения такой карты в каждой точке пространства параметров значение показателя Ляпунова Λ вычисляется и кодируется в соответствии с этим в градациях серого: значению Λ , близкому к нулю, ставится в соответствие белый цвет, а отрицательным значениям – оттенок тем более темный, чем больше Λ по модулю. Белым цветом обозначены также точки, в которых расходится итерационный процесс. Положительному показателю Ляпунова соответствует черный цвет. Семейство карт показателя Ляпунова отображения (12) при различных значениях ε показано на рис. 4. Пределы изменения φ лежат в границах от $\pi/2$ до π , параметра λ – от 1.5 до 3.5.

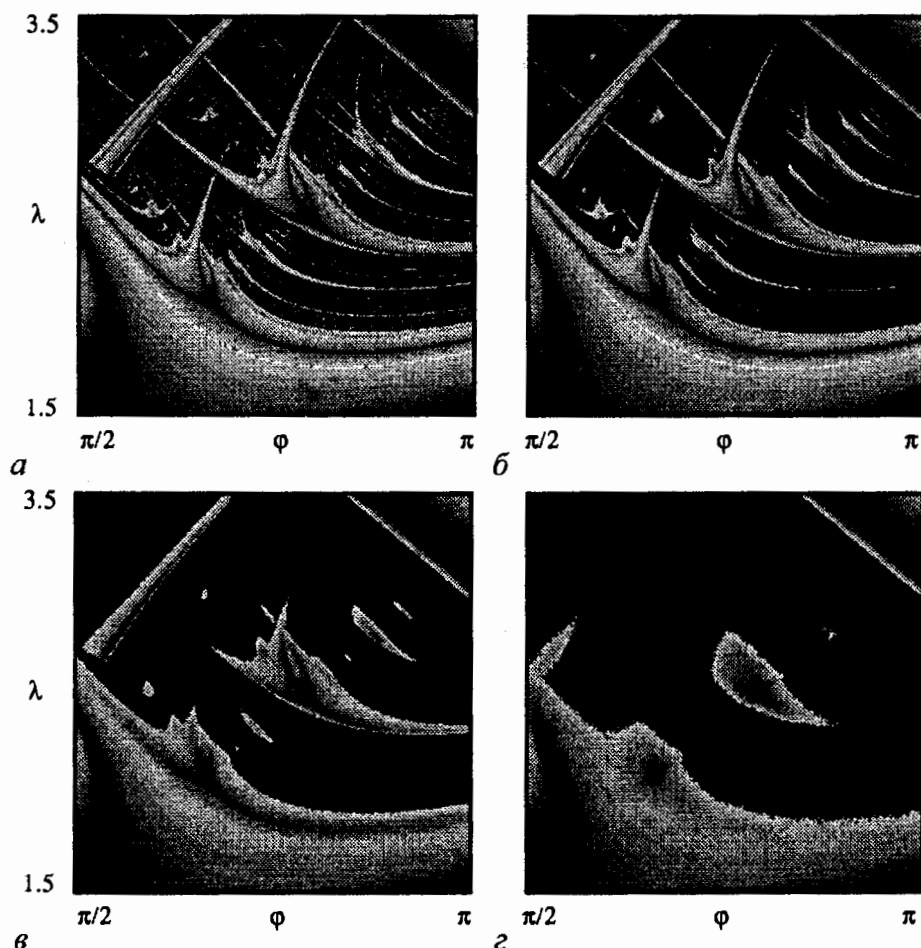


Рис. 4. Семейство карт ляпуновского показателя отображения (12) для различных значений амплитуды шума $\varepsilon = 0.005$ (а), 0.01 (б), 0.05 (в) и 0.2 (г)

Случаю достаточно малого шума ε (рис. 4, а) соответствует сравнительно четкая структура «ляпуновского пространства»: различаются границы между определенными значениями показателя Ляпунова; резко выделяются области с нулевым Λ ; в области хаоса хорошо видны участки, соответствующие периодическим режимам. Шум «средней» интенсивности приводит к исчезновению некоторых регулярных режимов в области хаоса, хотя и сохраняет вид карты в целом (рис. 4, б, в). При дальнейшем увеличении амплитуды шума наблюдается почти полное исчезновение регулярных режимов в области хаоса, структура карты размыта, на всей плоскости происходит увеличение значений показателя Ляпунова (рис. 4, г).

Представленные карты характеризуются тонкой и сложной организацией. Они содержат множество мелких (в отсутствие шума – сколь угодно мелких) деталей. Наиболее представительными в этом отношении являются трикритические точки, в окрестности которых плоскость параметров характеризуется иерархической организацией, подчиняющейся свойству самоподобия. Его иллюстрация требует, однако, введения на плоскости параметров специальной (скейлинговой) системы координат. Чтобы опираться на уже полученные ранее результаты, еще несколько упростим отображение (12). Для этого положим

$$X_n = \pi/2 + y_n - \varepsilon \xi_n. \quad (14)$$

В результате получим

$$y_{n+1} = -\lambda \sin y_n + \varphi - \pi/2 + \varepsilon \xi_n. \quad (15)$$

Разложим функцию синуса в ряд до кубического члена включительно и введем новую переменную и параметры в соответствии с соотношениями

$$X = y \sqrt{\lambda/6}, \quad a = (\varphi - \pi/2) \sqrt{\lambda/6}, \quad b = \lambda,$$

а амплитуду шума отнормируем на фактор $\sqrt{\lambda/6}$. Тогда приходим к отображению

$$X_{n+1} = a - bX_n + X_n^3 + \varepsilon \xi_n. \quad (16)$$

Ляпуновская карта этого отображения представлена слева на рис. 5. Можно видеть, что сделанные нами приближения несущественны с точки зрения вида карты. (Это же относится и к характеристикам трикритической динамики, поскольку она является «грубым» феноменом в системе с двумя квадратичными экстремумами. Переход же от отображения «косинуса» (12) к кубическому отображению (16) лишь несколько сдвигает координаты двух таких экстремумов.)

Иллюстрация свойства скейлинга на плоскости параметров для карты показателя Ляпунова отображения (16) приведена на рис. 5. На большом левом фрагменте по осям координат отложены параметры исходного отображения (a, b); выделенный параллелепипед, в центре которого располагается трикритическая точка, образован координатными линиями $C_1 = \pm 0.15$ и $C_2 = \pm 0.25$. Здесь (C_1, C_2) – специальные координаты, в которые необходимо перейти для наблюдения самоподобия. Связь между параметрами исходного отображения (a, b) и «скейлинговыми координатами» (C_1, C_2) определяется следующим образом [18, 19]:

$$a - a_T = 0.5998610C_1 - 0.2192807C_2, \quad b - b_T = C_1 + C_2. \quad (17)$$

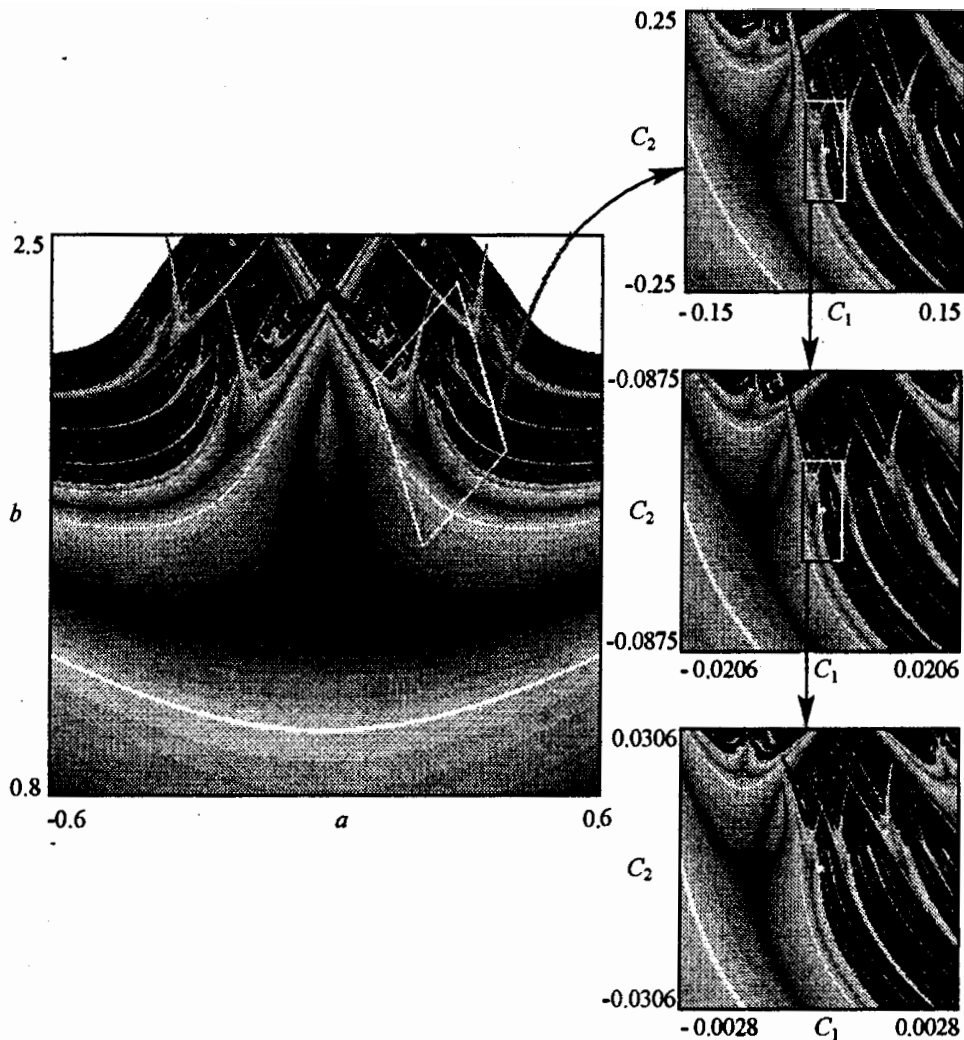


Рис. 5. Скейлинг отображения (16) на карте показателя Ляпунова в отсутствие шума

Попавшая внутрь упомянутого четырехугольника часть плоскости параметров показана отдельно на верхнем правом фрагменте уже в «скейлинговых координатах», а затем дважды воспроизведена с пересчетом масштаба по оси C_1 в δ_T раз, а по оси C_2 в α_T^2 раз относительно центра скейлинга – трикритической точки. Для наблюдения скейлинга при переходе от уровня к уровню значение показателя Ляпунова пересчитывалось в 2 раза по сравнению с предыдущим фрагментом, в соответствии с этим изменялась цветовая гамма.

Для наблюдения скейлинговых свойств кубического отображения с шумом (16) на карте показателя Ляпунова надо совершить тот же самый пересчет, как и в случае без шума, плюс ко всему необходимо уменьшать исходную амплитуду шума на каждом новом фрагменте по сравнению с предыдущим в $\mu_T = 8.2439\dots$ раз. Соответствующие иллюстрации для исходной интенсивности шума $\varepsilon = 0.02$ приведены на рис. 6. Видно, что каждый фрагмент с высокой точностью повторяет структуру предыдущего. Это и является иллюстрацией двухпараметрического скейлинга в системе с шумом.

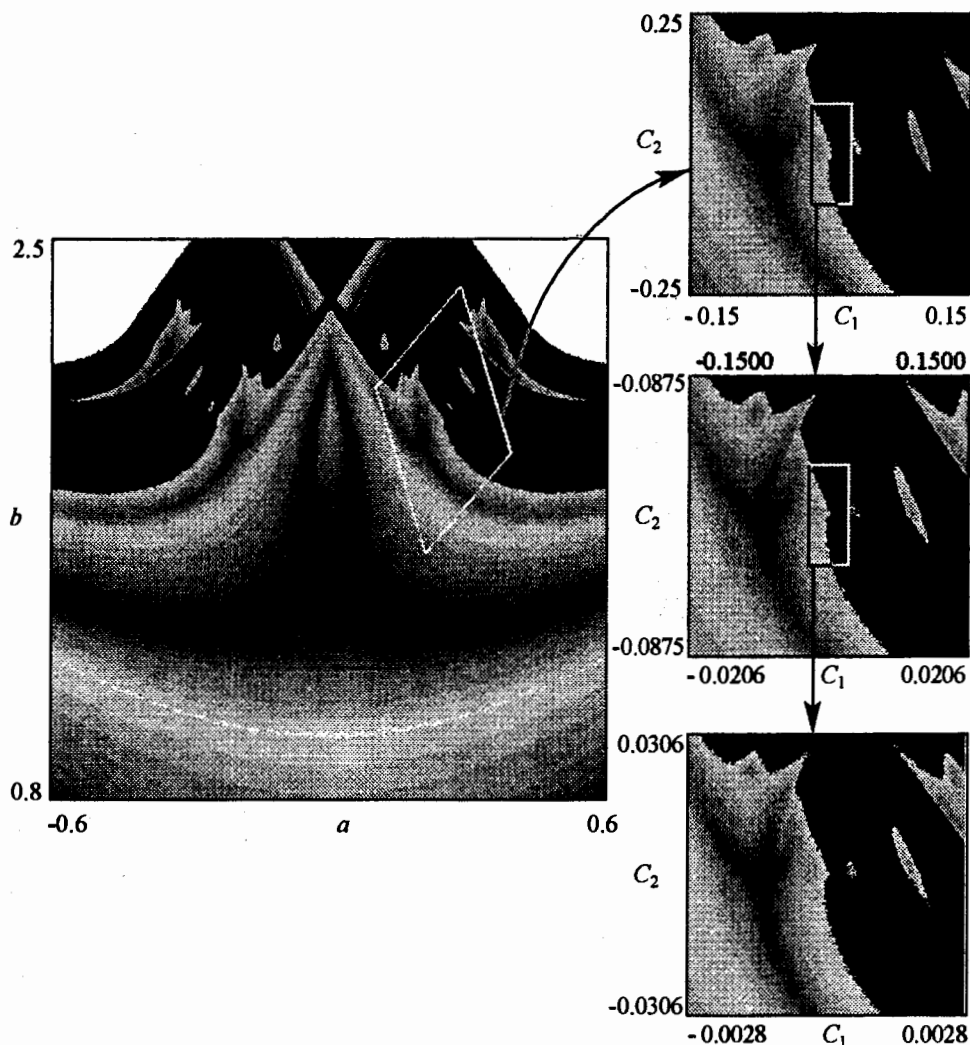


Рис. 6. Скейлинг кубического отображения (16) на карте показателя Ляпунова в присутствии шума с исходной интенсивностью $\varepsilon = 0.02$

Заключение

Таким образом, нелинейный осциллятор Дуффинга с импульсным возбуждением со случайно модулированной амплитудой или периодом следования импульсов является удобной моделью для изучения критических явлений при переходе порядок – хаос в системах с шумом. Полученные для этой системы отображения демонстрируют как однопараметрический скейлинг по Фейгенбауму, но с дополнительной константой шума $\mu_F = 6.61903\dots$, так и скейлинг на плоскости параметров (на карте показателей Ляпунова) с константой шума $\mu_T = 8.2439\dots$

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 06-02-16619), Фонда содействия отечественной науке, аналитической ведомственной программы Минобрнауки РФ и CRDF (CRDF BRHE REC-006 SR-006-X1/BF5M06 Y3-P-06-07) и гранта Президента РФ (МК-4162.2006.2).

1. Кузнецов С.П. Динамический хаос (курс лекций). 2-е изд., испр. и доп. М.: Физматлит, 2006. 356 с.
2. Crutchfield J.P., Nauenberg M., Rudnik J. Scaling for external noise at the onset of chaos // Phys. Rev. Lett. 1981. Vol. 46, № 14. P. 933.
3. Hirsch J.E., Nauenberg M., Scalapino D.J. Intermittency in the presence of noise: A renormalization group formulation // Phys. Lett. A. 1982. Vol. 87. P. 391.
4. Györgyi G., Tishby N. Scaling in stochastic Hamiltonian systems: A renormalization approach // Phys. Rev. Lett. 1987. Vol. 58, № 6. P. 527.
5. Hamm A., Graham R. Scaling for small random perturbations of golden critical circle maps // Phys. Rev. A. 1992. Vol. 46, № 10. P. 6323.
6. Kapustina J.V., Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Mosekilde E. Scaling properties of bicritical dynamics in unidirectionally coupled period-doubling systems in presence of noise // Phys. Rev. E. 2001. Vol. 64, 066207.
7. Isaeva O.B., Kuznetsov S.P., Osbaldestin A.H. Effect of noise on the dynamics of a complex map at the period-tripling accumulation point // Phys. Rev. E. 2004. Vol. 69, 036216.
8. Shraiman B., Wayne C.E., Martin P.C. Scaling theory for noisy period-doubling transitions to chaos // Phys. Rev. Lett. 1981. Vol. 46, №14. P. 935.
9. Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Turukina L.V., Mosekilde E. Two-parameter analysis of the scaling behavior at the onset of chaos: Tricritical and pseudo-tricritical points // Physica A. 2001. Vol. 300, № 3-4. P. 367.
10. Kuznetsov A.P., Turukina L.V., Mosekilde E. Dynamical systems of different classes as models of the kicked nonlinear oscillators // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 2001. Vol. 11, №4. P. 1065.
11. Кузнецов А.П., Тюрюкина Л.В. Динамические системы разных классов как модели нелинейного осциллятора с импульсным воздействием // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2000. Том 8, № 2. С. 31-42.
12. Carr Y., Eilbech Y.C. One-dimensional approximations for a quadratic Ikeda map // Phys. Lett. A. 1984. Vol. 104. P. 59.
13. Кузнецов А.П., Капустина Ю.В. Свойства скейлинга при переходе к хаосу в модельных отображениях с шумом // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2000. Том 8, № 6. С. 78.
14. Marcus M., Hess B. Lyapunov exponents of the logistic map with periodic forcing // Computers & Graphics. 1989. Vol. 13, № 4. P. 553.
15. Rössler J., Kiwi M., Hess B., Marcus M. Modulated nonlinear processes and a novel mechanism to induce chaos // Phys. Rev. A. 1989. Vol. 39, № 11. P. 5954.
16. Marcus M. Chaos in maps with continuous and discontinuous maxima // Computers in physics. 1990. September/October. P. 481.
17. Bastos de Figueireido J.C., Malta C.P. Lyapunov graph for two-parameter map: Application to the circle map // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 1998. Vol. 8, № 2. P. 281.

18. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R.* A variety of period-doubling universality classes in multi-parameter analysis of transition to chaos // *Physica D.* 1997. Vol. 109. P. 91.
19. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R.* Three-parameter scaling for one-dimensional maps // *Phys. Lett. A.* 1994. Vol. 189. P. 367.

*Саратовский филиал ИРЭ РАН
Саратовский государственный
университет*

*Поступила в редакцию 3.05.2006
После доработки 27.06.2006*

SCALING IN DYNAMICS OF DUFFING OSCILLATOR UNDER IMPULSES INFLUENCE WITH RANDOM MODULATION OF PARAMETERS

A.P. Kuznetsov, J.V. Sedova

In the work nonlinear Duffing oscillator is considered under impulse excitation with two ways of introduction of the random additive term simulating noise, - with help of amplitude modulation and modulation of period of impulses sequence. The scaling properties both in the Feigenbaum scenario and in the tricritical case are shown.

Кузнецов Александр Петрович – родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, профессор Саратовского государственного университета, заведующий базовой кафедрой динамических систем СГУ в СФ ИРЭ РАН. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений. Занимается использованием идей теории катастроф и теории бифуркаций, а также развитием концепции сценариев перехода к хаосу применительно к многопараметрическим модельным и физическим нелинейным системам. Соросовский профессор (2000, 2001), научный руководитель студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика» и заочной школы факультета нелинейных процессов. Опубликовал более 100 научных работ. Автор нескольких оригинальных учебных курсов для факультета нелинейных процессов и лицей прикладных наук СГУ, шести учебных пособий и монографии «Нелинейные колебания» (совместно с С.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным. М.: Физматлит, 2002). Член редколлегии журнала «Империя математики». E-mail: alkuz@sgu.ru; www.sgtnd.tserv.ru



Седова Юлия Викторовна – родилась в 1979 году. Окончила Саратовский государственный университет (2001). Кандидат физико-математических наук (СГУ, 2004), научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН. Научные интересы – влияние шума на динамические системы, дискретные отображения, связанные системы, динамический хаос. Автор 11 статей в отечественной и зарубежной печати.