

ПРОВЕРКА УСЛОВИЙ ГИПЕРБОЛИЧНОСТИ ХАОТИЧЕСКОГО АТТРАКТОРА В СИСТЕМЕ СВЯЗАННЫХ НЕАВТОНОМНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ ВАН ДЕР ПОЛЯ

С.П. Кузнецов, И.Р. Сатаев

Представлены методика и результаты численных расчетов по проверке условий гиперболичности хаотического аттрактора в отображении Пуанкаре для системы двух связанных неавтономных осцилляторов ван дер Поля (*Kuznetsov, Phys. Rev. Lett.*, **95**, 2005, 144101). При выбранных значениях параметров в четырехмерном фазовом пространстве отображения Пуанкаре указана область в форме тороида (топологически эквивалентная прямому произведению окружности и трехмерного шара), которая отображается внутрь себя и содержит анализируемый аттрактор. В этой области, согласно проведенным вычислениям, выполнены условия расположения расширяющихся и сжимающихся конусов в касательном пространстве (пространстве векторов возмущения состояний системы), гарантирующие гиперболичность. Представлены также численные результаты, иллюстрирующие некоторые атрибуты гиперболической динамики.

Введение

Математическая теория хаотической динамики, базирующаяся на строгом аксиоматическом фундаменте, использует концепцию гиперболичности [1-7].

О траектории в фазовом пространстве динамической системы говорят как о гиперболической, если имеются соседние траектории, приближающиеся к ней асимптотически по экспоненциальному закону, и траектории, таким же образом уходящие от нее. При этом произвольное малое возмущение исходной траектории должно допускать представление в виде линейной комбинации нарастающих и убывающих возмущений. В диссипативных системах, характеризующихся сжатием фазового объема, могут встречаться аттракторы, состоящие исключительно из гиперболических траекторий. Это странные аттракторы с сильными хаотическими свойствами, такими как перемешивание, существование хорошо определенной инвариантной меры (Синяя – Рюэля – Боуэна), наличие возможности описания в терминах марковских разбиений и символической динамики, обладание положительной топологической

и метрической энтропией и т.д. Такие гиперболические (как иногда акцентируют, *однородно* гиперболические) аттракторы характеризуются свойством грубости или структурной устойчивости, что означает нечувствительность характера динамики и структуры объектов в фазовом пространстве по отношению к вариации фигурирующих в уравнениях функций и параметров.

Хотя основные положения гиперболической теории сформулированы около 40 лет назад, до последнего времени не было введено в рассмотрение убедительных примеров физических систем с однородно гиперболическими аттракторами. В учебниках и монографиях по нелинейной динамике эти аттракторы представлены искусственными математическими конструкциями, такими как аттрактор Плыкина и соленоид Смейла – Вильямса [1-9].

Аттрактор Смейла – Вильямса имеет место в модельной диссипативной динамической системе, задаваемой отображением трехмерного фазового пространства в себя (рис.1). Рассмотрим трехмерную область в форме тора (*а*). Представляя его для наглядности как пластичный бублик, растянем его в длину, сожмем в поперечном направлении, сложим двойной петлей и вложим в исходный тор. Предполагается, что в ходе процедуры площадь поперечного сечения сокращается более чем в два раза, то есть общий объем бублика уменьшается (диссипативность). На рисунке (*б*) показано, как выглядит образ исходного тора после одной, а на рисунке (*в*) – после двух итераций отображения. На каждой итерации число витков удваивается. В пределе большого числа шагов итераций получается объект, имеющий бесконечное число витков – соленоид Смейла – Вильямса (*г*). В поперечном сечении он имеет структуру канторова множества.

В реалистичных системах, для которых присутствие хаоса можно считать математически обоснованным, например, в модели Лоренца [10,11], странные аттракторы не относятся к классу однородно гиперболических, к каковым были бы применимы без оговорок все исходные положения гиперболической теории. Некоторые аспекты возможного присутствия гиперболических аттракторов в системах, описываемых дифференциальными уравнениями, обсуждались в работах [12-15].

В недавней статье одного из авторов [16] была предложена идея реализации гиперболического аттрактора в системе двух связанных неавтономных осцилляторов ван дер Поля, которым отвечают характерные частоты колебаний, отличающиеся вдвое. Оба осциллятора становятся активными попеременно в силу принудительного периодического изменения во времени параметра, ответственного за бифуркацию

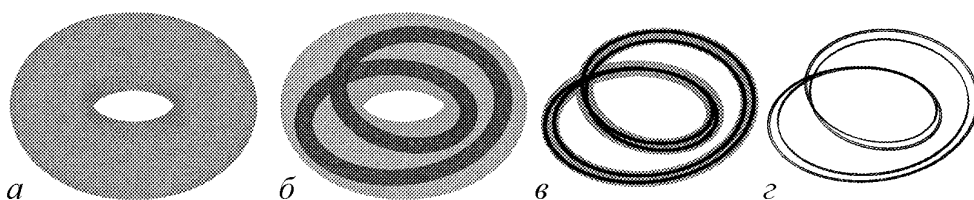


Рис. 1. Построение аттрактора Смейла – Вильямса: область в форме тора (*а*) растягивают в длину, складывают вдвое, сжимают в поперечном направлении и вкладывают внутрь исходного тора (*б*). На рис. (*в*) показано, как выглядит образ исходного тора после двух итераций отображения, а на рис. (*г*) представлен соленоид Смейла – Вильямса, получающийся в пределе большого числа шагов итераций

рождения предельного цикла, а возбуждение по очереди передается от одного осциллятора к другому. В четырехмерном отображении Пуанкаре, описывающем изменение состояния системы за период внешнего воздействия, обнаруживается хаотический аттрактор, относительно которого на основании ряда характерных признаков высказано предположение, что он принадлежит классу однородно гиперболических. По характеру трансформации фазового пространства в процессе эволюции во времени и по виду фазового портрета в сечении Пуанкаре этот аттрактор аналогичен аттрактору Смейла – Вильямса. Судя по результатам численных расчетов, он проявляет свойство грубости (структурной устойчивости), так что канторова поперечная структура аттрактора и положительный показатель Ляпунова оказываются нечувствительными по отношению к вариации параметров и функций, фигурирующих в уравнениях. Аналогичная система была реализована в виде радиотехнического устройства и исследована в эксперименте [17].

Очевидно, желательно иметь математическое подтверждение гиперболической природы аттрактора. Один из возможных путей обоснования гиперболичности аттрактора в отображении Пуанкаре обсуждался в свое время Синаем [1]. Его содержание состоит в том, чтобы в численных расчетах произвести проверку достаточных условий гиперболичности, подразумевающих определенное взаимное расположение расширяющихся и сжимающихся конусов в касательном пространстве (пространстве векторов малых возмущений), для принадлежащих аттрактору точек в сечении Пуанкаре. Настоящая статья имеет целью представить методику и результаты проверки упомянутых условий для аттрактора системы связанных неавтономных осцилляторов ван дер Поля.

1. Исследуемая система и механизм ее функционирования

Предложенная в работе [16] система описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (A \cos(2\pi t/T) - x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x &= \varepsilon y \cos \omega_0 t, \\ \ddot{y} - (-A \cos(2\pi t/T) - y^2)\dot{y} + 4\omega_0^2 y &= \varepsilon x^2 \end{aligned} \quad (1)$$

и состоит из двух подсистем – осцилляторов ван дер Поля с характерными частотами ω_0 и $2\omega_0$, соответственно. Для каждого осциллятора параметр, отвечающий за бифуркацию рождения предельного цикла в автономной подсистеме, медленно изменяется во времени принудительно с периодом T и амплитудой A , причем модуляция параметра осуществляется для двух осцилляторов в противофазе. В результате они возбуждаются по очереди, каждый на своей половине периода T . Связь между осцилляторами характеризуется параметром ε . Первый осциллятор воздействует на второй через квадратичный член в уравнении, а второй – на первый посредством члена в виде произведения динамической переменной и вспомогательного сигнала на частоте ω_0 . Предполагается, что период T содержит целое число периодов вспомогательного сигнала $N_0 = \omega_0 T / 2\pi$, так что внешнее воздействие на систему в целом периодическое. Для детального исследования был выбран набор параметров

$$\omega_0 = 2\pi, \quad T = 6, \quad A = 5, \quad \varepsilon = 0.5. \quad (2)$$

Качественно функционирование системы (1) как генератора хаоса можно пояснить следующим образом. Пусть колебания первого осциллятора на активной стадии имеют некоторую фазу ψ : $x \propto \sin(\omega_0 t + \psi)$. Квадратичный член x^2 содержит вторую гармонику: $\cos(2\omega_0 t + 2\psi)$ с фазой 2ψ . Когда полупериод заканчивается, начинает генерировать второй осциллятор, причем возбуждение он получает от первого осциллятора. Затравкой служит упомянутая вторая гармоника, так что возникающие колебания получают фазу 2ψ . Когда активная стадия второго осциллятора подходит к концу, он передает возбуждение обратно первому осциллятору, который как раз начинает генерировать. Затравкой является частотная составляющая, возникающая благодаря смещению колебаний переменной y со вспомогательным сигналом и имеющая фазу 2ψ . Таким образом, удвоенная фаза передается в исходный частотный диапазон, и на новой стадии возбуждения первый осциллятор унаследует фазу 2ψ . Очевидно, на последующих стадиях фаза в рассматриваемом приближении будет даваться отображением

$$\psi_{n+1} = 2\psi_n + \text{const} \pmod{2\pi}, \quad (3)$$

где константа добавлена для учета добавок к фазе, возникающих при эстафетной передаче возбуждения от одного осциллятора к другому. Соотношение (3) – отображение Бернулли, широко известное как одна из простейших моделей хаоса.¹

Для более аккуратного описания динамики системы (1) в дискретном времени следует обратиться к построению отображения Пуанкаре.

Введем обозначения $u = \dot{x}/\omega_0$, $v = \dot{y}/\omega_0$ и представим задачу в виде системы четырех уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \omega_0 u, \\ \dot{u} &= -\omega_0 x + (A \cos(2\pi t/T) - x^2)u + (\varepsilon/\omega_0)y \cos \omega_0 t, \\ \dot{y} &= 2\omega_0 v, \\ \dot{v} &= -2\omega_0 y + (-A \cos(2\pi t/T) - y^2)v + (\varepsilon/2\omega_0)x^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Пусть в момент времени $t_n = nT$ имеем некоторое состояние системы, заданное набором четырех переменных – вектором $\mathbf{x}_n = \{x(nT), u(nT), y(nT), v(nT)\}$. Решая уравнения (4) на интервале времени T с начальными условиями \mathbf{x}_n , получим новый вектор $\mathbf{x}_{n+1} = \{x((n+1)T), u((n+1)T), y((n+1)T), v((n+1)T)\}$, который однозначно определяется через исходный. Поэтому можно ввести соответствующую функцию, отображающую четырехмерное пространство $\{x, u, y, v\}$ в себя

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{T}(\mathbf{x}_n). \quad (5)$$

Это и есть отображение Пуанкаре. С геометрической точки зрения, в пятимерном расширенном фазовом пространстве исходной неавтономной системы $\{x, u, y, v, t\}$ имеем сечение потока траекторий четырехмерными гиперплоскостями $t = t_n = nT$,

¹Константу в уравнении (3) можно устранить сдвигом начала отсчета фазовой переменной.

где n – целое. В силу периодичности структуры фазового пространства по переменной t , эти гиперплоскости естественно отождествить и можно говорить об отображении гиперплоскости $\{x, u, y, v\}$ в себя.

Отображение \mathbf{T} определяется эволюцией, описываемой дифференциальными уравнениями с гладкими и ограниченными в конечной области переменных $\{x, u, y, v\}$ правыми частями. В соответствии с теоремами существования, единственности, непрерывности и дифференцируемости решения системы дифференциальных уравнений, отображение \mathbf{T} представляет собой диффеоморфизм – взаимно однозначное и взаимно дифференцируемое отображение (класса C^∞) [18].

На основе описанной конструкции, составляющей содержание вполне стандартного подхода к анализу неавтономных систем [19, 20, 8, 9], будем теперь рассматривать динамику в дискретном времени, что сводится к итерациям отображения (5). В дальнейшем, если специально не оговорено, будет всегда иметься в виду именно такая трактовка. В частности, под фазовым пространством будем иметь в виду четырехмерную гиперплоскость $\{x, u, y, v\}$, где величины x, u, y, v относятся к моменту t_n . Под фазовой траекторией подразумеваем дискретную последовательность точек в этом пространстве, занумерованных индексом n . Под аттрактором – инвариантное притягивающее множество в фазовом пространстве $\{x, u, y, v\}$ и т.д.

2. Выбор системы координат. Поглощающая область

В процессе итераций отображения $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{T}(\mathbf{x}_n)$ в четырехмерном пространстве состояний имеет место растяжение в направлении, которое связано с фигурирующей в приближенном уравнении (3) фазой, и сжатие по трем остальным направлениям. Интерпретируя действие отображения Пуанкаре геометрически, с учетом цикличности по фазовой переменной мы можем вообразить вложенный в четырехмерное пространство тороид² и связать одну итерацию отображения с продольным растяжением и поперечным сжатием этого объекта, вкладываемого затем в виде двойной петли внутрь исходной области. Это точно соответствует конструкции Смейла – Вильямса с той лишь разницей, что в данном случае имеем дело с четырехмерным, а не трехмерным отображением.

Упомянутый тороид со своей внутренней частью есть поглощающая область, которую обозначим U . Это значит, что при действии отображения \mathbf{T} образы точек данной области должны принадлежать внутренности U : $\mathbf{T}(U) \subset \text{Int } U$. Собственно аттрактор можно определить как пересечение образов исходной области, получаемых при многократном применении отображения: $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathbf{T}^n(U)$.

Чтобы в проводимых численных расчетах задать область U конкретным аналитическим соотношением, удобно переопределить систему координат в фазовом пространстве. Эта новая система координат будет также использована в дальнейших рассуждениях и расчетах по проверке условий гиперболичности.

Введем новые переменные $\{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ так, чтобы они выражались через

²Имеется в виду область, топологически соответствующая прямому произведению одномерной окружности и трехмерного шара.

старые координаты в следующем виде:

$$\begin{aligned}
x_0 &= x/r_0, \\
x_1 &= (u - c_{ux}x)/r_1, \\
x_2 &= y - c_{yx}x - c_{yu}u, \\
x_3 &= v - c_{vx}x - c_{vu}u - c_{vy}y,
\end{aligned} \tag{6}$$

где c_{ux} , c_{yx} , c_{yu} , c_{vx} , c_{vu} , c_{vy} , r_0 , r_1 – некоторые константы. Для конкретных параметров системы $\omega_0=2\pi$, $T=6$, $A=5$, $\varepsilon=0.5$, при которых проводились численные расчеты, они выбраны следующим образом³:

$$\begin{aligned}
c_{ux} &= 0.438, \quad c_{yx} = -0.042, \quad c_{yu} = 0.226, \\
c_{vx} &= -0.218, \quad c_{vu} = 0.029, \quad c_{vy} = -0.118, \\
r_0 &= 0.812, \quad r_1 = 0.721.
\end{aligned} \tag{7}$$

В новых координатах запишем соотношение, задающее тороидальную поглощающую область U , в виде

$$\left[\left(\sqrt{x_0^2 + x_1^2} - r \right) / d_r \right]^2 + (x_2/d)^2 + (x_3/d)^2 \leq 1. \tag{8}$$

Подобранные эмпирически значения фигурирующих здесь констант таковы:

$$r = 0.94, \quad d_r = 0.4, \quad d = 0.15. \tag{9}$$

На рис. 2 приводится диаграмма, позволяющая наглядно убедиться, что область U в самом деле является поглощающей. Для начальных точек на границе области U (то есть точек, для которых соотношение (8) обращается в равенство) точки-образы, найденные посредством численного решения системы дифференциальных уравнений на интервале времени T , представлены на графике в координатах

$$R_1 = \left(\sqrt{x_0^2 + x_1^2} - r \right) / d_r, \quad R_2 = \sqrt{(x_2/d)^2 + (x_3/d)^2}. \tag{10}$$

Они образуют на диаграмме фигуру, располагающуюся целиком внутри единичной окружности $R_1^2 + R_2^2 = 1$, что свидетельствует о попадании точек-образов внутрь области U . (Как проверено, то же самое относится к образам точек, расположенных не на границе, а внутри исходного тороида.)

На рис. 3 в технике трехмерной графики показано, как вложена область-образ $T(U)$ в исходный тороид U . Эта трехмерная проекция четырехмерных объектов дает

³Для подбора коэффициентов была использована такая процедура. Сначала посредством численного решения уравнений при $T=6$, $A=5$, $\varepsilon=0.5$ накапливалось достаточно большое количество точек $\{x, u, y, v\}$ на аттракторе в сечении Пуанкаре. Далее методом наименьших квадратов определялись величины c_{ux} , c_{yx} , c_{yu} , c_{vx} , c_{vu} , c_{vy} так, чтобы минимизировать среднеквадратичные значения $\langle (u - c_{ux}x)^2 \rangle$, $\langle (y - c_{yx}x - c_{yu}u)^2 \rangle$, $\langle (v - c_{vx}x - c_{vu}u - c_{vy}y)^2 \rangle$. Геометрически это соответствует тому, что в качестве новых осей координат берутся главные оси эллипсоида, наилучшим образом аппроксимирующего аттрактор. Кроме того, вводится нормировка для первых двух переменных x_0 и x_1 на факторы r_0 и r_1 , подобранные так, чтобы $\langle x_0^2 \rangle = \langle x_1^2 \rangle = 1/2$.

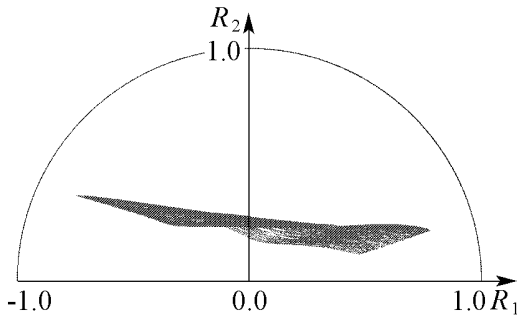


Рис. 2. Графическая иллюстрация к утверждению, что область U , определенная соотношением (8), является поглощающей. Для начальных точек, распределенных по границе области U , точки-образы, полученные из численного решения дифференциальных уравнений на интервале времени T и представленные в координатах (10), попадают внутрь единичной окружности

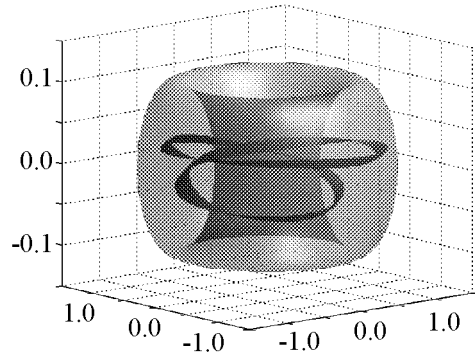


Рис. 3. Поглощающая область в форме тороида и ее образ под действием отображения Пуанкаре T , представленные в виде трехмерной проекции. По осям координат в горизонтальной плоскости отложены величины x_0, x_1 , а по вертикальной оси x_2 . Четвертая переменная x_3 отвечает направлению проецирования

представление о взаимном расположении областей U и $T(U)$. Вдоль осей координат отложены величины x_0, x_1 в горизонтальной плоскости и x_2 по вертикальной оси. Четвертая переменная x_3 отвечает направлению проецирования. Характер вложения области-образа внутрь исходного тороида в точности отвечает ситуации на первом шаге построения аттрактора Смейла – Вильямса. Область $T(U)$ выглядит как узкая лента из-за сильного сжатия фазового объема в соответствующем направлении в процессе эволюции за период.

Интересно задаться вопросом, как именно в потоковой системе осуществляется трансформация, приводящая за период воздействия к вложению образа внутрь исходной тороидальной поглощающей области. Это иллюстрируется полученной в численных расчетах серией диаграмм на рис. 4. Каждая картинка показывает трехмерную проекцию четырехмерного объекта в пространство переменных $\{x_0, x_1, x_2\}$ вдоль оси четвертой переменной x_3 . Первая диаграмма (а) отвечает начальному моменту времени $t=0$ и изображает исходную область в виде тороида. Далее этот тороид сильно сжимается по поперечным направлениям (б), а затем испытывает относительное растяжение в продольном направлении и деформируется так, что образуется двойная петля (в, г). На последней стадии эта петля растягивается и в итоге оказывается вложенной в исходную область (д,е). Это, в сущности, воспроизводит ту последовательность непрерывных деформаций пластичного бублика в трехмерном пространстве, посредством которой дается популярное описание одного шага в процедуре построения аттрактора Смейла – Вильямса.⁴

⁴Следует особо подчеркнуть, что фазовая переменная ψ , относящаяся к колебаниям первого осциллятора на стадии генерации, не может быть определена на всем периоде T глобально. Это хорошо видно из рис. 4: проекция объекта в процессе его трансформации на плоскость переменных, относящихся к первому осциллятору (x_0, x_1) или (x, u), неизбежно пересекает начало координат. Определение фазы, предполагающее эволюцию в соответствии с приближенным отображением (3), имеет смысл для начального и конечного состояний, отвечающих сечению Пуанкаре.

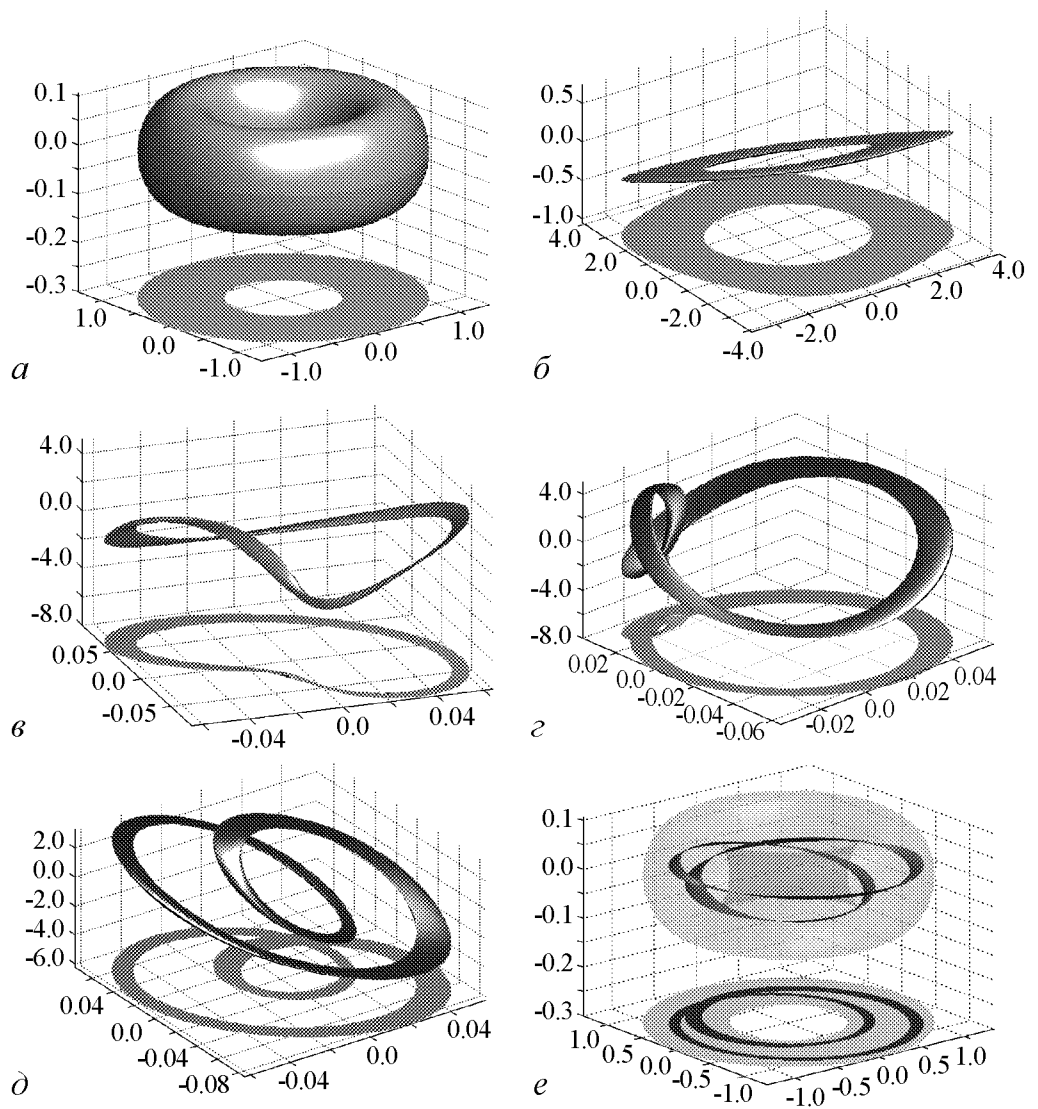


Рис. 4. Трансформация образа исходной поглощающей области (а) в процессе эволюции за период воздействия T . Каждая картинка представляет собой трехмерную проекцию четырехмерного объекта в пространство переменных $\{x_0, x_1, x_2\}$ вдоль оси четвертой переменной x_3 . Масштаб по осям координат на диаграммах существенно различается

3. Достаточные условия гиперболичности и методика их проверки

В основу проверки гиперболичности аттрактора положим известную теорему [1,14], которую адаптируем к рассматриваемой конкретной задаче.

В отличие от даваемой в литературе общей формулировки, нам достаточно говорить о диффеоморфизме класса C^∞ в четырехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4 \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$. В качестве такого будет фигурировать отображение Пуанкаре $\mathbf{T}(\mathbf{x})$. Заметим, что при введении малого возмущения исходного состояния $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \delta\mathbf{x}$ преобразование вектора возмущения в линейном приближении при действии отображения $\mathbf{x}' = \mathbf{T}(\mathbf{x})$ дается соотношением

$$\delta\mathbf{x}' = \mathbf{DT}_\mathbf{x}\delta\mathbf{x}, \quad (11)$$

где \mathbf{DT}_x – матрица Якоби, вычисленная в точке \mathbf{x} ,

$$\mathbf{DT}_x = \{\partial x'_i / \partial x_j\}, \quad i, j = 0, 1, 2, 3. \quad (12)$$

Обозначение \mathbf{DT}_x^{-1} будет отвечать матрице производных обратного отображения $\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{x})$.

Теорема [1,14]. Пусть A есть подмножество пространства \mathbb{R}^4 , инвариантное по отношению к действию диффеоморфизма \mathbf{T} класса C^∞ , отображающего ограниченную область $U \subset \mathbb{R}^4$ в себя, причем $A \subset \text{Int } U$. Множество A будет однородно гиперболическим, если существует некоторая константа $\gamma > 1$ и выполнены следующие условия:

1. Для каждой точки $\mathbf{x} \in A$ в пространстве \mathbb{V}_x четырехмерных векторов $d\mathbf{x}$ определены расширяющийся и сжимающийся конусы, соответственно, S_x^γ и C_x^γ такие, что $\|\mathbf{DT}_x \mathbf{u}\| \geq \gamma \|\mathbf{u}\|$ для всех $\mathbf{u} \in S_x^\gamma$, и $\|\mathbf{DT}_x^{-1} \mathbf{v}\| \geq \gamma \|\mathbf{v}\|$ для всех $\mathbf{v} \in C_x^\gamma$, причем для всех $\mathbf{x} \in A$ выполнено $S_x^\gamma \cap C_x^\gamma = \emptyset$ и $S_x^\gamma + C_x^\gamma = \mathbb{V}_x$.

2. Конусы S_x^γ инвариантны по отношению к действию \mathbf{DT} , а C_x^γ – по отношению к действию обратного отображения \mathbf{DT}^{-1} , то есть для всех $\mathbf{x} \in A$ $\mathbf{DT}_x(S_x^\gamma) \subset S_{\mathbf{T}(\mathbf{x})}^\gamma$ и $\mathbf{DT}_x^{-1}(C_x^\gamma) \subset C_{\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{x})}^\gamma$.

Заметим, что, если указанные условия имеют место для всех точек в содержащей аттрактор A поглощающей области, например, U или $\mathbf{T}^n(U)$, то они, естественно, выполняются и для аттрактора

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathbf{T}^n(U).$$

На рис. 5 иллюстрируется графически смысл требуемого условия вложения для расширяющихся конусов S . Рассмотрим содержание процедуры проверки этого условия в численных расчетах.

Задавшись начальной точкой

$$\mathbf{x} = \{x_0, x_1, x_2, x_3\} \subset U, \quad (13)$$

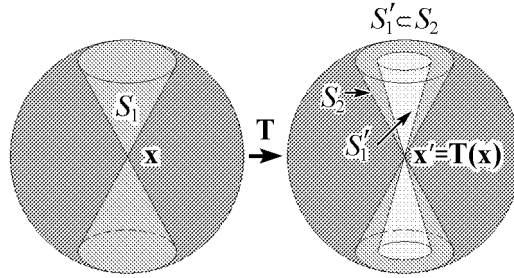


Рис. 5. К пояснению смысла условия для расширяющихся конусов S . Чтобы не загромождать рисунок, использована упрощенная версия обозначений: $S_1 = S_x^\gamma$, $S_1' = \mathbf{DT}_x S_x^\gamma$, $S_2 = S_{\mathbf{T}(\mathbf{x})}^\gamma$

выполним на интервале от $t=0$ до $t=T$ численное решение уравнений (4) с начальными условиями

$$\begin{aligned} x|_{t=0} &= r_0 x_0, \quad u|_{t=0} = r_1 x_1 + c_{ux} x, \quad y|_{t=0} = x_2 + c_{yx} x + c_{yu} u, \\ v|_{t=0} &= x_3 + c_{vx} x + c_{vu} u + c_{vy} y. \end{aligned} \quad (14)$$

Результатом будет точка-образ

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathbf{T}(\mathbf{x}) = \{x'_0, x'_1, x'_2, x'_3\} = \\ &= \{x'/r_0, (u' - c_{ux} x')/r_1, y' - c_{yx} x' - c_{yu} u', v - c_{vx} x' - c_{vu} u' - c_{vy} y'\}, \end{aligned} \quad (15)$$

где штрихом отмечены величины, относящиеся к моменту $t=T$.

Параллельно проводим решение уравнений в вариациях, описывающих эволюцию векторов малых возмущений в линейном приближении за тот же период. Эти уравнения, записанные в исходных координатах, имеют вид

$$\begin{aligned}
\delta\dot{x} &= \omega_0\delta u, \\
\delta\dot{u} &= -\omega_0\delta x - 2xu\delta x + (A\cos(2\pi t/T) - x^2)\delta u + (\varepsilon/\omega_0)\delta y \cos \omega_0 t, \\
\delta\dot{y} &= 2\omega_0\delta v, \\
\delta\dot{v} &= -2\omega_0\delta y - 2yv\delta y + (-A\cos(2\pi t/T) - y^2)\delta v + (\varepsilon/\omega_0)x\delta x.
\end{aligned} \tag{16}$$

Пересчет к новым координатам и обратно производится посредством соотношений

$$\begin{aligned}
\delta x_0 &= \delta x/r_0, \\
\delta x_1 &= (\delta u - c_{ux}\delta x)/r_1, \\
\delta x_2 &= \delta y - c_{yx}\delta x - c_{yu}\delta u, \\
\delta x_3 &= \delta v - c_{vx}\delta x - c_{vu}\delta u - c_{vy}\delta y
\end{aligned} \tag{17}$$

и

$$\begin{aligned}
\delta x &= r_0\delta x_0, \\
\delta u &= r_1\delta x_1 + c_{ux}r_0\delta x_0, \\
\delta y &= \delta x_2 + (c_{yx} + c_{yu}c_{ux})r_0\delta x_0 + c_{yu}r_1\delta x_1, \\
\delta v &= \delta x_3 + (c_{vx} + c_{vu}c_{ux} + c_{vy}c_{yx} + c_{vy}c_{yu}c_{ux})r_0\delta x_0 + \\
&\quad + (c_{vu} + c_{vy}c_{yu})r_1\delta x_1 + c_{vy}\delta x_2.
\end{aligned} \tag{18}$$

Уравнения в вариациях решаем вдоль траектории, стартующей из точки \mathbf{x} , четыре раза, причем начальные условия для векторов $\mathbf{u} = \{\delta x_i\}$ таковы, что единичный элемент последовательно располагается в строке с номером от 0 до 3, а остальные элементы нулевые. В результате получаем четыре вектора-столбца, из которых составляем матрицу $\mathbf{U} = \mathbf{D}\mathbf{T}_{\mathbf{x}}$.

При старте из точки \mathbf{x} начальный вектор возмущения \mathbf{u} трансформируется через время T в вектор $\mathbf{u}' = \mathbf{U}\mathbf{u}$. Квадрат евклидовой нормы этого вектора представляется в виде $\|\mathbf{u}'\|^2 = \mathbf{u}^T \mathbf{U}^T \mathbf{U} \mathbf{u}$, где индекс T означает транспонирование. Используя обратную матрицу \mathbf{U}^{-1} , можно записать $\mathbf{u} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{u}'$ и $\|\mathbf{u}\|^2 = \mathbf{u}'^T \mathbf{U}^{-1,T} \mathbf{U}^{-1} \mathbf{u}'$. Условие того, что вектор \mathbf{u}' есть образ вектора, принадлежащего определенному в точке \mathbf{x} конусу $S_{\mathbf{x}}^\gamma$, отвечающему расширению на фактор больше γ , представляется неравенством $\|\mathbf{u}'\| > \gamma \|\mathbf{u}\|$ или

$$\mathbf{u}'^T (\mathbf{U}^{-1,T} \mathbf{U}^{-1} - \gamma^{-2}) \mathbf{u}' < 0. \tag{19}$$

При старте из точки $\mathbf{x}' = \mathbf{T}(\mathbf{x}) = \{x'_0, x'_1, x'_2, x'_3\}$ начальный вектор возмущения \mathbf{u}' трансформируется через время T в вектор $\mathbf{u}'' = \mathbf{U}'\mathbf{u}'$, причем $\|\mathbf{u}''\|^2 = \mathbf{u}'^T \mathbf{U}'^T \mathbf{U}' \mathbf{u}'$. Расширяющийся конус $S_{\mathbf{T}(\mathbf{x})}^\gamma$ в точке $\mathbf{x}' = \mathbf{T}(\mathbf{x})$ определяется условием $\|\mathbf{u}''\| > \gamma \|\mathbf{u}'\|$ или

$$\mathbf{u}'^T (\mathbf{U}'^T \mathbf{U}' - \gamma^2) \mathbf{u}' > 0. \tag{20}$$

Для любой точки поглощающей области симметричная положительно определенная матрица $\mathbf{U}^T\mathbf{U}$ будет иметь четыре ортогональных собственных вектора. Соответствующие им четыре положительных собственных числа будем считать расположенными в порядке убывания. Из линейной алгебры известно, что собственные числа матрицы $\mathbf{U}^T\mathbf{U}$ отвечают квадратам длин полуосей эллипсоида, в который переходит при действии матрицы \mathbf{U} единичный шар. В нашем случае, как показывают расчеты (см. следующий раздел), $\Lambda_0^2 > 1$ и $\Lambda_{1,2,3}^2 < 1$, то есть имеется растяжение по одному и сжатие по трем локально определенным направлениям в четырехмерном пространстве. Будем полагать параметр γ выбранным так, что во всей поглощающей области $\Lambda_0^2 > \gamma^2$ и $\Lambda_{1,2,3}^2 < \gamma^2$.⁵

Используем представление, в котором матрица $\mathbf{U}'^T\mathbf{U}'$, соответствующая точке $\mathbf{x}' = \mathbf{T}(\mathbf{x})$, приводится к диагональной форме. Пусть $\mathbf{d}_0, \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3$ собственные векторы этой матрицы, образующие ортонормированный базис. Матрица $\mathbf{D} = (\mathbf{d}_0, \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3)$ осуществляет требуемое преобразование

$$\mathbf{D}^T\mathbf{U}'^T\mathbf{U}'\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \Lambda_0^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda_3^2 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

В силу неравенств, выполнение которых предполагается, в матрице

$$\mathbf{D}^T(\mathbf{U}'^T\mathbf{U}' - \gamma^2)\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \Lambda_0^2 - \gamma^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_1^2 - \gamma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_2^2 - \gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda_3^2 - \gamma^2 \end{pmatrix} \quad (22)$$

по диагонали стоит одно положительное число и три отрицательных. Дополнительным преобразованием растяжения (сжатия) по осям координат

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\Lambda_0^2 - \gamma^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\gamma^2 - \Lambda_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{\gamma^2 - \Lambda_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{\gamma^2 - \Lambda_3^2} \end{pmatrix} \quad (23)$$

ее можно привести к канонической форме

$$\mathbf{S}^T\mathbf{D}^T(\mathbf{U}'^T\mathbf{U}' - \gamma^2)\mathbf{D}\mathbf{S} = \mathbf{H}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

⁵Эти условия естественным образом проверяются в ходе численных расчетов, поскольку их нарушение влекло бы некорректную операцию извлечения квадратного корня из отрицательного числа. Указанные неравенства на собственные числа матрицы $\mathbf{U}^T\mathbf{U} = (\mathbf{D}\mathbf{T}_{\mathbf{x}})^T\mathbf{D}\mathbf{T}_{\mathbf{x}}$ обеспечивают выполнение фигурирующего в формулировке теоремы условия, что сумма подмножеств линейного векторного пространства, то есть множество, состоящее из всевозможных линейных комбинаций векторов, отвечающих расширяющемуся и сжимающемуся конусам, есть полное четырехмерное векторное пространство, $S_{\mathbf{x}}^y + C_{\mathbf{x}}^y = \mathbb{V}_{\mathbf{x}}$.

Подвергнув таким же преобразованиям матрицу $\mathbf{U}^{-1, \mathbf{T}} \mathbf{U}^{-1} - \gamma^{-2}$, будем иметь

$$\mathbf{S}^T \mathbf{D}^T (\mathbf{U}^{-1, \mathbf{T}} \mathbf{U}^{-1} - \gamma^{-2}) \mathbf{D} \mathbf{S} = \mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_{00} & h_{01} & h_{02} & h_{03} \\ h_{10} & h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{20} & h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{30} & h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Подчеркнем, что полученная матрица симметричная: $h_{ij} = h_{ji}$.

Условие попадания некоторого вектора $\mathbf{c} = \{1, c_1, c_2, c_3\}$ в расширяющийся конус, определенный в точке $\mathbf{x}' = \mathbf{T}(\mathbf{x})$, таково:

$$\mathbf{c}^T \mathbf{H}' \mathbf{c} > 0, \quad \text{то есть} \quad c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 < 1. \quad (26)$$

В трехмерном пространстве $\{c_1, c_2, c_3\}$ это отвечает внутренности единичного шара.

Далее, условие, что вектор $\mathbf{c} = \{1, c_1, c_2, c_3\}$ есть образ вектора, принадлежащего определенному в точке \mathbf{x} расширяющемуся конусу, имеет вид

$$\mathbf{c}^T \mathbf{H} \mathbf{c} < 0 \quad (27)$$

или

$$\begin{aligned} & h_{00} + h_{01}c_1 + h_{02}c_2 + h_{03}c_3 + h_{10}c_1 + h_{11}c_1^2 + h_{12}c_1c_2 + h_{13}c_1c_3 + h_{20}c_2 \\ & + h_{21}c_1c_2 + h_{22}c_2^2 + h_{23}c_2c_3 + h_{30}c_3 + h_{31}c_1c_3 + h_{32}c_2c_3 + h_{33}c_3^2 < 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Это соотношение определяет внутренность некоторого эллипсоида в пространстве $\{c_1, c_2, c_3\}$. Условие $\mathbf{D} \mathbf{T}_{\mathbf{x}}(S_{\mathbf{x}}^{\gamma}) \subset S_{\mathbf{T}(\mathbf{x})}^{\gamma}$ будет выполнено, если эллипсоид полностью располагается внутри единичного шара. Сформулируем неравенство, проверка которого достаточна для установления такого взаимного расположения областей.

Сначала для определения центра эллипсоида решаем систему уравнений

$$\begin{aligned} h_{11}\bar{c}_1 + h_{12}\bar{c}_2 + h_{13}\bar{c}_3 &= -h_{10}, \\ h_{21}\bar{c}_1 + h_{22}\bar{c}_2 + h_{23}\bar{c}_3 &= -h_{20}, \\ h_{31}\bar{c}_1 + h_{32}\bar{c}_2 + h_{33}\bar{c}_3 &= -h_{30} \end{aligned} \quad (29)$$

(напомним, что $h_{ij} = h_{ji}$) и находим отклонение центра эллипсоида от центра единичного шара

$$\rho = \sqrt{\bar{c}_1^2 + \bar{c}_2^2 + \bar{c}_3^2}. \quad (30)$$

При переносе начала координат в центр эллипсоида уравнение его поверхности будет выглядеть как

$$h_{11}\tilde{c}_1^2 + h_{12}\tilde{c}_1\tilde{c}_2 + h_{13}\tilde{c}_1\tilde{c}_3 + h_{21}\tilde{c}_1\tilde{c}_2 + h_{22}\tilde{c}_2^2 + h_{23}\tilde{c}_2\tilde{c}_3 + h_{31}\tilde{c}_1\tilde{c}_3 + h_{32}\tilde{c}_2\tilde{c}_3 + h_{33}\tilde{c}_3^2 = R^2, \quad (31)$$

где $\tilde{c}_i = c_i - \bar{c}_i$, и

$$\begin{aligned} R^2 &= -(h_{00} + h_{01}\bar{c}_1 + h_{02}\bar{c}_2 + h_{03}\bar{c}_3 + h_{10}\bar{c}_1 + h_{11}\bar{c}_1^2 + h_{12}\bar{c}_1\bar{c}_2 + h_{13}\bar{c}_1\bar{c}_3 + \\ & + h_{20}\bar{c}_2 + h_{21}\bar{c}_1\bar{c}_2 + h_{22}\bar{c}_2^2 + h_{23}\bar{c}_2\bar{c}_3 + h_{30}\bar{c}_3 + h_{31}\bar{c}_1\bar{c}_3 + h_{32}\bar{c}_2\bar{c}_3 + h_{33}\bar{c}_3^2). \end{aligned} \quad (32)$$

Теперь рассмотрим симметричную матрицу 3×3

$$\mathbf{h} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix}. \quad (33)$$

В диагональном представлении, которое получается при соответствующем ортогональном преобразовании координат $(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3) \rightarrow (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, уравнение поверхности эллипсоида принимает вид

$$l_1 \xi_1^2 + l_2 \xi_2^2 + l_3 \xi_3^2 = R^2, \quad (34)$$

где l_1, l_2, l_3 – собственные значения матрицы \mathbf{h} . Наибольшая из главных полуосей этого эллипсоида выражается тогда через наименьшее собственное значение

$$r_{\max} = R/\sqrt{l_{\min}}. \quad (35)$$

Очевидно, достаточным условием попадания эллипсоида полностью внутрь шара служит неравенство

$$r_{\max} + \rho < 1. \quad (36)$$

На этом завершается проверка достаточного условия для расширяющихся конусов в точке \mathbf{x} .

Как можно показать, при выборе параметра $\gamma < 1$ та же самая процедура, выполняемая в точках поглощающей области U , эквивалентна проверке условия для сжимающихся конусов с параметром $\gamma' = 1/\gamma > 1$: $\mathbf{DT}_{\mathbf{x}}^{-1}(C_{\mathbf{x}}^{1/\gamma}) \subset C_{\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{x})}^{1/\gamma}$ в области $\mathbf{x} \in \mathbf{T}^2(U)$. Это связано с тем, что конусы S^γ и $C^{1/\gamma}$ являются друг для друга дополнениями, то есть $\bar{S}^\gamma \cup \bar{C}^{1/\gamma} = \mathbb{V}$. Здесь S^γ отвечает конусу векторов, которые при действии отображения по норме растягиваются, либо сжимаются, но не более чем на фактор γ .

На рис. 6 схематически представлены конусы S^γ и $C^{1/\gamma}$, отвечающие трем последовательным точкам, которые получаются при действии отображения \mathbf{T} : $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' = \mathbf{T}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{x}'' = \mathbf{T}^2(\mathbf{x})$.

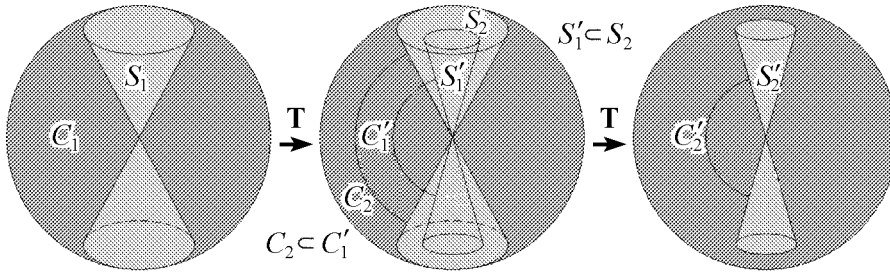


Рис. 6. Иллюстрация взаимного расположения конусов S^γ и $C^{1/\gamma}$. В надписях использованы обозначения: $S_1 = S_{\mathbf{x}}^\gamma$, $S_1' = \mathbf{DT}_{\mathbf{x}} S_{\mathbf{x}}^\gamma$, $S_2 = S_{\mathbf{T}(\mathbf{x})}^\gamma$, $C_1' = C_{\mathbf{T}(\mathbf{x})}^{1/\gamma}$, $C_2 = \mathbf{DT}_{\mathbf{T}(\mathbf{x})}^{-1} C_{\mathbf{T}^2(\mathbf{x})}^{1/\gamma}$, $C_2' = C_{\mathbf{T}^2(\mathbf{x})}^{1/\gamma}$.

Обратившись к табл. 1, в которую сведены определения конусов и условия вложения, можно видеть, что все соотношения во второй строке вытекают из соотношений в первой строке. (Для векторов возмущения, принадлежащих конусам S^γ и $C^{1/\gamma}$, используем обозначения \mathbf{u} и \mathbf{v} , соответственно.)

Таблица 1

$S'_1 = \mathbf{T}(S_1), \quad \ \mathbf{u}'_1\ > \gamma \ \mathbf{u}_1\ $	$S'_1 \subset S_2$	$S'_2 = \mathbf{T}(S_2), \quad \ \mathbf{u}'_2\ > \gamma \ \mathbf{u}_2\ $
$C_1 = \mathbf{T}^{-1}(C'_1), \quad \ \mathbf{v}'_1\ < \gamma \ \mathbf{v}_1\ $	$C'_1 \subset C_2$	$C_2 = \mathbf{T}^{-1}(C'_2), \quad \ \mathbf{v}'_2\ < \gamma \ \mathbf{v}_2\ $

Таким образом, условие вложения конусов S^γ для траекторий, исходящих из точек области U , эквивалентно условию вложения сжимающихся конусов с параметром $\gamma' = 1/\gamma$ для траекторий в обратном времени, исходящих из точек области $\mathbf{T}^2(U)$. Заметим, что $\mathbf{T}^2(U)$, как и любая область $\mathbf{T}^n(U)$, является поглощающей и содержит аттрактор A . Поэтому, осуществив для области U описанную выше процедуру для значений γ и $1/\gamma$, можно утверждать, что оба условия (для расширяющихся и сжимающихся конусов) справедливы в отношении области $\mathbf{T}^2(U)$ ⁶. Этого достаточно для заключения о том, что аттрактор является гиперболическим.

4. Результаты расчетов по проверке условий гиперболичности

Расчеты по проверке условий гиперболичности были проделаны при значениях параметров, приведенных в (2), с использованием системы координат (6), (7). Для выполнения отображения Пуанкаре и вычисления матриц Якоби проводилось численное решение уравнений динамики системы совместно с уравнениями в вариациях на интервале времени T . При этом использовался метод Рунге – Кутты восьмого порядка, основанный на формулах Дорманда – Принса с автоматическим выбором шага (точность на шаге интегрирования задавалась 10^{-11}), и метод экстраполяции (точность на шаге интегрирования задавалась 10^{-15}) [21]. Для решения систем линейных уравнений, диагонализации матриц, вычисления собственных значений и собственных векторов применялись подпрограммы из библиотеки LAPACK [22].

Согласно результатам вычислений, для собственных чисел матрицы $\mathbf{U}^T \mathbf{U} = (\mathbf{D} \mathbf{T}_x)^T \mathbf{D} \mathbf{T}_x$ во всей определенной нами поглощающей области U справедливы неравенства $\Lambda_0^2 > 1$ и $\Lambda_{1,2,3}^2 < 1$. Что касается достаточного условия правильного вложения расширяющихся конусов $\mathbf{D} \mathbf{T}_x(S_x^\gamma) \subset S_{\mathbf{T}(x)}^\gamma$ (см. (36)), то оно выполнено во всей области U , например, при $\gamma^2=1.1$.

Обратимся к обсуждению некоторых деталей расчетов. Рассмотрим трехмерную гиперповерхность в фазовом пространстве отображения \mathbf{T} , заданную уравнением

$$\left[\left(\sqrt{x_0^2 + x_1^2} - r \right) / d_r \right]^2 + (x_2/d)^2 + (x_3/d)^2 = R^2. \quad (37)$$

⁶При одном и том же γ конусы S^γ и C^γ имеют общую границу только при $\gamma=1$, тогда как при $\gamma>1$ они не пересекаются: $S_x^\gamma \cap C_x^\gamma = \emptyset$, как и требуется условием теоремы.

При $R=1$ она отвечает границе области U , а при $R<1$ располагается внутри этой области. Указанную гиперповерхность параметризуем с использованием трех угловых координат ϕ , ψ , и θ :

$$\begin{aligned} x_0 &= (Rd_r \cos \theta + r) \sin \psi, & x_1 &= (Rd_r \cos \theta + r) \cos \psi, \\ x_2 &= Rd \sin \theta \cos \phi, & x_3 &= Rd \sin \theta \sin \phi. \end{aligned} \quad (38)$$

Переменную ψ можно интерпретировать как фазу первого (возбужденного) осциллятора в момент времени, отвечающий сечению Пуанкаре, а переменную ϕ – как фазу второго осциллятора в тот же момент.

Расчеты на трехмерной сетке с шагом $2\pi/M$ при $M = 50$ показали, что при фиксированном R собственные числа матрицы $\mathbf{U}^T \mathbf{U}$ и величина $r_{\max} + \rho = f(R, \phi, \psi, \theta)$ существенно зависят от ψ и θ , тогда как зависимость от ϕ весьма слабая.

На рис. 7, *а* показан график зависимости собственных чисел Λ_0^2 и Λ_1^2 от двух угловых переменных при фиксированной третьей $\phi = 0.46$ для $R = 1$, что отвечает границе поглощающей области. Видно, что большее собственное число Λ_0^2 всегда превышает 1, а следующее Λ_1^2 всегда меньше 1 (последнее, разумеется, относится также и к числам $\Lambda_{2,3}^2$). Чтобы убедиться в выполнении указанных соотношений во всей поглощающей области, мы находили глобальный минимум Λ_0^2 и глобальный максимум Λ_1^2 по угловым переменным при фиксированном R , а затем отслеживали их зависимость от R (рис. 7, *б*). Согласно этим вычислениям, $\min_{x \in U} \Lambda_0^2 \approx 2.258$ и $\max_{x \in U} \Lambda_1^2 \approx 0.532$.

Переходим к проверке условия вложения конусов (36). На графике функции $f(R, \phi, \psi, \theta) = r_{\max} + \rho$, построенном при постоянных ϕ и R , можно видеть один глобальный максимум, величина которого варьируется при изменении ϕ и R . При

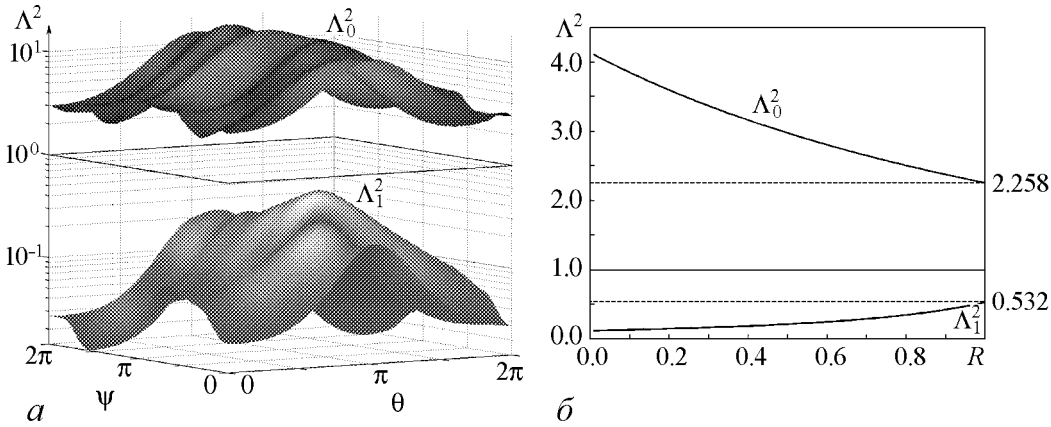


Рис. 7. Графики зависимости собственных чисел Λ_0^2 и Λ_1^2 от угловых координат ψ и θ при $R = 1$ и $\phi = \text{const}$ (*а*); зависимости от параметра R глобального минимума Λ_0^2 и глобального максимума Λ_1^2 по трем переменным ϕ , ψ , θ (*б*)

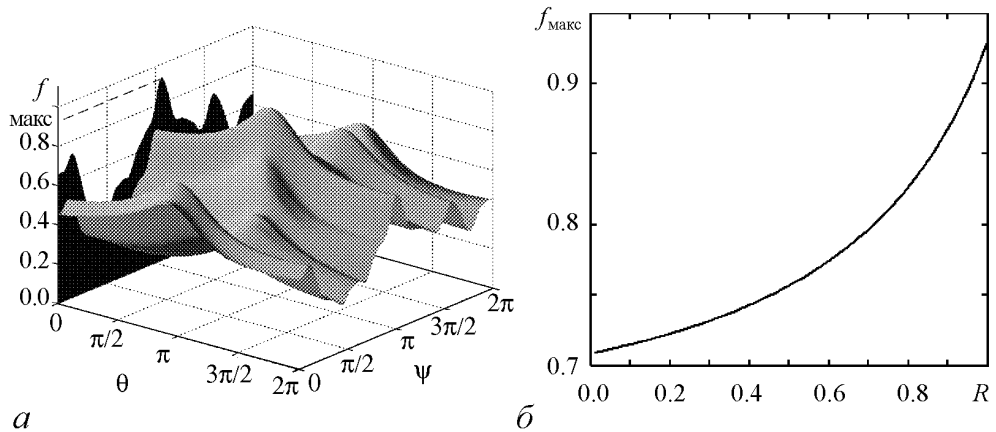


Рис. 8. График функции $r_{\max} + \rho = f(R, \phi, \psi, \theta)$ при $R=1$ и $\phi = 1.585307$ (а) и зависимость от параметра R глобального максимума функции f по трем переменным ϕ, ψ, θ (б). Наибольшее значение реализуется при $R=1$, то есть на границе поглощающей области, и не достигает 1.0

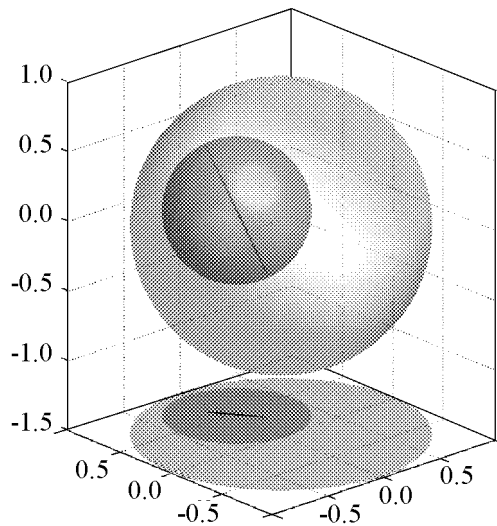


Рис. 9. Диаграмма, показывающая взаимное расположение конусов $\mathbf{DT}_x(S_x^y)$ и $S_{T(x)}^y$ в точке, где достигается максимум функции $r_{\max} + \rho$. Представлена картина в сечении четырехмерного пространства гиперплоскостью, ортогональной к направлению растяжения. Эллипсоид, представляющий сечение конуса $\mathbf{DT}_x(S_x^y)$, выглядит как узкая «игла» внутри большого шара, изображающего сечение конуса $S_{T(x)}^y$

сечением конуса $S_{T(x)}^y$. Благодаря соответствующему растяжению (сжатию) по осям координат, он выглядит как шар. Эллипсоид, представляющий собой сечение конуса $\mathbf{DT}_x(S_x^y)$, в силу высокой степени сжатия фазового объема по двум направлениям, имеет вид узкой «иголки». Его расположение внутри большого шара говорит о выполнении условия $\mathbf{DT}_x(S_x^y) \subset S_{T(x)}^y$. Малый шар, описанный вокруг эллипсоида, также попадает полностью внутрь большого шара, в чем выражается достаточное условие вложения (36).

$R = 1$ и некотором значении ϕ максимум достигает величины $f_{\max} \approx 0.929441$ (этому соответствует точка M на границе области U с координатами $x_0 = -0.102628$, $x_1 = -0.544957$, $x_2 = 0.000581$, $x_3 = 0.040066$), но остается уверенно меньше единицы (рис. 8, а). При уменьшении R максимальное значение функции $r_{\max} + \rho = f(R, \phi, \psi, \theta)$ только убывает (рис. 8, б).

Рис. 9 иллюстрирует графически ситуацию взаимного расположения сечений конусов $\mathbf{DT}_x(S_x^y)$ и $S_{T(x)}^y$ трехмерной гиперплоскостью, ортогональной к направлению растяжения в пространстве векторов $\mathbb{V}_{T(x)}$. В качестве исходной взята точка M , где достигается максимум функции в формулировке достаточного условия вложения конусов (то есть наименее благоприятное соотношение величин). Координатные оси на рисунке соответствуют главным осям эллипсоида, который служит

Аналогичные вычисления, проведенные при других значениях параметра γ , свидетельствуют, что условия надлежащего вложения конусов S остаются в силе, по крайней мере, в интервале $0.64 < \gamma^2 < 1.35$ (рис. 10). Как было объяснено в конце предыдущего раздела, справедливость указанного условия при $\gamma < 1$ означает выполнение условия для сжимающихся конусов $\mathbf{DT}_x^{-1}(C_x^{1/\gamma}) \subset C_{\mathbf{T}^{-1}(x)}^{1/\gamma}$ применительно к точкам $x \in \mathbf{T}^2(U)$. Таким образом, по крайней мере, в области $\mathbf{T}^2(U)$ выполнены одновременно условия для сжимающихся конусов и растягивающихся конусов, скажем, с $\gamma^2 = 1.1$, так что аттрактор $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathbf{T}^n(U)$ гиперболический⁷.

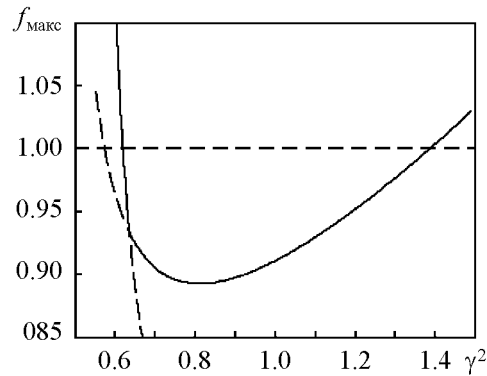


Рис. 10. Зависимость глобального экстремума функции $r_{\max} + \rho = f(R, \phi, \psi, \theta)$ от параметра γ^2

5. О наблюдении некоторых атрибутов гиперболического аттрактора в численных расчетах

Итак, полученные результаты показывают, что аттрактор в отображении Пуанкаре нашей системы, расположенный в поглощающей области U , относится к классу однородно гиперболических. Это утверждение, хотя и не основано на доказательстве в классическом математическом смысле, с определенностью вытекает из теоремы, условия которой проверены в расчетах на компьютере. Полагая гиперболичность аттрактора установленной, в данном заключительном разделе статьи проиллюстрируем численными расчетами некоторые атрибуты гиперболической динамики в исследуемой системе.

5.1. Хаос. Начнем с замечания, что динамика на рассматриваемом аттракторе хаотическая. Эволюция системы во времени состоит в том, что оба осциллятора становятся активными попеременно, передавая возбуждение по очереди друг другу. На рис. 11 показаны типичные образцы временных зависимостей переменных x и y , полученных при численном решении уравнений (4). На диаграмме (а) представлена одна реализация, а на диаграмме (б) – набор из пяти реализаций, отвечающих последовательным участкам одного и того же решения. Из первого рисунка видно, что наблюдается поочередное возбуждение первого (черная кривая) и второго (серая кривая) осцилляторов. Из второго рисунка можно сделать на визуальном уровне заключение о неперIODичности процесса. На самом деле имеет место хаос, который проявляет себя в случайном смещении максимумов и минимумов функций $x(t)$ и $y(t)$ относительно огибающей генерируемых колебаний на последовательных стадиях возбуждения осцилляторов.

⁷Если ограничить область проверки условия для расширяющихся конусов множеством точек $\mathbf{T}^2(U)$, то оценку для максимально допустимой величины γ можно существенно улучшить. Согласно нашим расчетам, условия для расширяющихся и сжимающихся конусов в области $\mathbf{T}^2(U)$ справедливы даже при $\gamma^2 \approx 1.5$.

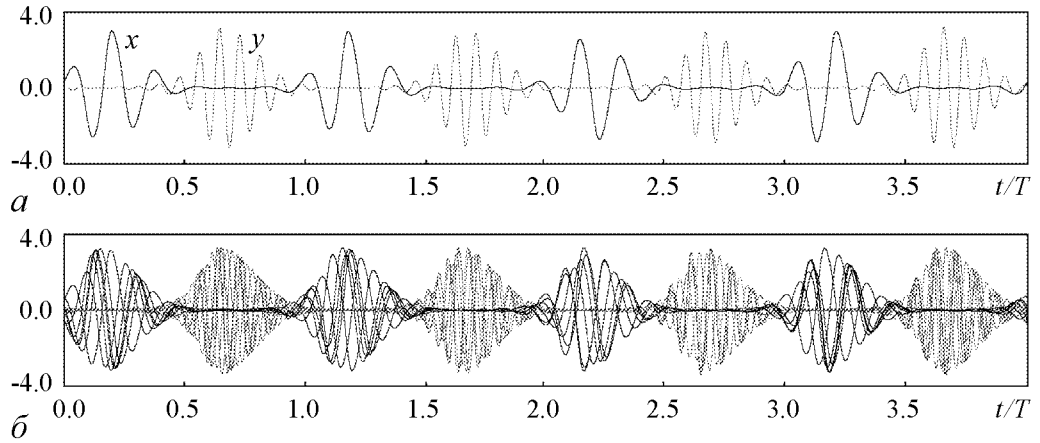


Рис. 11. Типичные образцы временной зависимости для переменных x и y , полученные из численного решения уравнений (4) для $T = 6$, $A = 5$, $\varepsilon = 0.5$. На диаграмме (а) показана одна реализация, а на диаграмме (б) – пять наложенных друг на друга реализаций – участков одного и того же сигнала, что иллюстрирует непериодический (фактически, хаотический) характер динамики

Чтобы получить свидетельство присутствия хаоса на количественном уровне, можно обратиться к расчету показателей Ляпунова. Для этого использовалась реализованная в виде компьютерной программы процедура, осуществляющая выполнение отображения Пуанкаре и вычисление матрицы Якоби. При многократных итерациях этой процедуры отслеживалась эволюция четырех векторов малых возмущений путем их умножения на получаемые в ходе итераций матрицы Якоби. После каждой итерации выполнялась ортогонализация Грама – Шмидта и нормализация для этих четырех векторов. Показатели Ляпунова определяются как средние скорости роста или уменьшения накапливающихся сумм логарифмов норм для векторов возмущения (после ортогонализации, но перед нормализацией) [23,24].

Согласно результатам вычислений, показатели Ляпунова для аттрактора отображения Пуанкаре при заданных параметрах составили

$$\begin{aligned}
 L_1 &= 0.6832 \pm 0.0007, & L_2 &= -2.6022 \pm 0.0036, \\
 L_3 &= -4.6054 \pm 0.0028, & L_4 &= -6.5381 \pm 0.0078.
 \end{aligned}
 \tag{39}$$

Наличие положительного показателя L_1 служит количественным подтверждением присутствия хаоса. Отметим, что он близок к $\ln 2 = 0.6931$, что естественно в свете применимости приближенного описания фазовой переменной одномерным отображением Бернулли (3).

5.2. Канторова поперечная структура аттрактора и фрактальная размерность. На рис.12 представлены диаграммы, изображающие портрет аттрактора нашей системы связанных неавтономных осцилляторов ван дер Поля.

На первой панели (а) показана проекция аттрактора из пятимерного расширенного фазового пространства на фазовую плоскость первого осциллятора в исходных переменных (x, u) . Аттрактор представлен в технике кодирования тонами серого цвета (насыщенность тона определяется относительной продолжительностью пребывания изображающей точки в соответствующем пикселе). Черным отмечены точки, отвечающие сечению Пуанкаре, то есть моментам времени $t_n = nT$.

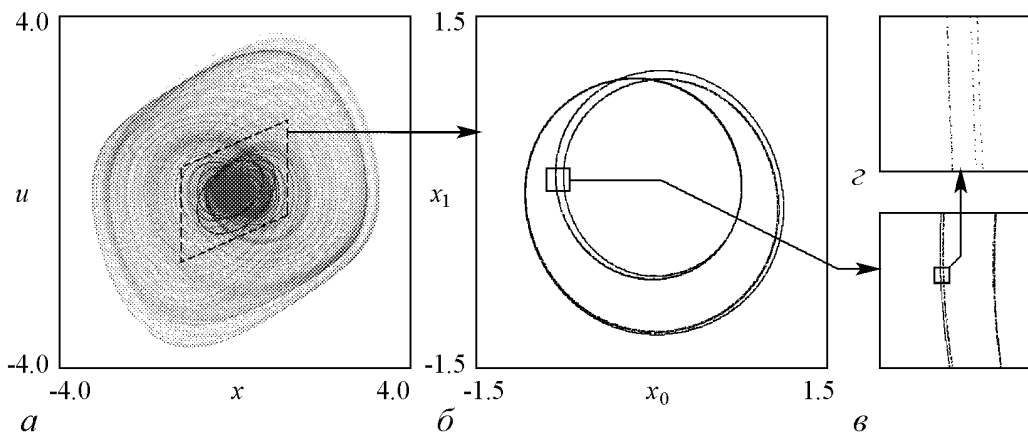


Рис. 12. Аттрактор системы связанных неавтономных осцилляторов ван дер Поля в проекции из пяти-мерного расширенного фазового пространства на фазовую плоскость первого осциллятора в исходных переменных (а) и портрет аттрактора в сечении Пуанкаре на плоскости (x_0, x_1) (б). Поперечная канторова структура аттрактора иллюстрируется отдельно на панелях (в) и (з), где показаны фрагменты исходного портрета с возрастающим увеличением

Вторая панель (б) изображает аттрактор в сечении Пуанкаре на плоскости переопределенных координат (x_0, x_1) (см. (6)) и соответствует фрагменту диаграммы (а), попадающему внутрь пунктирного параллелограмма. Следует обратить внимание на очевидное визуальное сходство с аттрактором Смейла – Вильямса. Поперечная канторова структура аттрактора иллюстрируется отдельно на панелях (в) и (з), где показаны фрагменты исходной картинке с возрастающим увеличением.

Для количественной характеристики фрактальной структуры аттрактора в сечении Пуанкаре уместно провести оценки размерности. Были выполнены численные расчеты корреляционной размерности по алгоритму Грассбергера – Прокачиа с использованием четырехкомпонентного временного ряда $\mathbf{x}_n = \{x_0(t_n), x_1(t_n), x_2(t_n), x_3(t_n)\}$, $n=1 \div M$, $M=40000$. Результат, усредненный по 10 реализациям, составил $D=1.2516 \pm 0.0018$, где в качестве погрешности указана величина среднеквадратичного отклонения. Оценка размерности аттрактора через показатели Ляпунова по формуле Каплана – Йорке приводит к результату $D \approx 1.263$.

5.3. Расположение устойчивых и неустойчивых многообразий. С точки зрения теоретического анализа гиперболических аттракторов, один из принципиальных моментов состоит в том, что устойчивые и неустойчивые многообразия, определенные для точек на аттракторе, могут пересекаться только трансверсальным образом (ситуация касания исключена). В силу сделанного выше заключения о гиперболической природе аттрактора, это свойство должно иметь место и в нашей системе.

В компьютерных расчетах для построения с определенной степенью точности устойчивых и неустойчивых многообразий можно использовать следующую схему. Пусть имеем три точки на аттракторе, которые получаются одна из другой N -кратным применением отображения Пуанкаре: $\mathbf{x}_A \rightarrow \mathbf{x}_B = \mathbf{T}^N(\mathbf{x}_A) \rightarrow \mathbf{x}_C = \mathbf{T}^N(\mathbf{x}_B)$, где N – достаточно большое целое число.

Чтобы отыскать одномерное неустойчивое многообразие точки B , рассмотрим ансамбль начальных условий, близких к точке A и параметризуемых одним параметром $\Delta\psi$:

$$x_0 = r^A \sin \psi, \quad x_1 = r^A \cos \psi, \quad x_2 = x_2^A, \quad x_3 = x_3^A, \quad (40)$$

где

$$r^A = \sqrt{(x_0^A)^2 + (x_1^A)^2}, \quad \psi = \psi^A + \Delta\psi, \quad \psi^A = \arg(x_1^A + ix_0^A). \quad (41)$$

Индексом A отмечены координаты, относящиеся к точке x_A . Величина $\Delta\psi$ отвечает некоторому малому отклонению угловой переменной, порядка L_1^{-N} . После выполняемых численно N итераций отображения Пуанкаре полученные точки расположатся вдоль неустойчивого многообразия Γ_u^B , тем ближе к нему, чем больше N .

Для построения трехмерного устойчивого многообразия точки B поступаем следующим образом. Зададим начальное условие для итераций отображения Пуанкаре вблизи точки B в виде $x_0 = (r^B + \Delta r) \sin \psi_0$, $x_1 = (r^B + \Delta r) \cos \psi_0$, $x_2 = x_2^B + \Delta x_2$, $x_3 = x_3^B + \Delta x_3$, где $r^B = \sqrt{(x_0^B)^2 + (x_1^B)^2}$. Фиксируя три величины $(\Delta r, \Delta x_2, \Delta x_3)$, параметризующие рассматриваемый объект, возьмем за исходное значение угловой переменной $\psi_0 = \psi^B = \arg(x_1^B + ix_0^B)$ и проведем численно N итераций отображения Пуанкаре. В результате получим невязку $\psi_N - \psi^C$, где $\psi^C = \arg(x_1^C + ix_0^C)$. Далее корректируем начальное значение угловой переменной $\psi'_0 = \psi_0 + (\psi^C - \psi_N)/2^N$ и повторяем процедуру до тех пор, пока невязка не станет меньше заданной величины.

Выбор метода графического изображения осложнен тем, что фазовое пространство четырехмерное. Будем использовать для представления плоскость переменных (x_0, x_1) , относящихся к первому осциллятору. Неустойчивое многообразие одномерное, и его изобразим просто в виде проекции на указанную плоскость. Для представления устойчивого многообразия, которое является трехмерной гиперповерхностью, используем линию, образующуюся от его пересечения с двумерной поверхностью $\{x_2 = x_2^B, x_3 = x_3^B\}$, в проекции на плоскость (x_0, x_1) .

Практически требуемая точность вычисления координат точек на устойчивом или неустойчивом многообразии определяется размером элемента графического изображения (пикселя). Благодаря довольно сильному сжатию фазового объема по трем направлениям фазового пространства, достаточная точность достигается, скажем, при выборе $N \sim 10$.

Ситуация расположения устойчивых и неустойчивых многообразий, которую выявляют проведенные расчеты, аналогична имеющей место для аттрактора Смейла – Вильямса [3] и состоит в следующем (рис. 13). Инвариантное множество, служащее для точек аттрактора неустойчивым многообразием, совпадает с самим аттрактором, то есть заключено внутри тороида в виде витков соленоида, обходя виток за витком «дырку от бублика». С другой стороны, устойчивые многообразия располагаются поперек «трубки», образующей поверхность тороида, что в двумерной про-

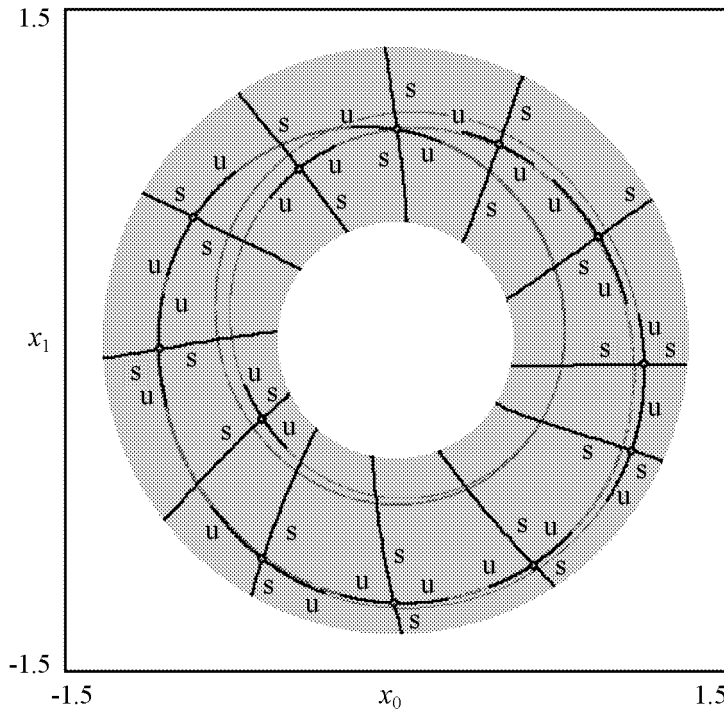


Рис. 13. Диаграмма на плоскости переменных первого осциллятора (x_0, x_1) , иллюстрирующая расположение устойчивых (s) и неустойчивых (u) многообразий для некоторого набора точек на аттракторе в сечении Пуанкаре. Неустойчивые многообразия представлены в виде проекции на плоскость (x_0, x_1) . Каждое из устойчивых многообразий представлено кривой, образующейся от его пересечения с двумерной поверхностью $\{x_2 = \text{const}, x_3 = \text{const}\}$, проходящей через точку, для которой строится многообразие. Светло-серая кольцеобразная зона отвечает проекции поглощающей области U

екции выглядит как структура типа «спиц колеса». Благодаря такому размещению, пересечения устойчивых и неустойчивых многообразий являются трансверсальными, и касания исключены.

5.4. Периодические орбиты. Одно из свойств гиперболического аттрактора состоит в том, что среди принадлежащих ему траекторий должно присутствовать бесконечное множество неустойчивых периодических орбит (циклов). Для нашей системы эти орбиты, по крайней мере, при небольших периодах легко находятся численно посредством следующей процедуры.

Возьмем принадлежащий поглощающей области начальный вектор состояния

$$x_0^{(0)} = r^{(0)} \sin \psi^{(0)}, \quad x_1^{(0)} = r^{(0)} \cos \psi^{(0)}, \quad x_2^{(0)}, \quad x_3^{(0)},$$

и пусть в результате N итераций отображения \mathbf{T} имеем

$$x_0^{(N)} = r^{(N)} \sin \psi^{(N)}, \quad x_1^{(N)} = r^{(N)} \cos \psi^{(N)}, \quad x_2^{(N)}, \quad x_3^{(N)}.$$

Полагая

$$r'^{(0)} = r^{(N)}, \quad \psi'^{(0)} = \psi^{(0)} + (\psi^{(0)} - \psi^{(N)})(2^N - 1)^{-1}, \quad x_2'^{(0)} = x_2^{(N)}, \quad x_3'^{(0)} = x_3^{(N)},$$

получаем простую рекуррентную схему, как правило, сходящуюся, которая позволяет численно находить элементы циклов. Например, неподвижная точка O отображе-

ния Пуанкаре (цикл периода 1) имеет координаты

$$x_0^O = -0.221625, x_1^O = 0.974928, x_2^O = 0.018540, x_3^O = -0.031274. \quad (42)$$

На рис. 14 показано расположение точек, принадлежащих циклам периода от 1 до 5 на фоне аттрактора в сечении Пуанкаре в проекции на плоскость переменных (x_0, x_1) . Точки, отмеченные каждым определенным символом, относятся к одной и той же периодической орбите.

Вычисление мультипликаторов (собственных чисел матрицы, представляющей собой произведение матриц Якоби для проходимых последовательно точек периодической орбиты) показывает, что имеется один мультипликатор, превышающий единицу и отвечающий за неустойчивость. Три остальных мультипликатора по модулю меньше единицы. Таким образом, все рассмотренные периодические орбиты и в том числе неподвижная точка являются гиперболическими. Отметим, что старший показатель Ляпунова для периодических орбит (вычисляемый через наибольший мультипликатор $\mu^{(P)}$ по формуле $L_1^{(P)} = P^{-1} \ln \mu_1^{(P)}$) отличается от среднего по аттрактору показателя $L_1 = 0.6845$ в ту или иную сторону, но во всех случаях остается положительным (Табл. 2).

Процедуру, описанную в предыдущем подразделе, можно применить к периодическим орбитам для построения соответствующих им устойчивых и неустойчивых многообразий. Один пример рассмотрен в следующем подразделе.

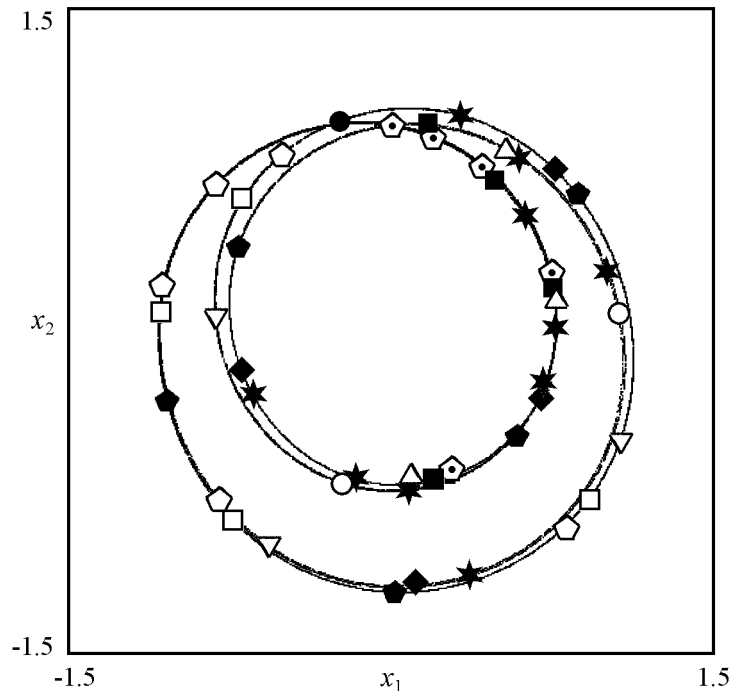


Рис. 14. Расположение элементов циклов периода 1 (черный кружок), 2 (белые кружки), 3 (треугольники), 4 (квадратики и ромбики), 5 (пятиугольники и звездочки) на фоне аттрактора отображения Пуанкаре T в проекции на плоскость переменных (x_1, x_2)

Таблица 2

Циклы периода от 1 до 5: символические последовательности, мультипликаторы и показатели Ляпунова

P	Симв. посл.	$\mu^{(P)}$	$L^{(P)}$	P	Симв. посл.	$\mu^{(P)}$	$L^{(P)}$
1		1.8039	0.5900	5	(AAAAB)	20.0681	0.5998
2	(AB)	4.6304	0.7663	5	(AAABV)	32.7698	0.6979
3	(AAB)	7.1244	0.6545	5	(AABAV)	32.6916	0.6974
3	(ABV)	10.7462	0.7195	5	(AABVV)	38.4322	0.7298
4	(AAAB)	11.7107	0.6151	5	(ABABV)	52.2052	0.7910
4	(AABV)	19.2834	0.7398	5	(ABVVV)	37.7115	0.7260
4	(ABVV)	20.4106	0.7540				

5.5. Символическая динамика. Подход к анализу нелинейных систем, известный как символическая динамика, состоит в том, что область фазового пространства, где происходит динамика, разбивается на подобласти, и каждая траектория кодируется последовательностью символов, приписанных этим подобластям. Для описания траекторий на гиперболическом аттракторе разбиение можно построить так, чтобы имело место взаимно однозначное соответствие между траекториями на аттракторе и множеством бесконечных символических последовательностей, составленных по некоторым правилам из конечного набора символов.

Для построения соответствующего разбиения применительно к отображению Пуанкаре нашей системы сначала напомним, что внутри четырехмерной тороидальной поглощающей области U имеется неподвижная точка гиперболического типа O (см. (41)). Выполним сечение поглощающей области двумя трехмерными гиперповерхностями. В качестве первой возьмем устойчивое многообразие неподвижной точки O , которое обозначим Γ_s , а в качестве второй – отличную от Γ_s гиперповерхность Π такую, что $\mathbf{T}(\Pi) \subset \Gamma_s$. Это устойчивое многообразие точки на аттракторе, образ которой принадлежит Γ_s . На рис. 15, а изображены в той же технике, какая использовалась выше, устойчивое и неустойчивое многообразия неподвижной точки O , а также многообразие Π . На плоскости (x_0, x_1) , неустойчивое многообразие Γ_u представлено проекцией на эту плоскость, а трехмерные многообразия Γ_s и Π – в виде проекции следа от их пересечения с двумерной плоскостью $x_2 = x_2^O, x_3 = x_3^O$. Две подобласти, на которые оказалось разделена поглощающая область U , обозначим A и B .

Рассмотрим, как трансформируется при действии отображения \mathbf{T} область A . Очевидно, сжимаясь поперек, она растягивается в продольном направлении, так что по азимуту представляющая образ $\mathbf{T}(A)$ «трубка» замыкает полный оборот. В самом деле, одна поперечная граница будет $\mathbf{T}(\Gamma_s) \subset \Gamma_s$, а вторая $\mathbf{T}(\Pi) \subset \Gamma_s$, по определению многообразий Γ_s и Π . Аналогичным образом трансформируется и область B . Отсюда следует, что точки области A , как и области B , могут иметь в качестве образов и прообразов точки из A и B . Поэтому орбиты на аттракторе кодируются бесконечными последовательностями двух символов A и B в соответствии с последовательностью посещения обеих областей по ходу временной эволюции. Имеет место полная ана-

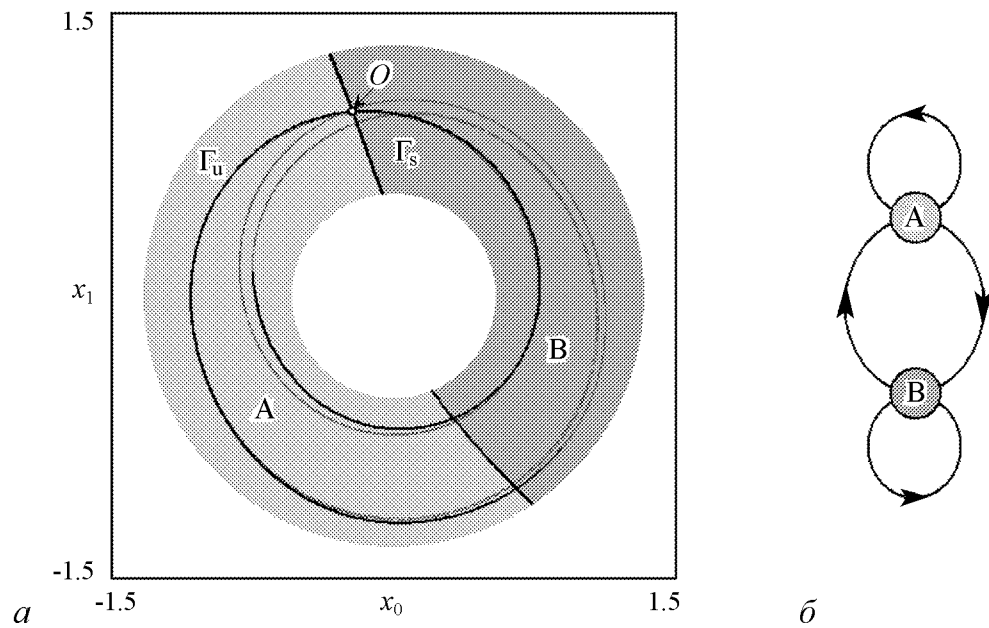


Рис. 15. Иллюстрация к построению разбиения поглощающей области для описания в терминах символической динамики в виде проекции из четырехмерного фазового пространства на плоскость (x_0, x_1) (а) и направленный граф, определяющий разрешенные переходы между двумя символами при символическом представлении орбит на аттракторе (б)

логия с символическим описанием динамики отображения Бернулли, причем нет ограничений на порядок появления одного или другого символа в последовательности (см. изображенный на рис. 15, б направленный граф). В табл. 2 представлены символические последовательности для перечисленных там периодических орбит (в скобках указан фрагмент, бесконечное повторение которого соответствует полному символическому коду орбиты).

Заключение

В настоящей статье представлены методика и результаты численных расчетов по проверке условий гиперболичности хаотического аттрактора в отображении Пуанкаре для системы двух связанных неавтономных осцилляторов ван дер Поля. При выбранных значениях параметров в четырехмерном фазовом пространстве отображения Пуанкаре мы указали область в форме тороида, которая отображается внутрь себя и содержит анализируемый аттрактор. Согласно проведенным вычислениям, в этой области оказываются выполненными условия, которые обеспечивают требуемое известной теоремой взаимное расположение расширяющихся и сжимающихся конусов в пространстве векторов, задающих малые возмущения состояния системы (касательном пространстве). Кроме того, представлены численные результаты, иллюстрирующие некоторые известные из математической литературы атрибуты гиперболической динамики.

Мы заключаем, что рассматриваемая модель доставляет давно ожидаемый пример системы, допускающий простую физическую реализацию, с однородным гиперболическим хаотическим аттрактором. Это утверждение, хотя и не базируется

ся в настоящий момент на доказательстве в классическом математическом смысле, с определенностью вытекает из теоремы, условия которой проверены в расчетах на компьютере. Как мы полагаем, создана основа для «прорыва в область гиперболичности», поскольку теперь можно будет строить множество других примеров систем физической и иной природы, в том числе и автономных, эксплуатируя, в частности, присущее гиперболическим аттракторам свойство структурной устойчивости. (В самом деле, модификация правых частей уравнений динамики не будет разрушать гиперболичность, по крайней мере, пока изменения не слишком велики.)

Возможность физической реализации гиперболического хаоса открывает перспективы приложений для хорошо развитой математиками гиперболической теории и для проведения сравнительных исследований гиперболического и негиперболического хаоса в теории и эксперименте. Фактически, физический эксперимент, демонстрирующий аттрактор рассмотренного типа, уже был выполнен недавно на базе системы связанных радиотехнических неавтономных генераторов [17]. С практической точки зрения, системы с гиперболическим хаосом могут оказаться перспективными в плане использования для коммуникации на основе хаоса, маскировки сигналов, генерации шума и т.п. В этом смысле особенно ценным видится присущее гиперболическому хаосу свойство грубости (структурной устойчивости). Также интересным и содержательным становится теперь направление исследований, состоящее в построении на основе элементов с гиперболическим хаосом сложных систем – цепочек, решеток, сетей [25,26]. Можно думать, что модели, целенаправленно сконструированные с тем, чтобы реализовать гиперболический хаос, окажутся полезными для понимания глубоких и фундаментальных вопросов, все еще бросающих вызов исследователям, таких как проблема турбулентности.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 06-02-16619).

Библиографический список

1. *Синай Я.Г.* Стохастичность динамических систем // Нелинейные волны / Под ред. А.В.Гапонова–Грехова. М.: Наука, 1979. С. 192.
2. Современные проблемы математики: Фундаментальные направления // Итоги науки и техники. Под ред. Р.В. Гамкрелидзе. М.: Изд. ВИНТИ АН СССР, 1985. Т. 2.
3. *Гукенхеймер Дж., Холмс П.* Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. М.; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2002. 559 с.
4. *Devaney R.L.* An Introduction to Chaotic Dynamical Systems. NY: Addison-Wesley, 1989.
5. *Shilnikov L.* Mathematical problems of nonlinear dynamics: A Tutorial // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 1997. Vol. 7, № 9. P. 1353.
6. *Каток А.Б., Хасселблат Б.* Введение в современную теорию динамических систем / Пер. с англ. М.: Факториал, 1999. 768 с.
7. *Afraimovich V. and Hsu S.-B.* Lectures on chaotic dynamical systems // AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, Vol. 28, American Mathematical Society, Providence, RI; International Press, Somerville, MA, 2003.

8. *Ott E.* Chaos in Dynamical Systems. Cambridge University Press, 1993.
9. *Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е., Нейман А.Б., Стрелкова Г.И., Шиманский-Гайер Л.* Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
10. *Бунимович Л.А., Синай Я.Г.* Стохастичность аттрактора в модели Лоренца // Нелинейные волны. Под ред. А.В.Гапонова–Грехова. М.: Наука, 1979. С. 212.
11. *Афраймович В.С., Быков В.В., Шильников Л.П.* О возникновении и структуре аттрактора Лоренца // ДАН СССР. 1977. Vol. 234. P. 336.
12. *Шильников Л.П., Тураев Д.В.* О катастрофах голубого неба // Доклады РАН. 1995. Т. 342, №5. С. 596.
13. *Hunt T.J. and MacKay R.S.* Anosov parameter values for the triple linkage and a physical system with a uniformly chaotic attractor // Nonlinearity. 2003. Vol. 16. P. 499.
14. *Hunt T.J.* Low Dimensional Dynamics: Bifurcations of Cantori and Realisations of Uniform Hyperbolicity. PhD Thesis, Univ. of Cambridge, 2000 (<http://www.timhunt.me.uk/math/thesis.ps.gz>).
15. *Belykh V., Belykh I. and Mosekilde* The hyperbolic Plykin attractor can exist in neuron models // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 2005. Vol. 15, № 11. P. 3567.
16. *Kuznetsov S.P.* Example of a physical system with a hyperbolic attractor of the Smale–Williams type // Phys. Rev. Lett. 2005. Vol. 95. P. 44101.
17. *Кузнецов С.П., Селезнев Е.П.* Хаотическая динамика в физической системе со странным аттрактором типа Смейла – Вильямса // ЖЭТФ. 2006. Vol. 129, № 2. С. 400.
18. *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1975. 240 с.
19. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. М.: Наука, 1981. 568 с.
20. *Неймарк Ю.И.* Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1972. 472 с.
21. *Хайпер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990.
22. LAPACK – Linear Algebra PACKage, version 3.0. May, 2000 (<http://www.netlib.org/lapack>).
23. *Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.-M.* Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems: A method for computing all of them. Part {I}: Theory. Part {II}: Numerical application // Meccanica. 1980. Vol. 15. P. 9.
24. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001.
25. *Bunimovich L.A., Sinai Ya.G.* Statistical mechanics of coupled map lattices // Theory and application of coupled map lattices / Ed. by K.Kaneko. John Wiley & Sons Ltd, 1993. P. 169.
26. *Bunimovich L.A., Sinai Ya.G.* Spacetime chaos in coupled map lattices // Nonlinearity. 1988. Vol. 1. P. 491.

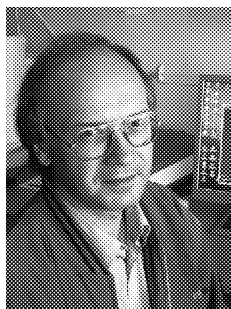
**VERIFICATION OF HYPERBOLICITY CONDITIONS FOR A CHAOTIC
ATTRACTOR IN A SYSTEM OF COUPLED NONAUTONOMOUS
VAN DER POL OSCILLATORS**

S.P. Kuznetsov and I.R. Sataev

We present a method and results of numerical computations on verification of hyperbolic nature for the chaotic attractor in a system of two coupled nonautonomous van der Pol oscillators (Kuznetsov, Phys. Rev. Lett., **95**, 2005, 144101). At selected parameter values, we indicate a toroidal domain in four-dimensional phase space of Poincaré map (topologically, a direct product of a circle and a three-dimensional ball), which is mapped into itself and contains the attractor we analyze. In accordance with our computations, in this absorbing domain the conditions are valid guaranteeing hyperbolicity, which are formulated in terms of contracting and expanding cones in the vector spaces of the small state perturbations (the tangent spaces). We discuss also some numerical results illustrating certain attributes of hyperbolic dynamics.



Кузнецов Сергей Петрович – родился в Москве (1951). Окончил Саратовский государственный университет (1973). С 1988 – сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, в настоящее время – заведующий лабораторией теоретической нелинейной динамики. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГУ (1977) и доктора наук (1987) по специальности радиофизика. Профессор кафедры динамических систем. Автор учебно-научной монографии «Динамический хаос» и «Нелинейные колебания» (в соавторстве с А.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным). Опубликовал свыше 150 научных статей по нелинейной динамике, радиофизике и электронике. Под руководством С.П. Кузнецова защищены семь кандидатских диссертаций. Лауреат государственной научной стипендии для ученых России (1994-1996), Соросовский доцент (1998), Соросовский профессор (2000, 2001). Член редакционной коллегии журнала «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика». E-mail: spkuz@rambler.ru



Сатаев Игорь Рустамович – родился в 1959 году. Окончил Московский физико-технический институт в 1982 году. Кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН. Область научных интересов - критические явления в нелинейной динамике, моделирование динамики на пороге хаоса, применение численных методов для решения ренормгрупповых уравнений. Автор более 30 научных публикаций.