Изв. вузов «ПНД», т. 15, № 2, 2007 УДК 53(076)

ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЕ ЗАДАЧИ

А.П. Кузнецов, С.П. Кузнецов, А.В. Савин

Обсуждаются проблемы исследовательского подхода к образованию. Предложены исследовательские задачи, решение которых приближает учащихся к пониманию научной работы.

Мы должны знать. Мы будем знать.

Д. Гильберт

. . . Но я был один, и я решил рискнуть,
а заодно и попрактиковаться. . .

А. Стругацкий, Б. Стругацкий

Учебные заведения очень часто стремятся дать своим выпускникам как можно более объемные и «капитальные» знания. Наука же все время «генерирует» новые знания, и объемы учебного материала должны в соответствии с этим постоянно возрастать. В итоге, по образному выражению, как говорят, академика Флерова, «современный студент напоминает фаршированную щуку – набит до отказа, а плавать не может». Очень часто эти слова можно отнести и к школьнику. В то же время очень хочется воспитать юного исследователя, способного творчески мыслить и самостоятельно получать новые результаты. В первую очередь это относится к тем молодым людям, которые выберут науку своей профессией.

Путь в науку в рамках традиционного образования выглядит следующим образом. Сначала молодой человек получает набор знаний в школе. Если он имеет наклонности к физике или математике, то это может быть физико-математическая школа или лицей. Наиболее талантливые проходят через систему олимпиад различного уровня. Затем идет во многом аналогичное получение знаний в вузе. Фактически, самостоятельная работа предполагается с дипломного проекта и продолжается в аспирантуре[1]. Такое «запаздывание» по вовлечению в исследовательскую работу само по себе огорчительно.

[1]Выделяемые по действующим учебным планам 4 часа на курсовую работу для студента первых трех курсов, конечно, ничего в этой ситуации изменить не могут.

Более того, несмотря на успехи системы физико-математических олимпиад по поиску талантливой молодежи, эта система страдает и серьезными недостатками. Олимпиады учат скоротечной работе, когда за четыре часа нужно решить пять задач. В реальной же жизни одна задача может решаться годами. Поэтому к исследовательской работе очень часто оказываются склонными совсем другие школьники, нежели те, которых выделяет система олимпиад. (Например, А.Д. Сахаров в своих воспоминаниях отмечает, что не успевал сосредоточиться на олимпиадах за весьма ограниченное время.) Такие школьники зачастую не получают необходимой поддержки в традиционной школе, система получения знаний в которой мало учитывает необходимость самостоятельного индивидуального длительного труда над одной задачей. Таким образом, вовлечение школьников в исследовательскую работу – серьезная и важная проблема.

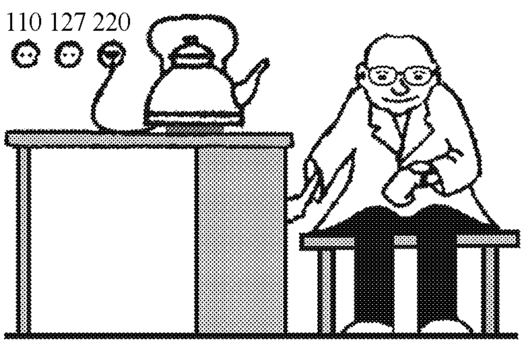

Рис. 1.

В отличие от обычных школьных задач, исследовательская работа требует своего рода «погружения» и постоянных размышлений (рис. 1). Она состоит из поиска, ошибок и открытий, больших и маленьких. В этом существенное отличие настоящей науки от олимпиад, где часто быстрота вытесняет глубину. Еще одна особенность реальных задач в том, что исследователю не только можно, но и нужно пользоваться учебниками, справочниками, монографиями, статьями, консультациями, помощью коллег, возможностями сети Интернет. Ведь цель состоит именно *в получении решения*, а не в тренинге по решению задач с известным ответом. В школе же обычно все иначе. Так, в школе никогда (за редкими исключениями) не учат технологии коллективного решения, «мозгового штурма» задачи. А это один из существенных приемов, который ученые используют в своей работе.

Еще одно отличие школьных задач состоит в том, что их авторы точно знают, как эту задачу решать. (Нетрудно представить себе, что бы творилось в школе на уроках в противоположном случае.) А вот задачи, которые решают ученые, как раз отличаются тем, что часто не ясно ни как их решать, ни что получится. (Кстати, иногда не получается ничего. Многие выдающиеся ученые, например, Альберт Эйнштейн, Игорь Евгеньевич Тамм, Дмитрий Иванович Менделеев, очень много времени потратили на задачи, которые решить не удалось.) Как не вспомнить здесь следующую цитату из известного произведения братьев Стругацких:

«Г-голубчики, – сказал Федор Симеонович озадаченно, разобравшись в почерках. – Это же п-проблема Бен Б-бецалеля. К-калиостро же доказал, что она н-не имеет р-решения.

– Мы сами знаем, что она не имеет решения, – сказал Хунта, немедленно ощетиниваясь. – Мы хотим знать, как ее решать...»

Задачи без заранее известного ее авторам ответа вообще не встречаются в школьных учебниках, но именно такие задачи учат познавать окружающий мир, устанавливать новые закономерности. Большим мастером составления таких задач был наш выдающийся соотечественник лауреат Нобелевской премии Петр Леонидович Капица (см., например, [1]) [2]. Подобные задачи он часто давал на вступительных экзаменах в аспирантуру. По воспоминаниям, это «держало в форме» не только претендентов, но и их руководителей, поскольку к ним молодежь бегала за консультациями.

Можно и на школьном «уровне» сформулировать задачи, которые были бы близки по характеру к работе ученого. Их можно назвать *исследовательскими* задачами. Некоторые из них приведены ниже. Чтобы подчеркнуть их исследовательский характер, мы дали каждой задаче свое название.

Итак, из приведенных ниже задач для начала нужно выбрать всего одну – ту, которая больше понравится. На ее решение придется потратить не час и даже не один день. Таким образом, значение имеет *не число* решенных задач, а *глубина* проработки решения. Такие задачи, можно надеяться, помогут лучше понять науку как профессию, состоящую в получении новых результатов «своими руками». «Арсенал» исследования при этом не фиксирован. Можно использовать теоретические соображения, эксперименты, компьютерное моделирование – по своим наклонностям и возможностям – в тексте даются лишь отдельные советы (впрочем, им можно и не следовать). Если необходимые сведения выходят за рамки школьной программы, нужно использовать литературу – для решения большинства задач это полезно, а решение некоторых из них без этого и невозможно. Можно и полезно пользоваться консультациями своих учителей и ученых. Можно решать такие задачи не в одиночку, а образовать школьную научную лабораторию, работать в которой еще интереснее.

При решении некоторых задач понадобится численно решать дифференциальные уравнения. В этом нет каких-то особых трудностей. (В некотором смысле численное решение дифференциальных уравнений даже проще аналитического.)

Но с получением результата работа над задачей-проблемой не заканчивается! Необходимо донести полученный результат до «научного сообщества». Это значит, что необходимо подготовить презентацию задачи, доклад по ее решению и, наконец, связный текст, который можно опубликовать, например, в сборнике трудов какой-либо конференции. Стоит отметить, что проводится не так мало конференций для школьников, включая международные. Это Колмогоровские чтения (Москва), Сахаровские чтения (Санкт-Петербург), Харитоновские чтения (Саров), «Нелинейные дни для молодых» (Саратов), Всемирный смотр научно-технического творчества «Intel ISEF» (национальные этапы и заключительный этап в США) и др. Информация обо всех этих конференциях также доступна в Интернете.

Таким образом, *при исследовательском подходе образование получает новый оттенок – это уже не только получение знаний, но и получение целой системы навыков*, что в жизни может оказаться более важным, кстати, независимо от будущей профессии.

Подчеркнем еще раз, что ключевым является самостоятельное получение результата. К сожалению, в школе под научной работой часто понимают совсем другое, фактически, написание реферата. При этом на первое место выходит не характер исследования, а «продвинутость» темы: «Кварки», «Черные дыры во вселенной» и др. Это тоже, в общем, полезное дело, но другое.

[2]Список задач П.Л. Капицы доступен также в сети Интернет.

При формулировке и подборе задач мы также часто (но не всегда) старались ввести учащихся в область исследований, связанных с теорией колебаний, теорией бифуркаций (катастроф) и т.д. Это вполне может быть сделано на уровне физических задач, доступных учащимся, зато затем облегчает восприятие как конкретного содержания, так и методологии этих областей науки.

При написании настоящей статьи мы опирались на опыт Школьной научной лаборатории факультета нелинейных процессов Саратовского университета и лаборатории теоретической нелинейной динамики Саратовского филиала ИРЭ РАН. В течение ряда лет учащиеся разных лицеев и школ Саратова занимались исследовательской работой в Школьной лаборатории. Их работы докладывались на различных конференциях, включая студенческую конференцию ФНП СГУ.

Авторы хотели бы выразить глубокую благодарность член-корр. РАН, профессору Д.И. Трубецкову и профессору Ю.И. Левину, поддержавшим идею школьной научной лаборатории и исследовательской работы школьников. Мы благодарны профессору В.С. Анищенко и АФГИР за материальную поддержку школьной лаборатории, а также заслуженному учителю РФ Л.В. Правдиной, активно стимулировавшей исследовательскую работу учащихся.

ЗАДАЧИ

1. Катастрофы мыльной пленки. Имеются два проволочных кольца радиусов R и r (рис. 2). Выясните, при каких значениях расстояния между кольцами h может существовать мыльная пленка, натянутая одновременно на оба кольца и образующая некоторую фигуру вращения. Внутри колец пленок нет. Что произойдет с мыльной пленкой, если постепенно увеличивать h? Проведите теоретическое рассмотрение и проделайте соответствующие эксперименты. Сначала рассмотрите случай колец одинакового радиуса.

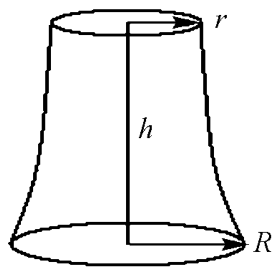

Рис. 2.

2. Поющая бутылка. Известно, что если дуть в горло бутылки, то бутылка будет издавать звук определенной частоты (гудеть). Определите, от каких параметров бутылки зависит высота издаваемого тона (то есть частота звука). Проведите эксперименты с различными бутылками и пузырьками. Проверьте найденную зависимость экспериментально.

3. Искажение поверхности океана. П.Л. Капица предложил такую задачу. Над поверхностью океана помещена материальная точка массы m. Точка располагается на высоте h над невозмущенным уровнем океана. Исследуйте вид возмущенной поверхности воды. Постройте соответствующие «профили» на компьютере. Все ли возможные конфигурации в такой системе можно наблюдать в реальных условиях на Земле? Рассмотрите возможные модификации этой задачи, например, случай расположения двух притягивающих центров над водой и т.п.

4. Оптические каустики в цилиндрической чашке. В цилиндрическом сосуде (в кружке с молоком) можно наблюдать яркую линию с еще более ярким острием. Эта линия – каустика – представляет собой огибающую световых лучей, отраженных от цилиндрической поверхности. Проведите теоретическое, экспериментальное и компьютерное исследование такой каустики.

5. Форма изогнутой линейки. Сожмите металлическую линейку, приложив к ее концам некоторое усилие. Какую форму примет слегка изогнутая линейка? Проверьте предположения, что форма линейки задается: а) синусоидой, б) параболой.

6. Цепочка с грузиками. Как надо распределить по цепочке систему грузиков разного размера, чтобы она приняла в поле силы тяжести форму полуокружности? Изготовьте такую цепочку и проведите эксперименты.

7. Монета на наклонной плоскости. Монету, лежащую на наклонной плоскости, толкают параллельно ребру этой плоскости. Исследуйте, как трансформируется траектория скольжения монеты в зависимости от угла наклона, коэффициента трения, начальной скорости. Проведите также компьютерное исследование и соответствующие эксперименты. Попробуйте провести классификацию возможных траекторий.

8. Случайное блуждание на компьютере. Проведите численное моделирование задачи о случайном блуждании на двумерной решетке размера $N \times N$, считая, что на каждом шаге по времени частица с равной вероятностью переходит в один из соседних (по вертикали и горизонтали) узлов или остается на месте. Постройте несколько траекторий. Получите численно оценку среднего времени ухода на расстояние, большее R, от точки старта для нескольких различных R. Предложите эмпирическую формулу для этой зависимости. Попробуйте исследовать аналогичную задачу в трехмерном пространстве.

9. Плавающий шар. Исследуйте вопрос о глубине погружения шара в жидкость. Проведите эксперименты с разными шариками и жидкостями разной плотности. Результаты экспериментов удобно представить в подходящих безразмерных переменных, в качестве которых могут выступать соответствующие комбинации размерных величин, характеризующих задачу. (Плотность жидкости можно менять, подсыпая в воду соль.) Изучите возможные колебания шара на поверхности воды. Как зависит период от введенных безразмерных параметров? Оцените роль диссипации в системе. Являются ли колебания шара линейными или нелинейными?

10. Статические и колебательные свойства висящей цепочки. Говорят, что если цепочку подвесить за концы, то она примет форму так называемой цепной линии. Проверьте это утверждение. Если слегка толкнуть цепочку за концы в горизонтальном направлении и снова зафиксировать их, то возникнут колебания. Попробуйте исследовать эти колебания.

11. Вращающаяся цепочка. Исследуйте устойчивые конфигурации, которые может принимать массивная цепочка, если ее вращать за один конец. Проведите предварительно эксперименты, изготовив цепочку из скрепок. Попытайтесь реализовать соответствующую компьютерную модель.

12. Изохронный маятник. Гюйгенс показал, что материальная точка, скользящая по циклоиде, совершает изохронные колебания, то есть колебания, период которых не зависит от амплитуды. Изготовьте профиль из жести в форме циклоиды и изучите колебания катающегося по нему шарика. Изготовьте и изучите маятник в виде нити с грузиком с «направляющими» в виде циклоиды. Попробуйте провести компьютерное моделирование движения материальной точки, скользящей по циклоиде, и проверьте в численном эксперименте результат Гюйгенса.

13. Неизохронный маятник. Какую форму следует придать поверхности в предыдущей задаче, чтобы колебания шарика соответствовали «потенциальной яме» не с квадратичным минимумом, а с минимумом четвертой степени? Выясните, как зависит от амплитуды период колебаний такого маятника.

14. Радуга. Найдите в справочнике данные по коэффициенту преломления света в воде в диапазоне от красного до фиолетового цвета и воспроизведите в цветной графике на компьютере расчет траекторий лучей света в капле воды (теория радуги Декарта [2, 3]). Определите, под какими углами по отношению к направлению на солнце наблюдатель увидит красное и фиолетовое кольца радуги. Попробуйте провести аналогичное исследование для капли несферической формы.

15. Прыжок с гирями. Известно, что древнегреческие атлеты прыгали в длину с гирями. Бросая их в определенный момент, они увеличивали дальность прыжка. Попробуйте определить, в какой момент и как нужно отбросить гири, чтобы максимально увеличить дальность прыжка.

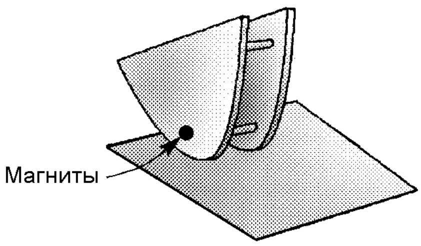

Рис. 3.

16. Качалка. В теории катастроф очень популярна модель, известная как качалка (рис. 3). Рассмотрите параболическую качалку, форма нижней поверхности которой задана уравнением $y = x^2$. Исследуйте проблему устойчивости такой системы. Ознакомьтесь с теорией качалки [3], связывающей проблему ее устойчивости с построением огибающей семейства нормалей. Проведите построение семейства нормалей на компьютере. Изготовьте качалку из картона, проведите эксперименты с ней и сравните с результатами компьютерного моделирования. Реализуйте ту же программу исследований для качалки в форме эллипса.

17. Неваляшка (Ванька-Встанька). Рассмотрим модель этой известной игрушки в виде цилиндра со смещенным центром тяжести. Если такой цилиндр положить на плоскую поверхность, то он имеет два положения равновесия: устойчивое (центр тяжести занимает наинизшее положение) и неустойчивое (центр тяжести занимает наивысшее положение). Исследуйте, какие положения равновесия будет иметь этот цилиндр, если его положить на выпуклый (или вогнутый) полуцилиндр большего радиуса. Что будет происходить при выведении цилиндра из положений равновесия?

18. Математический ряд и физический эксперимент. Если положить на один кирпич сверху второй, то его можно сдвинуть на максимальное расстояние $x_1 = l/2$. Такую конструкцию можно положить на третий кирпич. Найдите максимальное расстояние x_2, на которое ее можно сдвинуть относительно третьего кирпича. Получите далее последовательность x_n. Чему равна длина такой стенки из бесконечно большого числа кирпичей? Попробуйте экспериментально реализовать соответствующую ситуацию. (Рекомендуем использовать костяшки домино, спичечные коробки и др.) Обсудите результаты эксперимента и их соответствие с теорией. Попробуйте придумать и реализовать в эксперименте другую стратегию, нацеленную на получение наиболее длинной стенки. Стенку какой длины Вам удастся создать?

19. Маятник с переменной массой. Изготовьте маятник из сосуда, в который можно наливать воду (например, из бутылки). Изучите зависимость периода колебаний маятника от массы налитой в бутылку воды. Попробуйте построить такой график теоретически. Сначала считайте маятник *математическим* с длиной, равной расстоянию до центра масс системы, затем – *физическим*. Сравните результаты двух теорий и эксперимента.

20. Волновой фронт. Волновой фронт, испущенный некоторой поверхностью (линией), можно найти, если отложить отрезки равной длины на системе нормалей к испускающей поверхности. Проведите компьютерное исследование распространения волновых фронтов, испущенных параболой, эллипсом и другими линиями или поверхностями. Обсудите выявленные при компьютерном моделировании особенности волновых фронтов с позицией теории катастроф [2, 3].

21. Теннисный мячик на лестнице. Постройте и исследуйте модель, описывающую, как маленький мячик скачет по лестнице. Изучите возможные варианты движений в зависимости от параметров задачи. В каком случае мячик будет разгоняться сколь угодно сильно?

22. Поле решетки зарядов. С помощью компьютера получите график зависимости потенциала, созданного квадратной решеткой из $N \times N$ зарядов величины q, от расстояния x от плоскости решетки, отсчитываемого от ее геометрического центра (рис. 4). Расстояния между зарядами a, а число N достаточно велико. Выделите на полученном графике участки, отвечающие приближенным моделям, которые можно использовать в данной задаче. Используя трехмерную графику, постройте профили потенциала как функции координат y, z для различных значений x.

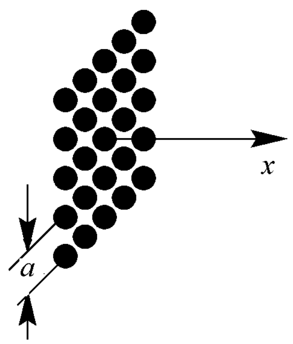

Рис. 4.

23. Бифуркации в осцилляторе. Изучите поведение осциллятора, описываемого уравнением

$$\ddot{x} + \frac{\partial U}{\partial x} = 0,$$

если потенциал задан выражением $U(x) = U_0(x) - \varepsilon x$. Функцию $U_0(x)$ выберите так, чтобы она имела кубическую точку перегиба. Изучите, как меняется вид зависимости $x(t)$ при изменении параметра ε, и объясните полученные результаты.

24. Двумерный маятник в поле трех притягивающих центров. Изучите движение маятника, колеблющегося над горизонтальной плоскостью, на которой в вершинах равностороннего треугольника располагаются три одинаковых магнита. Положение равновесия маятника лежит на малой высоте точно над центром треугольника. В качестве простейшей модели для компьютерного исследования рассмотрите материальную точку, которая может двигаться в плоскости трех притягивающих центров (приближение длинной нити маятника). Силу притяжения вычисляйте по закону обратных квадратов. Рассмотрите случаи колебания при отсутствии затухания и в случае затухания, пропорционального скорости.

25. Оптимальный бросок. Как известно, максимальная дальность полета тела достигается при броске под углом 45 градусов к горизонту. Что изменится в этом утверждении, если учесть сопротивление воздуха?

26. Траектория брошенного тела. Известно, что тело, брошенное под углом к горизонту, летит по параболе. Но по закону Кеплера это же тело должно двигаться по ... эллипсу. Обсудите, как совместить (или не совместить) эти утверждения на примере астероида шарообразной формы.

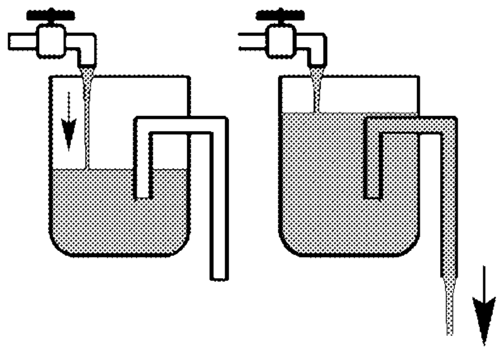

Рис. 5.

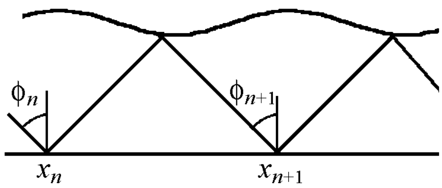

Рис. 6.

27. Ваза Тантала[3]. Система работает так: сначала вода наполняет резервуар, отводная трубка наполнена воздухом, и вода не вытекает (рис. 5). Когда вода покроет трубку, она начинает вытекать. При этом действует эффект сифона – вытекание прекратится только тогда, когда уровень воды в резервуаре упадет до нижнего обреза трубки и в нее попадет воздух. Скорость вытекания через трубку должна быть больше, чем скорость поступления воды в резервуар из крана. Изготовьте вазу Тантала и изучите зависимость периода возникающих автоколебаний от параметров системы. Попробуйте построить элементарную теорию.

28. «Запертый» луч. Изучите распространение луча света в световоде с «гофрированной» стенкой (рис. 6). Возможно ли распространение луча (после нескольких отражений) не вперед, а назад? Для начала рассмотрите случай, когда верхний профиль световода задан синусоидой с малой, а затем с большой амплитудой.

Библиографический список

1. Понимаете ли Вы физику? М.: Знание, 1967.
2. *Арнольд В.И.* Теория катастроф. М.: Наука, 1990.
3. *Постон Т., Стюарт И.* Теория катастроф и ее приложения. М.: Мир, 1980.

Поступила в редакцию 02.03.2007

RESEARCH PROBLEMS

A.P. Kuznetsov, S.P. Kuznetsov, A.V. Savin

Some problems of introduction of the research methods in high-school education are discussed. The research problems for high-school students are proposed. By solving those problems high-school students will get to know the methods of the scientific work.

[3]Тантал – наказанный богами персонаж древнегреческого мифа, который не мог напиться, стоя в воде: когда он наклонялся, вода уходила.