



## ДИНАМИКА СИСТЕМ СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ СПРОТТА С НЕИДЕНТИЧНЫМИ УПРАВЛЯЮЩИМИ ПАРАМЕТРАМИ

*А.П. Кузнецов, В.И. Паксютов*

Обсуждается устройство плоскостей параметров, управляющих удвоениями периода, для семейства связанных дифференциальных систем, предложенных Дж. Спроттом. Показано, что такие системы могут демонстрировать как поведение, аналогичное популярным системам Ресслера, так и отличное от него.

### Введение

Поведение связанных нелинейных систем, способных демонстрировать сложную хаотическую динамику, искусственно сконструированных и физически реализуемых, изучалось в последнее время в большом количестве работ. В качестве подсистем обычно выбирались «эталонные» системы нелинейной динамики, заданные в виде модельных отображений [1–10] либо дифференциальных уравнений [1, 2, 5, 11–19]. К таковым относятся осцилляторы Ресслера, Лоренца, ван дер Поля, Дуффинга, логистическое отображение, отображение окружности и другие. Наиболее полно изучен случай подсистем, идентичных по значениям параметров, управляющих бифуркациями в автономном режиме. Возможен, однако, другой подход, который состоит в изучении устройства плоскости параметров, отвечающих за бифуркации в подсистемах. Устройство плоскости параметров, управляющих удвоениями периода подсистем и бифуркациями Андронова – Хопфа, изучалось для систем связанных логистических отображений [3, 4], связанных осцилляторов ван дер Поля [17], а также связанных осцилляторов Ресслера [11, 16, 18, 19].

В данной работе мы обратим внимание на системы, состоящие из различных так называемых осцилляторов Спротта, которые в определенной мере «обойдены вниманием» исследователей. В то же время, при обсуждении простейших искусственных дифференциальных систем с удвоениями периода ограничиваться системой Ресслера, как это традиционно делается, по-видимому, не вполне правильно. Мы покажем, что связанные системы Спротта могут демонстрировать как динамику, характерную для связанных систем Ресслера, так и в определенной мере отличную от них.

Системы Спротта, представленные в таблице, относятся к искусственно сконструированным моделям нелинейной динамики. Они были предложены американ-

| Обозначение модели | Уравнения             |                       |                              |
|--------------------|-----------------------|-----------------------|------------------------------|
| A                  | $\dot{x} = y;$        | $\dot{y} = -x + yz;$  | $\dot{z} = 1 - y^2$          |
| B                  | $\dot{x} = yz;$       | $\dot{y} = x - y;$    | $\dot{z} = 1 - xy$           |
| C                  | $\dot{x} = yz;$       | $\dot{y} = x - y;$    | $\dot{z} = 1 - x^2$          |
| D                  | $\dot{x} = -y;$       | $\dot{y} = x + z;$    | $\dot{z} = xz + ay^2$        |
| E                  | $\dot{x} = yz;$       | $\dot{y} = x^2 - y;$  | $\dot{z} = 1 - ax$           |
| F                  | $\dot{x} = y + z;$    | $\dot{y} = -x + ay;$  | $\dot{z} = x^2 - z$          |
| G                  | $\dot{x} = 2x/5 + z;$ | $\dot{y} = xz - y;$   | $\dot{z} = -x + y$           |
| H                  | $\dot{x} = -y + z^2;$ | $\dot{y} = x + ay;$   | $\dot{z} = x - z$            |
| I                  | $\dot{x} = -y/5;$     | $\dot{y} = x + z;$    | $\dot{z} = ax + y^2 - z$     |
| J                  | $\dot{x} = 2z;$       | $\dot{y} = -2y + az;$ | $\dot{z} = -x + y + y^2$     |
| K                  | $\dot{x} = xy - z;$   | $\dot{y} = x - y;$    | $\dot{z} = x + az$           |
| L                  | $\dot{x} = y + 3.9z;$ | $\dot{y} = ax^2 - y;$ | $\dot{z} = 1 - x$            |
| M                  | $\dot{x} = -z;$       | $\dot{y} = -x^2 - y;$ | $\dot{z} = 1.7(1 + x) + y^2$ |
| N                  | $\dot{x} = -2y;$      | $\dot{y} = x + z^2;$  | $\dot{z} = 1 + y - 2x$       |
| O                  | $\dot{x} = y;$        | $\dot{y} = ax - z;$   | $\dot{z} = x + xz + 2.7y$    |
| P                  | $\dot{x} = 2.7y + z;$ | $\dot{y} = -x + y^2;$ | $\dot{z} = ax + y$           |
| Q                  | $\dot{x} = -z;$       | $\dot{y} = x - y;$    | $\dot{z} = 3.1 + y^2 + 0.5z$ |
| R                  | $\dot{x} = a - y;$    | $\dot{y} = 0.4 + z;$  | $\dot{z} = xy - z$           |
| S                  | $\dot{x} = -x - 4y;$  | $\dot{y} = x + z^2;$  | $\dot{z} = a + x$            |

ским исследователем Джулиеном Спроттом [20–21], который произвел компьютерный перебор большого числа систем трех дифференциальных уравнений первого порядка, правые части которых задавались полиномами второй степени.

Системы, эквивалентные представленным в таблице, которые получаются заменой переменных  $x, y, z$ , не приведены. Предложенный Спроттом перечень нельзя считать исчерпывающим набором систем, состоящих из трех дифференциальных уравнений с правыми частями, заданными полиномами второй степени, и демонстрирующих хаотическую динамику при некотором значении параметра. Однако данный набор можно рассматривать как ряд удобных для исследования потоковых систем с хаотической динамикой. Для автономных систем B, C аттрактор по своему виду подобен аттрактору Лоренца, для остальных систем – аттрактору Ресслера [20–21].

Характерной чертой систем, обозначенных как D, E, F, H, I, J, K, L, O, P, R, S, является наличие одного управляющего параметра  $a$ , при вариации которого система демонстрирует переход к хаосу через удвоения периода. Таким образом, эти варианты систем Спротта образуют интересное семейство систем, которые при вариации параметров и можно использовать для изучения двухпараметрического перехода к хаосу в связанных системах с удвоениями периода.

Обратимся к численному исследованию системы связанных осцилляторов Спротта, которое проведено при помощи метода карт динамических режимов [21].

На таких картах оттенками серого обозначены периоды колебаний осцилляторов. Белый цвет соответствует хаотическому либо квазипериодическому поведению системы. Одним из оттенков обозначены области неустойчивой динамики системы, когда фазовые траектории уходят с течением времени на бесконечность. Эти области заштрихованы на рисунках.

Периоды циклов при построении карт динамических режимов определялись численно с использованием метода сечений Пуанкаре. После достаточно длительного переходного процесса, когда можно считать фазовую траекторию вышедшей на предельный цикл, определялись точки ее пересечения с секущей плоскостью. Но при этом рассматривались только траектории, проходящие сечение Пуанкаре в одном направлении. Количество точек пересечения секущей плоскости и принималось за период предельного цикла. В качестве сечения Пуанкаре выбирались различные плоскости в фазовом пространстве систем, так чтобы для каждой системы их пересекали все «петли» аттракторов. Для минимизации погрешности определения точек пересечения фазовых траекторий с плоскостью Пуанкаре использован метод Эно [21].

В соответствии с предложенной во введении методологией исследования, карты динамических режимов строились на плоскости параметров  $a_1$  и  $a_2$ , управляющих бифуркациями удвоения периода в каждом из связанных осцилляторов.

Численный анализ позволил разделить системы связанных осцилляторов Спротта на две группы. К первой группе можно отнести связанные системы, карты динамических режимов которых имеют следующие особенности.

- При малых значениях параметра связи существуют три «ветви» области синхронизации, две из которых вытянуты вдоль координатных осей, одна – вдоль диагонали.

- Внутри каждой области синхронизации имеет место каскад бифуркаций удвоения периода и переход к хаосу.

- Между ветвями области синхронизации расположены окна квазипериодического поведения системы, имеющие вид характерных островов, «вторгающихся» в область периодических режимов.

Ко второй группе систем относятся те, которые не удовлетворяют какому-либо из приведенных условий.

К первой группе относятся системы Спротта F, H, I, K, R, S. Для примера на рис. 1, а показана карта динамических режимов двух связанных систем Спротта типа H в случае, когда связь осуществляется по всем трем переменным.

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_1}{dt} &= -y_1 + z_1^2 + \mu(x_2 - x_1), \\
 \frac{dy_1}{dt} &= x_1 + a_1 y_1 + \mu(y_2 - y_1), \\
 \frac{dz_1}{dt} &= x_1 - z_1 + \mu(z_2 - z_1), \\
 \frac{dx_2}{dt} &= -y_2 + z_2^2 + \mu(x_1 - x_2), \\
 \frac{dy_2}{dt} &= x_2 + a_2 y_2 + \mu(y_1 - y_2), \\
 \frac{dz_2}{dt} &= x_2 - z_2 + \mu(z_1 - z_2).
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

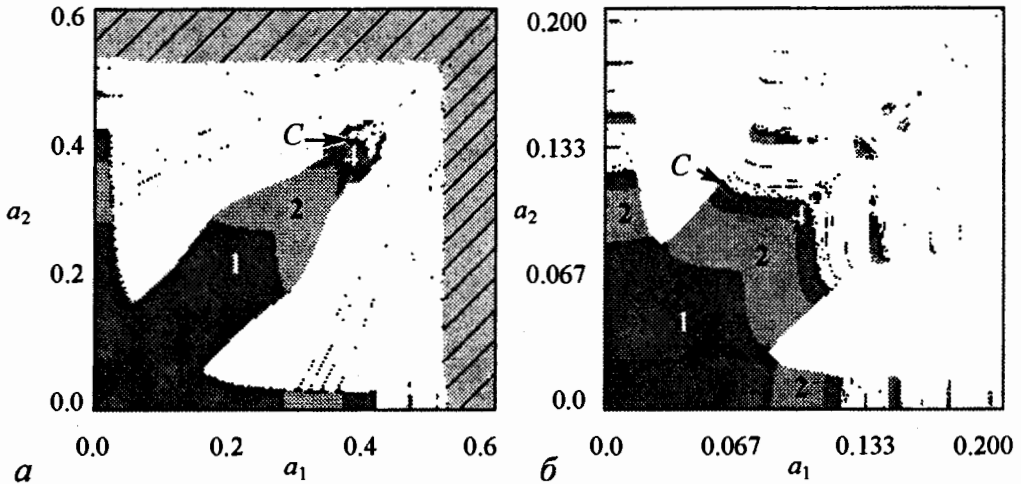


Рис. 1. Карты динамических режимов: *a* – связанных осцилляторов Спротта Н (1), значение параметра связи  $\mu = 0.01$ ; *б* – связанных осцилляторов Ресслера (2), значение параметра связи  $\mu = 0.01$ , при  $b = 0.1, c = 8.5$ . *C* – конечная точка критической линии Фейгенбаума

Описанные характерные черты устройства плоскости параметров демонстрируют и связанные осцилляторы Ресслера

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_1}{dt} &= -y_1 - z_1 + \mu(x_2 - x_1), \\
 \frac{dy_1}{dt} &= x_1 + a_1 y_1 + \mu(y_2 - y_1), \\
 \frac{dz_1}{dt} &= b + (x_1 - c)z_1 + \mu(z_2 - z_1), \\
 \frac{dx_2}{dt} &= -y_2 - z_2 + \mu(x_1 - x_2), \\
 \frac{dy_2}{dt} &= x_2 + a_2 y_2 + \mu(y_1 - y_2), \\
 \frac{dz_2}{dt} &= b + (x_2 - c)z_2 + \mu(z_1 - z_2).
 \end{aligned} \tag{2}$$

Соответствующая карта динамических режимов показана на рис. 1, *б*. Карта режимов для связанных систем Ресслера представлена и в [18], но для случая, когда связь введена только по второй переменной. Аналогично устроена плоскость управляющих параметров и связанных генераторов Кислова – Дмитриева [19]. Таким образом, можно говорить о некоторой степени универсальности соответствующей бифуркационной картины для определенного класса систем связанных осцилляторов.

Характерной особенностью устройства плоскости управляющих параметров связанных осцилляторов этого типа является также наличие конечных точек у фейгенбаумовских критических линий, которые лежат на границе области квазипериодической динамики. Эти точки на рис. 1 показаны стрелками и обозначены буквой *C*.

Метод карт динамических режимов не позволяет различать режимы квазипериодических и хаотических колебаний, которые на рис. 1 обозначены одним, белым цветом. Поэтому для проведения более подробного анализа были построены карты старшего ненулевого показателя Ляпунова. На рис. 2 приведена такая карта для

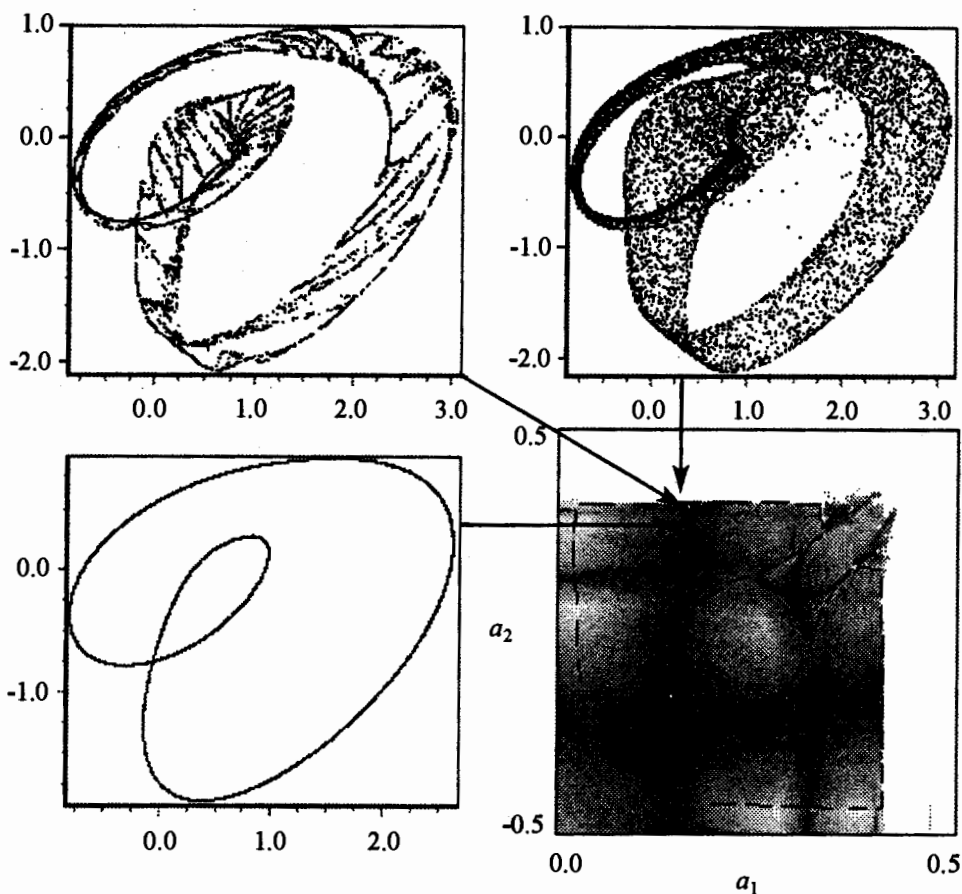


Рис. 2. Карта старшего ненулевого показателя Ляпунова системы связанных осцилляторов Спротта Н, построенная на плоскости управляющих параметров при величине параметра связи  $\mu = 0.01$ , и изображения инвариантных кривых системы в различных точках плоскости параметров. Белый цвет на карте обозначает режим хаотической динамики

системы связанных осцилляторов Спротта Н. Рядом, на вставках показаны изображения многообразий точек пересечения фазовой траектории с сечением Пуанкаре, построенные для нескольких точек плоскости параметров. Оттенками серого цвета на карте старшего ненулевого показателя Ляпунова отображается его величина, если он меньше нуля. Соответственно серый цвет обозначает периодическую или квазипериодическую динамику. Черный цвет соответствует ситуации, когда хотя бы один из показателей Ляпунова системы становится больше нуля, что говорит о хаотическом режиме динамики. Таким образом, представленная на рис. 2 карта свидетельствует о наличии островов квазипериодического поведения между «ветвями» области синхронизации связанных осцилляторов Спротта Н, границы которых показаны пунктиром. Области существования квазипериодических режимов ограничены со стороны больших значений параметров переходом к хаосу через разрушение квазипериодического режима. Соответствующий процесс разрушения инвариантных кривых иллюстрируют «вставки» на рис. 2. Аналогичные результаты были получены для всех систем первой группы, представленных на рис. 1.

Системы связанных осцилляторов Спротта, отнесенные нами ко второй группе, имеют особое устройство плоскости управляющих параметров. Характерные

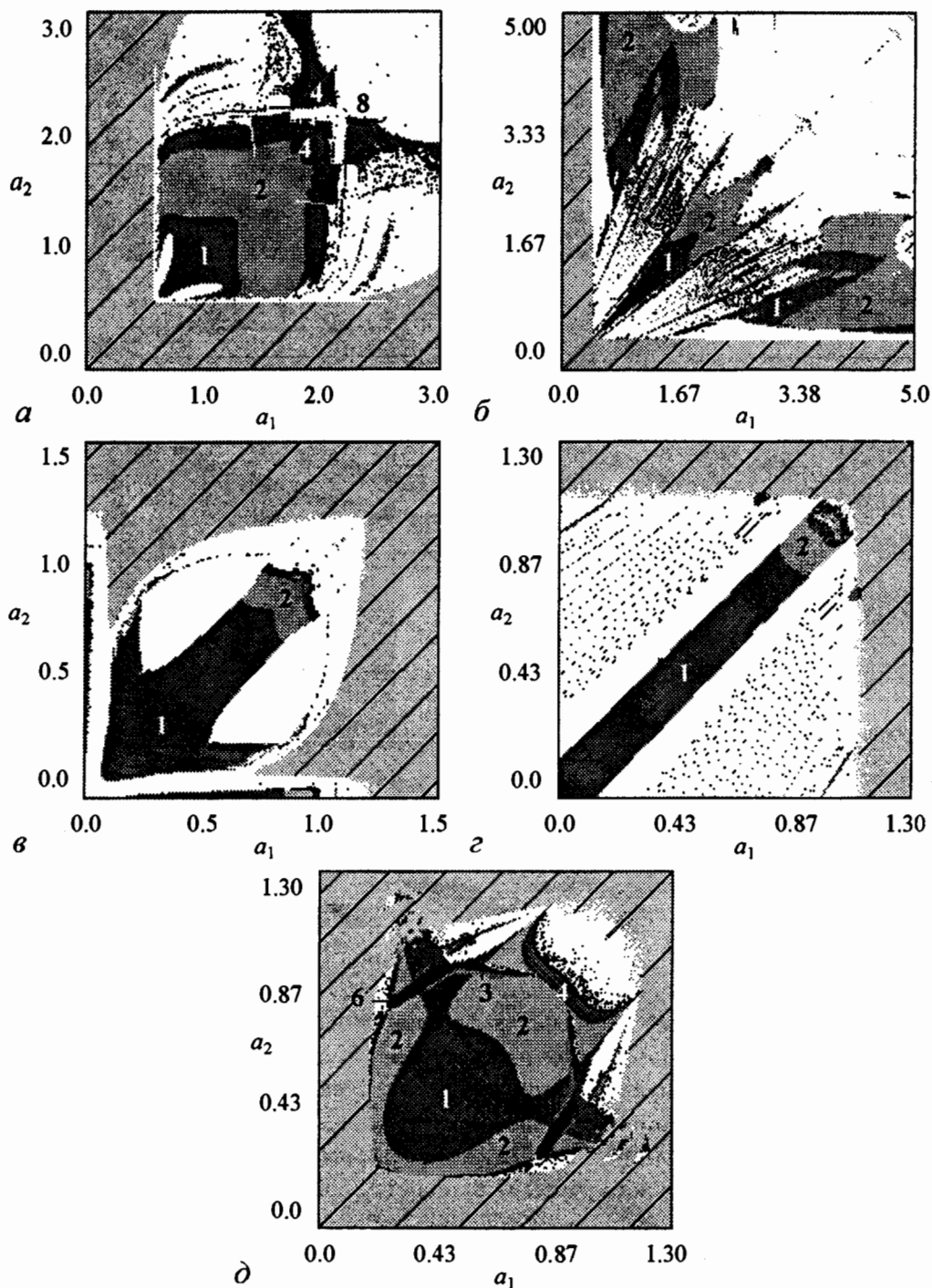


Рис. 3. Карты динамических режимов для связанных осцилляторов Спротта типа D,  $\mu = 0.005$  (а); типа E,  $\mu = 0.02$  (б); типа J,  $\mu = 0.01$  (в); типа O,  $\mu = 0.02$  (г); типа P,  $\mu = 0.05$  (д)

карты динамических режимов представлены на рис. 3. Связь во всех случаях осуществляется по всем трем переменным.

Основные отличия устройства плоскостей управляющих параметров систем, приведенных на рис. 3, состоят в наличии при малых значениях управляющих параметров областей неустойчивого поведения системы (случаи D, E, P), в которых фазо-

вые траектории уходят на бесконечность, и областей квазипериодического поведения (D, E, J, O). В результате либо область синхронизации имеет сложную форму и внутреннее устройство и выделить отдельные «ветви» невозможно (D, E, P), либо «ветви» области синхронизации, расположенные вдоль координатных осей, ограничены со всех сторон областями квазипериодического поведения (J). В случае системы связанных осцилляторов Спротта O область синхронизации имеет форму полосы, идущей вдоль диагонали, ограниченной с двух сторон областями квазипериодического поведения.

Интересно проследить эволюцию карты динамических режимов при увеличении параметра связи осцилляторов. В этом случае происходит расширение областей синхронизации, что иллюстрирует рис. 4. Для систем P и D расширение области синхронизации происходит сначала в области больших значений управляющих параметров. При этом область периодических движений «окружает» часть области квазипериодики, которая постепенно уменьшается в размерах и исчезает, как показано на рис. 4.

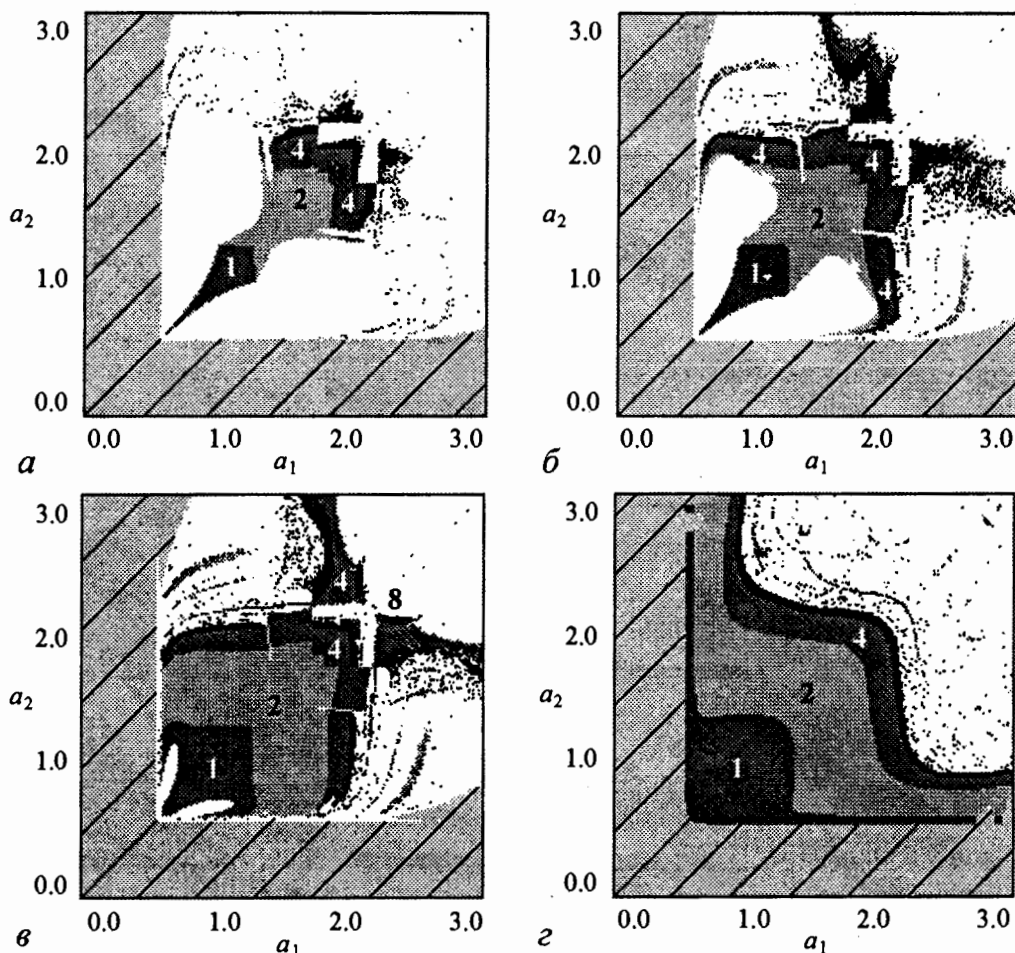


Рис. 4. Карты динамических режимов плоскости управляющих параметров системы связанных осцилляторов Спротта P для различных значений параметра связи  $\mu$ : 0.002 (а); 0.003 (б); 0.005 (в); 0.05 (г)

Мы рассмотрели пока случай, когда связь осцилляторов осуществляется по всем трем переменным  $x$ ,  $y$  и  $z$ . Интересно выяснить, как характер связи влияет на динамику составной системы. Поэтому был исследован также случай, когда связь осуществляется только по второй переменной. Построение карт режимов показывает, что для систем, отнесенных нами условно к первой группе, такой тип связи не влияет на принципиальное устройство плоскости управляющих параметров. На рис. 5 приводится пример карты динамических режимов системы двух осцилляторов Спротта Н, связанных по переменной  $y$ , заданных следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -y_1 + z_1^2, \\ \frac{dy_1}{dt} &= x_1 + a_1 y_1 + \mu(y_2 - y_1), \\ \frac{dz_1}{dt} &= x_1 - z_1, \\ \frac{dx_2}{dt} &= -y_2 + z_2^2, \\ \frac{dy_2}{dt} &= x_2 + a_2 y_2 + \mu(y_1 - y_2), \\ \frac{dz_2}{dt} &= x_2 - z_2. \end{aligned} \tag{3}$$

Этот рисунок следует сравнить с рис. 1, а.

Несмотря на то, что общие черты карт для систем первой группы не зависят от типа связи, выбор переменной, по которой системы связаны, влияет все же на форму языков синхронизации. Также могут возникать и дополнительные особенности. Так, на рис. 6 представлена карта динамических режимов системы связанных по переменной осцилляторов Спротта F. На этой карте имеют место области с периодом

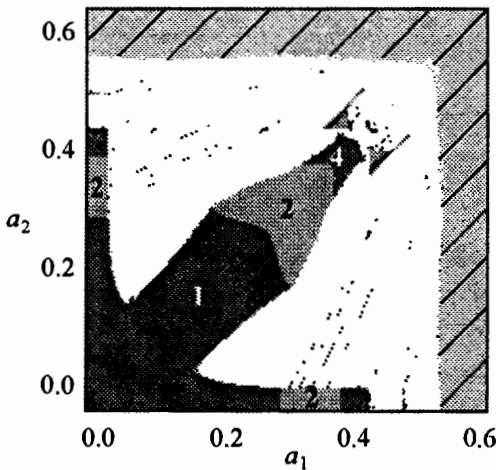


Рис. 5. Карта динамических режимов системы двух осцилляторов Спротта Н, связанных по переменной  $y$ , построенная при  $\mu = 0.02$

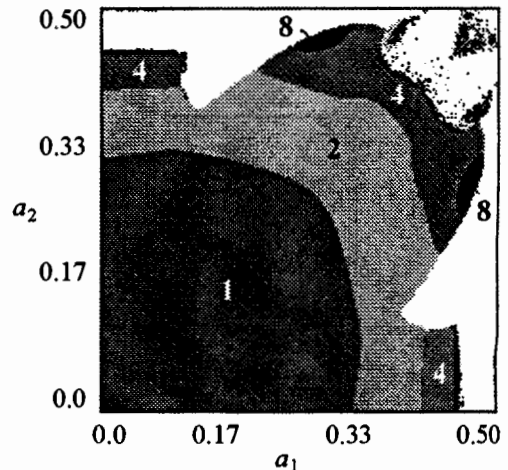


Рис. 6. Карта динамических режимов системы двух осцилляторов Спротта F, связанных по переменной  $y$ , построенная при  $\mu = 0.05$



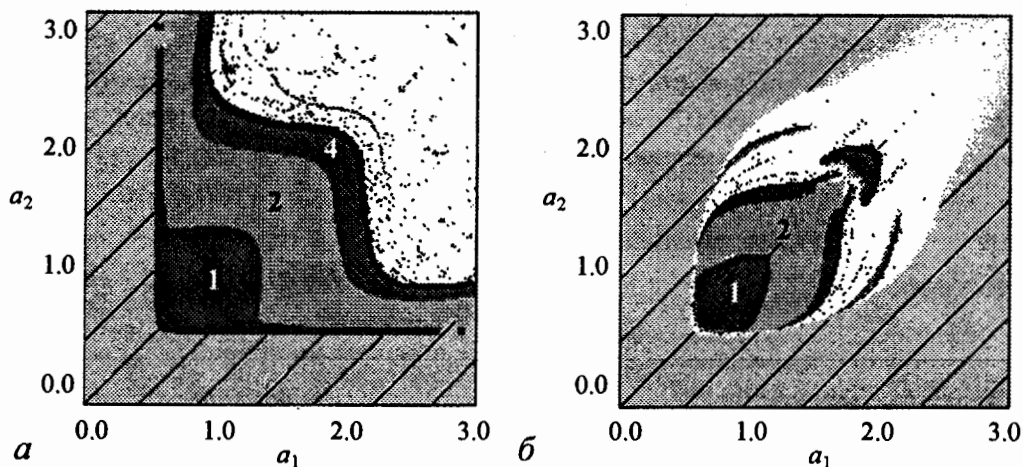


Рис. 7. Карты динамических режимов системы двух осцилляторов Спротта D, построенные для случаев связи по всем переменным (а) и связи по переменной  $y$  (б) при  $\mu = 0.05$

колебаний 8 внутри областей периода 4, которые примыкают одной своей границей к области хаоса. При увеличении параметра связи внутри области периода 8 появляются «острова» периода 16, затем внутри них – периода 32 и т.д. В результате образуется полный каскад бифуркаций удвоения периода и линия Фейгенбаума.

В свою очередь, изменение типа связи с «глобальной» на связь по одной переменной для систем, отнесенных нами ко второй группе, существенно влияет на форму областей синхронизации, а также на размер и расположение областей, в которых происходит «убегание» на бесконечность траектории в фазовом пространстве систем. Это иллюстрирует рис. 7, на котором представлены карты динамических режимов плоскости управляющих параметров системы связанных осцилляторов Спротта D для связи по всем переменным и связи по переменной  $y$ .

Итак, продуктивным подходом к анализу связанных систем с удвоениями периода может служить численное исследование характерных режимов динамики на плоскости параметров, управляющих бифуркациями в подсистемах. Ряд дифференциальных систем демонстрирует некоторые общие особенности устройства таких плоскостей параметров с характерными по своей конфигурации областями синхронных режимов, разделенных «островами» квазипериодических режимов. При этом критические линии Фейгенбаума оказываются разорванными, и имеют концевые точки. Подобное устройство характерно, например, для связанных систем Ресслера. Однако анализ достаточно большого семейства дифференциальных систем с квадратичными нелинейностями, предложенных Дж. Спроттом, говорит о том, что не все системы оказываются принадлежащими к этому классу. Некоторые из них могут содержать организованные иным образом области синхронных и квазипериодических режимов, а также «разбегания» траекторий. Для таких систем устройство плоскости параметров может также существенно зависеть от того, по какой переменной осуществляется связь. Таким образом, при изучении связанных систем целесообразно не ограничиваться столь популярной моделью Ресслера, а привлекать и другие

искусственные модели, которые, как оказывается, могут приводить к иной картине динамических режимов.

Отметим, что в настоящей работе мы ограничиваемся режимами регулярной синхронизации. Вопросы, связанные с выявлением различных типов хаотической синхронизации в разнообразных системах Спротта, могут составить предмет отдельного исследования.

*Работа поддержана РФФИ, грант 06-02-16773.*

### **Библиографический список**

1. *Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В.* Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1999.
2. *Mosekilde E., Maistrenko Y., Postnov D.* Chaos synchronization. Application to living systems // World Scientific Series on Nonlinear Science. 2002. Series A. Vol. 42. P. 440.
3. *Jian-Min Yuan, Mingwei Tung, Da Hsuan Feng, and Lorenzo M. Narducci.* Instability and irregular behaviour of coupled logistic equations // Phys. Rev. A. 1983. Vol. 28, № 3. P. 1662.
4. *Кузнецов А.П., Седова Ю.В., Сатаев И.Р.* Устройство пространства управляющих параметров неидентичных связанных систем с удвоениями периода // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2004. Т. 12, № 5.
5. *Reike C., Mosekilde E.* Emergence of quasiperiodicity in symmetrically coupled, identical period-doubling systems // Phys. Rev. E. 1995. Vol. 52. P. 1418.
6. *Bezruchko B.P., Prokhorov M.D., Seleznev Ye.P.* Oscillation types, multistability, and basins of attractors in symmetrically coupled period-doubling systems // Chaos, Solitons and Fractals. 2003. Vol. 15. P. 695.
7. *Carvalho R., Fernandez B., Vilela Mendes R.* From synchronization to multistability in two coupled quadratic maps // Physics Letters A. 2001. Vol. 285. P. 327.
8. *Hogg T., Huberman B.A.* Generic behaviour of coupled oscillators // Phys. Rev. A. 1984. Vol. 29, № 1. P. 275.
9. *Sang-Yoon Kim, Hyungtae Kook.* Period doubling in coupled maps // Phys. Rev. E. 1993. Vol. 48, № 2. P. 785.
10. *Sang-Yoon Kim, Hyungtae Kook.* Critical behaviour in coupled nonlinear systems // Phys. Rev. A. 1992. Vol. 46, № 8. P. 4467.
11. *Rasmussen J., Mosekilde E., Reick C.* Bifurcations in two coupled Ressler systems // Mathematics and Computers in Simulation. 1996. Vol. 40. P. 247.
12. *Meng Zhan, Zhi-gang Zheng, Gang Hu, Xi-hong Peng.* Nonlocal chaotic phase synchronization // Phys. Rev. E. 2000. Vol. 62, № 3. P. 3552.
13. *Hua-Wei Yin, Jian-Hua Dai, Hong-Jun Zhang.* Phase effect of two coupled periodically driven Duffing oscillators // Phys. Rev. E. 1998. Vol. 58, № 5. P. 5683.

14. *Kenfack A.* Bifurcation structure of two coupled periodically driven double-well Duffing oscillators // *Chaos, Solitons and Fractals*. 2003. Vol. 15. P. 205.
15. *Rajasekar S., Murali K.* Resonance behaviour and jump phenomenon in a two coupled Duffing–van der Pol oscillators // *Chaos, Solitons and Fractals*. 2004. Vol. 19. P. 925.
16. *Иванченко М.В., Осипов Г.А., Шалфеев В.Д.* Иерархии регулярной и хаотической синхронизации в системе связанных осцилляторов Ресслера // Труды (шестой) научной конференции по радиофизике / Ред. А.В. Якимов. Н. Новгород. 2002. С. 114.
17. *Кузнецов А.П., Паксютов В.И.* Особенности устройства пространства параметров двух неидентичных связанных осцилляторов ван дер Поля – Дуффинга // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2005. Т. 13, № 4.
18. *Кузнецов А.П., Паксютов В.И.* Динамика двух неидентичных связанных автоколебательных систем с удвоениями периода на примере осцилляторов Ресслера // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2006. Т. 14, № 2. С. 3.
19. *Кузнецов А.П., Паксютов В.И.* Синхронизация в неидентичных по управляющему параметру связанных системах с бифуркациями удвоения периода // Сборник материалов научной школы-конференции «Нелинейные дни в Саратове для молодых». Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж». 2005. С. 126.
20. *Sprott J.C.* Some simple chaotic flows // *Phys. Rev. E*. 1994. Vol. 50, № 2. P. 647.
21. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос (курс лекций). М.: Физматлит, 2001. 296 с.

*Саратовский филиал  
Института радиоэлектроники  
Саратовский государственный  
университет*

*Поступила в редакцию 1.02.2007  
После доработки 9.04.2007*

## **DYNAMICS OF THE SPROTT'S COUPLED OSCILLATORS WITH NONIDENTICAL CONTROL PARAMETERS**

*A.P. Kuznetsov, V.I. Paksyutov*

The structure of the plane of period-doubling control parameters is discussed for the set of coupled differential systems proposed by J. Sprott. It is shown, that the behavior of these systems may be both similar to one of the popular coupled Ressler system and different from it.