Изв. вузов «ПНД», т. 16, № 5, 2008 УДК 530.77

АНАЛИЗ В ФИЗИКЕ

А.П. Кузнецов, С.П. Кузнецов, А.В. Савин, Н.В. Станкевич

Саратов: «Научная книга», 2008. 90 с.
ISBN 978-5-9758-0776-2

Книга содержит задачи, требующие при своем решении не простого получения формул, а их анализа и исследования. Такой подход позволяет воспринимать физику как исследовательскую науку, а также научиться понимать и использовать взаимосвязь физики и математики. Книга будет полезна школьникам и студентам младших курсов, интересующимся физикой и исследовательской работой, а также учителям физики и преподавателям.

Книга доступна в сети Интернет по адресу http://sgtnd.narod.ru/publ/rus/APh.htm

Оглавление

Предисловие

> Из нескольких таких увеличительных стекол Стекляшкин сделал большую подзорную трубу, в которую можно было смотреть на Луну и на звезды. Таким образом он сделался астрономом.
>
> *Н. Носов.* Приключения Незнайки

Физика – это не только дисциплина в учебном плане школы или вуза, но и *наука*, которая занимается *исследованием* окружающего мира и получением новых, не известных ранее знаний. Определенное представление о работе физика-исследователя дает решение физических задач. Но реальные задачи, конечно, отличаются от учебных. Они отличаются и степенью сложности, и объемом математических преобразований, и необходимостью проведения эксперимента и компьютерных расчетов. Главное, однако, в том, что они не сводятся к подстановке чисел в некоторую формулу, найденную в учебнике или справочнике. Как правило, решаемые физиками задачи требуют глубокого и всестороннего *анализа*. Этот анализ необходим как на этапе получения уравнений и формул (например, какие факторы учесть, а какие нет?), так и на этапе их решения (есть ли строгие методы? можно ли применить приближенные?), а также на этапе обсуждения конечных соотношений (какое поведение системы они предсказывают? какие варианты возможны?) В определенной мере именно анализ, точнее, его отсутствие, отличает «традиционную» учебную задачу от по-настоящему исследовательской.

Физические методы анализа трудно формализовать; это в определенной мере искусство, обучиться которому можно, занимаясь исследовательской работой. Однако некоторым подходам и приемам можно научиться и на уровне «школьной» физики, чему и посвящена настоящая книжка.

Интересно, что физические приемы можно применять для решения задач в математической формулировке. Поэтому, прежде всего, мы рекомендуем задачи, которые «выглядят» как математические, но требуют для своего решения физического подхода. Некоторые примеры задач такого рода даны в первом разделе. Во втором разделе обсуждаются физические примеры задач, характеризующихся наличием малой величины. В третьем разделе обсуждаются задачи, связанные с анализом функциональных зависимостей физических величин, в четвертом представлены задачи, для которых исследование связано с зависимостью решения от параметров. В пятом даны примеры задач, анализ которых выявляет так называемые катастрофы и бифуркации, то есть качественные перестройки состояний физической системы при вариации параметров.

Мы старались не выходить за рамки школьной программы, хотя для решения некоторых задач необходимо уметь вычислять производные. В то же время книжка будет полезна и студентам младших курсов, которые заинтересованы в более глубоком освоении физики.

Эта книжка является, фактически, задачником, при этом решения составляют ее важную часть. Большинство решений представляют собой маленькие исследования, знакомство с которыми не сводится к простой проверке: правильно или неправильно Вы решили задачу. Поэтому рекомендуем сначала попытаться решить задачу, а потом ознакомиться с решением, даже если Вы убеждены, что решили ее правильно.

Катастрофы (бифуркации)

Задача. Маленькая бусинка массы m может скользить без трения по тонкому проволочному кольцу радиуса R. Кольцо вращают с частотой ω вокруг вертикальной оси, проходящей через плоскость кольца на расстоянии a от его центра. Проследите за трансформацией зависимости потенциальной энергии бусинки от ее координаты во вращающейся системе отсчета. Сначала исследуйте случай малых значений координаты x, отсчитываемой от оси вращения. Найдите отвечающие качественным изменениям вида потенциала линии на плоскости безразмерных параметров $\varepsilon = g/(\omega^2 R)$, $\alpha = a/R$.

Решение. Задачу удобно решать во вращающейся системе отсчета. В этой системе действует центробежная сила $m\omega^2 r$, которой можно сопоставить потенциальную энергию $U = -(m\omega^2 r^2)/2$, где r – радиус вращения. Проведем вертикальную ось системы координат так, чтобы она проходила через центр окружности. Тогда, очевидно, $r = x + a$. В свою очередь, в соответствии с рис. 1, потенциальная энергия дается выражением

$$U = -mg\sqrt{R^2 - x^2}.$$

Таким образом, суммарная потенциальная энергия

$$U(x) = -\frac{m\omega^2(x+a)^2}{2} - mg\sqrt{R^2 - x^2}.$$

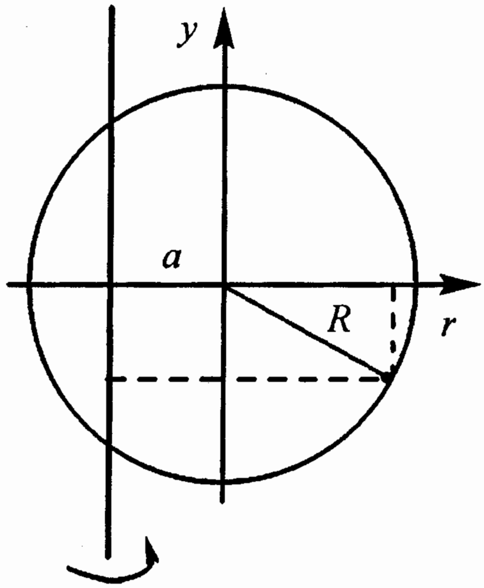

Рис. 1.

Перейдем *к безразмерным переменным и параметрам*. Введем безразмерную энергию $W = U/(m\omega^2 R)$ и параметры: $\varepsilon = g/(\omega^2 R)$, характеризующий скорость вращения системы, и $\alpha = a/R$, характеризующий степень смещения оси вращения относительно центра системы. Тогда

$$W(x) = -\frac{(x+\alpha)^2}{2} - \varepsilon\sqrt{1 - x^2}.$$

(Мы сохранили для координаты, нормированной на радиус кольца, обозначение x.)

При вариации двух существенных параметров $\alpha = a/R$ и $\varepsilon = g/(\omega^2 R)$ потенциальная энергия как функция координаты может испытывать определенные метаморфозы.

Обсудим сначала случай $\alpha = 0$, при котором ось вращения проходит через центр окружности. Ясно, что при отсутствии вращения будет единственное устойчивое положение равновесия в нижней точке кольца $x = 0$. С другой стороны, при очень сильном вращении это равновесие может стать неустойчивым. Убедимся в этом. Используя при малых x известное соотношение

$$\sqrt{1 - x^2} = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \ldots,$$

получаем

$$W(x) = \mathrm{const} + \frac{\varepsilon - 1}{2}\,x^2 + \frac{\varepsilon}{8}\,x^4 + \ldots$$

Таким образом, потенциальная энергия как функция координаты задается параболой четвертой степени. При $\varepsilon = g/(\omega^2 R) > 1$ (медленное вращение) потенциальная функция имеет единственный минимум в начале координат, который отвечает

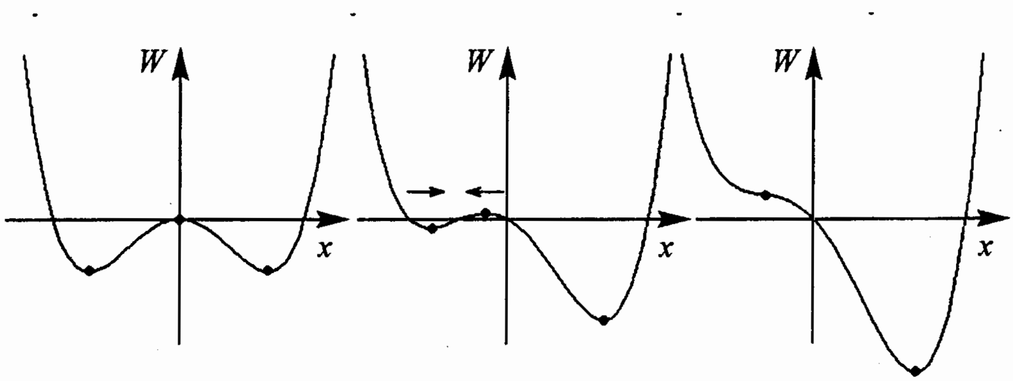

Рис. 2.

устойчивому положению равновесия. При $\varepsilon < 1$ (быстрое вращение) оно становится неустойчивым. В этот момент минимум превращается в максимум, и от него отделяются симметричным образом два локальных минимума $x = \pm\sqrt{4(1-\varepsilon)/\varepsilon}$, рис. 2, *а*.

Если теперь $\alpha \neq 0$, то есть ось вращения смещена относительно центра окружности, то

$$W(x) = \mathrm{const} - \alpha x + \frac{\varepsilon - 1}{2}\, x^2 + \frac{\varepsilon}{8}\, x^4 + \ldots$$

В этом случае график потенциальной энергии становится асимметричным, при этом количество возможных конфигураций потенциала как функции x существенно возрастает. Задача становится принципиально двухпараметрической. (То есть поведение существенно зависит от двух параметров: α и ε.) Обсудим возможные метаморфозы потенциала.

Введение нового параметра α и асимметрии задачи приводит к тому, что глубина двух потенциальных минимумов может быть разной. При этом, варьируя параметр α, можно добиться ситуации слияния максимума и одного из минимумов. Эта ситуация иллюстрируется рис. 2, *б, в*.

Найдем условие этой бифуркации. Положению равновесия отвечает нулевое значение производной потенциала по координате $W'(x) = 0$, а условию слияния положений равновесия – равенство нулю второй производной $W''(x) = 0$, когда потенциальная функция имеет точку перегиба. Вычислим соответствующие производные и приравняем их нулю:

$$W'(x) = -\alpha + (\varepsilon - 1)x + \frac{\varepsilon x^3}{2} = 0,$$
$$W''(x) = \varepsilon - 1 + \frac{3\varepsilon x^2}{2} = 0.$$

Из второго уравнения находим $x = \pm\sqrt{2(1-\varepsilon)/(3\varepsilon)}$. Подставляя в первое соотношение, получаем

$$\alpha = \pm\left(\frac{2(1-\varepsilon)}{3\varepsilon}\right)^{3/2}.$$

Это уравнение задает линию на плоскости параметров (α, ε), разделяющую области с различным характером конфигурации потенциальной энергии, как функции

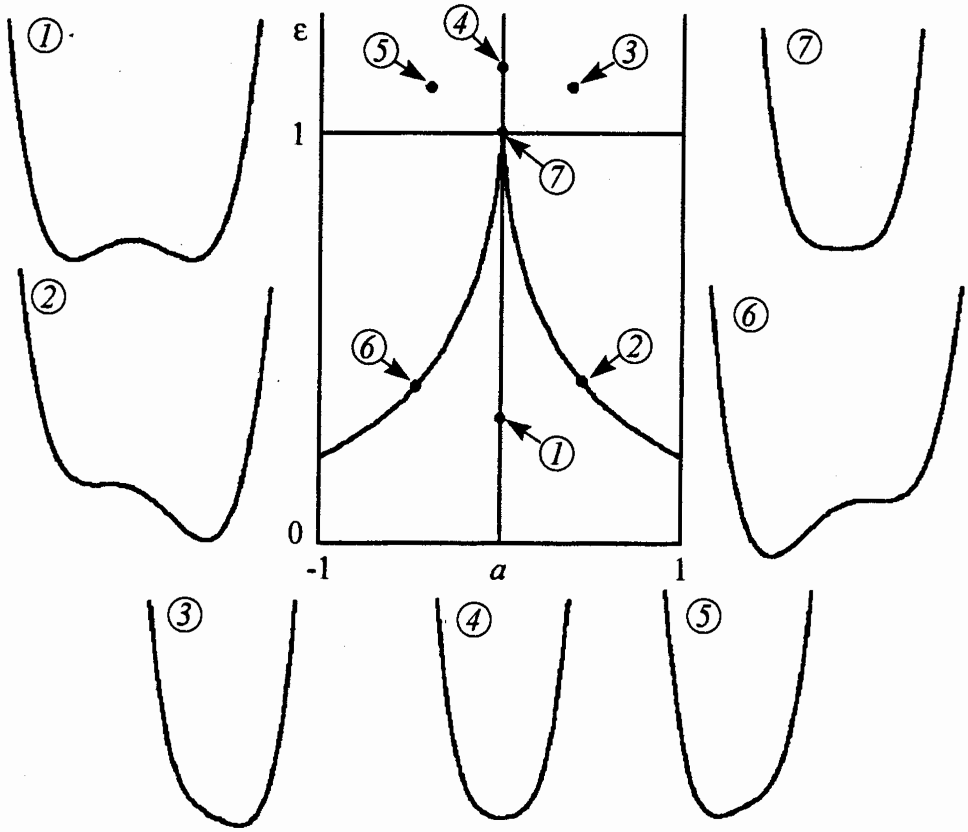

Рис. 3.

координаты. Такое разбиение плоскости (α, ε) показано на рис. 3. Рядом представлены соответствующие конфигурации потенциальной функции. Можно заметить, что разделительная линия, отвечающая слиянию двух положений равновесия, в точке $(0, 1)$ имеет особенность («острие»). Эта точка отвечает максимально вырожденной ситуации, когда функция характеризуется локальным минимумом четвертой степени. В ее окрестности, используя $\varepsilon = 1 - \Delta\varepsilon$, получаем

$$\alpha \approx \pm \left(\frac{2}{3}\,\Delta\varepsilon\right)^{3/2}.$$

Таким образом, это действительно особенность в виде полукубического острия. Такие особенности весьма характерны для систем, в которых могут сосуществовать и сливаться три локальных экстремума. В теории катастроф такая точка носит специальное название *точка сборки*, а подходящие к ней линии слияния экстремумов называют линиями *складок*.

Мы пока ограничились рассмотрением случая малых x. Проведем теперь рассмотрение более аккуратно, не ограничиваясь этим предположением. Вычисляя соответствующие производные от потенциала

$$W(x) = -(x+\alpha)^2/2 - \varepsilon\sqrt{1-x^2},$$

получаем

$$W'(x) = -x - a + \frac{\varepsilon x}{\sqrt{1-x^2}} = 0,$$
$$W''(x) = -1 + \frac{\varepsilon}{(1-x^2)^{3/2}} = 0.$$

После несложных преобразований находим:

$$x = \pm\sqrt{1-\varepsilon^{2/3}}$$

и

$$\alpha = \pm(1-\varepsilon^{2/3}).$$

Последнее уравнение задает более точно линию на плоскости параметров (α, ε), разделяющую области с различным характером конфигурации потенциальной энергии как функции координаты. Однако легко видеть, что в окрестности точки сборки мы имеем также полукубическое острие. Действительно, используя $\varepsilon = 1 - \Delta\varepsilon$ и, соответственно, $\varepsilon^{2/3} = (1-\Delta\varepsilon)^{2/3} \approx 1 - (2/3)\Delta\varepsilon$, получаем $\alpha \approx \pm((2/3)\Delta\varepsilon)^{3/2}$, то есть уже полученное выше соотношение.