

# ФИЗИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМИ ХАОТИЧЕСКИМИ АТТРАКТОРАМИ

*С.П. Кузнецов*

## 1. Введение

Однородно гиперболические хаотические аттракторы введены в рассмотрение в рамках так называемой гиперболической теории, связанной с именами Аносова, Алексева, Смейла, Вильямса, Синая, Рюэля и других, в 60х–70х годах XX века [1-4]. В то время ожидалось, что такие аттракторы могут быть пригодны для описания многих ситуаций, где приходится иметь дело с хаосом, например, гидродинамической турбулентности [5]. Однако по мере появления конкретных примеров систем с хаотической динамикой, стало ясно, что рамки ранней гиперболической теории слишком узки, и гиперболические аттракторы стали считаться лишь рафинированным образом хаоса, не имеющим отношения к реальным системам. Усилия математиков оказались перенаправлены на разработку обобщений для более широких классов систем (квазигиперболические, частично гиперболические и неоднородно гиперболические аттракторы, квазиаттракторы). Забытым и мало исследованным остался вопрос: можно ли найти или сконструировать физические системы с однородно гиперболическими аттракторами?

Одно из главных свойств этих аттракторов – структурная устойчивость, или грубость, т.е. нечувствительность динамики по отношению к вариации функций и параметров в уравнениях. В теории колебаний, начиная с работ Андронова и его школы [6,7], грубые системы принято считать подлежащими первоочередному исследованию и наиболее важными для практики, в силу нечувствительности к вариации параметров и характеристик, техническим погрешностям, помехам и шумам. По идее, то же самое должно относиться к системам со структурно устойчивым гиперболическим хаосом, и отсутствие физических примеров в этой связи кажется непонятным и неприемлемым. В последнее время это несоответствие отчасти преодолено: физически реализуемые системы с гиперболическими аттракторами предложены и исследованы [8,9]. О некоторых из них рассказано в данной лекции.

## 2. Интерпретация динамики в терминах фазовой жидкости и примеры гиперболических аттракторов

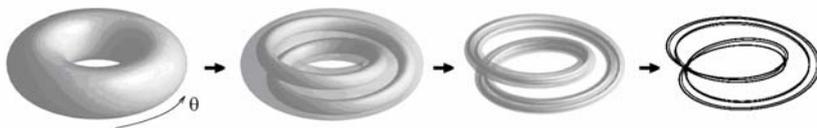
Напомним, что под динамической системой понимают объект, состояние которого, заданное в любой момент времени точкой в пространстве состояний (фазовом пространстве), получается из начального состояния по установленному для этой системы правилу.

Для интерпретации динамики в терминах фазовой жидкости берется ансамбль одинаковых систем с разными начальными условиями, представленный в пространстве состояний облаком изображающих точек, трансформирующимся с течением времени вследствие перемещения этих точек согласно динамическим уравнениям. В диссипативных системах объем «облака» убывает, и оно оседает на аттрактор.

*Хаос реализуется в ситуации, когда имеют место многократно повторяющиеся преобразования растяжения, изгибания и сплющивания облака изображающих точек.*

При таких преобразованиях чаще всего не обеспечивается однородного, хотя бы приблизительно, распределения фазовой жидкости вдоль слоев возникающего в пространстве состояний объекта. Этому мешает тенденция к концентрации субстанции в местах складок, с появлением особенностей в распределении плотности. Причина в том, что в определенных местах направление сжатия совпадает с касательной на краю складываемого образования, и сплющивание приводит к локально повышенной плотности. В диссипативных системах такие ситуации могут ассоциироваться с негиперболическим хаосом, как в отображении Эно, или с оседанием облака на регулярные аттракторы – притягивающие точки или циклы.

*Гиперболический хаос отвечает тому, что трансформация облака изображающих точек, включающая продольное растяжение и поперечное сжатие, осуществляется совершенным образом, без нарушения непрерывности и без формирования локальных уплотнений.*

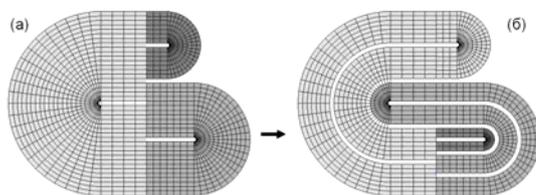


**Рис.1.** Область в виде тора в трехмерном пространстве состояний, результат ее преобразования за первые две итерации отображения, и соленоид Смейла – Вильямса, получающийся после большого числа итераций.

Чтобы уяснить принципиальную возможность таких объектов, обратимся к *аттрактору Смейла – Вильямса* [1-4], который может встретиться в системе, заданной трехмерным отображением. Рассмотрим область в трехмерном пространстве в виде тора, который представим, как бублик из пластичного материала. Один шаг преобразования состоит в том, что мы растягиваем бублик вдвое, производим поперечное сжатие, складываем двойной петлей, и помещаем внутрь исходного тора (рис. 1). На каждом шаге преобразования объем объекта уменьшается (отображение диссипативное), а число витков удваивается. В пределе оно стремится к бесконечности, и возникает образование, называемое *соленидом*. Поперечная структура солениода похожа на канторово

множество. Существенный момент состоит в том, что угловая координата  $\theta$  претерпевает удвоение на каждом шаге дискретного времени.

Второй пример – это *аттрактор типа Плыкина* в специальном двумерном отображении на плоскости [10]. На рис. 2 изображена область, составленная из трех подобластей с узкими вырезами. Штриховкой показаны два определенных там поля направлений, по одному из которых осуществляется растяжение, а по другому сжатие. Отображение производится так, что его действие на состояния, представленные точками данной области, дает в результате фигуру на рисунке справа, причем поля направлений после преобразования совпадают с исходными. Этим обеспечивается гиперболическая природа аттрактора.



**Рис.2.** Исходная область (а) и ее трансформация при действии отображения (б) для аттрактора типа Плыкина.

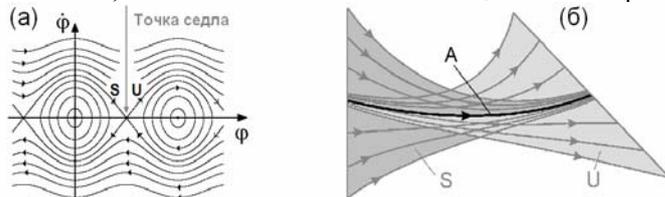
### 3. Краткий обзор гиперболической теории

Введение в гиперболическую теорию уместно начать с обсуждения точки седла, отвечающей, например, неустойчивому состоянию маятника. На фазовой плоскости, где по осям координат отложены угол отклонения  $\varphi$  и угловая скорость  $\dot{\varphi}$ , седло имеет координаты  $(\varphi, \dot{\varphi}) = (\pi, 0)$  (рис. 3а). При малом возмущении система уходит из него по неустойчивой сепаратрисе  $U$ . Имеется также ведущая в седло устойчивая сепаратриса  $S$ . Точка седла *гиперболическая*; термин связан с тем, что фазовые траектории вблизи нее локально имеют вид гипербол.

Представление о гиперболичности допускает обобщение. Траекторию называют гиперболической, если для каждой ее точки в векторном пространстве всевозможных бесконечно малых возмущений  $V$  (касательном пространстве) можно определить подпространство векторов, убывающих по норме при эволюции в прямом времени  $V_S$ , и подпространство векторов убывающих в обратном времени  $V_U$  (см. рис.3б). При этом векторы, относящиеся к  $V_S$  и  $V_U$ , по норме ограничены экспоненциальной функцией, убывающей, соответственно, в прямом или в обратном времени. Однородная гиперболичность подразумевает, что показатели экспоненциального роста или затухания векторов из  $V_S$  и  $V_U$ , ограничены и отделены от нуля некоторыми константами. В случае систем с дискретным временем все векторы в пространстве  $V$  представля-

ются линейной комбинацией векторов из  $V_S$  и  $V_U$ :  $V = V_U \oplus V_S$ . В системе с непрерывным временем добавляется нейтральное подпространство  $V_N$ , отвечающее возмущениям вдоль фазовой траектории, которые не нарастают и не убывают во времени, так что  $V = V_U \oplus V_N \oplus V_S$ .

В фазовом пространстве множество точек, которые асимптотически приближаются к данной траектории, образуют ее *устойчивое многообразие*, а множество точек, приближающихся к ней в обратном времени, – *неустойчивое многообразие*. Это действительно многообразия, т.е. гладкие объекты, что является заключением специальной теоремы.



**Рис.3.** Точка седла на фазовом портрете маятника, где кривая S есть устойчивая сепаратриса, а U неустойчивая сепаратриса (а), и иллюстрация обобщения понятия гиперболической траектории (б). Символами S и U помечены устойчивое и неустойчивое многообразия траектории A.

Существует критерий гиперболичности, который можно проверить в расчетах на компьютере – *критерий конусов* [3,4]. Предположим, что динамика в дискретном времени задана гладким обратимым отображением, и при этом для каждой точки анализируемого множества в пространстве векторов малых возмущений (касательном пространстве) можно определить расширяющийся и сжимающийся конусы. Расширяющийся конус есть множество векторов, норма которых при применении отображения увеличивается в  $\gamma$  и более раз, где  $\gamma > 1$  – некоторая константа. Сжимающийся конус есть множество векторов, норма которых увеличивается в  $\gamma$  и более раз при действии обратного отображения. Критерий выполнен, если всегда образ расширяющегося конуса попадает внутрь расширяющегося конуса, определенного для точки-образа, а прообраз сжимающегося конуса в сжимающийся конус для точки-прообраза. Этот критерий годится и для систем с непрерывным временем, если использовать описание с помощью отображения Пуанкаре.

Однородно гиперболический аттрактор это притягивающее множество, составленное из однородно гиперболических траекторий. Подразумевается, что размерности многообразий одинаковы для всех траекторий, и что пересечения между устойчивыми и неустойчивыми многообразиями могут встречаться только под ненулевыми углами. Примерами служат аттракторы Смейла – Вильямса и Плыкина. Для аттрактора Смейла – Вильямса устойчивые многообразия двумерные и представлены семейством плоских меридиональных сечений тора, а неустойчивые

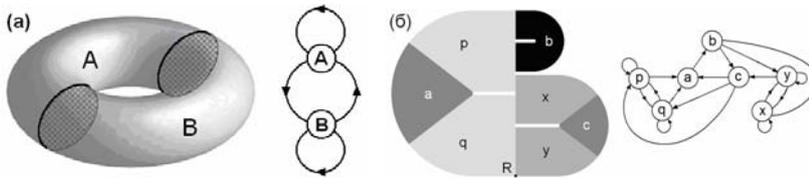
многообразия одномерные, это волокна соленоида. У аттрактора Плыкина устойчивые и неустойчивые многообразия одномерные, они располагаются вдоль семейств линий, по которым имеет место, соответственно, сжатие и растяжение фазового объема.

Заметим, что неустойчивое многообразие каждой точки на аттракторе совпадает собственно с аттрактором. Это имеет следствием чувствительность движения на аттракторе к малым возмущениям начальных условий, что является главным атрибутом динамического хаоса. В самом деле, изображающие точки, смещенные одна относительно другой вдоль неустойчивого многообразия, разбегаются с течением времени в среднем по экспоненциальному закону  $\|\Delta x\| \sim e^{\Lambda n}$ , по крайней мере, пока возмущение мало. Здесь  $n$  – дискретное время, а  $\Lambda > \ln \gamma > 0$  – старший показатель Ляпунова. Если неустойчивые многообразия одномерные, отображение имеет один положительный показатель Ляпунова, а остальные отрицательные.

Наличие структуры, образованной устойчивыми и неустойчивыми многообразиями, делает возможным разбиение содержащей аттрактор области на конечное число не перекрывающихся односвязных подобластей, границы которых идут по соответствующим линиям или поверхностям. При выполнении некоторых условий (в частности, образы границ, проходящих по устойчивым многообразиям, должны попадать на такие же границы) это разбиение называется *марковским*, и служит основой описания движений на аттракторе в рамках *символической динамики*. Обозначая каждый элемент разбиения буквой конечного алфавита, соотносим траекторию с последовательностью символов в порядке посещения траекторией этих элементов. При этом для конкретных аттракторов последовательности подчиняются определенным «правилам грамматики».

Возможность полного символического описания траекторий устанавливает связь соответствующей проблематики с теорией информации и кодирования. Это может быть важным с точки зрения использования систем с гиперболическими аттракторами в информационных и коммуникационных приложениях.

На рис. 4 показаны марковские разбиения для аттрактора Смейла – Вильямса и аттрактора типа Плыкина, а также графы, конкретизирующие правила грамматики. В первом случае один сегмент границы между элементами разбиения – это сечение тора плоскостью, отображающейся на себя, а другой – сечение, отображающееся на первый сегмент. Для аттрактора типа Плыкина граница между элементами разбиения состоит из вертикальной линии, совпадающей с устойчивым многообразием принадлежащей аттрактору неподвижной точки  $R$ , и сегментов, отображающихся на эту линию при итерациях отображения.



**Рис. 4.** Марковские разбиения и графы переходов для аттрактора Смейла - Вильямса (а) и аттрактора типа Плыкина (б). (В последнем случае граница между элементами раздела представлено устойчивым многообразием седловой неподвижной точки  $R$ .)

Графы на рис. 4 обеспечивают возможность перехода из каждой вершины в любую другую за конечное число шагов. Имеются вершины, из которых исходит более одного ребра, так что при построении символической последовательности переход можно выбрать произвольно из представленных альтернатив. Любой полученный код будет отвечать траектории на аттракторе, посещающей области разбиения согласно предписанной последовательности, что можно трактовать как цепь Маркова – случайный процесс с дискретным временем и конечным множеством состояний (с этим связан термин «марковское разбиение»).

Структурная устойчивость аттрактора обусловлена тем, что растяжение и сжатие элементов фазового объема по ходу эволюции во времени осуществляется по направлениям, которые всегда образуют ненулевой угол. В терминах устойчивых и неустойчивых многообразий это отвечает трансверсальному (без касаний) их взаимному расположению при пересечении. Если варьировать параметры или функции в определении оператора эволюции, то, благодаря трансверсальности пересечения многообразий, это «шевеление» не разрушит присущую фазовому пространству топологическую структуру, по крайней мере, пока возмущение не слишком велико. В частности, это относится к системе линий и поверхностей, используемых при построении марковских разбиений, так что неизменной при этом остается и символическая динамика.

Множество периодических орбит на аттракторе соответствует периодическим символическим последовательностям и имеет мощность счетного множества. С ростом периода орбит  $T$  их количество  $N$  увеличивается по экспоненциальному закону  $N \sim e^{hT}$ , где величина  $h > 0$  называется *топологической энтропией*. Ее считают характеристикой сложности множества траекторий на аттракторе.

Движение на однородно гиперболическом аттракторе Смейла – Вильямса или Плыкина характеризуется свойствами *эргодичности* и *перемешивания*. Эргодичность означает, что типичная траектория посещает любую окрестность любой точки на аттракторе. Это обеспечивает эквивалентность усреднения по времени и по инвариантной мере, и дает основание для статистического подхода к анализу динамики. Свойство перемешивания означает, что для любого элемента фазового объема за

достаточное время облако изображающих точек распределится по всему аттрактору. Оно также связано с затуханием корреляций: корреляционная функция для сигнала, порождаемого динамикой системы с дискретным временем на однородно гиперболическом аттракторе, характеризуется экспоненциальным спадом.

Для однородно гиперболических аттракторов существует *абсолютно непрерывная инвариантная мера Синяя – Рюэля – Боуэна*, или *SRB-мера*. Взяв траекторию на аттракторе, договоримся приписывать любой области фазового пространства меру, равную относительной продолжительности пребывания в ней, когда время наблюдения движения изображающей точки по этой траектории стремится к бесконечности. Для принадлежащих однородно гиперболическому аттрактору типичных траекторий построенная таким образом мера одна и та же; это и есть SRB-мера. С ней ассоциируется распределение фазовой жидкости на волокнах аттрактора, не имеющее выраженных локальных уплотнений и описываемое непрерывной функцией координаты, отсчитываемой вдоль волокон.

### 3. Модель с аттрактором типа Смейла - Вильямса

Обратимся к простой механической задаче, в которой получается отображение с гиперболическим аттрактором типа Смейла – Вильямса [11,8]. Рассмотрим движение частицы единичной массы на плоскости при наличии трения, пропорционального мгновенной скорости, и в стационарном потенциальном поле  $U(x, y) = -\frac{1}{2}\mu(x^2 + y^2) + \frac{1}{4}\mu(x^2 + y^2)^2$  с минимумом на единичной окружности. Примем, что с периодом  $T$  на короткое время включается дополнительное силовое поле, величина и направление которого зависят от мгновенного положения частицы, и частице сообщается импульс  $\mathbf{P} = \{P_x(x, y), P_y(x, y)\}$ . Здесь  $x$  и  $y$  координаты частицы, функции  $P_{x,y}$  описывают распределение силового поля. Полагая коэффициент трения единичным, запишем уравнения

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \dot{x} - \mu x(1 - x^2 - y^2) &= P_x(x, y) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT), \\ \ddot{y} + \dot{y} - \mu y(1 - x^2 - y^2) &= P_y(x, y) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT). \end{aligned} \quad (1)$$

Подберем теперь подходящее распределение силового поля  $\mathbf{P}(x, y)$ . Пусть вначале имеем кольцо из частиц, покоящихся на единичной окружности, с координатами  $x = \cos \varphi$  и  $y = \sin \varphi$ . После толчка силового поля каждая частица, характеризуемая начальным углом  $\varphi$ , получит импульс  $\mathbf{P}(x, y)$ , что приведет через некоторое время к изменению ее положения на плоскости. Если пока не учитывать потенциальное поле ( $\mu=0$ ), частица остановится в точке с координатами  $x' = x + P_x(x, y)$ ,

$y' = y + P_y(x, y)$ . Зададим функции  $P_x$  и  $P_y$  так, чтобы частицы расположились опять по единичной окружности, но один обход исходного кольца отвечал двукратному обходу при новом их размещении. Для этого должно быть  $x' = \cos \varphi' = \cos 2\varphi$ ,  $y' = \sin \varphi' = \sin 2\varphi$  и  $P_x + iP_y = (x + iy)^2 - (x + iy)$ . На единичной окружности  $y^2 = 1 - x^2$ , поэтому можно взять  $P_x(x, y) = 2x^2 - x - 1$ ,  $P_y(x, y) = 2xy - y$ .

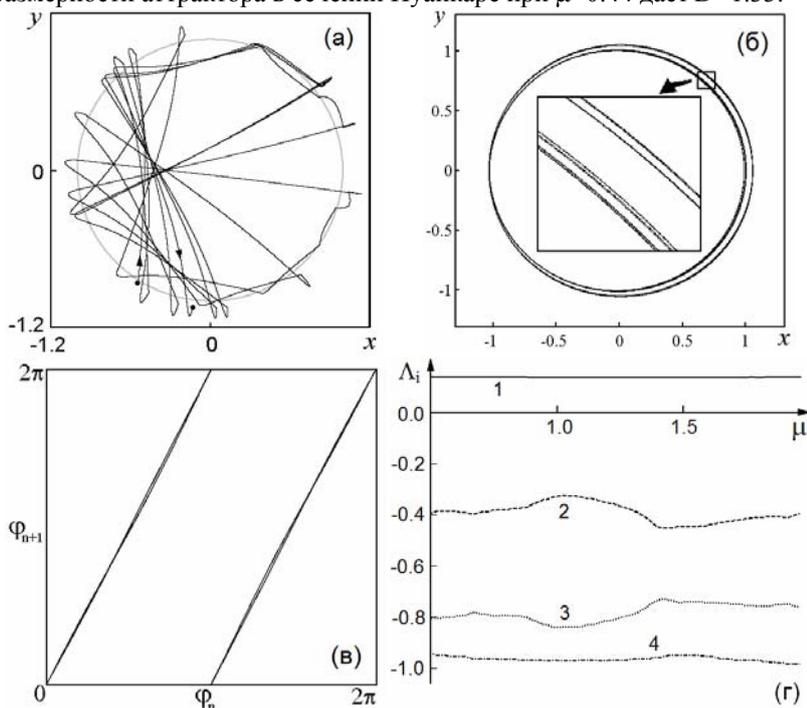
Параметр  $\mu$  примем относительно малым, чтобы отклонение частицы под действием потенциального поля  $U(x, y)$  за время движения, вызванного толчком, было невелико. С другой стороны, величину интервала между толчками  $T$  выберем достаточно большой, чтобы частица успевала подойти к минимуму потенциального поля.

Задав начальное состояние в момент перед  $n$ -м импульсом,  $\mathbf{x}_n = \{x, \dot{x}, y, \dot{y}\}_{t=nT-0}$ , можно определить состояние перед  $n+1$ -ым импульсом из решения на периоде  $T$  уравнений (1) с нулевыми правыми частями и условиями после толчка,  $x|_{nT+0} = x_n$ ,  $\dot{x}|_{nT+0} = \dot{x}_n + P_x(x_n, y_n)$ ,  $y|_{nT+0} = y_n$ ,  $\dot{y}|_{nT+0} = \dot{y}_n + P_y(x_n, y_n)$ . В результате приходим к четырехмерному отображению Пуанкаре. Хотя оно не выводится аналитически, его действие нетрудно определить численно, решая дифференциальные уравнения на компьютере.

Для возникновения аттрактора Смейла – Вильямса существенным является топологическое свойство ансамбля частиц, а именно, появление двойной петли, охватывающей начало координат, с двукратным растяжением по циклической (угловой) переменной. Сжатие в фазовом пространстве в поперечном направлении осуществляется за счет трения, пока частица дрейфует в потенциальном поле к потенциальному минимуму на единичной окружности. В отличие от классического построения, аттрактор Смейла – Вильямса вложен в четырехмерное фазовое пространство, а не в трехмерное.

На рис. 5 показана траектория частицы на плоскости  $(x, y)$  в процессе движения, отвечающего пребыванию на аттракторе (а). Приведен также портрет аттрактора в стробоскопическом сечении (б) и итерационная диаграмма (в) для угловой координаты, определенной перед каждым очередным толчком как  $\varphi_n = \text{arg}(x(nT - 0) + iy(nT - 0))$ . Аттрактор соответствует изображению соленоида с различной канторовой поперечной структурой. Диаграмма для угловой координаты отвечает растягивающему отображению окружности, или отображению Бернулли. На диаграмме (г) приводятся полученные при численных расчетах графики показателей Ляпунова в зависимости от параметра  $\mu$  при фиксированном периоде  $T$ . Заметим, что старший показатель Ляпунова остается приблизительно постоянным, и для стробоскопического отображения

он близок к величине  $\Lambda_1 \approx \ln 2$ , которая соответствует отображению Бернулли, приближенно описывающему динамику угловой переменной. Остальные показатели Ляпунова отрицательные. Оценка фрактальной размерности аттрактора в сечении Пуанкаре при  $\mu=0.44$  дает  $D=1.33$ .



**Рис. 5.** Траектория частицы на плоскости (а), портрет аттрактора отображения Пуанкаре в проекции на плоскость  $(x, y)$  (б), диаграмма для угловой координаты (в) при  $\mu=0.44$ ,  $T=5$ . График зависимости показателей Ляпунова от параметра  $\mu$  при  $T=5$  (г).

### 3. Модель с аттрактором типа Плыкина

В этом разделе будет рассмотрена модельная система с аттрактором типа Плыкина [8,9]. Недавно в работе автора [12] было показано, как можно реализовать соответствующее электронное устройство, и выполнено моделирование в схемотехнической программной среде MULTISIM, позволившее продемонстрировать присутствие хаотической динамики, отвечающей данному типу аттрактора.

Начнем с построения динамической системы, мгновенные состояния которой отвечают точкам единичной сферы и задаются переменными  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , подчиненными условию  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  (рис.6а). Роль «дырок», наличие которых обязательно для обеспечения существования аттрак-

тора типа Плыкина, будут играть окрестности точек, отмеченных как  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ . Северный и южный полюсы обозначим  $N$  и  $S$ . Рассмотрим последовательность выполняемых одно за другим непрерывных преобразований, каждое продолжительностью в единицу времени, описываемых приведенными ниже дифференциальными уравнениями.

Первая стадия состоит в смещении изображающих точек на сфере от меридианов NABS и NCDS вдоль параллелей к равноудаленной меридиональной окружности:

$$\dot{x} = -\epsilon xy^2, \quad \dot{y} = \epsilon x^2 y, \quad \dot{z} = 0. \quad (2)$$

Вторая стадия отвечает дифференциальному вращению вокруг оси  $z$  с угловой скоростью, линейно зависящей от  $z$ , так что на параллели BC точки не смещаются, а на параллели AD совершают поворот на  $180^\circ$ :

$$\dot{x} = \pi(z/\sqrt{2} + 1/2)y, \quad \dot{y} = -\pi(z/\sqrt{2} + 1/2)x, \quad \dot{z} = 0. \quad (3)$$

На третьей и четвертой стадиях производятся аналогичные преобразования, но оси  $x$  и  $z$  меняются ролями, т.е. уравнения имеют вид

$$\dot{x} = 0, \quad \dot{y} = \epsilon yz^2, \quad \dot{z} = -\epsilon y^2 z \quad (4)$$

и

$$\dot{x} = 0, \quad \dot{y} = -\pi(x/\sqrt{2} + 1/2)z, \quad \dot{z} = \pi(x/\sqrt{2} + 1/2)y. \quad (5)$$

Интуитивно кажется правдоподобным, что такая последовательность преобразований породит на сфере поток, формирующий слоистую поперечную структуру, характерную для аттракторов типа Плыкина.

Решая аналитически дифференциальные уравнения для каждой стадии, можно получить отображение за период, как композицию отображений, отвечающих всем четырем стадиям:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}_+ \circ \mathbf{f}_- (\mathbf{x}_n), \quad \mathbf{f}_\pm (\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\pm z}{ye^{\frac{\epsilon}{2}(x^2+y^2)} \cos \frac{\pi}{2}(z\sqrt{2}+1) \pm xe^{-\frac{\epsilon}{2}(x^2+y^2)} \sin \frac{\pi}{2}(z\sqrt{2}+1)} \\ \sqrt{\text{ch} \epsilon(x^2+y^2) + \epsilon(y^2-x^2)} \frac{\text{sh} \epsilon(x^2+y^2)}{\epsilon(x^2+y^2)} \\ \frac{ye^{\frac{\epsilon}{2}(x^2+y^2)} \sin \frac{\pi}{2}(z\sqrt{2}+1) \mp xe^{-\frac{\epsilon}{2}(x^2+y^2)} \cos \frac{\pi}{2}(z\sqrt{2}+1)} \\ \sqrt{\text{ch} \epsilon(x^2+y^2) + \epsilon(y^2-x^2)} \frac{\text{sh} \epsilon(x^2+y^2)}{\epsilon(x^2+y^2)} \end{pmatrix} \quad (6)$$

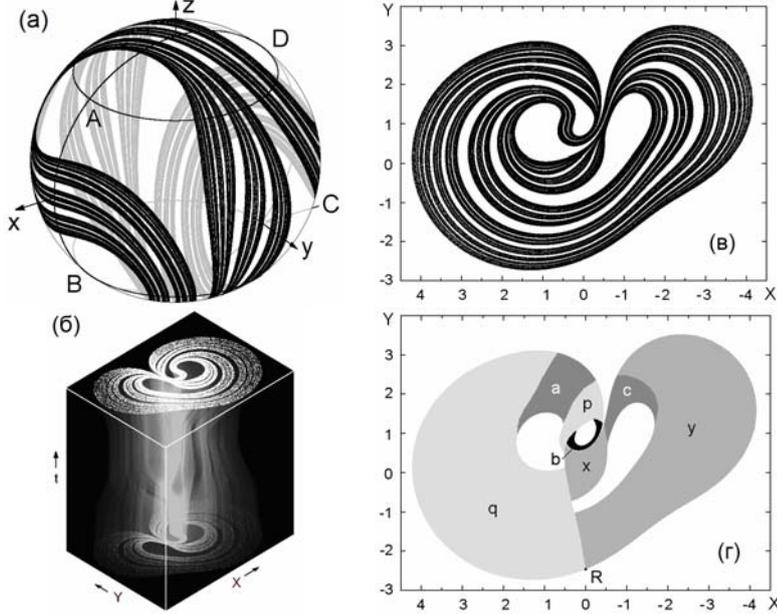
Заметим, что точка  $C$  является (неустойчивой) неподвижной точкой отображения, а точки  $A$ ,  $B$ ,  $D$  образуют (неустойчивый) цикл периода 3.

На рис. 6а показан аттрактор отображения на сфере при  $\epsilon=0.77$ . Отметим наличие характерной поперечной фрактальной структуры, как бы составленной из полосок, каждая из которых содержит полоски следующего уровня, и так далее. Показатели Ляпунова аттрактора при выбранных параметрах найдены равными  $\Lambda_1 = 0.959$ ,  $\Lambda_2 = -1.141$ .

Описание динамики можно переформулировать так, чтобы состояния системы представлялись на плоскости. Для этого делаем замену

$$W = X + iY = (x - z + iy\sqrt{2}) / (x + z + \sqrt{2}), \quad (7)$$

что отвечает стереографической проекции сферы на плоскость с выбором за центр проецирования точки  $C$ . Эта точка на протяжении всех стадий находится в «дырке», поэтому изображение аттрактора на плоскости расположится в ограниченной области. Можно вывести уравнения, описывающие динамику на плоскости в непрерывном времени в переменных  $X, Y$  [9], но они здесь не приводятся из-за их громоздкости.



**Рис.6.** Аттрактор отображения (6) при  $\epsilon=0.77$  на единичной сфере (а), аттрактор системы, заданной уравнениями (2)-(5), в расширенном фазовом пространстве (б), портрет аттрактора в сечении Пуанкаре на плоскости (в) и марковское разбиение содержащей аттрактор области (г). Для более наглядного сравнения с рис.4б, направление горизонтальной оси на диаграммах (в) и (г) инвертировано. Анимации, показывающие преобразования на сфере и на плоскости, можно посмотреть на странице <http://www.sgtnd.narod.ru/science/hyper/rus/index.htm>

На рис.6б показан портрет аттрактора системы в трехмерном расширенном фазовом пространстве. В сечении горизонтальной плоскостью имеет место объект, показанный отдельно на рис.6в. Его можно получить также как аттрактор отображения (6) в координатах, определяемых заменой (7). На рис.6г представлено марковское разбиение области, содержащей аттрактор. Граница между областями разбиения дается устойчивым многообразием неподвижной точки  $R$ . Сопоставляя эту диа-

грамму с рис.4б, можно убедиться в топологической эквивалентности этих аттракторов. Обозначения элементов разбиения буквами установлены так, чтобы правила грамматики при символическом описании динамики соответствовали друг другу на одном и другом рисунке.

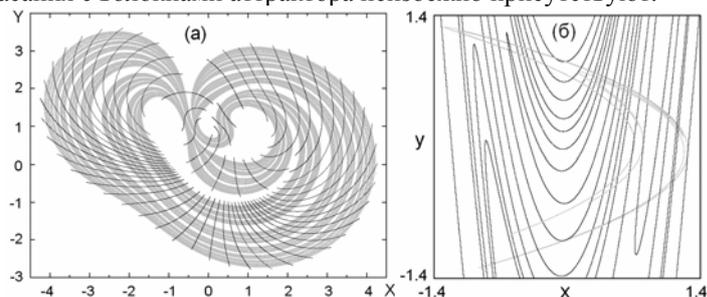
#### 4. Проверка гиперболичности

Физические и технические устройства обычно не приспособлены для облегчения математических доказательств в отношении описывающих их уравнений. Поэтому для проверки аттракторов, которые являются, или потенциально могут быть равномерно гиперболическими, жизненно важным становится применение вычислительного инструментария. Обоснование гиперболичности необходимо для того, чтобы иметь возможность опираться в исследованиях и приложениях на выводы математической теории, которые могут иметь практическое значение, как, например, структурная устойчивость, или возможность описания динамики с использованием марковских разбиений с конечным алфавитом.

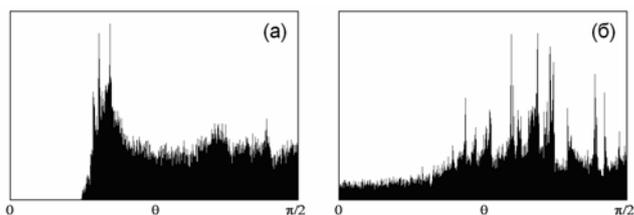
Один подход к проверке гиперболичности основан на критерии конусов, упоминавшемся в разделе 2. Иллюстрации применения этого критерия не отличаются наглядностью, так что ограничимся здесь ссылками на работы, где с его помощью подтверждена гиперболичность аттракторов в нескольких моделях [13,9].

Как отмечалось выше, принципиальной для гиперболических аттракторов является трансверсальность многообразий. Простой и убедительный способ проверить это свойство в случае двумерного отображения Пуанкаре (когда аттрактор имеет один положительный и один отрицательный показатель Ляпунова) состоит в том, чтобы представить многообразия графически. Поскольку неустойчивые многообразия располагаются вдоль волокон аттрактора, для заключения о наличии трансверсальности достаточно изобразить устойчивые многообразия на фоне самого аттрактора. Для построения устойчивого многообразия стартуем из точки на аттракторе  $x$  и проводим некоторое число итераций отображения, а затем придаем конечному состоянию малое случайное возмущение, и выполняем такое же число шагов назад во времени, отмечая на графике полученную в итоге точку. При достаточно большом числе повторений операции эти точки прорисуют кривую, отвечающую устойчивому многообразию точки  $x$ . Далее процедура производится для других точек, чтобы получить представительное семейство кривых. На рис.7 показан результат описанного построения для обсуждавшегося в предыдущем разделе аттрактора типа Плыкина на плоскости, и для сравнения рядом приведена аналогичная диаграмма для негиперболического хаотического аттрактора в отображении Эно. Как можно видеть, в первом случае устойчивые многообразия, обозначенные черным цветом, везде проходят поперек волокон аттрактора, изображенного серым

цветом. Во втором случае устойчивые многообразия расположены так, что касания с волокнами аттрактора неизбежно присутствуют.



**Рис.7.** Портреты аттракторов (серый цвет), на фоне которых представлены семейства устойчивых многообразий (черный цвет): однородно гиперболический аттрактор типа Плькина в системе (б) при  $\epsilon=0.77$  (а) и аттрактор в отображении Эно  $x_{n+1} = 1 - 1.4x_n^2 + 0.3y_n$ ,  $y_{n+1} = x_n$  (б).

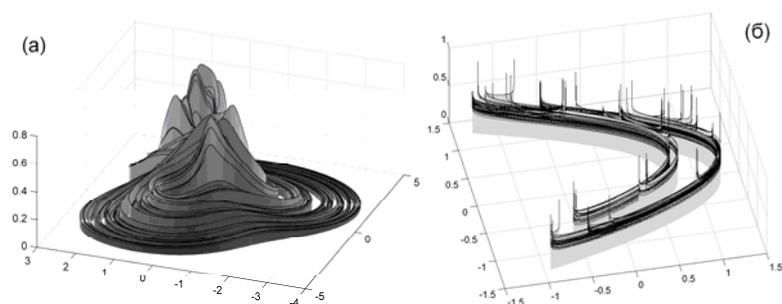


**Рис.8.** Гистограммы распределения углов между устойчивым и неустойчивым подпространствами для гиперболического аттрактора типа Плькина в системе (б) при  $\epsilon=0.77$  (а) и для негиперболического аттрактора в отображении Эно  $x_{n+1} = 1 - 1.4x_n^2 + 0.3y_n$ ,  $y_{n+1} = x_n$  (б).

Другой метод, пригодный также и при более высокой размерности анализируемых отображений, заключается в рассмотрении статистического распределения углов между устойчивыми и неустойчивыми подпространствами векторов возмущений для множества точек на аттракторе. Вкратце, алгоритм состоит в том, что сначала путем решения системы линейных уравнений в вариациях вдоль траектории на аттракторе строим набор неустойчивых векторов возмущения в точках этой траектории. Потом, решением линейной системы уравнений вдоль той же траектории назад во времени, определяем в точках траектории ортогональное дополнение к устойчивому подпространству. Эти данные дают возможность найти углы между устойчивым и неустойчивым подпространством на множестве рассмотренных точек траектории и построить соответствующую гистограмму. Если распределение удалено от области нулевых углов, то это указывает на гиперболическую природу аттрактора. На рис.8 приводятся гистограммы распределений углов для моде-

ли с аттрактором Плыкина и для аттрактора отображения Эно. Их вид свидетельствует о гиперболической природе аттрактора в первом случае и негиперболической во втором. Для более детального ознакомления с методикой можно обратиться к работам [14-16, 9].

Наконец, еще один наглядный метод идентификации гиперболических аттракторов, основан на визуализации распределений вероятности, отвечающих инвариантной мере. Для гиперболических аттракторов распределение фазовой жидкости вдоль волокон аттрактора должно выглядеть, как непрерывная функция, а для негиперболических аттракторов характерно присутствие сингулярностей типа локальных уплотнений. Простое разбиение области, содержащей аттрактор, на ячейки с подсчетом вероятностей попадания в эти ячейки, обычно не позволяет четко различить один и другой случай из-за достаточно сильных флуктуаций чисел заполнения ячеек. К успеху приводит модифицированная процедура, нацеленная специально на выявление характера распределения вдоль неустойчивых многообразий (детали см. в главе 7 книги [9]). На рис.9 приводятся диаграммы распределений, полученных для гиперболического аттрактора типа Плыкина и для негиперболического аттрактора отображения Эно. Во втором случае хорошо виден набор пиков, отвечающих локальным уплотнениям (сингулярностям). Чтобы представить эти пики в сопоставимом масштабе, по вертикальной оси использован логарифмический масштаб.



**Рис.9.** Диаграммы, иллюстрирующие распределения «фазовой жидкости» вдоль волокон аттракторов (а) для гиперболического аттрактора типа Плыкина в системе (б) и (б) для аттрактора в отображении Эно  $x_{n+1} = 1 - 1.4x_n^2 + 0.3y_n$ ,  $y_{n+1} = x_n$ .

## 5. Заключение

Подводя итоги, можно сказать, что к настоящему времени установлена возможность конструирования физических систем со структурно устойчивыми хаотическими аттракторами, известными ранее только как абстрактные математические образы. Если математики разрабатывают примеры, используя геометрические, топологические, алгебраические

конструкции, то физики вправе привлечь для целенаправленного построения моделей со структурно устойчивым хаосом свой инструментарий (частицы, поля, осцилляторы, цепи обратной связи). Этот подход дает перспективы приложений для хорошо развитой математической теории. Возникает основа для проведения сравнительных исследований гиперболического и негиперболического хаоса, в том числе в рамках компьютерного моделирования и в эксперименте. Можно думать, что модели, реализующие гиперболический хаос, окажутся полезными для приложений и для понимания фундаментальных вопросов, например, в отношении проблемы турбулентности [5], или в контексте такой быстро развивающейся дисциплины, как нейродинамика [17].

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 11-02-91334.*

### Литература

1. Смейл С. Дифференцируемые динамические системы // УМН. 1970. Т. 25, №1(151). С. 113–185.
2. Аносов Д.В. и др. Динамические системы с гиперболическим поведением // Динамические системы – 9, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. Направления. Т. 66. М.: ВИНТИ, 1991. 248с.
3. Синай Я.Г. Стохастичность динамических систем. // Нелинейные волны. М.: Наука, 1979. С. 192-212.
4. Каток А.Б., Хасселблат Б. Введение в современную теорию динамических систем. М.: Факториал, 1999. 768с.
5. Рюэль Д., Такенс Ф. О природе турбулентности // Странные аттракторы, под ред. Синай Я.Г. и Шильникова Л.П.. М., Мир, 1981. С. 117–151.
6. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959. 915с.
7. Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. М.– Ижевск: 2003. 428с.
8. Кузнецов С.П. Динамический хаос и однородно гиперболические аттракторы: от математики к физике // УФН. Т.181. 2011, №2. С. 121-149.
9. Kuznetsov S.P. Hyperbolic Chaos: A Physicist's View. Higher Education Press: Beijing and Springer-Verlag: Berlin, Heidelberg, 2012. 336p.
10. Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. М.– Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. 560с.
11. Кузнецов С.П., Тюрюкина Л.В. Аттракторы типа Смейла – Вильямса в модельных системах с импульсным периодическим воздействием // Известия вузов – Прикладная нелинейная динамика. Т. 18. 2010, №5. С. 80-92.
12. Kuznetsov S.P. Plykin type attractor in electronic device simulated in MULTISIM. CHAOS. V. 21. 2011, No 4. P. 043105.
13. Кузнецов С.П., Сатаев И.Р. Проверка условий гиперболичности хаотического аттрактора в системе связанных неавтономных осцилляторов ван дер Поля // Известия вузов – Прикладная нелинейная динамика. Т.14. 2006, №5. С.3-29.
14. Lai Y.-C. Grebogi, C. Yorke J. A., Kan I. How often are chaotic saddles non-hyperbolic? // Nonlinearity. V. 6. 1993, No 5. P. 779-798.

15. *Anishchenko V.S. et al.* Studying hyperbolicity in chaotic systems // *Physics Letters A*. V. 270. 2000, No 6. P. 301-307.
16. *P.V. Kuptsov.* Fast numerical test of hyperbolic chaos // *Phys. Rev. E*. V. 85. 2012, No 1. P. 015203.
17. *Belykh V., Belykh I., Mosekilde E.* The hyperbolic Plykin attractor can exist in neuron models // *Int. J. of Bifurcation and Chaos*. 2005. V.15, No 11. P.3567-3578.