



## ОДНОРОДНО ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЙ АТТРАКТОР В СИСТЕМЕ НА ОСНОВЕ СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ С СЕПАРАТРИСОЙ В ВИДЕ «ВОСЬМЕРКИ»

*В. П. Круглов<sup>1,2</sup>, Л. М.-Б. Хаджиева<sup>2,3</sup>*

<sup>1</sup>Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Саратовский филиал  
Россия, 410019 Саратов, Зеленая, д. 38

<sup>2</sup>Национальный исследовательский  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83

<sup>3</sup>Чеченский государственный университет  
Россия, 364093 Грозный, А. Шерипова, 32

E-mail: [kruglovyacheslav@gmail.com](mailto:kruglovyacheslav@gmail.com); [leyla.khadzhieva@gmail.com](mailto:leyla.khadzhieva@gmail.com)

В работе предложена и исследована новая автономная система с гиперболической хаотической динамикой, отвечающей аттрактору Смейла–Вильямса в отображении Пуанкаре, сконструированная на основе модели, рассмотренной в свое время Ю.И. Неймарком и имеющей на фазовой плоскости сепаратрису в форме восьмерки.

Предлагаемая модель составлена из двух подсистем Неймарка, характеризующихся обобщенными координатами  $x$  и  $y$ . В уравнения добавлены члены, придающие подсистемам автоколебательный характер. Кроме того, специальная связь между подсистемами обеспечивает утроение угла поворота вектора  $(x, y)$  при возвратах в окрестность начала координат на последовательных обходах сепаратрисы. Исследование подсистем основано на численном решении уравнений динамики с построением отображения Пуанкаре.

Результаты численного моделирования (итерационная диаграмма для угловой переменной, значения показателей Ляпунова) демонстрируют, что угловая переменная подвергается растягивающему отображению окружности, а по остальным направлениям происходит сильное сжатие элемента фазового объема. Построено распределение углов между устойчивым и неустойчивым многообразиями аттрактора и с его помощью показано, что выполняется свойство трансверсальности многообразий аттрактора. Структурная устойчивость аттрактора подтверждается гладкой зависимостью старшего показателя Ляпунова от параметров.

Проведенные исследования показали, что в фазовом пространстве предложенной системы в определенной области параметров наблюдается аттрактор типа Смейла–Вильямса.

*Ключевые слова:* Хаос, аттрактор, соленоид Смейла–Вильямса, показатель Ляпунова.

DOI: 10.18500/0869-6632-2016-24-6-54-64

*Ссылка на статью:* Круглов В.П., Хаджиева Л.М.-Б. Однородно гиперболический аттрактор в системе на основе связанных осцилляторов с сепаратрисой в виде «восьмерки» // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2016. Т. 24, № 6. С. 54–64.

# UNIFORMLY HYPERBOLIC ATTRACTOR IN A SYSTEM BASED ON COUPLED OSCILLATORS WITH «FIGURE-EIGHT» SEPARATRIX

*V. P. Kruglov<sup>1,2</sup>, L. M.-B. Khadzhieva<sup>2,3</sup>*

<sup>1</sup>V.A. Kotelnikov Institute of Radio Engineering and Electronics of RAS, Saratov Branch

Zelenaya str., 38, 410019 Saratov, Russia

<sup>2</sup>National Research Saratov State University

Astrakhanskaya str., 83, 410012 Saratov, Russia

<sup>3</sup>Chechen State University

Sheripova str. 32, 364093 Grozny, Russia

E-mail: kruglovyacheslav@gmail.com; leyla.khadzhieva@gmail.com

A new autonomous system with chaotic dynamics corresponding to Smale–Williams attractor in Poincaré map is introduced. The system is constructed on the basis of the model with «figure-eight» separatrix on the phase plane discussed in former times by Y.I. Neimark.

Our system is composed of two Neimark subsystems with generalized coordinates  $x$  and  $y$ . It is described by the equations with additional terms due to which the system becomes self-oscillating. Furthermore, a special coupling between subsystems provides the tripling of the angle of vector  $(x, y)$  rotation when returning to the neighborhood of the origin in successive rounds on separatrix. Study is based on the numerical solution of the dynamical equations with the construction of the Poincaré map.

Results of numerical simulation (iteration diagram for the angular variable, Lyapunov exponents) demonstrate that the angular variable undergoes expanding circle map, while in the other directions there is a strong compression of the phase volume element. Distribution of angles between stable and unstable manifolds of the attractor is obtained and it confirms the property of transversal manifolds of the attractor. Structural stability of the attractor is confirmed by the smooth dependence of the highest Lyapunov exponent on the parameters. With this we conclude that the attractor of the Smale–Williams type is observed in the phase space of the proposed system in a certain range of parameters.

*Keywords:* Chaos, attractor, Smale–Williams solenoid, Lyapunov exponent.

DOI: 10.18500/0869-6632-2016-24-6-54-64

*Paper reference:* Kruglov V.P., Khadzhieva L.M.-B. Uniformly hyperbolic attractor in a system based on coupled oscillators with «figure-eight» separatrix. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2016. Vol. 24. Issue 6. P. 54–64.

## Введение

До недавних пор примеры гиперболического хаоса, характеризующего свойством грубости (структурной устойчивости) были представлены лишь сконструированными математическими примерами [1–3]. На рис. 1 показано построение одного из вариантов соленоида Смейла–Вильямса, когда область в виде тора в трехмерном пространстве за один шаг эволюции претерпевает продольное растяжение, поперечное сжатие и складывание тройной петлей, оказываясь расположенной внутри исходного тора. С увеличением числа шагов количество витков трансформируемого объекта стремится к бесконечности, и возникает аттрактор – соленоид, имеющий в поперечном направлении структуру типа канторова множества. Такие аттракторы могут иметь место также и в пространстве размерности выше трех.

В последнее время указаны примеры физически реализуемых систем, описываемых дифференциальными уравнениями, с однородно гиперболическими аттракторами типа соленоида Смейла–Вильямса в сечении Пуанкаре [4–6]. Принцип

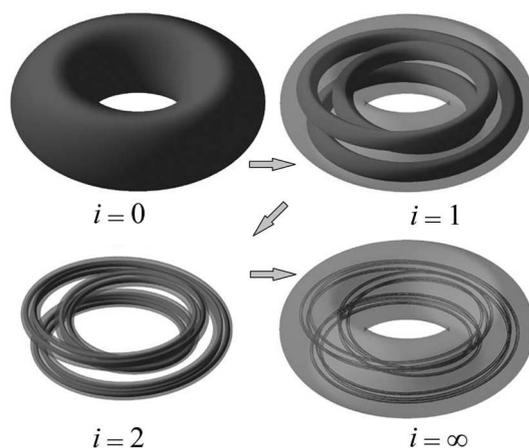


Рис. 1. Пример построения соленоида Смейла–Вильямса с утросением угловой переменной

работы этих систем основан на специально подобранном преобразовании угловой переменной (например, фазы колебаний) за некоторый характерный период. Чтобы в сечении Пуанкаре системы реализовался аттрактор типа Смейла–Вильямса, угловая переменная должна подвергаться растягивающему отображению окружности, по остальным переменным отображения Пуанкаре должно иметь место сжатие элемента фазового объема. Большинство рассматривавшихся систем с аттрактором типа Смейла–Вильямса неавтономные, хотя примеры автономных систем тоже известны. Один из них основан на модификации модели «хищник–жертва» с предельным циклом, проходящим в окрестности седла [4].

При этом коэффициенты роста в уравнениях зависят от переменных и изменяют знак по очереди. Благодаря комплексификации уравнений и добавлению определенным образом подобранной нелинейной связи между подсистемами, была получена четырехмерная автономная система с аттрактором Смейла–Вильямса в сечении Пуанкаре. В той же работе была рассмотрена шестимерная автономная система с аттрактором Смейла–Вильямса в сечении Пуанкаре, возникающим в окрестности возмущенного гетероклинического цикла. В работе [6] был введен в рассмотрение пример распределенной автономной системы с аттрактором типа Смейла–Вильямса.

В настоящей работе мы предлагаем новый пример автономной системы с аттрактором Смейла–Вильямса, построенной на основе двух подсистем, каждая из которых представляет собой осциллятор с сепаратрисой седла в виде «восьмерки» [7, 8]. Обобщенные координаты, относящиеся к этим подсистемам, могут рассматриваться как действительная и мнимая части комплексной переменной. Благодаря связи между подсистемами, установленной в некотором специальном виде, аргумент комплексной переменной подвергается растягивающему отображению окружности на каждом очередном цикле, когда траектория проходит рядом с седлом, лежащим в начале координат.

## 1. Основные уравнения

Исходной является система Неймарка [7,8]

$$\begin{aligned} \dot{X} &= U, \\ \dot{U} &= (1 - X^2)X + [L - (1 - X^2)^2]U, \end{aligned} \tag{1}$$

в которой при положительных значениях параметра надкритичности  $L$  возможны периодические автоколебания. Точка  $X = 0, U = 0$  является седловой. На рис. 2 представлены фазовые портреты системы (1) при некоторых положительных

значениях параметра  $L$ . При значении  $L \approx 0.3197$  происходит бифуркация «влипания» предельных циклов в петли, образованные асимптотическими траекториями седла (рис. 2, б). При этом периодические автоколебания наблюдаются при значениях  $L$  больше и меньше бифуркационного.

Рассмотрим теперь две связанные системы, характеризующиеся обобщенными координатами  $x$  и  $y$ , и сконструируем уравнения так, чтобы переменная, определенная как сумма квадратов  $x^2 + y^2$ , демонстрировала такую же динамику, как величина  $X^2$  в уравнениях (1). А именно, полагаем

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u, \\ \dot{u} &= (1 - x^2 - y^2)x + [L - (1 - x^2 - y^2)^2]u, \\ \dot{y} &= v, \\ \dot{v} &= (1 - x^2 - y^2)y + [L - (1 - x^2 - y^2)^2]v. \end{aligned} \quad (2)$$

Следующий шаг состоит в том, что мы вводим дополнительную связь так, чтобы при проходе траектории вблизи седловой точки происходило утроение угловой переменной, определенной как аргумент комплексного числа  $x + iy$ . А именно, полагаем

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u, \\ \dot{u} &= (1 - x^2 - y^2)x + [L - (1 - x^2 - y^2)^2]u + \varepsilon(u^3 - 3uv^2), \\ \dot{y} &= v, \\ \dot{v} &= (1 - x^2 - y^2)y + [L - (1 - x^2 - y^2)^2]v + \varepsilon(3u^2v - v^3), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\varepsilon$  – параметр связи.

Уравнения можно переписать в комплексной форме:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= w, \\ \dot{w} &= (1 - |z|^2)z + \left[ L - (1 - |z|^2)^2 \right] w + \varepsilon w^3, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $z = x + iy$  и  $w = u + iv$ .

Функционирование системы можно пояснить следующим образом. Аргумент переменной  $z$  обозначим  $\theta$ , то есть  $z = C \exp(i\theta)$ . Когда абсолютная величина  $z$  близка к нулю (траектория близка к седлу в начале координат), угловая переменная  $\theta$  претерпевает утроение благодаря слагаемому  $\varepsilon w^3$  и кубической нелинейности  $(1 - |z|^2)z$ . Таким образом, угловая переменная подвергается растягивающему отображению окружности  $\theta_{n+1} = 3\theta_n + \text{const}(\text{mod } 2\pi)$  после каждого нового возвращения траектории к седлу.

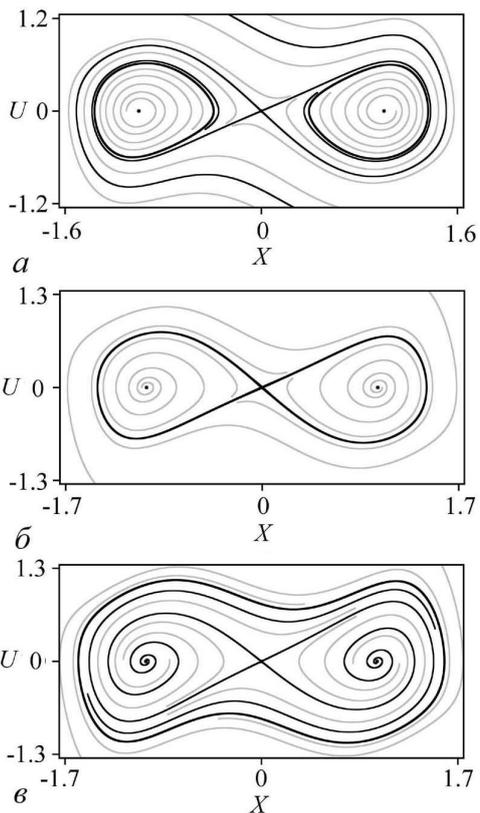


Рис. 2. Фазовые портреты системы (1) при  $L = 0.2$  (а),  $L \approx 0.3197$  (б) и  $L = 0.4$  (в). Предельные циклы изображены жирными линиями; отмечены неподвижные точки и асимптотические траектории

### Численные результаты

Система уравнений (3) решалась численно методом Рунге–Кутты четвертого порядка. На рис. 3 представлены примеры временных зависимостей динамических переменных системы (3) при значениях параметров  $L = 0.32$ ,  $\varepsilon = 0.02$ . Можно видеть, что динамические переменные меняются со временем нерегулярным образом. На рис. 4 изображен портрет аттрактора потоковой системы (3) в проекции на плоскость переменных  $(x, u)$  при значениях параметров  $L = 0.32$ ,  $\varepsilon = 0.02$ . Можно видеть, что фазовые траектории на аттракторе часто приближаются к седловой точке в начале координат.

Чтобы продемонстрировать устроение фазы, естественно обратиться к построению отображения Пуанкаре. Для этого в фазовом пространстве системы была выбрана секущая поверхность  $S = x^2 + y^2 = 1$ , причем пересечения ее фазовыми траекториями рассматриваются при движении в направлении увеличения  $S$ .

На рис. 5, а показана итерационная диаграмма для угловой переменной  $\theta$ , где по осям координат отложены ее значения, относящиеся к последовательным пе-

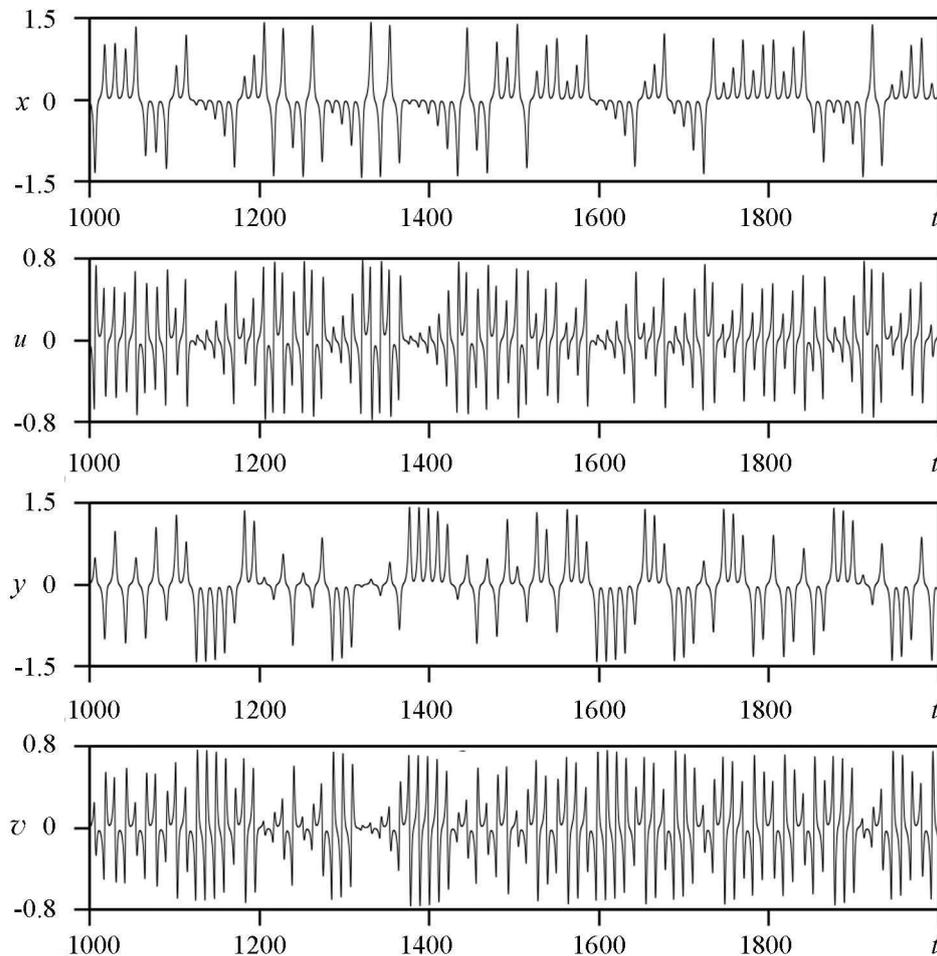


Рис. 3. Временные зависимости динамических переменных  $x, u, y, v$  системы (3) при значениях параметров  $L = 0.32$ ,  $\varepsilon = 0.02$

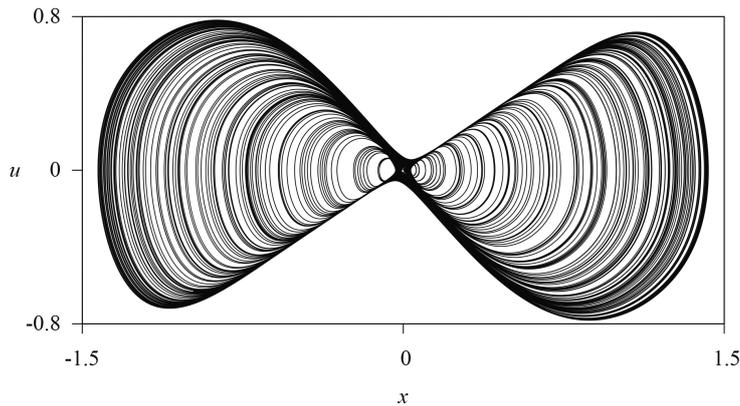


Рис. 4. Портрет аттрактора системы (3) в проекции на плоскость переменных  $(x, u)$  при значениях параметров  $L = 0.32$ ,  $\varepsilon = 0.02$

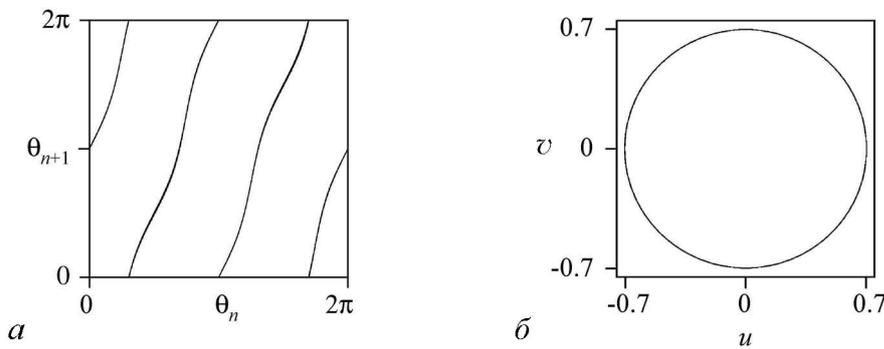


Рис. 5. *а* – Итерационная диаграмма для угловой переменной  $\theta$  при значениях параметров  $L = 0.32$ ,  $\varepsilon = 0.02$ ; *б* – портрет аттрактора отображения Пуанкаре системы (3)

ресечениям поверхности  $S = x^2 + y^2 = 1$  при значениях параметров  $L = 0.32$ ,  $\varepsilon = 0.02$ . Как можно видеть, она соответствует троекратно растягивающему отображению окружности. Можно заключить, что в системе реализуется преобразование угловой переменной, необходимое для возникновения соленоида Смейла–Вильямса. На рис. 5, *б* представлен портрет аттрактора отображения Пуанкаре, где по осям координат отложены переменные  $u$  и  $v$ .

Мы вычислили показатели Ляпунова отображения Пуанкаре системы (3) по алгоритму Бенеттина с ортогонализацией по Граму–Шмидту [9,10]. Уравнения (3) решались совместно с уравнениями в вариациях

$$\begin{aligned}
 \delta \dot{x} &= \delta u, \\
 \delta \dot{u} &= [(1 + 4xu)(1 - x^2 - y^2) - 2x^2]\delta x + \\
 &\quad + [L - (1 - x^2 - y^2)^2 + 3\varepsilon(u^2 - v^2)]\delta u + [4uy(1 - x^2 - y^2) - 2xy]\delta y - 6\varepsilon uv\delta v, \\
 \delta \dot{y} &= \delta v, \\
 \delta \dot{v} &= [4xv(1 - x^2 - y^2) - 2xy]\delta x + 6\varepsilon uv\delta u + \\
 &\quad + [(1 + 4yv)(1 - x^2 - y^2) - 2y^2]\delta y + [L - (1 - x^2 - y^2)^2 + 3\varepsilon(u^2 - v^2)]\delta v.
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Показатели Ляпунова для отображения Пуанкаре получаются, как нетрудно показать, умножением показателей потоковой системы на средний временной интервал между

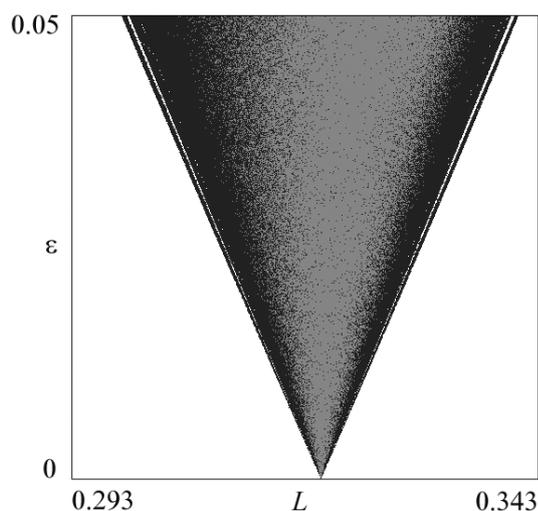


Рис. 6. Карта режимов системы (3) на плоскости параметров  $L$  и  $\varepsilon$ . Серым цветом помечены режимы, для которых показатели Ляпунова удовлетворяют условиям  $(\ln 3 - 0.1) < \lambda_1 < \ln 3$ ,  $\lambda_{2,3} < 0$ . Черным цветом представлены зоны, где положительный показатель Ляпунова не попадает в указанный интервал, а белым цветом – нехаотические режимы ( $\lambda_{1,2,3} < 0$ )

ет построению гиперболического аттрактора типа Смейла–Вильямса (если учесть, что растяжение происходит по угловой переменной) в трехмерном фазовом пространстве.

Известно, что однородно гиперболические аттракторы обладают свойством структурной устойчивости, то есть их устройство качественно не изменяется в некотором диапазоне параметров. Естественно полагать, что при этом старший показатель Ляпунова отображения Пуанкаре системы (3) остается близким к  $\ln 3$ .

На рис. 6 представлена карта режимов системы на плоскости параметров. Режимы, при которых старший показатель аттрактора близок к  $\ln 3$ , а именно,  $(\ln 3 - 0.1) < \lambda_1 < \ln 3$ , тогда как  $\lambda_{2,3} < 0$ , считаем ассоциирующимися с гиперболическим аттрактором типа Смейла–Вильямса, они помечены на карте серым цветом. Черным цветом показаны области, где положительный показатель Ляпунова не попадает в указанный интервал вблизи  $\ln 3$ . Белым цветом помечены нехаотические режимы ( $\lambda_{1,2,3} < 0$ ). Как и предполагалось, значения параметров, ассоциирующихся с гиперболическим аттрактором, образуют на карте режимов широкую область.

На рис. 7 изображены зависимости показателей Ляпунова отображения Пуанкаре от параметра  $L$  при фиксированном значении  $\varepsilon = 0.02$ . Старший показатель Ляпунова остается близким к  $\ln 3$  в широком интервале изменения параметра  $L$  в средней части диаграммы, остальные показатели при этом также почти не меняются. Это соответствует предположению о структурной устойчивости аттрактора.

Мы проверили гиперболическость аттрактора в сечении Пуанкаре с помощью численного теста, разработанного в работах [11–13]. Метод [13] основан на том, что устойчивые и неустойчивые многообразия гиперболического аттрактора могут пересекаться только трансверсально, то есть под ненулевым углом. Сначала мы получили

последовательными прохождением сечения Пуанкаре, причем нулевой показатель, имеющийся у потоковой системы, для отображения исключается.

При значениях параметров  $L = 0.32$ ,  $\varepsilon = 0.02$  показатели Ляпунова отображения Пуанкаре составили

$$\lambda_1 = 1.068, \quad \lambda_2 = -3.82, \quad \lambda_3 = -5.112.$$

Старший показатель оказывается положительным и близким к  $\ln 3 \approx 1.099$ , что соответствует показателю Ляпунова трехкратно растягивающего отображения окружности. Остальные два показателя отрицательные. Таким образом, элемент объема в фазовом пространстве отображения Пуанкаре испытывает за одну итерацию растяжение по одному направлению и сжатие по двум направлениям. Это соответству-

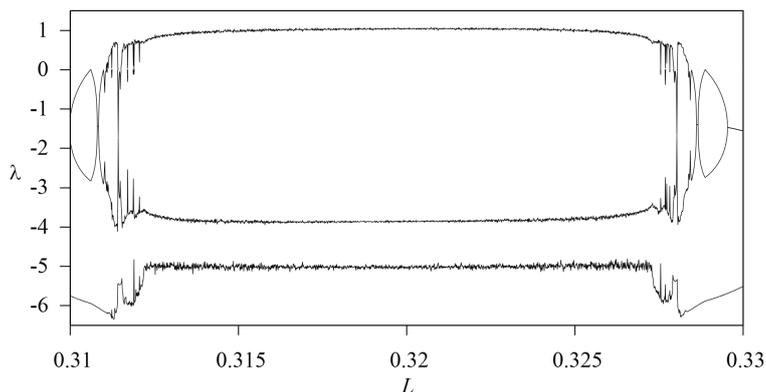


Рис. 7. Зависимости показателей Ляпунова отображения Пуанкаре от параметра  $L$  при фиксированном значении  $\varepsilon = 0.02$

достаточно длинную траекторию  $\{\mathbf{x}_n\}$ , принадлежащую трехмерному фазовому пространству отображения  $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_n)$  (отображение было получено не в аналитическом виде, а как численные итерации отображения Пуанкаре системы (3)). Также мы вычислили последовательность возмущенных векторов  $\{\delta\mathbf{x}_n\}$  вдоль траектории  $\{\mathbf{x}_n\}$ , удовлетворяющих линеаризованному уравнению  $\delta\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{J}(\mathbf{x}_n) \delta\mathbf{x}_n$  и нормированных на каждом шаге. Отметим, что  $\mathbf{J}(\mathbf{x}_n)$  – это матрица Якоби отображения  $\mathbf{F}(\mathbf{x}_n)$ , а векторы  $\{\delta\mathbf{x}_n\}$  принадлежат одномерному неустойчивому подпространству. Затем вдоль той же опорной траектории  $\{\mathbf{x}_n\}$  мы получили последовательность нормированных векторов  $\{\delta\mathbf{u}_n\}$ , нормальных к двумерному устойчивому многообразию, итерируя обратно во времени сопряженное уравнение  $\delta\mathbf{u}_n = \mathbf{J}^T(\mathbf{x}_n) \delta\mathbf{u}_{n+1}$ , где  $\mathbf{J}^T(\mathbf{x}_n)$  – транспонированная матрица Якоби. Мы вычислили углы  $\beta_n \in [0, \pi/2]$  между векторами  $\{\delta\mathbf{x}_n\}$  и  $\{\delta\mathbf{u}_n\}$ :  $\cos \beta_n = |\delta\mathbf{u}_n \cdot \delta\mathbf{x}_n|$ , и углы между многообразиями  $\alpha_n = \pi/2 - \beta_n$ . Процедура повторялась для различных опорных траекторий. На гистограмме откладывались количества пересечений многообразий под углами  $\alpha_n$ .

Хотя описанный тест не может претендовать на строгое обоснование гиперболичности аттрактора, он позволяет на практике различать гиперболические и негиперболические аттракторы [14, 15]. На рис. 8 представлена гистограмма распределения углов между многообразиями аттрактора в сечении Пуанкаре при значениях параметров  $L = 0.32$ ,  $\varepsilon = 0.02$ , и ее увеличенный фрагмент. Касания между многообразиями не обнаружены.

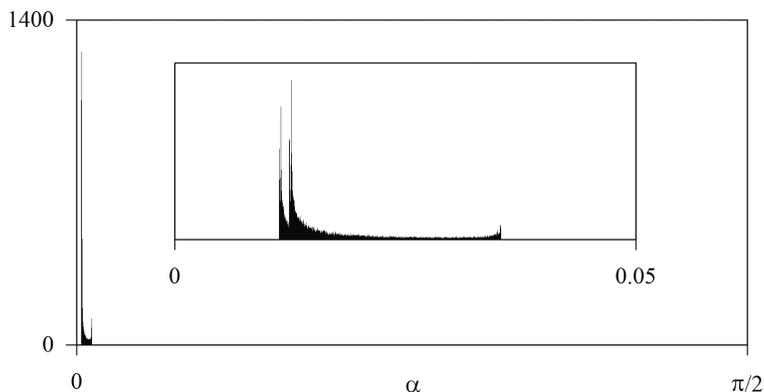


Рис. 8. Гистограмма распределения углов между многообразиями аттрактора в сечении Пуанкаре при значениях параметров  $L = 0.32$ ,  $\varepsilon = 0.02$ , и ее увеличенный фрагмент

## Заключение

В работе предложена автономная модель с аттрактором типа Смейла–Вильямса в сечении Пуанкаре. Модель описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка, следовательно, сконструированное из нее отображение Пуанкаре обладает минимально необходимой размерностью для возникновения соленоида. Модель состоит из двух связанных подсистем, основанных на двумерной системе с сепаратрисой седла в форме «восьмерки», предложенной Ю.И. Неймарком. Подсистемы модифицированы так, что в них наблюдаются периодические автоколебания. Между подсистемами установлена связь, такая, что в отображении Пуанкаре осуществляется утроение специально определенной угловой переменной. По остальным независимым переменным происходит сильное сжатие.

В ходе численного моделирования были получены результаты (итерационная диаграмма для фаз, значения показателей Ляпунова), свидетельствующие о существовании аттрактора типа Смейла–Вильямса в фазовом пространстве предложенной системы в определенной области параметров. Продемонстрированы гладкая зависимость старшего показателя Ляпунова от параметров и дистанцированное от нуля распределение углов между многообразиями аттрактора, являющиеся характерными атрибутами гиперболической динамики.

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 16-32-00449. Авторы выражают благодарность С.П. Кузнецову и И.Р. Сатаеву за консультации и обсуждения.*

## Библиографический список

1. *Kuznetsov S.P.* Hyperbolic Chaos: A Physicist's View. Higher Education Press: Beijing and Springer-Verlag: Berlin, Heidelberg, 2012. 336 p.
2. *Kuznetsov S.P.* Example of a physical system with a hyperbolic attractor of the Smale–Williams type // *Phys. Rev. Lett.* 2005. Vol. 95. P. 144101.
3. *Kuznetsov S.P.* Some mechanical systems manifesting robust chaos // *Nonlinear Dynamics and Mobile Robotics.* 2013. Vol. 1, № 1. P. 3–22.
4. *Kuznetsov S.P., Pikovsky A.* Autonomous coupled oscillators with hyperbolic strange attractors // *Physica D: Nonlinear Phenomena.* 2007. Vol. 232. № 2. P. 87–102.
5. *Kruglov V.P., Kuznetsov S.P.* An autonomous system with attractor of Smale–Williams type with resonance transfer of excitation in a ring array of van der Pol oscillators // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.* 2011. Vol. 16. № 8. P. 3219–3223.
6. *Kruglov V.P., Kuznetsov S.P., Pikovsky A.* Attractor of Smale–Williams type in an autonomous distributed system // *Regular and Chaotic Dynamics.* 2014. Vol. 19, № 4. P. 483–494.
7. *Неймарк Ю.И.* Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1972. с.129–135.
8. *Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.Л.* Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1987. С. 303 и далее.
9. *Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.M.* Lyapunov characteristic expo-

- nents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; a method for computing all of them. Part 1: Theory // *Meccanica*. 1980. Vol. 15. № 1. P. 9–20.
10. *Shimada I., Nagashima T.* A numerical approach to ergodic problem of dissipative dynamical systems // *Progress of Theoretical Physics*. 1979. Vol. 61. № 6. P. 1605–1616.
  11. *Lai Y.-C., Grebogi C., Yorke J.A., Kan I.* How often are chaotic saddles nonhyperbolic? // *Nonlinearity*. 1993. Vol. 6. P. 779–798.
  12. *Anishchenko V.S., Kopeikin A.S., Kurths J., Vadivasova T.E., Strelkova G.I.* Studying hyperbolicity in chaotic systems // *Physics Letters A*. 2000. Vol. 270. P. 301–307.
  13. *Kuptsov P.V.* Fast numerical test of hyperbolic chaos // *Phys. Rev. E*. 2012. Vol. 85, № 1. P. 015203.
  14. *Kuznetsov S.P., Kruglov V.P.* Verification of hyperbolicity for attractors of some mechanical systems with chaotic dynamics // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2016. Vol. 21. № 2. P. 160–174.
  15. *Круглов В.П.* Методика и результаты численной проверки гиперболической природы аттракторов для редуцированных моделей распределенных систем // *Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика*. 2014. Т. 22. № 6. С. 79–93.

## References

1. *Kuznetsov S.P.* *Hyperbolic Chaos: A Physicist's View*, Higher Education Press, Beijing and Springer-Verlag GmbH Berlin Heidelberg, 2012. 320 p.
2. *Kuznetsov S.P.* Example of a physical system with a hyperbolic attractor of the Smale–Williams type. *Phys. Rev. Lett.* 2005. Vol. 95. P. 144101.
3. *Kuznetsov S.P.* Some mechanical systems manifesting robust chaos. *Nonlinear Dynamics and Mobile Robotics*. 2013. Vol. 1, N1. P. 3.
4. *Kuznetsov S.P., Pikovsky A.* Autonomous coupled oscillators with hyperbolic strange attractors. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2007. Vol. 232. N2. P. 87–102.
5. *Kruglov V.P., Kuznetsov S.P.* An autonomous system with attractor of Smale–Williams type with resonance transfer of excitation in a ring array of van der Pol oscillators. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2011. Vol. 16. N 8. P. 3219–3223.
6. *Kruglov V.P., Kuznetsov S.P., Pikovsky A.* Attractor of Smale–Williams type in an autonomous distributed system. *Regular and Chaotic Dynamics*. 2014. Vol. 19, N 4. P. 483.
7. *Neimark Y.I.* *The Point Mapping Method in the Theory of Nonlinear Oscillation*. Moscow: Nauka, 1972. P. 129–135 (in Russian).
8. *Butenin N.V., Neimark Y.I., Fufaev N.A.* *Introduction to the Theory of Nonlinear Oscillation*. Moscow: Nauka, 1987. P. 303 (in Russian).
9. *Benettin, G., Galgani, L., Giorgilli, A., Strelcyn, J.M.* Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; a method for computing all of them. Part 1: Theory. *Meccanica*. 1980. Vol. 15. N 1. P. 9–20.
10. *Shimada I., Nagashima T.* A numerical approach to ergodic problem of dissipative

dynamical systems. Progress of Theoretical Physics. 1979. Vol. 61. N6. P. 1605–1616.

11. *Lai Y.-C., Grebogi C., Yorke J.A., Kan I.* How often are chaotic saddles nonhyperbolic? Nonlinearity. 1993. Vol. 6. P. 779–798.
12. *Anishchenko V.S., Kopeikin A.S., Kurths J., Vadivasova T.E., Strelkova G.I.* Studying hyperbolicity in chaotic systems. Physics Letters A. 2000. Vol. 270. P. 301.
13. *Kuptsov P.V.* Fast numerical test of hyperbolic chaos. Phys. Rev. E. 2012. Vol. 85, N 1. P. 015203.
14. *Kuznetsov S.P., Kruglov V.P.* Verification of hyperbolicity for attractors of some mechanical systems with chaotic dynamics. Regular and Chaotic Dynamics. 2016. Vol. 21, N 2. P. 160–174.
15. *Kruglov V.P.* Technique and results of numerical test for hyperbolic nature of attractors for reduced models of distributed systems. Izvestija VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2014. Vol. 22. N 6. P. 79–93 (in Russian).

*Поступила в редакцию 6.12.2016*

*Круглов Вячеслав Павлович* – родился в 1990 году. Окончил среднюю школу №8 Саратова (2007). Окончил факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского (2012). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (2016). Участвовал в научных конференциях «ХАОС», «Нелинейные волны», «Нелинейные дни для молодых», «Нанoeлектроника, нанофотоника и нелинейная физика», «Гамильтонова динамика, неавтономные системы и структуры в уравнениях с частными производными», «Динамика, бифуркации и странные аттракторы», «Geometry, Dynamics, Integrable Systems». Автор 7 статей в российских и международных научных журналах.



Россия, 410019 Саратов, Зеленая, д. 38  
Институт радиотехники и электроники  
им. В.А. Котельникова РАН, Саратовский филиал  
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
E-mail: [kruglovyacheslav@gmail.com](mailto:kruglovyacheslav@gmail.com)

*Хаджиева Лейла Мухамед-Бухараевна* – родилась в 1992 году. Окончила среднюю школу № 3 Красноармейска Саратовской области (2009). Окончила факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского (2014) и магистратуру по направлению «Прикладная математика и физика» (2016). В настоящее время работает в Чеченском государственном университете, в должности ассистента. Участвовала в научных конференциях «Нелинейные дни для молодых», «Нанoeлектроника, нанофотоника и нелинейная физика», «Geometry, Dynamics, Integrable Systems», «ХАОС».



Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
Россия, 364093 Грозный, А. Шерипова, 32  
Чеченский государственный университет  
E-mail: [leyla.khadzhiyeva@gmail.com](mailto:leyla.khadzhiyeva@gmail.com)