



УДК 517.9

## ДИНАМИКА СВЯЗАННЫХ ГЕНЕРАТОРОВ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ С СОСТОЯНИЕМ РАВНОВЕСИЯ

*А. П. Кузнецов<sup>1,3</sup>, Н. В. Станкевич<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН  
Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, д. 38

<sup>2</sup>Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю.А.  
Россия, 410054 Саратов, ул. Политехническая, 77

<sup>3</sup>Саратовский национальный исследовательский государственный  
университет имени Н.Г. Чернышевского  
Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
E-mail: apkuz@rambler.ru, stankevichnv@mail.ru

*Поступила в редакцию 10.03.2018, после доработки 10.04.2018*

**Предмет исследования.** В последнее время интерес вызывают задачи о синхронизации систем, способных демонстрировать квазипериодические колебания. В частности, это могут быть генераторы квазипериодических колебаний, допускающие радиофизическую реализацию. В настоящей работе рассматривается динамика двух связанных генераторов квазипериодических колебаний с одним состоянием равновесия. **Новизна.** Отличие от уже изученного случая связанных модифицированных генераторов Анищенко–Астахова состоит в привлечении двухпараметрического анализа и анализа в существенно более широком диапазоне изменения параметров, а также более низкой размерности уравнений отдельного генератора. **Методы исследования.** Используется метод карт Ляпуновских показателей, который выявляет области различного типа динамики, вплоть до четырехчастотных колебаний. Исследованы бифуркационные механизмы возникновения полной синхронизации. **Полученные результаты.** Продемонстрирована возможность синхронной квазипериодичности, когда фазы генераторов захвачены, но динамика системы является в целом квазипериодической. Выявлена возможность эффекта «гибели колебаний», возникающего за счет диссипативного характера связи. Продемонстрирована возможность эффекта широкополосной квазипериодичности. Его особенность состоит в том, что возникают двухчастотные колебания в определенном диапазоне изменения параметра связи и широком диапазоне частотной расстройки. Представлены бифуркационные механизмы данного эффекта. Показано, что для него характерно определенное вырождение, которое снимается при введении неидентичности по управляющим параметрам отдельных генераторов. Представлен бифуркационный анализ для этого случая. Двухпараметрический анализ позволил выявить на плоскости параметров точки квазипериодических бифуркаций коразмерности два QSNF (Quasi-periodic saddle-node fan), ассоциирующиеся с синхронизацией многочастотных торов. Эти точки являются острями языков двухчастотных режимов, имеющие порог по величине коэффициента связи. В их окрестности наблюдаются также трех- и четырехчастотные квазипериодические режимы. **Выводы.** Синхронизация квазипериодических генераторов обладает

рядом новых моментов, которые устанавливаются при двухпараметрическом анализе в широком диапазоне изменения параметров.

*Ключевые слова:* квазипериодические колебания, связанные генераторы, синхронизация.

DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-2-41-58

*Образец цитирования:* Кузнецов А.П., Станкевич Н.В. Динамика связанных генераторов квазипериодических колебаний с состоянием равновесия // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2018. Т. 26, № 2. С.41–58. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-2-41-58

## DYNAMICS OF COUPLED GENERATORS OF QUASI-PERIODIC OSCILLATIONS WITH EQUILIBRIUM STATE

*A. P. Kuznetsov<sup>1,3</sup>, N. V. Stankevich<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>Kotelnikov Institute of Radio-Engineering and Electronics of RAS, Saratov Branch  
38, Zelenaya, 410019 Saratov, Russia

<sup>2</sup>Yuri Gagarin State Technical University of Saratov  
77, Politechnicheskaya, 410054 Saratov, Russia

<sup>3</sup>Saratov State University  
83, Astrakhanskaya, 410012 Saratov, Russia  
E-mail: apkuz@rambler.ru, stankevichnv@mail.ru  
*Received 10.03.2018, revised 10.04.2018*

**Subject of the study.** Recently, the problems of synchronization of systems demonstrating quasi-periodic oscillations arouse interest. In particular, it can be generators of quasi-periodic oscillations that allow a radiophysical realization. In this paper we consider the dynamics of two coupled oscillators of quasi-periodic oscillations with a single equilibrium state. **Novelty.** The difference from the already studied case of coupled modified Anishchenko–Astakhov generators consists in engaging of two-parameter analysis and analysis in a much wider range of parameter changes, as well as a more dimensionless equation for an individual generator. **Methods.** The method of charts of Lyapunov exponents is used, which reveals areas of various types of dynamics, up to four-frequency oscillations. The bifurcation mechanisms of complete synchronization are investigated. **Results.** The possibility of synchronous quasi-periodicity is demonstrated, when the phases of the generators are locked, but the dynamics of the system is generally quasi-periodic. The possibility of the effect of «death of oscillations» arising due to the dissipative character of coupling is revealed. The possibility of the effect of broadband quasi-periodicity is demonstrated. Its peculiarity consists in the fact that two-frequency oscillations arise in a certain range of variation of the coupling parameter and a wide range of frequency mismatch. The bifurcation mechanisms of this effect are presented. It is shown that a certain degeneracy is characteristic for it, which is removed when nonidentity is introduced along the control parameters of individual generators. A bifurcation analysis is presented for this case. Two-parameter analysis allowed us to identify points of quasi-periodic bifurcations of codimension two QSNF (Quasi-periodic saddle-node fan) on the parameter plane, associated with the synchronization of multi-frequency tori. These points are the tips of the tongues of the two-frequency regimes, which have a threshold for the coupling coefficient. In their vicinity, three- and four-frequency quasi-periodic regimes are also observed. **Discussion.** Synchronization of quasi-periodic generators has a number of new moments that are established in two-parameter analysis in a wide range of parametric changes.

*Keywords:* quasi-periodic oscillations, coupled generators, synchronization.

DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-2-41-58

*References:* Kuznetsov A.P., Stankevich N.V. Dynamics of coupled generators of quasi-periodic oscillations with equilibrium state. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2018, vol. 26, iss. 2, pp. 41–58. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-2-41-58

## Введение

Квазипериодические колебания являются одним из хорошо известных классов колебаний [1–4]. Они занимают своего рода промежуточное положение между периодическими и хаотическими колебаниями. Квазипериодические колебания могут характеризоваться разным числом несоизмеримых частот, так что возникают представления о двух-, трех-, четырехчастотной и т.д. квазипериодичности, чему в фазовом пространстве отвечают инвариантные торы разной размерности. В последнее время квазипериодические колебания привлекают к себе внимание исследователей, поскольку существенно обогащают фундаментальные представления о динамике автоколебательных систем [3–29]. Базовыми объектами исследования являлись как неавтономные системы в виде различных связанных осцилляторов с предельными циклами, так и новые примеры автономных моделей с квазипериодическим поведением. Можно выделить такие феномены, как квазипериодические бифуркации (бифуркации инвариантных торов) [13, 14], резонансная паутина Арнольда [15], самоорганизующаяся квазипериодичность [17–19], возможность сценария Ландау–Хопфа [21], эффект «широкополосной синхронизации» [4, 20] и др. Интересно, что квазипериодичность с разным числом несоизмеримых частот и квазипериодические бифуркации возможны не только для связанных осцилляторов с предельными циклами, но и для подсистем с хаотической динамикой [22]. В работах [23–26] представлены исследования малоразмерных ансамблей отображений, где также возникают многочастотные квазипериодические колебания и квазипериодические бифуркации.

Когда квазипериодичность возникает в автономных системах, можно говорить о генераторах квазипериодических колебаний. В рамках подходов теории колебаний естественной является задача о взаимодействии квазипериодических генераторов. Соответствующие исследования проводились в [11, 12, 27]. Одним из первых вопросов в контексте такой задачи является выбор базовой модели. В работах [11, 12] использовался четырехмерный модифицированный генератор Анищенко–Астахова [10–12] и получены важные и существенные результаты, однако была изучена только область малых частотных расстройек и малой силы связи, и отсутствовал двухпараметрический анализ. В качестве базовой модели в [27] использовался более низкоразмерный (трехмерный) генератор квазипериодических колебаний, предложенный в [28]. К недостаткам этой базовой модели можно отнести то, что она не имеет состояния равновесия, что говорит о ее редуцированности и ограничении области физического применения. Эти ограничения повлияли и на особенности синхронизации связанных систем, в частности, не удалось пронаблюдать характерный для диссипативно связанных систем эффект гибели колебаний [1]. В рамках данной работы мы обратимся к исследованию динамики связанных генераторов квазипериодических колебаний, при этом в качестве базовой модели выберем другую модификацию генератора, которая была предложена в [29] и имеет состояние равновесия. Динамика такой системы оказывается существенно более богатой, в частности, мы покажем, что возникает эффект гибели колебаний, а при уменьшении связи наблюдается режим двухчастотной квазипериодичности в очень широком диапазоне частотной расстройки. Двухпараметрический анализ также выявляет резонансную паутину Арнольда и новые квазипериодические бифуркации коразмерности два.

Работа построена следующим образом. В части 1 представлен краткий обзор динамики автономного генератора, обсуждается устройство плоскости управляющих параметров, которая будет интересна с точки зрения динамики системы связанных генераторов. В части 2 представлено исследование системы связанных генераторов. В разделе 2.1 обсуждается устройство плоскости параметров и возможные типы режимов. В разделе 2.2 обсуждаются режимы гибели колебаний и широкополосной квазипериодичности. В разделе 2.3 – точки квазипериодических бифуркаций коразмерности два. Раздел 2.4 посвящен исследованию хаотической динамики в системе связанных генераторов.

### 1. Динамика модели генератора квазипериодических колебаний с одним состоянием равновесия

В [28] был предложен генератор автономных квазипериодических колебаний, описываемый уравнениями

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\lambda + z + x^2 - \beta x^4)\dot{x} + \omega_0^2 x &= 0, \\ \dot{z} &= \mu - x^2. \end{aligned} \quad (1)$$

Различные аспекты динамики такого генератора описаны в [28, 16, 27], в частности, синхронизация внешним сигналом [16] и динамика связанных генераторов [27]. Однако модель (1), как упоминалось ранее, не имеет устойчивого положения равновесия. Более широкая картина возможна в предложенной в [29] модели

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\lambda + z + x^2 - \beta x^4)\dot{x} + \omega_0^2 x &= 0, \\ \dot{z} &= b(\varepsilon - z) - k\dot{x}^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Модель (2) можно интерпретировать как автогенератор с жестким возбуждением, у которого цепь подачи питания инерционная. Как и модель (1) она представляет собой трехмерную динамическую систему,  $x$ ,  $y = \dot{x}$ ,  $z$  – динамические переменные системы. Параметр  $\varepsilon$  характеризует поступление энергии от источника питания, параметр  $b$  отвечает за инерционные свойства цепи питания. Член, содержащий коэффициент  $k$ , отвечает за отбор энергии в автогенератор. Модель (2) имеет одно положение равновесия:

$$x_0 = y_0 = 0, \quad z_0 = \varepsilon. \quad (3)$$

Состояние равновесия может испытывать бифуркацию Андронова–Хопфа рождения предельного цикла. Чтобы ее найти, записываем систему (2) в виде системы трех дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= (\lambda + z + x^2 - \beta x^4)y - \omega_0^2 x, \\ \dot{z} &= b(\varepsilon - z) - ky^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Матрица линеаризации в точке равновесия имеет вид

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\omega_0^2 & -(\lambda + \varepsilon) & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Характеристическое уравнение для определения собственных чисел  $L$  матрицы имеет следующий вид:

$$L^3 - L^2(\lambda + \varepsilon + b) + L(b(\lambda + \varepsilon) + \omega_0^2) - b\omega_0^2 = 0. \quad (6)$$

Инварианты этой матрицы

$$S = \lambda + \varepsilon + b, \quad H = b(\lambda + \varepsilon) + \omega_0^2, \quad J = b\omega_0^2. \quad (7)$$

Условие бифуркации Андронова–Хопфа в трехмерной системе имеет вид  $J = SH$ ,  $H > 0$  [30]. Тогда из (7) получаем

$$\lambda = -\varepsilon. \quad (8)$$

На рис. 1 представлена карта показателей Ляпунова системы (2) на плоскости собственная частота – управляющий параметр  $(\omega_0, \lambda)$  для фиксированных остальных параметров:  $\varepsilon = 4$ ,  $b = 1$ ,  $k = 0.02$ ,  $\beta = 1/18$ . Карты показателей Ляпунова были построены следующим образом: для каждой точки плоскости параметров рассчитывался полный спектр показателей Ляпунова; в соответствии с сигнатурой спектра точка на плоскости параметров окрашивалась в тот или иной оттенок:

Е – устойчивое состояние равновесия,  $\Lambda_1 < 0$ ,  $\Lambda_2 < 0$ ,  $\Lambda_3 < 0$ ;

Р – периодические колебания (цикл),  $\Lambda_1 = 0$ ,  $\Lambda_2 < 0$ ,  $\Lambda_3 < 0$ ;

Т – двухчастотные квазипериодические колебания,  $\Lambda_1 = 0$ ,  $\Lambda_2 = 0$ ,  $\Lambda_3 < 0$ .

Справа на рисунке представлено соответствие оттенка и буквенного обозначения. На всех картах можно видеть линию бифуркации Андронова–Хопфа (8), которой для выбранных значений параметров соответствует линия  $\lambda = -4$ . Ниже нее располагается область устойчивого состояния равновесия, а выше лежит область существования устойчивого предельного цикла. В последнюю встроен достаточно широкий язык автономных квазипериодических колебаний (см. рис. 1), который и будет использован для выбора квазипериодической динамики отдельного генератора. Отметим, что внутри этого языка, в свою очередь, наблюдаются очень узкие области периодических режимов.

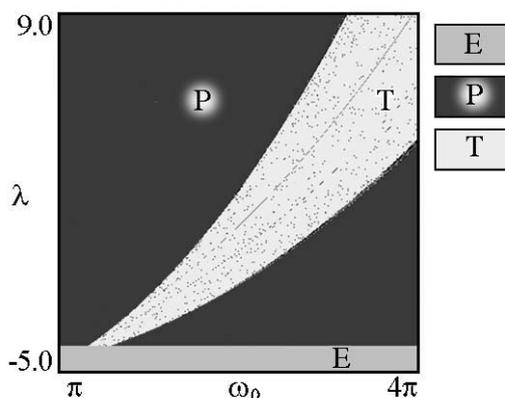


Рис. 1. Карта показателей Ляпунова для модели генератора квазипериодических колебаний (2),  $\varepsilon = 4$ ,  $b = 1$ ,  $k = 0.02$ ,  $\beta = 1/18$ . Е – устойчивое состояние равновесия, Р – периодические колебания, Т – двухчастотные квазипериодические колебания

Fig. 1. Chart of the Lyapunov exponents for model of generator of quasi-periodic oscillations (2),  $\varepsilon = 4$ ,  $b = 1$ ,  $k = 0.02$ ,  $\beta = 1/18$ . E – denotes stable equilibrium point, P – denotes periodic oscillations, T – denotes two-frequency quasi-periodic oscillations

## 2. Динамика связанных генераторов

**2.1. Структура плоскости параметров.** Рассмотрим теперь динамику связанных генераторов квазипериодических колебаний (2). Два диссипативно связанных генератора такого типа описываются следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 - (\lambda + z_1 + x_1^2 - \beta x_1^4)\dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 + M_c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) &= 0, \\ \dot{z}_1 &= b(\varepsilon - z_1) - k\dot{x}_1^2, \\ \ddot{x}_2 - (\lambda + z_2 + x_2^2 - \beta x_2^4)\dot{x}_2 + (\omega_0 + \Delta)^2 x_2 + M_c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) &= 0, \\ \dot{z}_2 &= b(\varepsilon - z_2) - k\dot{x}_2^2, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $x_1, z_1$  – переменные, характеризующие первый генератор,  $x_2, z_2$  – переменные второго генератора,  $\Delta$  – частотная расстройка генераторов,  $M_c$  – коэффициент диссипативной связи. Система (9) характеризуется четырьмя независимыми частотами, которые определяются управляющими параметрами. В качестве управляющих параметров мы рассматриваем собственную частоту  $\omega_0$  и параметр  $\lambda$ , ответственный за возбуждение автоколебаний каждого генератора. Для нас важно рассмотреть ситуацию, когда подсистемы демонстрируют квазипериодические колебания. Как видно из рис. 1, область квазипериодических колебаний ограничена в пространстве параметров линиями бифуркации Неймарка–Сакера; при  $\lambda = -1$  двухчастотная квазипериодическая динамика наблюдается в интервале параметра  $\omega_0$  (6.201...8.45). Если основную частоту  $\omega_0$  зафиксировать внутри области двухчастотной квазипериодичности  $\omega_0 = 2\pi$ , то в этом случае первый генератор в автономном режиме всегда демонстрирует квазипериодические колебания. Изменение частотной расстройки  $\Delta$  в положительную область оставляет преимущественно автономный квазипериодический режим и во второй подсистеме. При достижении второй границы языка квазипериодических режимов во второй системе будет рождаться предельный цикл.

В качестве основного инструмента исследования, так же как и для автономного генератора, воспользуемся методом карт показателей Ляпунова, только в данном случае система является шестимерной, и анализ динамики будет производиться по анализу шести показателей Ляпунова:

- Е – устойчивое состояние равновесия,  $\Lambda_1 < 0, \Lambda_2 < 0, \Lambda_3 < 0, \Lambda_4 < 0, \Lambda_5 < 0, \Lambda_6 < 0$ ;
- Р – периодические колебания (цикл),  $\Lambda_1 = 0, \Lambda_2 < 0, \Lambda_3 < 0, \Lambda_4 < 0, \Lambda_5 < 0, \Lambda_6 < 0$ ;
- Т<sub>2</sub> – двухчастотные квазипериодические колебания,  $\Lambda_1 = 0, \Lambda_2 = 0, \Lambda_3 < 0, \Lambda_4 < 0, \Lambda_5 < 0, \Lambda_6 < 0$ ;
- Т<sub>3</sub> – трехчастотные квазипериодические колебания,  $\Lambda_1 = 0, \Lambda_2 = 0, \Lambda_3 = 0, \Lambda_4 < 0, \Lambda_5 < 0, \Lambda_6 < 0$ ;
- Т<sub>4</sub> – четырехчастотные квазипериодические колебания,  $\Lambda_1 = 0, \Lambda_2 = 0, \Lambda_3 = 0, \Lambda_4 = 0, \Lambda_5 < 0, \Lambda_6 < 0$ ;
- С – хаос,  $\Lambda_1 > 0, \Lambda_2 = 0, \Lambda_3 < 0, \Lambda_4 < 0, \Lambda_5 < 0, \Lambda_6 < 0$ ;
- НС – гиперхаос,  $\Lambda_1 > 0, \Lambda_2 > 0, \Lambda_3 = 0, \Lambda_4 < 0, \Lambda_5 < 0, \Lambda_6 < 0$ .

На рис. 2 представлено устройство плоскости параметров частотная расстройка – величина связи ( $\Delta, M_c$ ) для системы связанных генераторов (9) при  $\lambda = -1$ .

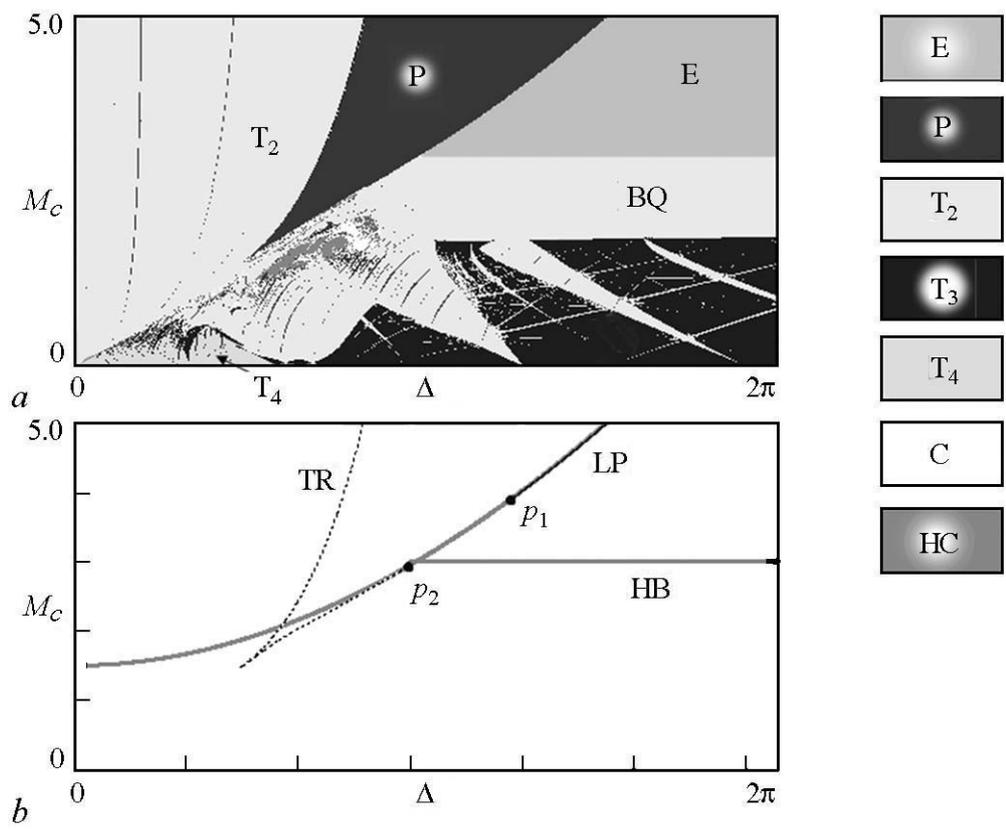


Рис. 2. Карта показателей Ляпунова (a) и бифуркационная диаграмма (b) на плоскости параметров  $(\Delta, M_c)$  для модели связанных квазипериодических генераторов (9) при  $b = 1, \epsilon = 4, k = 0.02, \lambda = -1, \beta = 1/18, \omega_0 = 2\pi$

Fig. 2. Chart of Lyapunov exponents (a), bifurcation lines (b) in the parameter plane  $(\Delta, M_c)$  for model of coupled quasi-periodic generators for  $b = 1, \epsilon = 4, k = 0.02, \lambda = -1, \beta = 1/18, \omega_0 = 2\pi$

Рис. 2, a представляет собой карту показателей Ляпунова. Соответствие оттенка на карте и буквенного обозначения дано справа. На рис. 2, b изображены основные бифуркационные линии, полученные с помощью пакета численного бифуркационного анализа XPP AUTO.

При малой величине связи и частотной расстройке наблюдается режим четырехчастотной квазипериодичности  $T_4$ . При увеличении силы связи при малых частотных расстройках наблюдается достаточно большая область двухчастотных квазипериодических колебаний (область  $T_2$  на рис. 2). Данная область соответствует фазовой синхронизации двухчастотных квазипериодических колебаний.

На рис. 3, a представлен график числа вращения при вариации частотной расстройки. Число вращения определялось как отношение фаз в каждом из осцилляторов. Фазы рассчитывались для двумерных проекций на плоскость  $(x, y)$ . Отметим, что график обрывается при некотором значении числа вращения, поскольку проекция фазовой траектории первого осциллятора на плоскость  $(x, y)$  начинает посещать окрестность начала координат, и фаза перестает быть определенной. Как видно из рисунка, при малых частотных расстройках число вращения равно единице, при этом на графике показателей Ляпунова (рис. 3, b) мы видим, что реализуются двух-

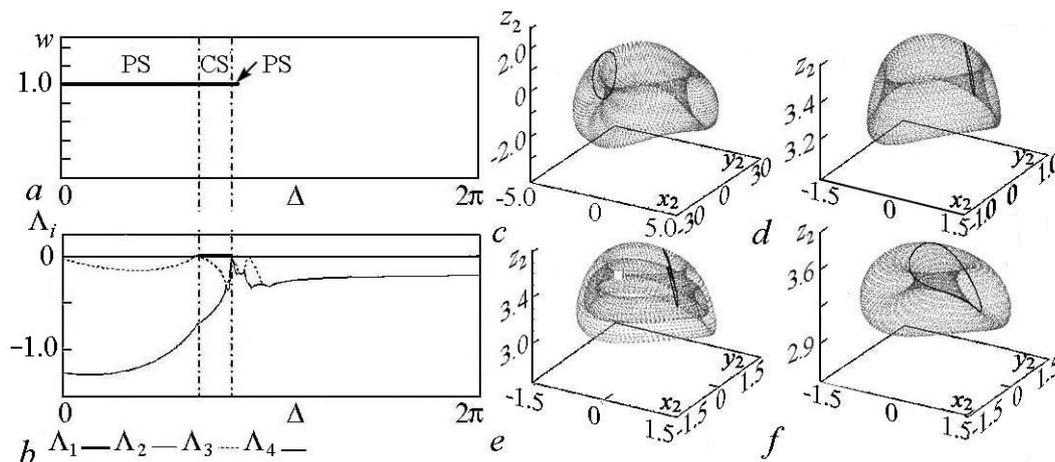


Рис. 3. Зависимость числа вращения (a) и четырех старших показателей Ляпунова (b) от частотной расстройки для связанных генераторов (9),  $b = 1$ ,  $\varepsilon = 4$ ,  $k = 0.02$ ,  $\lambda = -1$ ,  $\beta = 1/18$ ,  $\omega_0 = 2\pi$ ,  $M_c = 2.5$ . Фазовые портреты (серый цвет) и сечения Пуанкаре плоскостью  $y_1 = 0$  (черный цвет) для  $\Delta = 0.5$  (c), 2.56 (d), 2.58 (e),  $\Delta = \pi$  (f). PS – фазовая синхронизация, CS – полная синхронизация

Fig. 3. Dependence of the winding number (a) and the largest four Lyapunov exponents (b) on the frequency mismatch for coupled oscillators (9),  $b = 1$ ,  $\varepsilon = 4$ ,  $k = 0.02$ ,  $\lambda = -1$ ,  $\beta = 1/18$ ,  $\omega_0 = 2\pi$ ,  $M_c = 2.5$ . Phase portraits (grey color) and Poincaré section by plane  $y_1 = 0$  (black color) for  $\Delta = 0.5$  (c), 2.56 (d), 2.58 (e),  $\Delta = \pi$  (f). PS denotes phase synchronized quasi-periodicity, CS is complete synchronization

частотные квазипериодические колебания, то есть генераторы взаимно захвачены, но их аттрактором является двумерный тор. Таким образом, можно говорить о режиме синхронной квазипериодичности. На рис. 3, a данные области отмечены символами PS. На рис. 3, c представлен пример фазового портрета (серый цвет) и его сечение Пуанкаре (черный цвет) в области синхронной квазипериодичности PS, где хорошо просматривается гладкая инвариантная кривая.

В область захвата фаз входит не только язык синхронной квазипериодичности, но и язык полной синхронизации (CS на графике числа вращения на рис. 3, a и P на карте показателей Ляпунова на рис. 2, a). Отметим, что на графиках показателей Ляпунова мы можем видеть бифуркацию удвоения тора при переходе частотной расстройки через значение  $\Delta = 2.57$  (переход от рис. 3, d к рис. 3, e). Рис. 3, f отвечает еще большему значению расстройки  $\Delta = \pi$ ; мы обсудим свойства этого режима несколько позднее.

С увеличением расстройки при большой связи на плоскости параметров ( $\Delta$ ,  $M_c$ ) (см. рис. 2, a) наблюдается область полной синхронизации P, которая образует язык, но при этом имеет свои особенности. Во-первых, наблюдается порог по величине связи и, во-вторых, эта область имеет порог по величине частотной расстройки. Границы данной области формируют бифуркации различного типа. На рис. 2, b пунктирной линией изображена линия бифуркации Неймарка–Сакера (TR), черная сплошная – это линия седло-узловой бифуркации (LP) и серым цветом – линия бифуркации Андронова–Хопфа (HB). Левая граница языка полностью соответствует бифуркации Неймарка–Сакера, в результате которой предельный цикл становится неустойчивым и рождается двумерный тор. Справа граница языка при малой связи также является линией бифуркации Неймарка–Сакера. Линия бифуркации Неймарка–Сакера заканчивается в точке  $p_2$  (3.034, 2.978), упираясь в линию бифуркации Андронова–Хопфа при  $M_c = 3$ . При больших значениях коэффициента связи граница языка полной

синхронизации представляет собой бифуркацию Андронова–Хопфа, в результате которой состояние равновесия теряет устойчивость, и одновременно с ней происходит седло-узловая бифуркация, в результате которой рождается устойчивый предельный цикл. Заметим, что эти бифуркации происходят одновременно только на небольшом участке и заканчивается линия седло-узловой бифуркации в точке  $p_1$  (4.303, 4.397) на плоскости параметров.

## 2.2. Область гибели колебаний и широкополосной квазипериодичности.

Одна из существенных особенностей картины, наблюдаемой при большой частотной расстройке и большой силе связи, – это область гибели колебаний, которая соответствует режиму устойчивого состояния равновесия и обозначена буквой Е. Граница области гибели колебаний имеет порог по силе связи, в соответствии с соотношением  $M_c = \lambda + \varepsilon$ , которое соответствует стабилизации равновесия в результате бифуркации Андронова–Хопфа; для нашего случая  $M_c = 3$ . На рис. 2, *b* показаны бифуркационные линии, которые ограничивают область гибели колебаний. Нижняя граница представляет собой линию бифуркации Андронова–Хопфа. А вот левая граница имеет особенности: как уже упоминалось выше, при  $M_c > 4.397$  предельный цикл рождается в результате бифуркации седло-узел, которая происходит одновременно с бифуркацией Хопфа. Также к специфической особенности можно отнести то, что линия бифуркации Андронова–Хопфа имеет продолжение для  $M_c < 3$ .

Следующий существенный момент – наличие области двухчастотных колебаний, образующей характерную полосу между областью трехчастотных квазипериодических колебаний и областью гибели колебаний. Аналогичный режим, возникающий ниже области гибели колебаний, наблюдался в [20, 21]<sup>1</sup> и получил название частичной широкополосной синхронизации (partial broadband synchronization). В нашем случае можно говорить о широкополосной квазипериодичности (broadband quasi-periodicity). Соответствующая область обозначена ВQ на рис. 2, *a*. Особенность данного режима состоит в том, что возникают двухчастотные колебания в определенном диапазоне изменения параметра связи и широком диапазоне частотной расстройки. На рис. 3, *f* представлен пример трехмерного фазового портрета и двумерного сечения Пуанкаре двумерного тора, соответствующего широкополосной квазипериодичности ВQ.

Область ВQ представлена двухчастотными квазипериодическими колебаниями, поэтому при уменьшении силы связи между осцилляторами на рис. 2, *a* наблюдается переход от устойчивого состояния равновесия сразу к двумерному тору. Данная особенность связана с тем, что связанные подсистемы идентичны по параметру возбуждения автоколебаний. Так как параметры  $\lambda$  – одинаковые, то происходит вырожденная бифуркация Андронова–Хопфа, в результате которой точка становится неустойчивой и рождается двумерный тор. Такая ситуация соответствует тому, что сразу два показателя Ляпунова становятся нулевыми. На рис. 4, *a* представлены четыре старших показателя Ляпунова при вариации параметра связи  $M_c$  для  $\Delta = 2\pi$ . Как видно из рисунка, при большой силе связи все четыре показателя – отрицательные, при этом первый и второй равны по абсолютной величине. С уменьшением связи абсолютная величина первых четырех показателей увеличивается, и при

<sup>1</sup>см. рис. 7 в [20].

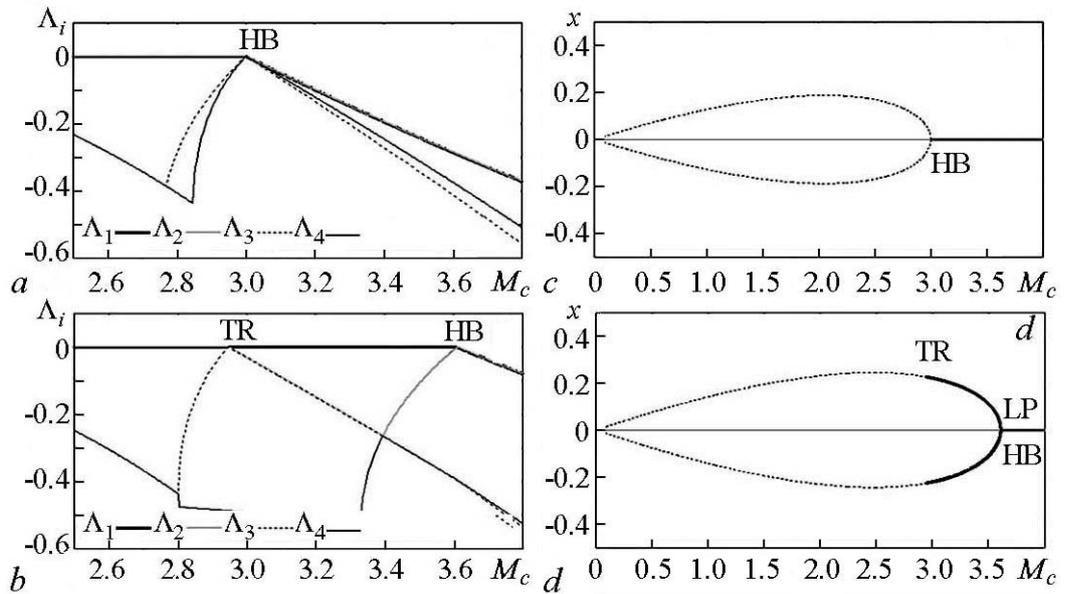


Рис. 4. *a, b* – зависимость четырех старших показателей Ляпунова от силы связи,  $b = 1$ ,  $\varepsilon = 4$ ,  $k = 0.02$ ,  $\beta = 1/18$ ,  $\omega_0 = 2\pi$ ,  $\lambda = -1$  и  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = -0.5$ ; *c, d* – бифуркационные диаграммы для тех же параметров

Fig. 4. *a, b* – dependence of the largest four Lyapunov exponents on the coupling strength,  $b = 1$ ,  $\varepsilon = 4$ ,  $k = 0.02$ ,  $\beta = 1/18$ ,  $\omega_0 = 2\pi$ ,  $\lambda = -1$  и  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = -0.5$ ; *c, d* – bifurcation diagrams for the same parameters

$M_c = 3$  все четыре показателя становятся нулевыми. При дальнейшем уменьшении связи два старших показателя равны нулю, а третий и четвертый становятся опять отрицательными.

Данное вырождение снимается при введении неидентичности по параметру  $\lambda$  между связанными осцилляторами; пример приведен на рис. 4, *b* для  $\lambda_1 = -1$  и  $\lambda_2 = -0.5$ . Как и для предыдущего случая, при большой связи все показатели отрицательны, что соответствует затуханию колебаний. При  $M_c = 3.61$  происходит суперкритическая бифуркация Хопфа (НВ), после которой старший показатель становится нулевым, а второй – вновь отрицательным, что соответствует автоколебаниям. Затем, при  $M_c = 2.946$  происходит бифуркация Неймарка–Сакера (ТР), в результате которой рождается двумерный тор и два показателя Ляпунова становятся нулевыми.

На рис. 4, *c* и 4, *d* представлены бифуркационные диаграммы при вариации параметра  $M_c$ , на которых жирной и тонкой серыми линиями изображены устойчивое и неустойчивое состояния равновесия, соответственно, сплошной и пунктирной черными линиями обозначены устойчивый и неустойчивый циклы. Бифуркационный анализ показывает, что в первом случае в результате бифуркации Андронова–Хопфа (НВ) рождается неустойчивый цикл, который затем стягивается к нулю по параметру связи. Для второго случая бифуркация Андронова–Хопфа (НВ) происходит одновременно с седло-узловой бифуркацией (LP), таким образом, состояние равновесия теряет устойчивость и одновременно в результате седло-узловой бифуркации рождается предельный цикл, который при меньшей связи претерпевает бифуркацию Неймарка–Сакера (ТР).

Отметим, что на рис. 2, а в правой части карты ниже области ВQ можно наблюдать резонансную паутину Арнольда [15] на базе области трехчастотных колебаний.

**2.3. Квазипериодическая бифуркация коразмерности два.** Теперь обратимся к особенностям динамики системы при малой силе связи. На рис. 5 представлен увеличенный фрагмент карты показателей Ляпунова. На рисунке можно видеть области четырехчастотных квазипериодических колебаний  $T_4$ , в которые встроены два языка трехчастотной квазипериодичности  $T_3$ . Основания этих языков отмечены значениями  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  и лежат на оси абсцисс, отвечающей нулевому значению параметра связи  $M_c$ . Эти языки ограничены линиями седло-узловых бифуркаций четырехмерных торов [13], обозначенных SNT на рисунке. Две такие линии SNT<sub>1</sub> и SNT<sub>2</sub> начинаются в точке коразмерности два  $\Delta_1$  на оси абсцисс<sup>2</sup>. Отметим, что эта картина аналогична классической для языка Арнольда, только вместо области  $T_3$  имеет место периодический режим, а вместо  $T_4$  – двумерный тор.

В свою очередь, две такие линии SNT<sub>2</sub> и SNT<sub>3</sub>, относящиеся к двум разным языкам, пересекаются и заканчиваются в точке QSNF, которая, таким образом, возникает при регуляции двух параметров и также имеет коразмерность два. Выше этой точки в области перекрытия языков трехчастотных колебаний наблюдаются двухчастотные квазипериодические колебания  $T_2$ , причем данная область также имеет форму языка. Похожая структура является типичной для систем с многочастотными квазипериодическими колебаниями [4]. Такие точки в [4] названы Quasi-periodic saddle-node fan QSNF (квазипериодическая точка «седло-узловой веер»).

Аналогичная структура была описана в [4] для четырех связанных осцилляторов ван дер Поля, а также системы уравнений в фазовом приближении.

На рис. 5 можно видеть две точки QSNF<sub>1</sub> и QSNF<sub>2</sub>. Порог по амплитуде связи для каждой из них приблизительно одинаков.

Также на рис. 5 отмечена точка с координатами  $(\Delta_3, 0)$ . Справа от нее трехчастотная квазипериодичность возникает при сколь угодно малой связи. Причина состоит в том, что данное значение расстройки соответствует переходу второго индивидуального генератора от квазипериодических колебаний к периодическим в соответствии с рис. 1. (Правая граница области двухчастотной квазипериодичности на рис. 1.)

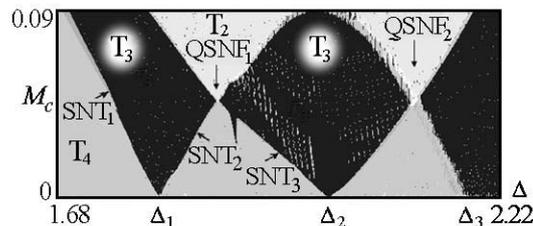


Рис. 5. Увеличенный фрагмент в окрестности особых точек QSNF карты показателей Ляпунова модели связанных квазипериодических генераторов (9)  $b = 1, \varepsilon = 4, k = 0.02, \lambda = -1, \beta = 1/18, \omega_0 = 2\pi$

Fig. 5. Zoomed fragment of the chart of Lyapunov exponents of coupled oscillators (9) near special points QSNF.  $b = 1, \varepsilon = 4, k = 0.02, \lambda = -1, \beta = 1/18, \omega_0 = 2\pi$

**2.4. Хаотическая динамика.** К еще одной особенности модели (9) можно отнести формирование хаотической динамики. Области хаотической динамики  $S$  локализованы под языком полной синхронизации, в области перекрытия маленьких

<sup>2</sup>Похожая картина наблюдалась в [31], только размерность торов была на единицу меньше.

языков синхронизации высших порядков. При больших частотных расстройках и большой силе связи хаотические колебания не наблюдаются. Несмотря на то, что области хаоса малы в пространстве параметров, наблюдается не только хаос, но и гиперхаос с двумя положительными ляпуновскими экспонентами НС.

На рис. 6, *a* представлен увеличенный фрагмент карты показателей Ляпунова

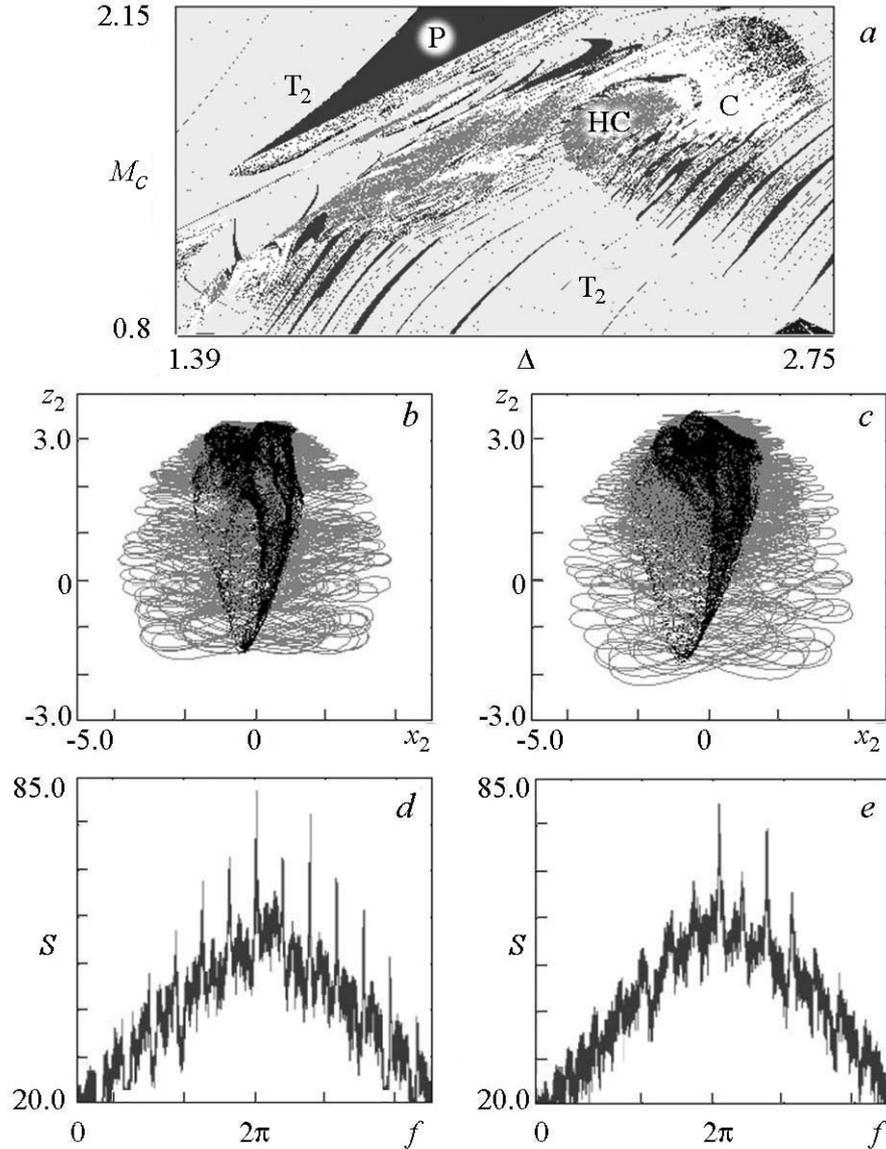


Рис. 6. *a* – увеличенный фрагменты карты показателей Ляпунова модели связанных генераторов (9) в окрестности хаотической динамики при  $b = 1$ ,  $\varepsilon = 4$ ,  $k = 0.02$ ,  $\lambda = -1$ ,  $\beta = 1/18$ ,  $\omega_0 = 2\pi$ ; фазовые портреты, сечения Пуанкаре плоскостью  $y = 0$  и спектры Фурье для хаотического режима (*b*, *d*):  $\Delta = 2.5$ ,  $M_c = 1.7$ ; и гиперхаотического режима (*c*, *e*):  $\Delta = 2.34$ ,  $M_c = 1.69$

Fig. 6. *a* – zoomed fragment of the chart of Lyapunov exponents of coupled oscillators (9) near area of chaotic dynamics for  $b = 1$ ,  $\varepsilon = 4$ ,  $k = 0.02$ ,  $\lambda = -1$ ,  $\beta = 1/18$ ,  $\omega_0 = 2\pi$ ; phase portraits, Poincaré sections and Fourier spectrums for chaotic regime (*b*, *d*):  $\Delta = 2.5$ ,  $M_c = 1.7$ ; and hyperchaotic regime (*c*, *e*):  $\Delta = 2.34$ ,  $M_c = 1.69$

в окрестности основного «острова» хаотической динамики. Как видно из рисунка, большую часть хаотических режимов представляет хаос с одной положительной ляпуновской экспонентой, однако внутри острова можно различить области гиперхаоса. На рис. 6, *b*, *d* и 6, *c*, *e* представлены иллюстрации устройства фазового пространства и спектров Фурье для хаоса и гиперхаоса, соответственно. Для рис. 6, *b*, *d* были зафиксированы параметры  $\Delta = 2.5$ ,  $M_c = 1.7$ , для которых старшие показатели Ляпунова имеют значения  $\Lambda_1 = 0.088$ ,  $\Lambda_2 = 0$ ,  $\Lambda_3 = -0.025$ . Для рис. 6, *c*, *e* были выбраны параметры  $\Delta = 2.34$ ,  $M_c = 1.69$ , для которых три старших показателя Ляпунова имеют значения  $\Lambda_1 = 0.106$ ,  $\Lambda_2 = 0.018$ ,  $\Lambda_3 = 0$ .

Как видно из рисунка, структура аттракторов в фазовом пространстве достаточно сложная как для хаоса, так и для гиперхаоса. Спектры Фурье имеют основной пик на частоте  $\omega_0 = 2\pi$ , и также имеется пик на частотах  $\omega_0 = 2\pi + \Delta$ . При этом в случае хаоса в спектре Фурье наблюдаются также пики на комбинационных частотах, что характерно для квазипериодических колебаний. Таким образом, можно сказать, что хаос возник в результате разрушения тора. Для гиперхаоса комбинационные частоты гораздо менее выражены, спектр становится более гладким и равномерным, можно отметить его небольшое расширение.

### Заключение

Таким образом, в работе представлено исследование особенностей взаимной синхронизации квазипериодических колебаний на примере модели двух связанных генераторов квазипериодических колебаний с состоянием равновесия. Подробно описана картина синхронизации генераторов на плоскости (частотная расстройка – сила связи). Показано, что в такого рода системе возможны как полная синхронизация, отвечающая периодическому режиму, так и режим синхронной квазипериодичности, когда колебания являются квазипериодическими, а фазы генераторов точно захвачены. Наблюдался также режим гибели колебаний. Особенность данной системы состоит также в возможности режима широкополосной квазипериодичности, которая состоит в том, что возникают двухчастотные колебания в определенном диапазоне изменения параметра связи и широком диапазоне частотной расстройки. Эта область наблюдается при уменьшении величины связи ниже области гибели колебаний. Другие режимы двухчастотной квазипериодичности имеют вид языков, встроенных в область трехчастотных колебаний, и образующих резонансную паутину Арнольда.

Подробно исследован переход от фазовой к полной синхронизации и к режиму широкополосной квазипериодичности. При таком переходе обнаружены бифуркации удвоения двумерного тора. Изучен переход от четырехчастотной к трехчастотной квазипериодичности при малой связи. Данный переход ассоциируется с точками квазипериодических бифуркаций коразмерности два QSNF (quasiperiodic saddle-node fan). Эти точки являются острями языков двухчастотных режимов, имеющие порог по величине коэффициента связи. В их окрестности наблюдаются также трех- и четырехчастотные квазипериодические режимы. В модели обнаружена возможность реализации хаотической динамики как с одним, так и с двумя положительными показателями Ляпунова.

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФ № 17-12-01008 (постановка задачи, аналитическое исследование, численное моделирование, обобщение результатов, разделы 1, 2.1, 2.2, 2.3) и гранта Президента РФ для поддержки молодых российских ученых МК-661.2017.8 (исследование хаотической динамики, раздел 2.4).*

#### **Библиографический список**

1. Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 508 с.
2. Рабинович М. И., Трубецков Д. И. Введение в теорию колебаний и волн. М.; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 1999. 560 с.
3. Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е., Стрелкова Г.И. Синхронизация регулярных, хаотических и стохастических колебаний. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2008. 144 с.
4. Кузнецов А.П., Сатаев И.Р., Станкевич Н.В., Тюрюкина Л.В. Физика квазипериодических колебаний. Саратов: Издательский центр Наука, 2013. 252с.
5. Anishchenko V., Astakhov S., Vadivasova T. Phase dynamics of two coupled oscillators under external periodic force // Europhysics Letters. 2009. Vol. 86. P. 30003.
6. Анищенко В.С., Астахов С.В., Вадивасова Т.Е., Феоктистов А.В. Численное и экспериментальное исследование внешней синхронизации двухчастотных колебаний // Нелинейная динамика. 2009. Т. 5, № 2. С. 237.
7. Анищенко В.С., Николаев С.М. Механизмы синхронизации резонансного предельного цикла на двумерном торе // Нелинейная динамика. 2008. Т. 4, № 1. С. 39.
8. Anishchenko V., Nikolaev S., Kurths J. Bifurcational mechanisms of synchronization of a resonant limit cycle on a two-dimensional torus // CHAOS. 2008. Vol. 18. P. 037123.
9. Anishchenko V.S., Nikolaev S.M., Kurths J. Peculiarities of synchronization of a resonant limit cycle on a two-dimensional torus // Phys. Rev. E. 2007. Vol.76, №4. P. 046216.
10. Анищенко В.С., Николаев С.М. Генератор квазипериодических колебаний. Бифуркация удвоения двумерного тора // Письма ЖТФ. 2005. Т. 31, вып. 19. С. 88.
11. Анищенко В.С., Николаев С.М. Устойчивость, синхронизация и разрушение квазипериодических колебаний // Нелинейная динамика. 2006. Т. 2, № 3. С. 267.
12. Anishchenko V., Nikolaev S., Kurths J. Winding number locking on a two-dimensional torus: Synchronization of quasiperiodic motions // Phys. Rev. E, 2006. Vol.73, № 5. P. 056202.
13. Broer H, Simó C., Vitolo R. Quasi-periodic bifurcations of invariant circles in low-dimensional dissipative dynamical systems // Regular and Chaotic Dynamics. 2011. Vol. 16, № 1-2. P. 154.
14. Komuro M., Kamiyama K., Endo T., Aihara K. Quasi-periodic bifurcations of higher-

- dimensional tori // *Int. J. of Bifurcation and Chaos*. 2016. Vol. 26, № 7. P. 1630016.
15. *Broer H., Simó C., Vitolo R.* The Hopf-saddle-node bifurcation for fixed points of 3D-diffeomorphisms: the Arnol'd resonance web // Reprint from the Belgian Mathematical Society. 2008. P. 769.
  16. *Stankevich N.V., Kurths J., Kuznetsov A.P.* Forced synchronization of quasiperiodic oscillations // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2015. Vol. 20, №. 1. P. 316.
  17. *Rosenblum M., Pikovsky A.* Self-organized quasiperiodicity in oscillator ensembles with global nonlinear coupling // *Physical review letters*. 2007. Vol. 98, №. 6. P. 064101.
  18. *Pikovsky A., Rosenblum M.* Self-organized partially synchronous dynamics in populations of nonlinearly coupled oscillators // *Physica D*. 2009. Vol. 238, №. 1. P. 27.
  19. *Rosenblum M., Pikovsky A.* Two types of quasiperiodic partial synchrony in oscillator ensembles // *Phys. Rev. E*. 2015. Vol. 92, №. 1. P. 012919.
  20. *Emelianova Yu. P., Kuznetsov A.P., Sataev I.R., Turukina L.V.* Synchronization and multi-frequency oscillations in the low-dimensional chain of the self-oscillators // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2013. Vol. 244, № 1. P. 36.
  21. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R., Turukina L.V.* About Landau–Hopf scenario in a system of coupled self-oscillators // *Physics Letters A*. 2013. Vol. 377. P. 3291.
  22. *Kuznetsov A.P., Migunova N.A., Sataev I.R., Sedova Yu.V., Turukina L.V.* From chaos to quasi-periodicity // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2015. Vol. 20, № 2. P. 189.
  23. *Itoh K., Inaba N., Sekikawa M.* Three-torus-causing mechanism in a third-order forced oscillator // *Progress of Theoretical and Experimental Physics*. 2013, № 9. P. 093A02.
  24. *Kamiyama K., Inaba N., Sekikawa M., Endo T.* Bifurcation boundaries of three-frequency quasi-periodic oscillations in discrete-time dynamical system // *Physica D*. 2014. Vol. 289. P. 12.
  25. *Sekikawa M., Inaba N., Kamiyama K., Aihara K.* Three-dimensional tori and Arnold tongues // *Chaos*. 2014. Vol. 24, № 1. P. 013137.
  26. *Hidaka S., Inaba N., Sekikawa M., Endo T.* Bifurcation analysis of four-frequency quasi-periodic oscillations in a three-coupled delayed logistic map // *Physics Letters A*. 2015. Vol. 379, № 7. P. 664.
  27. *Кузнецов А.П., Станкевич Н.В.* Синхронизация генераторов квазипериодических колебаний // *Нелинейная динамика*. 2013. Т. 9, №. 3. С. 409.
  28. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Stankevich N.V.* A simple autonomous quasiperiodic self-oscillator // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2010. Т. 15, №. 6. P. 1676.
  29. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Mosekilde E., Stankevich N.V.* Generators of quasiperiodic oscillations with three-dimensional phase space // *The European Physical Journal Special Topics*. 2013, № 10. P. 2391.

30. Кузнецов А.П. Динамические системы и бифуркации. Саратов: Издательский центр «Наука», 2015. 168с.
31. Anishchenko V. S., Safonova M.A., Feudel U., Kurths J. Bifurcations and transition to chaos through three-dimensional tori // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 1994. Vol. 4, №. 03. P. 595.

## References

1. Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J. Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences. Cambridge, England: Cambridge university press, 2003. 423 p.
2. Rabinovich M.I. Trubetskov D.I. Introduction to the theory of oscillations and waves. M.-Ijevsk: Regul'yarnaya i haoticheskaya dinamika, 1999. 560 p. (in Russian).
3. Anishchenko V.S., Astakhov V.V., Vadivasova T.E., Strelkova G.I. Synchronization of regular, chaotic and stochastic oscillations. M.; Izhevsk: Institute for Computer Research, 2008. 144 p. (in Russian).
4. Kuznetsov A.P., Sataev I.R., Stankevich N.V. Tyuryukina L.V. Physics of quasiperiodic oscillations. Saratov: Publishing Center «Nauka», 2013. 252 p. (in Russian).
5. Anishchenko V., Astakhov S., Vadivasova T. Phase dynamics of two coupled oscillators under external periodic force. *Europhysics Letters*, 2009, vol. 86, p. 30003.
6. Anishchenko V.S., Astakhov S.V., Vadivasova T.E., Feoktistov A.V. Numerical and experimental investigation of external synchronization of two-frequency oscillations. *Nelineinaya dinamika*, 2009, vol. 5, no. 2, p. 237 (in Russian).
7. Anishchenko V.S., Nikolaev S.M. Mechanisms of synchronization of a resonance limit cycle on a two-dimensional torus. *Nelineinaya dinamika*, 2008, vol. 4, no. 1, p. 39 (in Russian).
8. Anishchenko V., Nikolaev S., Kurths J. Bifurcational mechanisms of synchronization of a resonant limit cycle on a two-dimensional torus. *CHAOS*, 2008, vol. 18, p. 037123.
9. Anishchenko V.S., Nikolaev S.M., Kurths J. Peculiarities of synchronization of a resonant limit cycle on a two-dimensional torus. *Phys. Rev. E*, 2007, vol.76, no. 4, p. 046216.
10. Anishchenko V., Nikolaev S. Generator of quasi-periodic oscillations featuring two-dimensional torus doubling bifurcations. *Technical Physics Letters*, 2005, vol. 31, no. 10, p. 853.
11. Anishchenko V.S., Nikolaev S.M. Stability, synchronization and destruction of quasi-periodic motions. *Nelineinaya dinamika*, 2006, vol. 2, no. 3, p. 267 (in Russian).
12. Anishchenko V., Nikolaev S., Kurths J. Winding number locking on a two-dimensional torus: Synchronization of quasiperiodic motions. *Phys. Rev. E*, 2006, vol. 73, no. 5, p. 056202.
13. Broer H, Simó C., Vitolo R. Quasi-periodic bifurcations of invariant circles in low-dimensional dissipative dynamical systems. *Regular and Chaotic Dynamics*, 2011, vol. 16, no. 1-2, p. 154.

14. Komuro M. et al. Quasi-periodic bifurcations of higher-dimensional tori. *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, 2016, vol. 26, no. 7, p. 1630016,
15. Broer H, Simó C., Vitolo R. The Hopf-saddle-node bifurcation for fixed points of 3D-diffeomorphisms: the Arnol'd resonance web. *Reprint from the Belgian Mathematical Society*, 2008, p. 769.
16. Stankevich N. V., Kurths J., Kuznetsov A. P. Forced synchronization of quasiperiodic oscillations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2015, vol. 20, no. 1, p. 316.
17. Rosenblum M., Pikovsky A. Self-organized quasiperiodicity in oscillator ensembles with global nonlinear coupling. *Physical review letters*, 2007, vol. 98, no. 6, p. 064101.
18. Pikovsky A., Rosenblum M. Self-organized partially synchronous dynamics in populations of nonlinearly coupled oscillators. *Physica D*, 2009, vol. 238, no. 1, p. 27.
19. Rosenblum M., Pikovsky A. Two types of quasiperiodic partial synchrony in oscillator ensembles. *Phys. Rev. E*, 2015, vol. 92, no. 1, p. 012919.
20. Emelianova Yu. P., Kuznetsov A.P., Sataev I.R., Turukina L.V. Synchronization and multi-frequency oscillations in the low-dimensional chain of the self-oscillators. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2013, vol. 244, no. 1, p. 36.
21. Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R., Turukina L.V. About Landau–Hopf scenario in a system of coupled self-oscillators. *Physics Letters A*, 2013, vol. 377, p. 3291.
22. Kuznetsov A.P. Migunova N.A., Sataev I.R., Sedova Yu.V., Turukina L.V. From chaos to quasi-periodicity. *Regular and Chaotic Dynamics*, 2015, vol. 20, no. 2, p. 189.
23. Itoh K., Inaba N., Sekikawa M. Three-torus-causing mechanism in a third-order forced oscillator. *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, 2013, no. 9, p. 093A02.
24. Kamiyama K., Inaba N., Sekikawa M., Endo T. Bifurcation boundaries of three-frequency quasi-periodic oscillations in discrete-time dynamical system. *Physica D*, 2014, vol. 289, p. 12.
25. Sekikawa M., Inaba N., Kamiyama K., Aihara K. Three-dimensional tori and Arnold tongues. *Chaos*, 2014, vol. 24, no. 1, p. 013137.
26. Hidaka S., Inaba N., Sekikawa M., Endo T. Bifurcation analysis of four-frequency quasi-periodic oscillations in a three-coupled delayed logistic map. *Physics Letters A*, 2015, vol. 379, no. 7, p. 664.
27. Kuznetsov A.P., Stankevich N.V. Synchronization of generators of quasiperiodic oscillations. *Nelineinaya dinamika*, 2013, vol. 9, no. 3, p. 409 (in Russian).
28. Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Stankevich N. V. A simple autonomous quasiperiodic self-oscillator. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2010, vol. 15, no. 6, p. 1676.

29. Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Mosekilde E., Stankevich N.V. Generators of quasi-periodic oscillations with three-dimensional phase space. *The European Physical Journal Special Topics*, 2013, no.10, p. 2391.
30. Kuznetsov A.P. Dynamic systems and bifurcations. Saratov: Publishing Center «Nauka», 2015. 168 p.
31. Anishchenko V. S., Safonova M.A., Feudel U., Kurths J. Bifurcations and transition to chaos through three-dimensional tori. *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, 1994, vol. 4, no. 03. P. 595.

*Кузнецов Александр Петрович* – родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук (1996), ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, заведующий кафедрой динамических систем Саратовского государственного университета в СФ ИРЭ РАН. Имеет звание профессора (2002). Область научных интересов: динамические системы, теория бифуркаций, синхронизация, квазипериодические колебания и их приложения. Лауреат гранта Президента Российской Федерации, Соросовский профессор (2000, 2001). Опубликовал более 150 статей в российских и международных научных журналах. Под его руководством защищено 8 кандидатских диссертаций. Автор оригинальных учебных курсов для факультета нелинейных процессов СГУ и Лицея прикладных наук. Автор и соавтор 12 монографий, учебников и задачников по нелинейной динамике, теории колебаний и физике. Среди них: «Физика квазипериодических колебаний» «Нелинейность: от колебаний к хаосу», «Нелинейные колебания», «Линейные колебания и волны (сборник задач)», «Задачи физических олимпиад» и др.



Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, д. 38  
 Саратовский филиал Института радиотехники  
 и электроники им. В.А. Котельникова РАН  
 Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
 Саратовский государственный университет  
 E-mail: apkuz@rambler.ru

*Станкевич Наталья Владимировна* – родилась в 1985 году в Саратове, окончила Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского в 2007 году. Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГУ (2011) по специальности 01.04.03 – «Радиофизика». С 2011 года работает доцентом Саратовского государственного технического университета имени Гагарина Ю.А. на кафедре «Радиоэлектроника и телекоммуникации». Опубликовала 30 научных статей в области теории колебаний и волн, радиофизика и электроника, применение нелинейной динамики в различных областях науки. Член редакционной коллегии журнала «Universal Journal of Electrical and Electronic Engineering».



Россия, 410054 Саратов, ул. Политехническая, 77  
 Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю.А.  
 E-mail: stankevichnv@mail.ru