Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2021. Т. 29, № 1
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2021;29(1)

Обзорная статья
УДК 530.182
DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-1-35-77

Теоретические модели физических систем с грубым хаосом

В. П. Круглов[1,2,3]✉, *П. В. Купцов*[2,1]

[1]Саратовский филиал Института радиотехники и электроники имени В.А. Котельникова РАН, Россия
[2]Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Россия
[3]Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет имени Н.И. Лобачевского, Россия
E-mail: ✉kruglovyacheslav@gmail.com, p.kuptsov@rambler.ru

Поступила в редакцию 16.11.2020, принята к публикации 15.12.2020, опубликована 1.02.2021

Аннотация. *Цель* данного обзора состоит в том, чтобы в едином ключе изложить последние результаты по математическому моделированию грубого гиперболического хаоса в системах различной физической природы. Основные *методы* исследования состоят в численном решении систем дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, численном извлечении фазы колебательных процессов или пространственных структур, вычислении показателей Ляпунова и исследовании взаимного расположения устойчивых и неустойчивых многообразий хаотических траекторий, вычислении гауссовой кривизны поверхностей. Эти процедуры позволяют выявить типичные атрибуты грубого гиперболического хаоса. *Результаты* заключаются в воспроизведении уже известных явлений, однако качественное их объяснение и количественные подтверждения даны в более подробной форме, в соответствии с развитием представлений о них. *Заключение.* В методическом плане предлагаемая обзорная статья может быть интересна для студентов и аспирантов в плане обучения принципам построения и анализа систем с хаотическим поведением.

Ключевые слова: гиперболический хаос, поверхности отрицательной кривизны, геодезический поток, структуры Тьюринга, аттрактор Смейла–Вильямса.

Благодарности. Работа В.П. Круглова (Раздел 2, Модели пространственно распределенных систем с аттрактором типа Смейла–Вильямса) поддержана грантом РНФ № 19-11-00280. Работа П.В. Купцова выполнена в рамках государственного задания Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН.

Для цитирования: *Круглов В.П., Купцов П.В.* Теоретические модели физических систем с грубым хаосом // Известия вузов. ПНД. 2021. Т. 29, № 1. С. 35–77. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-1-35-77.

Review
DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-1-35-77

Theoretical models of physical systems with rough chaos

V. P. Kruglov[1,2,3✉], *P. V. Kuptsov*[2,1]

[1]Saratov Brunch of Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics, Russia
[2]Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Russia
[3]Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Russia
E-mail: ✉kruglovyacheslav@gmail.com, p.kuptsov@rambler.ru
Received 16.11.2020, accepted 15.12.2020, published 1.02.2021

Abstract. The *purpose* of this review is to present in a unified manner the latest results on mathematical modeling of rough hyperbolic chaos in systems of various physical nature. Main research *Methods* are the numerical solution of systems of differential equations and partial differential equations, numerical extraction of the phase of oscillatory processes or spatial patterns, calculating of Lyapunov exponents, and studying the mutual arrangement of the stable and unstable manifolds of chaotic trajectories, the calculation of Gaussian curvature of surfaces. These procedures allow to reveal the typical attributes of rough hyperbolic chaos. *Results* reproduce the studies of already known phenomena, however, their qualitative explanation and quantitative confirmation are given in in a more detailed form, in accordance with the development of ideas about them. *Conclusion*. Methodologically the proposed review article may be interesting for undergraduate and graduate students in terms of studying the principles of construction and analysis of systems with chaotic behavior.

Keywords: hyperbolic chaos, surfaces of negative curvature, geodesic flow, Turing patterns, Smale–Williams attractor.

Acknowledgements. V.P. Kruglov acknowledges the RSF grant No. 19-11-00280 for the funding support related to the results associated with models of spatially distributed systems with a Smale–Williams attractor (Section 2). The work of P.V. Kuptsov was performed in the framework of a state order to the Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of Russian Academy of Sciences.

For citation: Kruglov VP, Kuptsov PV. Theoretical models of physical systems with rough chaos. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2021;29(1): 35–77. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-1-35-77.

Введение

Понятие грубости было впервые введено в работе Андронова и Понтрягина [1]. Оно означает, что при малой вариации параметров или функций, фигурирующих в определении системы, динамика остаётся неизменной с точностью до непрерывной замены переменных. С точки зрения физических или технических объектов, это означает нечувствительность динамики к малому изменению параметров системы, несовершенству изготовления, помехам и т.п. Это свойство крайне важно для исследования физических систем, так как обычной является ситуация, когда неизвестны точные модельные уравнения. Для грубой системы это некритично, так как погрешности в оценке параметров не приведут к качественным ошибкам в описании её динамики.

Изначально идея грубости и её важности для приложений возникла применительно к изучению автоколебаний [1, 2]. Впоследствии, после открытия хаотических динамических систем, понятие грубости было перенесено на них. Самый известный класс грубых хаотических систем – это системы с однородным гиперболическим поведением, теория которых была заложена в работах Аносова, Алексеева, Смейла, Вильямса, Синая, Плыкина, Рюэля, Песина, Ньюхауса и других, см. обзор в книгах [3, 4]. Все траектории такой системы – седловые, что приводит к тому, что векторные пространства всевозможных малых (касательных) возмущений во всех точках траектории допускают представление в виде прямой суммы строго растягивающих и строго сжимающих подпространств. Однородность означает, что показатели экспоненциального роста или затухания возмущений в этих подпространствах ограничены и дистанцированы от нуля, то есть не могут быть бесконечно малыми и бесконечно большими. Существуют и другие примеры хаотических систем, в частности, псевдогиперболические [5–8], у которых требования к структуре пространства возмущений траекторий менее строгие, однако при этом демонстрируемый ими хаос тем не менее грубый.

Грубые системы, демонстрирующие периодические колебания, типичны в том смысле, что их экспериментальная реализация не представляет принципиальных сложностей. Первоначально ожидалось, что и в случае систем с хаотическим поведением, грубость будет их наиболее типичным свойством. Однако вскоре выяснилось, что типичными как раз являются негрубые хаотические системы, которые не вписываются в узкие рамки гиперболической теории. В связи с этим на долгое время сложилось мнение, что гиперболический хаос – это математическая абстракция, не имеющая отношения к реальным системам.

Отсутствие грубости у физически реализуемых моделей оказалось существенным препятствием на пути их применений и сослужило плохую службу теории динамического хаоса. В связи со сложностью настройки и отладки генераторов шума на основе негрубых хаотических систем, в последнее время от них стали отказываться и использовать микроконтроллеры с программной реализацией генератора случайных чисел и цифроаналоговым преобразователем. В силу врождённой ограниченности машинных генераторов случайного шума, такое техническое решение нельзя признать достаточно хорошим.

Принципы исследовательской программы, позволившей решить проблему грубого хаоса в физических системах, были заложены в работе С.П. Кузнецова в 2005 году [9]. В основу положена методологическая установка не ограничиваться традиционным формально-математическим подходом, основанным на геометрических, алгебраических, топологических построениях, а подойти к проблеме с позиции физики. Это означает целенаправленное конструирование грубых хаотических систем с использованием стандартного для физика-практика инструментария – осцилляторы, линии задержки, цепи обратной связи, взаимодействующие частицы, поля и т.п. Формирование хаотического множества в фазовом пространстве можно рассматривать как чередование растяжений фазового объёма с последующим вложением его в исходную область. Причина негиперболичности – неравномерность распределения фазовой «субстанции» в ходе этого процесса, что в пределе приводит к возникновению сингулярностей. Чтобы этого избежать, нужно сконструировать систему с правильным растяжением и складыванием в фазовом пространстве, используя для этого физически реализуемые компоненты. Одна из ключевых идей, которая впоследствии легла в основу большого числа конструкций физических систем, достаточно просто реализуемых в натурном эксперименте – растяжению следует подвергать фазовую переменную, тогда требование равномерности будет выполнено автоматически. Нужно отметить, что на основе этого принципа функционирует известная математическая конструкция с гиперболическим хаосом – соленоид Смейла–Вильямса [10–12]. Ещё одна идея системы с гиперболичностью, допускающая воплощение «в железе» – строить систему таким образом, чтобы её динамика соответствовала движению на многообразии гиперболической формы, то есть имеющем отрицательную кривизну. Такое движение характеризуется неустойчивостью по отношению к поперечным возмущениям и, если оно происходит в ограниченной области, то оказывается хаотическим и может обладать свойством грубости [13–15].

Самая первая физическая система с гиперболическим хаосом, реализующая идею растяжения фазы, была предложена С.П. Кузнецовым в 2005 году [9]. Два генератора ван дер Поля с двукратно отличающимися собственными частотами поочерёдно возбуждаются и прекращают колебания. Из-за действия на их параметры возбуждения внешней периодической силы, параметры принимают то положительное, то отрицательное значения и делают это в противофазе: когда один из генераторов находится в фазе возбуждения, колебания во втором затухают и наоборот.

Возбуждения и затухания происходят медленно – период изменения параметров возбуждения намного больше периодов колебаний генераторов. Генератор с более низкой частотой воздействует на высокочастотный через малый параметр связи с квадратичной нелинейностью, а в обратную сторону связь реализована через умножение переменной на дополнительный опорный сигнал. Частота опорного сигнала равна собственной частоте низкочастотного генератора. За период модуляции параметров возбуждения происходит передача фазы колебаний от одного генератора к другому и обратно и в ходе этой передачи фаза удваивается. Если построить стробоскопическое сечение с периодом, соответствующим периоду изменения параметра возбуждения, то фаза на этом сечении будет преобразовываться отображением Бернулли, входящим в построение однородно гиперболического аттрактора типа Смейла–Вильямса. При достаточно сильном сжатии по остальным переменным система в стробоскопическом сечении демонстрирует гиперболический хаос. Это утверждение строго доказано при помощи техники доказательных вычислений (computer assisted proof) в статье [16]. Описанная система имеет достаточно простую конструкцию с точки зрения реализации в физическом эксперименте. Её экспериментальное исследование было выполнено в работе [17].

Первоначальная идея генерации гиперболического хаоса на основе механизма удвоения фазы [9] послужила отправной точкой нового научного направления, связанного с наполнением физическим содержанием гиперболической теории динамических систем. Например, кроме уже приведённых и приводимых ниже ссылок на работы самого С.П. Кузнецова и его сотрудников можно сослаться на статью [18], в которой система с гиперболическим аттрактором Смейла–Вильямса используется для построения модели, описывающей сердечные фибрилляции. Выход пионерской работы [9] оживил интерес исследователей к грубому хаосу в целом. В научных изданиях появилось достаточно большое количество публикаций, посвящённых исследованиям как теоретических, так и прикладных аспектов этого явления. Вот очень ограниченный перечень ссылок на работы, где так или иначе затрагивается эта тематика: [7, 19–21].

Промежуточные итоги исследований были опубликованы в 2011 и 2012 годах С.П. Кузнецовым в двух монографиях и большой обзорной статье [3, 4, 22]. Однако с тех пор самим С.П. Кузнецовым и научным коллективом под его руководством были получены новые результаты, которые представлены в нашем обзоре.

Недостатком систем на основе модуляции параметра возбуждения и удвоения фазы является то, что они демонстрируют гиперболичность только в стробоскопическом сечении. В промежутках между прохождениями системой поверхности сечения хаотические свойства плохо определены из-за периодических стадий затухания, на которых амплитуды осцилляторов стремятся к нулю. Поэтому очевидно, что необходимым шагом должен был стать поиск принципа конструирования систем с гиперболичностью в непрерывном времени. Идея, которая легла в основу исследований в этом направлении – гиперболический хаос геодезических потоков на поверхностях отрицательной кривизны [13].

В разделе 1 мы обсуждаем работы С.П. Кузнецова, в которых рассматриваются консервативные и диссипативные системы, движение которых в конфигурационном пространстве происходит на многообразии с отрицательной кривизной или вблизи от него. В силу этого, хаотическая динамика таких систем характеризуется свойством гиперболичности. Итогом этой серии работ является статья [23], в которой предложена конструкция электронного устройства, демонстрирующего гиперболический хаос в непрерывном времени.

В разделе 2 рассмотрен ряд задач о грубом хаосе в системах высокой размерности: на основе структур Тьюринга, параметрически возбуждаемых стоячих волн, цепочек маятников с вибрирующим подвесом, ансамблей осцилляторов с модулируемой во времени глобальной связью.

1. Гиперболический хаос на поверхности отрицательной кривизны

В работах С.П. Кузнецова и его коллег было предложено достаточно большое количество физически реализуемых систем, которые демонстрируют однородно гиперболический хаос [3,4,22]. Однако все они рассматриваются в приближении сечения Пуанкаре, то есть гиперболический хаос наблюдается только в дискретном времени. В промежутках между пересечениями траекторией поверхности сечения Пуанкаре нельзя говорить о хорошо выраженном равномерном растяжении и сжатии фазового пространства, характерном для гиперболичности. Поэтому очевидным шагом в реализации программы наполнения гиперболической теории физическим содержанием является поиск или конструирование таких физических систем, в динамике которых гиперболический хаос можно наблюдать в непрерывном времени. Ниже обсуждается серия работ С.П. Кузнецова, в которых для этой цели было предложено взять за основу консервативную систему с гиперболическим хаосом (систему Аносова [14,24]), описывающую движение материальной точки по геодезическим линиям искривлённого пространства. Если такое пространство имеет всюду положительно определённую метрику, коэффициенты которой непрерывно зависят от координат и при этом кривизна пространства всюду отрицательная, то такое движение будет неустойчивым по отношению к поперечным возмущениям. Если при этом оно происходит в ограниченной области, то оказывается хаотическим и обладает свойством грубости [13,15].

1.1. Понятие кривизны кривой и поверхности. В этом разделе мы приведём основные сведения из дифференциальной геометрии, связанные с понятием кривизны кривой и поверхности [25,26]. Рассмотрим на плоскости кривую, заданную как $\vec{\gamma}(t)$. Удобно представлять эту кривую как траекторию некоторой материальной точки, то есть зависимость от времени её радиуса-вектора. Нас будут интересовать регулярные точки этой кривой – такие, в которых вектор скорости $\vec{v} = \dot{\vec{\gamma}}$ не обращается в нуль. Пример такой кривой, заданной как $\vec{\gamma}(t) = (t, \sin t)$, показан на рис. 1.

Из курса общей физики известно, что полное ускорение материальной точки может быть представлено как сумма двух компонент – тангенциальной, характеризующей быстроту изменения скорости по модулю, и нормальной (центростремительной), характеризующей быстроту изменения скорости по направлению. Нормальное ускорение в некоторой точке траектории вычисляется как $a_n = v^2/\rho$, где v – модуль скорости, а ρ – радиус окружности, соприкасающейся с траекторией в данной точке. Кривизна траектории – это величина, обратная радиусу $k = 1/\rho$.

Наиболее простой формула для кривизны становится, когда кривая $\vec{\gamma}(s)$ задана в зависимости от натурального параметра, то есть в качестве параметра выступает не время t, а путь s, пройденный материальной точкой вдоль кривой (иными словами – длина дуги кривой). Физически это отвечает ситуации, когда движение происходит с постоянной по модулю скоростью, равной единице. Тогда тангенциальное ускорение равно нулю и полное ускорение совпадает с нормальным, а так как $v = 1$, то $k = a_n = |\ddot{\vec{\gamma}}(s)|$.

Рассмотрим теперь общий случай, когда скорость может меняться как по величине, так и по направлению, а траектория $\vec{\gamma}(t)$ задана в зависимости от произвольного параметра t. Пусть $\vec{a}$ – полное ускорение, а α – угол между направлениями вектора полного ускорения и скорости $\vec{v}$, которая всегда направлена по касательной к траектории. Тогда $a_n = a \sin\alpha$ и для кривизны имеем: $k = a \sin\alpha / v^2$. Если числитель и знаменатель этой формулы домножить на v, мы получим в числителе модуль векторного произведения векторов скорости и полного ускорения. Выразив эти векторы через производные радиуса-вектора, получим формулу для кривизны

$$k = \frac{|\dot{\vec{\gamma}}(t) \times \ddot{\vec{\gamma}}(t)|}{|\dot{\vec{\gamma}}(t)|^3}, \tag{1}$$

где «×» обозначает векторное произведение. На рис. 1 показаны векторы скорости $\vec{v}$ и полного

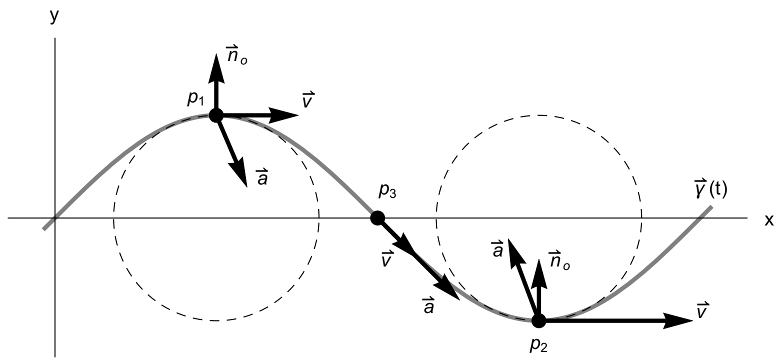


Рис. 1. Определение кривизны кривой $\vec{\gamma}(t)$. Векторы $\vec{v}$ и $\vec{a}$ – это скорость и полное ускорение, соответственно. Модуль $\vec{v}$ и модуль и направление $\vec{a}$ заданы произвольно, с целью иллюстрации. Вектор $\vec{n}_o$ – единичная нормаль, проведённая так, чтобы упорядоченная пара $\vec{v}$ и $\vec{n}_o$ была правоориентированной (кратчайший поворот от $\vec{v}$ к $\vec{n}_o$ происходит против часовой стрелки). Символами p_1, p_2 и p_3 обозначены точки с отрицательной, положительной и нулевой кривизной, соответственно. Пунктиром показаны соприкасающиеся окружности в точках p_1 и p_2. Кривизна – это обратный радиус соприкасающейся окружности

Fig. 1. Definition of the curvature of the curve $\vec{\gamma}(t)$. Vectors $\vec{v}$ and $\vec{a}$ are the velocity and the acceleration respectively. Absolute value of $\vec{v}$ and absolute value and direction of $\vec{a}$ are set arbitrarily for the purpose of illustration. Vector $\vec{n}_o$ is unit normal, such directed, that the ordered pair $\vec{v}$ and $\vec{n}_o$ is right oriented (the shortest turn from $\vec{v}$ to $\vec{n}_o$ is counter-clockwise). Symbols p_1, p_2 и p_3 are points with negative, positive and zero curvature respectively. Touching circles at points p_1 and p_2 are plotted with dotted lines. The curvature is an inverse radius of the circle

ускорения $\vec{a}$ в точках с ненулевой кривизной p_1 и p_2. В точке p_3 скорость и ускорение сонаправлены, так что кривизна обращается в нуль.

Из рис. 1 видно, что искривление траектории в точках p_1 и p_2 разное по направлению: точка p_1 соответствует максимуму изображённой функции, а в точке p_2 – минимум. В общем случае ориентация кривизны задаётся следующим образом. Пусть на плоскости задан право ориентированный базис: кратчайший поворот от первого базисного вектора (ось x) ко второму (ось y) происходит против часовой стрелки. Рассмотрим упорядоченную пару векторов $\vec{v}$ и $\vec{a}$. Если в некоторой точке траектории эти векторы неколлинеарны, и при этом образуют правоориентированную пару, то кривизну в этой точке мы считаем положительной, см. точку p_2 на рис. 1. И наоборот, если пара левоориентированная, как, например, в точке p_1, то кривизна отрицательная. Отметим, что знак в той или иной ситуации приписывается произвольным образом, поэтому физический смысл имеет не конкретный знак кривизны, а то, как происходит его изменение вдоль кривой.

Чтобы записать формально выражение для ориентированной кривизны, зададим в рассматриваемой точке нормаль $\vec{n}_o$ так, чтобы упорядоченная пара $\vec{v}$ и $\vec{n}_o$ была правоориентированной. Тогда для кривой с натуральной параметризацией ориентированную кривизну можно записать как

$$k_o = \langle \ddot{\vec{\gamma}}(s), \vec{n}_o \rangle. \tag{2}$$

Отметим, что векторы $\ddot{\vec{\gamma}}(s)$ и $\vec{n}_o$ коллинеарны и скалярное произведение необходимо только для выбора знака.

Для кривой с произвольной параметризацией $\vec{\gamma}(t) = (x(t), y(t))$ ориентированную кривизну можно формально записать так

$$k_o = \frac{\dot{\vec{\gamma}}(t) \times \ddot{\vec{\gamma}}(t)}{|\dot{\vec{\gamma}}(t)|^3} = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{[\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2]^{3/2}}, \tag{3}$$

где в числителе операцию над векторами $\vec{a} \times \vec{b}$ теперь следует понимать как ориентированную площадь параллелограмма, натянутого на эти векторы.

Теперь обсудим понятие кривизны поверхности. Пусть в трёхмерное евклидово пространство вложено двумерное гладкое многообразие, заданное параметрически как $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$. Здесь $\vec{r}$ – вектор в объемлющем трёхмерном пространстве, значения которого определяются скалярами u и v. Величины u и v можно интерпретировать как координаты в двумерном искривлённом пространстве. Нас будут интересовать регулярные поверхности, то есть не имеющие изломов. Необходимым и достаточным условием этого является требование, чтобы касательные векторы в каждой точке поверхности, задаваемые производными $\vec{r}'_u$ и $\vec{r}'_v$ были не коллинеарны друг другу во всех точках поверхности. Такая поверхность может возникать как многообразие, на котором происходит движение некоторой консервативной системы.

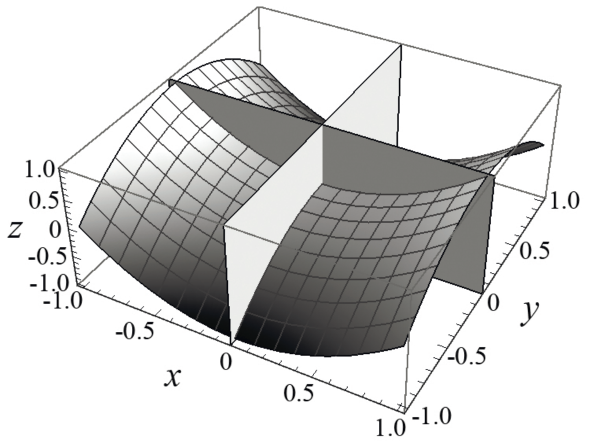


Рис. 2. Иллюстрация процедуры вычисления кривизны поверхности, см. текст. Поверхность задана как $\vec{r} = (u, v, u^2 - v^2)$

Fig. 2. Illustration of the calculating the curvature of a surface, see text. The surface is defined as $\vec{r} = (u, v, u^2 - v^2)$

Кривизну поверхности можно вычислить следующим образом. Рассмотрим поверхность $\vec{r} = (u, v, u^2 - v^2)$ на рис. 2 и вычислим её кривизну в точке $(0, 0, 0)$. Для этого сначала найдём пару векторов $\vec{r}'_u$ и $\vec{r}'_v$, направленных по касательным к поверхности в рассматриваемой точке, и построим на них касательную плоскость. Для выбранной точки эта поверхность задаётся уравнением $z = 0$ и на рисунке не показана. Проведём ещё одну плоскость перпендикулярно касательной плоскости. Для рассматриваемой точки она будет располагаться вертикально. Вертикальная плоскость рассекает поверхность вдоль некоторой кривой, ориентированную кривизну которой можно вычислить так, как было описано выше, см. (3). Форма кривой и, следовательно, значение кривизны, зависит от ориентации секущей плоскости по отношению к касательной. Поворачивая секущую плоскость, найдём два экстремума, называющиеся главными значениями – наибольшую и наименьшую кривизну $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$, соответственно. На рис. 2 главным значениям кривизны отвечают секущие плоскости $y = 0$ и $x = 0$. Соответствующие кривые задаются формулами $z = x^2$ и $z = -y^2$ и в точке $x = y = z = 0$ имеют кривизну $\varkappa_1 = 2$ и $\varkappa_2 = -2$, см. формулу (3). Произведение главных значений кривизны называется гауссовой кривизной поверхности K:

$$K = \varkappa_1 \varkappa_2. \tag{4}$$

Для поверхности на рис. 2 в точке $(0, 0, 0)$ гауссова кривизна равна -4.

Гауссова кривизна меняется от точки к точке и может быть положительной, отрицательной или равной нулю. Знак гауссовой кривизны двумерной поверхности имеет простой геометрический смысл. Если в данной точке кривизна положительная, то достаточно малая проколотая окрестность этой точки (из которой исключена сама точка) будет целиком расположена в одном из двух полупространств, определяемых касательной поверхностью, проведённой в данной точке. Если кривизна отрицательная, то любая проколотая окрестность точки будет пересекаться с внутренностями обоих полупространств.

Описанная качественно процедура вычисления кривизны может быть формализована с использованием так называемых первой и второй квадратичных форм поверхности.

Для вычисления длин и углов в векторном пространстве требуется определить скалярное произведение:

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \vec{a}^{\mathrm{T}} \mathbf{M} \vec{b}. \tag{5}$$

Здесь «T» обозначает транспонирование, а матрица $\mathbf{M}$ называется метрическим тензором. Чаще всего в евклидовом пространстве в качестве метрики задают единичную матрицу, так что скалярное произведение приобретает стандартный вид, который в англоязычной литераторе принято называть «dot product». Мы также будем считать, что в объемлющем пространстве метрика совпадает с единичной матрицей.

Рассмотрим теперь в этом пространстве регулярную поверхность $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$. Для измерения длин и углов на этой поверхности требуется также задать скалярное произведение. Однако из-за кривизны его можно задать только локально для бесконечно малых векторов смещений из данной точки. Другими словами, мы должны рассматривать касательные векторы в каждой точке поверхности.

Пусть точка на поверхности задана как (u, v). В объемлющем пространстве ей отвечает вектор $\vec{r}(u, v)$. Рассмотрим бесконечно малый вектор смещения из этой точки:

$$\mathrm{d}\vec{r} = \vec{r}\,'_u \mathrm{d}u + \vec{r}\,'_v \mathrm{d}v. \tag{6}$$

Используя скалярное произведение в объемлющем пространстве (5), вычислим квадрат нормы вектора $\mathrm{d}r$:

$$\langle \mathrm{d}\vec{r}, \mathrm{d}\vec{r} \rangle = E\mathrm{d}u^2 + 2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G\mathrm{d}v^2, \tag{7}$$

где

$$E = \langle \vec{r}\,'_u, \vec{r}\,'_u \rangle,\ F = \langle \vec{r}\,'_u, \vec{r}\,'_v \rangle,\ G = \langle \vec{r}\,'_v, \vec{r}\,'_v \rangle. \tag{8}$$

Полученное выражение имеет вид скалярного произведения на поверхности $\vec{r}(u, v)$ с метрическим тензором $\mathbf{D} = ((E, F), (F, G))$. Так как $\mathbf{D}$ задан через скалярные произведения касательных векторов в объемлющем пространстве, то метрику называют индуцированной. В силу того, что пространство искривлено, этот тензор разный в разных точках пространства. Выражение (7) с коэффициентами (8) называется первой квадратичной формой поверхности.

Первая квадратичная форма характеризует внутренние свойства искривлённой поверхности – она позволяет вычислять длины отрезков и углы, измеренные по отношению к координатной системе, заданной на самой этой поверхности. Кривизна Гаусса связанна с расположением поверхности в объемлющем пространстве и для её вычисления кроме первой нужно привлечь вторую квадратичную форму. Первая квадратичная форма определена через касательные векторы и натянутую на них касательную плоскость и выражается через первые производные от радиуса-вектора поверхности $\vec{r}(u, v)$. Вторая квадратичная форма связана с квадратичной аппроксимацией поверхности в малой окрестности данной точки и выражается через вторые производные радиуса-вектора.

В некоторой точке поверхности с координатами u и v построим касательные векторы $\vec{r}\,'_u$ и $\vec{r}\,'_v$, натянем на них касательную плоскость, а затем проведём нормаль к этой плоскости $\vec{n}_o(u, v)$ выбрав её направление так, чтобы тройка векторов $\vec{r}\,'_u$, $\vec{r}\,'_v$, $\vec{n}_o$ была правой. Зададим произвольную плоскую кривую, проходящую через данную точку, причём будем считать, что задана натуральная параметризация: $\vec{r} = \vec{r}(u(s), v(s))$. Тогда вторая квадратичная форма поверхности может быть записана в виде

$$k_o = \langle \ddot{\vec{r}}, \vec{n}_o \rangle = \langle (\vec{r}\,''_{uu}\dot{u}^2 + 2\vec{r}\,''_{uv}\dot{u}\dot{v} + \vec{r}\,''_{vv}\dot{v}^2), \vec{n}_o \rangle. \tag{9}$$

Здесь $\ddot{\vec{r}}$ – вторая производная по параметру s. Отметим, что записанная таким образом вторая квадратичная форма представляет собой обобщение формулы для ориентированной кривизны кривой (2). Учитывая, что вектор $\vec{n}_o$ может быть выражен как $\vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v / \sqrt{EG - F^2}$ и заменяя производные $\dot{u}$ и $\dot{v}$ на соответствующие дифференциалы, получим вторую квадратичную форму в виде

$$k_o = L\mathrm{d}u^2 + 2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v + N\mathrm{d}v^2, \tag{10}$$

где

$$L = \frac{\langle \vec{r}''_{uu}, \vec{r}'_u \times \vec{r}'_v \rangle}{\sqrt{EG - F^2}},\ M = \frac{\langle \vec{r}''_{uv}, \vec{r}'_u \times \vec{r}'_v \rangle}{\sqrt{EG - F^2}},\ N = \frac{\langle \vec{r}''_{vv}, \vec{r}'_u \times \vec{r}'_v \rangle}{\sqrt{EG - F^2}}. \tag{11}$$

Квадратичная форма k_o (10) с коэффициентами (11) есть ориентированная кривизна некоторой кривой, проходящей на поверхности через точку (u, v) в направлении $(\mathrm{d}u, \mathrm{d}v)$. Для вычисления гауссовой кривизны нам нужны главные значения, то есть экстремумы k_o. Так как первая и вторая квадратичные формы имеют симметричные матрицы и при этом первая форма положительно определена, то, согласно известной теореме линейной алгебры о паре квадратичных форм [27], существует линейное преобразование, одновременно приводящее обе формы к диагональному виду. Матрица первой формы становится единичной, а диагональные элементы второй – это искомые главные значения $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$. Опираясь на упомянутую теорему, можно получить формулу для их произведения, которое равно гауссовой кривизне:

$$K = \varkappa_1\varkappa_2 = \det\mathbf{Q} \,/\, \det\mathbf{D}, \tag{12}$$

где $\mathbf{D} = ((E, F), (F, G))$ и $\mathbf{Q} = ((L, M), (M, N))$.

Существуют геометрические фигуры, кривизна которых всюду имеет один и тот же знак. Пример фигуры с положительной кривизной – это сфера. Цилиндр имеет нулевую кривизну. Поверхности с отрицательной кривизной имеют особое значение для теории динамических систем – движение по такой поверхности характеризуется неустойчивостью по отношению к поперечным возмущениям и, если оно происходит в ограниченной области, то оказывается хаотическим со свойством гиперболичности [13–15].

Предложенные в работах С.П. Кузнецова примеры физических систем, демонстрирующих гиперболический хаос в непрерывном времени, имеют искривлённое конфигурационное пространство в виде так называемой P-поверхности Шварца [28,29]. Отметим, что известны и другие примеры замкнутых (компактных без края) поверхностей в трехмерном пространстве, для которых геодезический поток является потоком Аносова [30].

P-поверхность Шварца задаётся уравнением

$$F(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \cos\theta_1 + \cos\theta_2 + \cos\theta_3 = 0 \tag{13}$$

и показана на рис. 3. В силу периодичности косинуса, противоположные грани кубической ячейки, внутри которой на рис. 3 изображена поверхность, следует считать совпадающими. Если материальная точка, двигаясь по этой поверхности, подходит к одной из граней, она оказывается на противоположной грани и продолжает непрерывное движение.

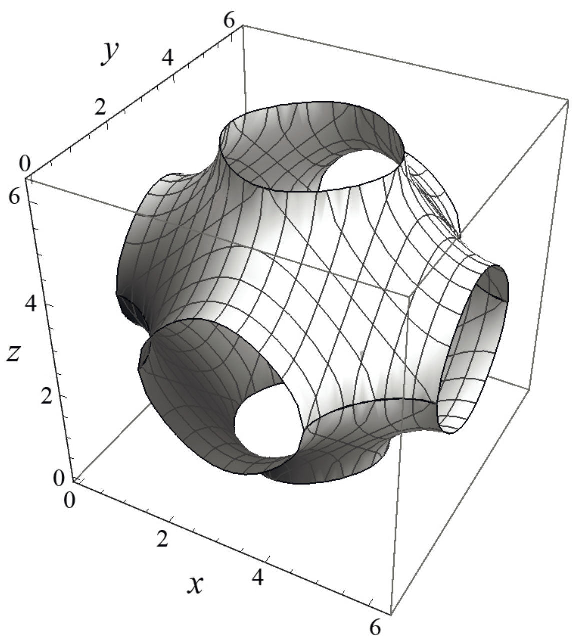


Рис. 3. P-поверхность Шварца, заданная уравнением (13)

Fig. 3. The Schwarz P-surface given by the equation (13)

Чтобы вычислить кривизну этой поверхности, рассмотрим θ_3 как функцию θ_1 и θ_2. Из рис. 3 видно, что поверхность состоит из двух одинаковых по форме частей, зеркально симметричных относительно плоскости $\theta_3 = \pi$. Достаточно вычислить кривизну только одной из частей, так как кривизна второй будет той же самой. Решим уравнение (13) относительно θ_3 и возьмём только одно из двух решений, отвечающее нижней половине поверхности. Тогда в параметрической форме поверхность можно задать так:

$$\vec{r} = (\theta_1, \theta_2, \arccos(-\cos\theta_1 - \cos\theta_2)). \tag{14}$$

Используя эту формулу, вычислим коэффициенты квадратичных форм (8) и (11) и кривизну (12). Затем, с учётом равенства (13) формулу для кривизны преобразуем к виду

$$K = -\frac{\cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2 + \cos^2\theta_3}{2\left(\sin^2\theta_1 + \sin^2\theta_2 + \sin^2\theta_3\right)^2}. \tag{15}$$

Из формулы видно, что кривизна всюду отрицательная за исключением восьми точек $\theta_i = \pm\pi/2$, $i = 1, 2, 3$, в которых она равна нулю. (Отметим, что ситуацию, когда знаменатель обращается в нуль следует исключить из рассмотрения, так как это не согласуется с уравнением поверхности (13)).

С точки зрения классификации, принятой в топологии, поверхность (13) – это поверхность третьего рода (крендель с тремя дырками) [31]. Доказано, что на двумерных многообразиях, род которых не равен нулю или единице, динамика геодезических потоков не интегрируема [32]. С учётом того, что она имеет отрицательную кривизну, свободное движение частицы по геодезическим линиям такой поверхности будет отвечать гиперболической хаотической динамике Аносова [13].

1.2. Система на основе тройного шарнирного механизма Тёрстона и Уикса с диссипацией, зависящей от полной кинетической энергии. В научно-популярной статье Тёрстона и Уикса [33] рассмотрена система на основе трёх дисков (ротаторов), которые могут свободно вращаться вокруг осей, установленных в вершинах равностороннего треугольника, рис. 4. На краю каждого из дисков установлен шарнир, к которому прикреплены стержни одинаковой длины, другие концы которых соединены в одной точке посредством ещё одного, подвижного, шарнира. Мгновенная конфигурация такой системы задаётся тремя угловыми координатами θ_1, θ_2 и θ_3, отсчитываемыми от лучей, соединяющих центры дисков с началом координат. В силу механической связи стержней друг с другом, независимыми являются только две угловые координаты из трёх, поэтому движение происходит на двумерном многообразии. Хант и МакКей показали [34], что при определённом подборе масс и размеров элементов, движение такого механизма по инерции с сохранением кинетической энергии отвечает геодезическому потоку на многообразии с отрицательной кривизной. В частности, в приближении малых радиусов дисков, форма этого многообразия представляет собой

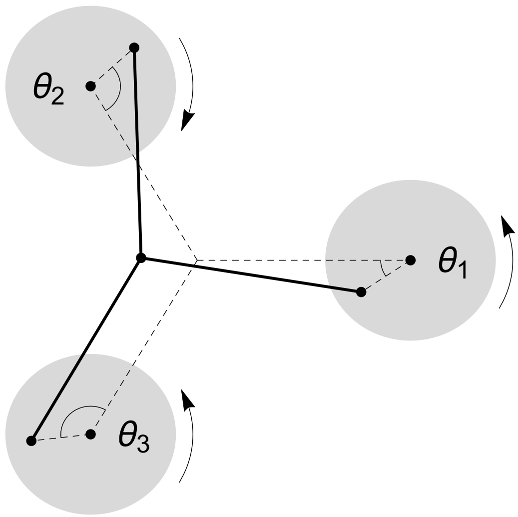


Рис. 4. Шарнирный механизм Трёстона–Уикса

Fig. 4. Thurston–Weeks three-linkage system

P-поверхность Шварца, см. уравнение (13) и рис. 3. Следовательно, в такой системе реализуется консервативная гиперболическая хаотическая динамика Аносова.

Несмотря на то, что тройной шарнирный механизм может быть сравнительно легко реализован в виде физической системы, описанная выше модель с динамикой Аносова всё равно остаётся математической идеализацией, так как не учитывает неизбежные потери энергии на трение. Поэтому в серии обсуждаемых ниже работ С.П. Кузнецова были предложены и изучены модели на основе тройного шарнирного механизма с диссипацией и подкачкой энергии, которые уже вполне отвечают реальным физическим системам.

В работе МакКея и Ханта [34] качественно обсуждается возможность добавления в систему на основе ротаторов механизма, управляющего диссипацией. Идея состоит в том, что диссипация должна зависеть от полной кинетической энергии системы. Она отрицательна при малой энергии и положительна, когда энергия становится большой. Это приводит к тому, что поверхность постоянной энергии становится притягивающей и на ней располагается аттрактор системы. На практике такая диссипация может быть реализована при помощи управляющего устройства, измеряющего полную кинетическую энергию системы и в зависимости от её значения сообщающего дискам тормозящие или ускоряющие вращательные моменты.

Математическая модель на основе идеи МакКея и Ханта построена в статье [35]. Считая радиусы дисков малыми, длины стержней можно принять равными расстоянию от начала координат до центров дисков и принять его за единицу. Массой стержней можно пренебречь и принимать во внимание только массы дисков. Полученные с учётом сделанных допущений уравнения динамики тройного шарнирного механизма с диссипацией, зависящей от полной кинетической энергии, имеют вид:

$$\begin{gathered}\ddot{\theta}_i = \nu[\mu - W]\left(\dot{\theta}_i - \frac{S}{H}\sin\theta_i\right) - \frac{C}{H}\sin\theta_i, \quad i = 1, 2, 3,\\ W = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\dot{\theta}_j^2, \quad S = \sum_{j=1}^{3}\dot{\theta}_j\sin\theta_j, \quad C = \sum_{j=1}^{3}\dot{\theta}_j^2\cos\theta_j, \quad H = \sum_{j=1}^{3}\sin^2\theta_j.\end{gathered} \tag{16}$$

При выводе этих уравнений учитывается уравнение механической связи $F(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = 0$ (13), обусловленной неизменностью длины стержней. Продифференцировав $F(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ по времени, мы получим условие, накладываемое на скорости $\dot{\theta}_i$:

$$F'(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \dot{\theta}_1\sin\theta_1 + \dot{\theta}_2\sin\theta_2 + \dot{\theta}_3\sin\theta_3 = 0. \tag{17}$$

При численном решении уравнений (16) нужно задавать начальные координаты $\theta_{1,2,3}$ на поверхности (13), а начальные скорости $\dot{\theta}_{1,2,3}$ должны удовлетворять уравнению (17). Решение также должно удовлетворять этим уравнениям. Хотя в принципе из-за численных погрешностей эти условия могут быть нарушены, на практике, решая эти уравнения методом Рунге–Кутты четвёртого порядка, мы обнаружили, что накопление погрешности происходит крайне медленно и в принципе его можно проигнорировать. Однако для повышения качества вычислений, после каждого шага Рунге–Кутты мы выполняли коррекцию координат. Для этого делалось несколько (не более трёх) шагов градиентного спуска для минимизации функции $F^2(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$:

$$\vec{r}_{n+1} = \vec{r}_n - \eta\nabla F^2, \tag{18}$$

где η – подбираемая эмпирически величина, которую мы приняли равной 10^{-3}. Итерируемый вектор $\vec{r}_n$ построен из угловых координат $\theta_{1,2,3}$, а в качестве начального вектора $\vec{r}_0$ берётся решение, получаемое на выходе шага Рунге–Кутты. Аналогичная коррекция скоростей $\dot{\theta}_i$

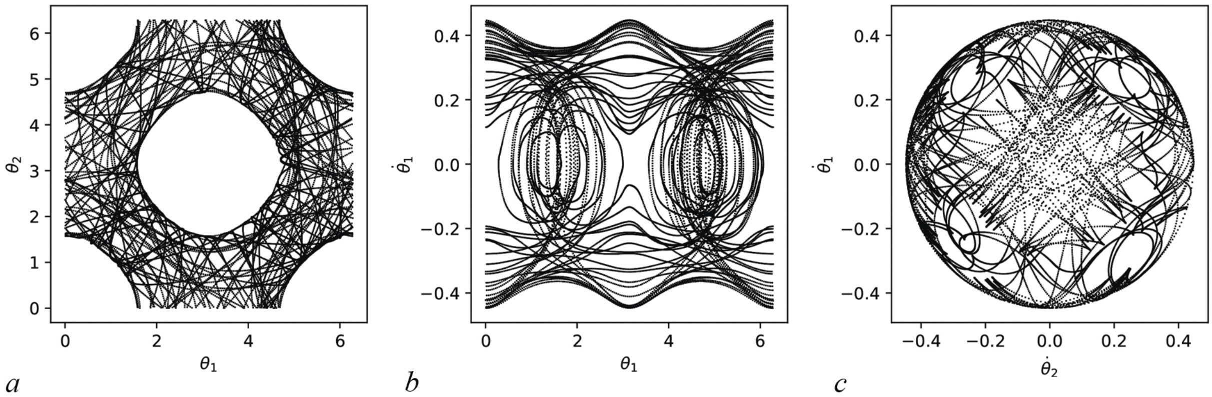


Рис. 5. Проекции аттрактора (16) на плоскость угловых координат θ_1 и θ_2 (*a*), координаты θ_1 и скорости $\dot\theta_1$ (*b*) и скоростей $\dot\theta_2$ и $\dot\theta_1$ (*c*). Угловые координаты меняются в диапазоне от 0 до 2π и противоположные края рисунков следует считать совпадающими. Выбраны значения параметров $\nu = 3$, $\mu = 0.1$

Fig. 5. Attractor of (16) projections on the plane of angular coordinates θ_1 and θ_2 (*a*), of coordinate θ_1 and velocity $\dot\theta_1$ (*b*) and velocities $\dot\theta_2$ and $\dot\theta_1$ (*c*). The angular coordinates vary in the interval from 0 to 2π and the opposite edges of the plots should be considered adjacent. Parameter values are $\nu = 3$, $\mu = 0.1$

не выполнялась, так как оказалось, что после коррекции координат уравнение (17) автоматически выполняется с высокой точностью.

Величина $W = (\dot\theta_1^2 + \dot\theta_3^2 + \dot\theta_3^2)/2$, фигурирующая в уравнениях (16) – это кинетическая энергия системы. Из (16) для неё можно получить уравнение следующего вида:

$$\dot W = 2\nu(\mu - W)W. \tag{19}$$

Решение этого уравнения – неподвижная точка $W = \mu$. Таким образом, аттрактор системы (16) лежит на поверхности постоянной энергии $W = \mu$.

На рис. 5 показаны двумерные проекции аттрактора системы (16). Диаграмма *a* соответствует проекции P-поверхности Шварца (см. рис. 3) вдоль оси θ_3 на плоскость θ_1 и θ_2. На диаграмме *c* представлена двумерная проекция $\dot\theta_1$ и $\dot\theta_2$ сферической поверхности постоянной кинетической энергии W. Наконец, на диаграмме *b* показаны траектории в проекции на плоскость θ_1 и $\dot\theta_1$. Хорошо видно, что характер динамики системы хаотический.

Для количественного подтверждения вывода о хаотическом характере динамики вычислим показатели Ляпунова, используя для этого стандартный алгоритм, разработанный независимо Бенеттином с соваторами [36, 37] и Шимадой и Нагашимой [38]. В Таблице приведены показатели для четырёх значений параметров. Отметим наличие одного положительного показателя, что подтверждает вывод о хаотической динамике. В первой строке таблицы приведены показатели для консервативного случая, когда диссипация отсутствует, $\nu = 0$, и динамика системы

Таблица. Показатели Ляпунова, рассчитанные для различных значений параметров

Table. Lyapunov exponents calculated for various parameter values

$\nu = 0$,	$W = 0.02$	$\lambda_{1,6} = \pm 0.100$,		$\lambda_{2,3,4,5} = 0$
$\nu = 2$,	$\mu = 0.02$	$\lambda_{1,6} = \pm 0.100$,	$\lambda_5 = -0.080$,	$\lambda_{2,3,4} = 0$
$\nu = 3$,	$\mu = 0.1$	$\lambda_{1,5} = \pm 0.224$,	$\lambda_6 = -0.600$,	$\lambda_{2,3,4} = 0$
$\nu = 5$,	$\mu = 0.5$	$\lambda_{1,5} = \pm 0.500$,	$\lambda_6 = -5.000$,	$\lambda_{2,3,4} = 0$

определяется постоянным значением кинетической энергии W. Кроме этого у системы есть два ограничения в виде наложенных связей (13) и (17). Следствием невозможности возмущений, нарушающих эти условия, являются три нулевых показателя Ляпунова, которые имеются у системы наряду ещё с одним, появляющимся по причине непрерывности времени[1]. В силу консервативности, сумма показателей системы должна быть равна нулю, поэтому первый и последний показатели совпадают по модулю и противоположны по знаку. Эти два показателя характеризуют возмущения траектории, лежащие в касательной плоскости к искривлённому многообразию, на котором происходит динамика. В статьях [35,39–41] говорится о том, что, так как система (16) в консервативном случае не имеет характерного временного масштаба, её показатель Ляпунова должен быть пропорционален скорости движения вдоль траектории $\lambda_{1,6} = \pm\kappa\sqrt{W}$. Найденный численно в статье [39] эмпирический коэффициент пропорциональности $\kappa = 0.70$ не зависит от параметров системы и определяется только геометрическими свойствами искривлённого многообразия, которое задаётся уравнением (13).

В случае, когда $\nu > 0$, то есть система неконсервативна, снимается жёсткое ограничение $W = \mathrm{const}$. Теперь возмущения, изменяющие энергию, возможны. Как следует из уравнения (19), эти возмущения затухают, следовательно, в спектре показателей Ляпунова вместо одного из нулевых появляется ещё один отрицательный показатель. Из уравнения (19) следует, что он равен $-2\nu\mu$ [35]. В зависимости от соотношения параметров μ и ν это будет либо пятый, либо шестой показатель, см. Таблицу. При этом в силу того, что в неконсервативном случае движение происходит по тому же самому многообразию (13), в спектре по-прежнему имеется пара показателей $\pm\kappa\sqrt{W}$.

Показатели Ляпунова показывают структуру касательного пространства системы (16). Зная их, можно выполнить численную проверку свойства гиперболичности хаоса. Для этого применим критерий углов, суть которого в том, чтобы, двигаясь вдоль траектории, находить касательные подпространства, отвечающие неустойчивым, нейтральным и устойчивым возмущениям траектории и вычислять углы между этими подпространствами. Необходимое и достаточное условие гиперболичности – отсутствие нулевых углов во всех точках аттрактора. Впервые идея проверки гиперболичности на основании статистики углов между касательными подпространствами была сформулирована в работе [42]. Мы будем использовать реализацию этого метода, описанную в статье [43]. Спектры показателей Ляпунова, представленные в Таблице, говорят о том, что в неконсервативном случае у рассматриваемой системы неустойчивое касательное подпространство одномерное (имеется один положительный показатель Ляпунова), а нейтральное – трёхмерное в силу наличия трёх нулевых показателей. Следовательно, первым индикатором гиперболичности является угол α_1 между одномерным неустойчивым касательным подпространством и прямой суммой нейтрального и устойчивого подпространств. Второй индикатор – это угол α_4 между двумерным устойчивым касательным подпространством и четырёхмерной (отсюда индекс «4») прямой суммой неустойчивого и нейтрального касательных подпространств. Если для траекторий аттрактора оба эти угла никогда не равны нулю, хаос гиперболический. Напротив, наличие точек, где хотя бы один из углов равен нулю, свидетельствует о нарушении гиперболичности. Мы также вычислим углы для консервативной системы при $\nu = 0$. Так как у этой системы четыре нулевых показателя, то индикаторами гиперболичности для неё будут углы α_1 и α_5. Для сравнения мы будем вычислять углы α_1, α_4 и α_5 для всех рассматриваемых случаев.

На рис. 6 показаны распределения углов для набора параметров, представленных в Таблице. В консервативном случае, рис. 6, *а*, индикаторами гиперболичности являются углы α_1 и α_5. Видно, что их распределения хорошо отделены от нуля, то есть гиперболичность подтвержда-

[1]Заметим, что при численном счёте никогда не удаётся получить строго нулевые значения показателей. В наших вычисления нулевым показателям соответствовали значения порядка 10^{-5}.

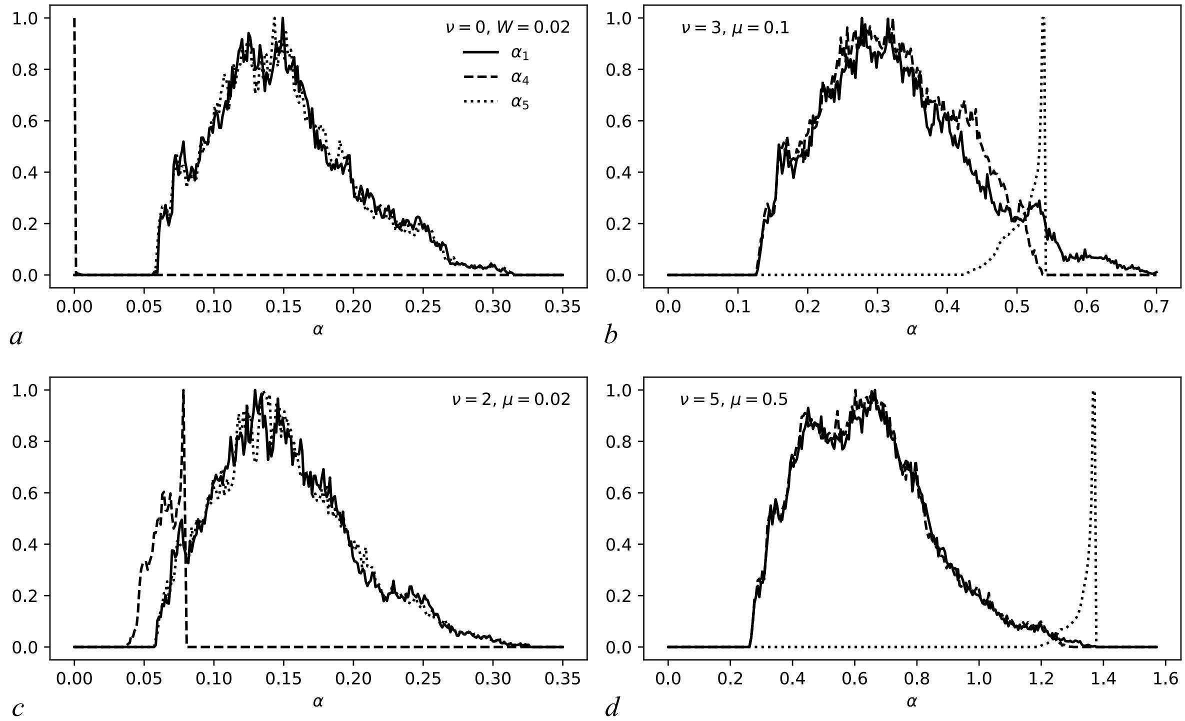


Рис. 6. Распределения углов α_1, α_4 и α_5 для траекторий на аттракторе системы (16). Ненулевые углы α_1 и α_5 для консервативного случая на рисунке *a* и ненулевые α_1 и α_4 для неконсервативных случаев *b*, *c* и *d* подтверждают свойство гиперболичности. Значения параметров приведены на рисунках

Fig. 6. Distributions of angles α_1, α_4 and α_5 for trajectories belonging to the attractor of system (16). Non-zero angles α_1 and α_5 in conservative case on Fig. *a* and non-zero α_1 and α_4 in nonconservative cases *b*, *c* and *d* confirm the hyperbolicity. Parameter values are shown in the figures

ется в полном соответствии с теоретическим выводом о гиперболическом хаосе при движении системы по инерции по геодезическим линиям на многообразии с отрицательной кривизной. Для неконсервативной системы индикаторы – это α_1 и α_4. Хорошо видно, что в трёх представленных случаях на рис. 6, *b*, *c* и *d* эти углы хорошо отделены от нуля, значит хаос гиперболический. Отметим что угол α_5 также остаётся отделённым от нуля на всех трёх диаграммах, отвечающих неконсервативному случаю. Это говорит о том, что возмущения, касательные к искривлённому многообразию, и возмущения поверхности постоянной кинетической энергии никогда не имеют касаний друг с другом.

Так как в данной системе гиперболичность хаотической динамики связана с отрицательной кривизной многообразия, на которой происходит движение, представляется интересным сопоставить значения кривизны и углов-индикаторов гиперболичности. С этой целью на рис. 7 вдоль оси абсцисс отложены значения гауссовой кривизны (15), а по оси ординат – угол. На рис. 7, *a* и *b* представлен консервативный случай $\nu = 0$, $W = 0.02$. На диаграмме *a* показан угол α_1, а на диаграмме *b* – угол α_5. Хорошо видно, что, чем ближе кривизна к нулю, тем меньше становятся углы. (Напомним, что, если бы углы обращались в нуль, это свидетельствовало бы об отсутствии гиперболичности.) Качественно такая же зависимость имеет место в неконсервативном случае – рис. 7, *c*, *d*. С приближением кривизны к нулю уменьшаются углы-индикаторы α_1 и α_4. Таким образом, на рис. 7 явным образом продемонстрирована зависимость углов между касательными многообразиями траектории от кривизны поверхности, на которой лежит эта траектория.

На рис. 8 показано, как распределены значения углов-индикаторов α_1 (диаграмма *a*) и α_4 (диаграмма *b*) на трёхмерной поверхности, которой принадлежат координаты θ_1, θ_2 и θ_3.

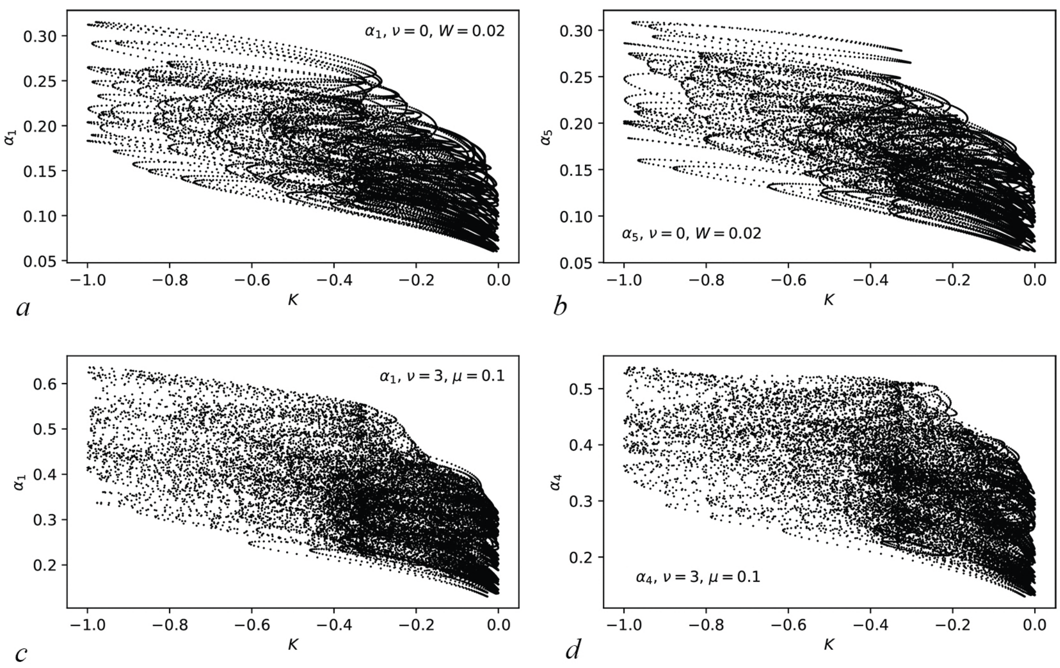


Рис. 7. Зависимость углов-индикаторов гиперболичности от гауссовой кривизны поверхности (15). На диаграммах *a* и *b* представлен консервативный случай $\nu = 0$ и показаны углы α_1 и α_5, соответственно. Неконсервативный случай $\nu = 3$ показан на диаграммах *c* и *d*, углы α_1 и α_4, соответственно

Fig. 7. Dependency of angles that indicate hyperbolicity on Gauss surface curvature (15). Diagrams *a* and *b* show angles α_1 and α_5 respectively in conservative case $\nu = 0$. Nonconservative case $\nu = 3$ is shown on diagrams *c* and *d*, angles α_1 and α_4 respectively

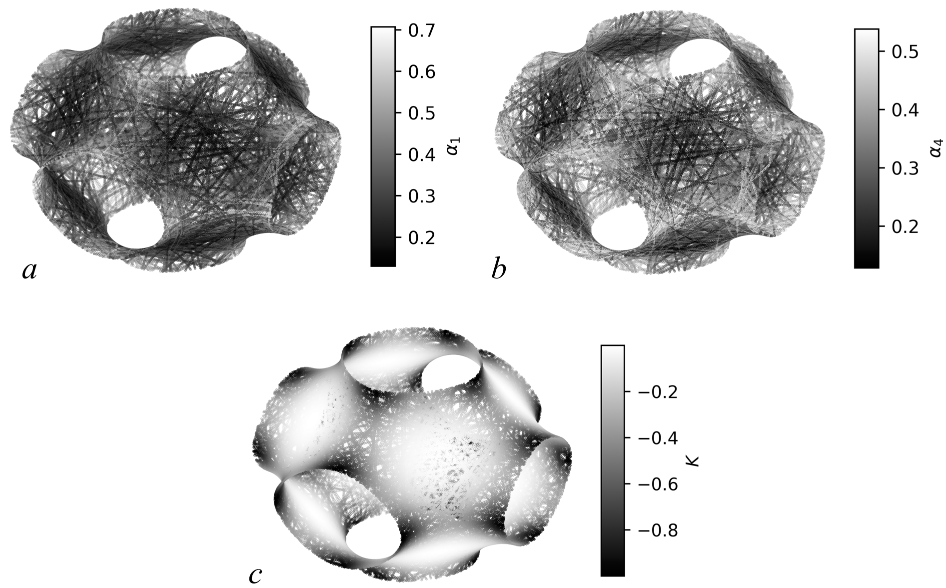


Рис. 8. Траектории системы (16) в пространстве координат θ_i, $i = 1, 2, 3$. Видно, что координаты принадлежат многообразию, задаваемому уравнением (13), ср. с рис. 3. Оттенки серого обозначают угол α_1 (*a*), α_4 (*b*) и кривизну K (*c*), см. (15). Значения параметров – $\nu = 3$, $\mu = 0.1$

Fig. 8. Trajectories of the system (16) in the space of coordinates θ_i, $i = 1, 2, 3$. One can observe, that the coordinates belong to the manifold given by equation (13) (compare with Fig. 3). The shades of gray denote the values of angles α_1 (*a*), α_4 (*b*) and the curvature K (*c*), see (15). The parameter values are $\nu = 3$, $\mu = 0.1$

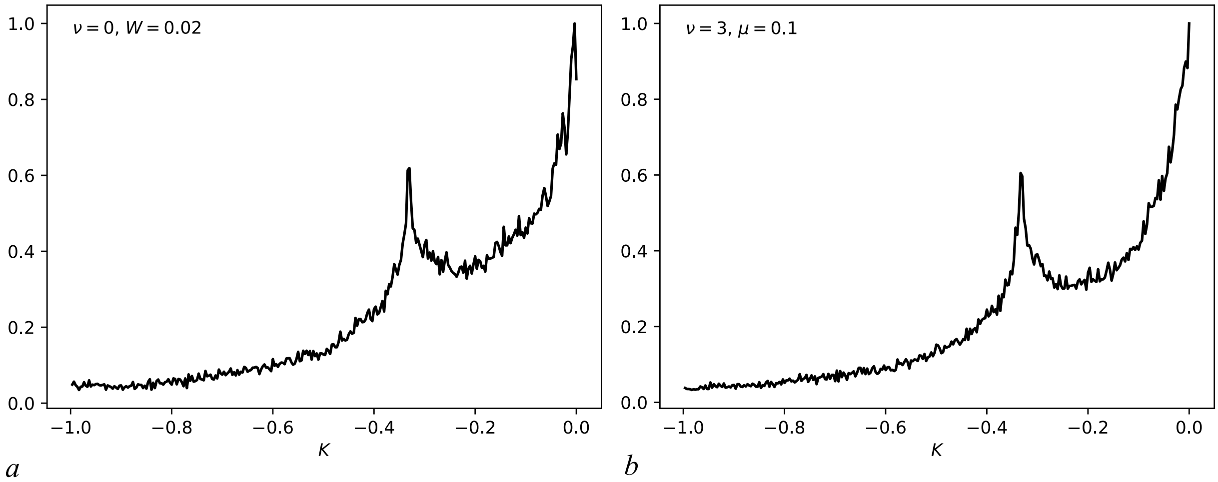


Рис. 9. Распределение гауссовой кривизны K (15), вычисленной при движении системы (16) по аттрактору. Диаграмма *a* отвечает консервативному случаю, а на диаграмме *b* показана ситуация, когда имеется диссипация. Отметим почти полную идентичность распределений, а также высокую частоту появлений системы в окрестностях точек с нулевой кривизной

Fig. 9. The distribution of the Gaussian curvature K (15), calculated for the motions of system (16) on attractor. Diagram *a* is for conservative case, diagram *b* shows the situation, when there is dissipation. Note the almost complete identity of the distributions, as well as the high frequency of occurrences of the system in the vicinity of points with zero curvature

Отметим, что траектории лежат на P-поверхности Шварца (13), ср. с рис. 3. Оттенки серого на рисунках показывают значения соответствующих углов в точках аттрактора. Для сопоставления на диаграмме *c* аттрактор раскрашен в соответствии со значениями гауссовой кривизны (15). Из рисунка видно, что углы максимальны вблизи краёв, которые соответствуют переходу на другую сторону фигуры (напомним, что угловые координаты θ_i периодичны). Как видно из рис. 8, *c*, в этих областях отрицательная кривизна максимальна по модулю. Напротив, в центральных областях, которые находятся между «рукавами», идущими к краям, значения углов минимальные, а кривизна ближе всего к нулю.

Как отмечалось выше, кривизна поверхности, на которой происходит динамика, отрицательна всюду за исключением восьми точек с нулевой кривизной, формула (15). Представляется интересным проверить, какие значения принимает кривизна вдоль траекторий на аттракторе. На рис. 9 показаны распределения значений K, накопленные вдоль траекторий. Диаграммы *a* и *b* построены для консервативного и неконсервативного случаев, соответственно. Отметим, что кривые на этих рисунках практически идентичны. Построение распределений для других значений параметров (для экономии места мы не приводим здесь соответствующие рисунки) также показало, что кривая распределения остаётся той же самой. Это говорит о том, что геометрия аттрактора в пространстве угловых координат θ_i не зависит от наличия диссипации. Кроме того, отметим, что, несмотря на наличие всего восьми точек нулевой кривизны, траектории посещают их наиболее часто. Для данной системы наличие гиперболического хаоса определяется движением по многообразию с отрицательной кривизной. Однако, как следует из сопоставления рис. 9 и 7, частые посещения точек нулевой кривизны не приводят к разрушению гиперболичности.

1.3. Другие системы на основе шарнирного механизма: диссипация, зависящая от парциальной кинетической энергии, потенциальное взаимодействие ротаторов и системы с бóльшим числом ротаторов. Основной недостаток системы (16) с точки зрения возможной практической реализации – зависимость парциальной диссипации каждого из дисков от полной кинетической энергии. Как представляется, механизм, реализующий такую зависимость, будет иметь достаточно сложную конструкцию. По этой причине в работе [35] С.П. Кузнецовым была предложена модификация системы (16), где вместо полной кинетической энергии в каждом из уравнений фигурирует соответствующая кинетическая энергия только одного диска. В механической системе это можно реализовать при помощи двух фрикционных муфт, сообщающих диску вращение в противоположных направлениях таким образом, что коэффициент трения каждой из муфт зависят от скорости вращения. В результате при отсутствии стержней, отвечающих за связь дисков, каждый из них превращается в авторотатор.

Система с диссипацией, зависящей от парциальной кинетической энергии, была проанализирована в статье [35]. В отличие от (16), поверхность постоянной кинетической энергии уже больше не является притягивающей. Кинетическая энергия демонстрирует хаотические колебания достаточно малой амплитуды. Тем не менее ключевые свойства системы (16) сохраняются. В частности, показатели Ляпунова зависят от параметров аналогичным образом, а проверка на основе критерия углов подтверждает, что система сохраняет свойство гиперболичности хаоса.

В статье [39] предложено обобщение системы трёх ротаторов. Связь между дисками вместо жёстких стержней, как изображено на рис. 4, вводится через потенциал взаимодействия $U(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (\cos\theta_1 + \cos\theta_2 + \cos\theta_3)^2/2$. Вид потенциальной функции подобран таким образом, чтобы уравнение (13), которое задаёт механическую связь между координатами θ_i в системе (16), отвечало бы минимуму этой функции. Тогда система (16) выступает как предельный случай движения с малой энергией.

В статьях [35, 39] выполнен анализ систем с потенциальным взаимодействием для двух случаев: когда диссипация зависит от полной и от парциальной кинетической энергии дисков. В отличие от случая жёсткой связи, системы с потенциальным взаимодействием двигаются уже не по P-поверхности Шварца. Тем не менее в силу того, что система стремится попасть в состояние с минимумом потенциальной энергии, аттрактор в пространстве координат θ_i близок по форме к поверхности Шварца. Отличие проявляется в «распушенности» поверхности, которая становится тем заметнее, чем больше параметр μ. Проверка по методу углов показала, что при сравнительно небольших значениях μ оба варианта системы с потенциальным взаимодействием демонстрируют гиперболический хаос. С ростом μ система заметно удаляется от поверхности Шварца и гиперболичность разрушается.

В работе [44] С.П. Кузнецовым было выполнено обобщение задачи на случай большего количества вращающихся дисков (ротаторов). В статье получены уравнения консервативной динамики и сопоставлены системы трёх, четырёх и пяти ротаторов, соответствующие геодезическим потокам на двумерном, трёхмерном и четырёхмерном многообразии в компактной области. Как было показано, количество положительных показателей Ляпунова связано с размерностью многообразия. У системы из трёх ротаторов имеется только один положительный показатель, а хаос в системах из четырёх и пяти ротаторов характеризуется двумя и тремя положительными показателями, соответственно, то есть имеет место гиперхаос. Было обнаружено, что только в случае трёх ротаторов кривизна многообразия всюду отрицательна (исключая конечное число точек, где она нулевая). Для систем из четырёх и пяти ротаторов на соответствующих многообразиях имеются области ненулевой меры с положительной кривизной. Соответственно этому, проверка гиперболичности по методу углов выявила нарушение свойств гиперболичности для систем из четырёх и пяти ротаторов.

1.4. Электронные устройства с динамикой, близкой к геодезическому потоку на поверхности отрицательной кривизны. С практической точки зрения больший интерес представляют не механические, а электронные системы, генерирующие гиперболический хаос.

С.П. Кузнецовым были разработаны две электронные системы, динамика которых соответствует динамике трёх ротаторов на поверхности отрицательной кривизны [23, 40, 45].

В работах [40, 45] описано электронное устройство на основе цепочек фазовой автоподстройки, которое в определённом приближении соответствует модели на основе трёх авторотаторов с потенциальным взаимодействием. Устройство смоделировано в среде Multisim, а его модельные уравнения проанализированы численно. Наличие гиперболического аттрактора продемонстрировано в рамках численных расчётов. Однако, как отмечено в статье [23], схема оказалась достаточно сложной для практической реализации. Она включает в себя блоки в виде генераторов частоты, управляемой напряжением, кроме того, система неавтономна и требует для работы опорный сигнал от источника переменного напряжения.

В работе [23] была предложена ещё одна реализация электронного устройства, демонстрирующего динамику, близкую к геодезическому потоку на поверхности отрицательной кривизны, и в силу этого генерирующего гиперболический хаос. Ключевая идея состоит в том, чтобы в исходных модельных уравнениях для ротаторов исключить тригонометрические функции, сделав замены $x = \sin\theta$, $y = \cos\theta$, $z = \dot{\theta}$. С учётом такой замены вместо пары переменных θ и $\dot{\theta}$ мы получаем три, x, y и z. Однако при этом появляется дополнительное условие $x^2 + y^2 = 1$, так что размерность сохраняется. За основу берётся система трёх авторотаторов с потенциальным взаимодействием. После преобразования координат каждый ротатор описывается системой трёх дифференциальных уравнений с полиномиальными правыми частями, которые близки по структуре к системе Лоренца. Система уравнений такого типа отвечает конструктивно более простому электронному устройству, и в цитируемой статье [23] схема такого устройства создана в среде Multisim.

Схемотехническое моделирование позволяет сделать заключение о гиперболичности демонстрируемого предложенным устройством хаоса. Основанием этому служит хорошее соответствие поведения модели в Multisim и исходных динамических уравнений. Сигнал, полученный от электронной схемы, формирует в конфигурационном пространстве поверхность Шварца точно так же, как и численные решения динамических уравнений. Также хорошо соответствуют друг другу спектры мощности, вид которых имеет характерную для гиперболического хаоса сплошную структуру без существенных локальных пиков и провалов. Анализ на основе критерия углов хаотической динамики системы уравнений также подтверждает наличие свойства гиперболичности в достаточно широком диапазоне параметров.

2. Модели пространственно распределенных систем с аттрактором типа Смейла–Вильямса

Первые предложенные С.П. Кузнецовым модели систем с грубым гиперболическим хаосом, связанным с аттрактором типа Смейла–Вильямса, были низкоразмерными [9, 46–55]. Эти примеры относительно просты и позволяют реализацию в виде, например, радиотехнического стенда [56, 57]. Многие из этих задач попадали в обзорные статьи и книги, написанные С.П. Кузнецовым [3, 22, 58]. Модели высокой размерности с гиперболическим хаосом: цепочки осцилляторов и активных элементов, ансамбли осцилляторов и непрерывные среды с формирующимися в их пространстве структурами, стали следующим направлением в работе С.П. Кузнецова и его коллег. Такие системы более сложны, однако принцип их функционирования по существу такой же, как и у ранних низкоразмерных примеров. Несмотря на формально высокую размерность, динамика рассматриваемых в этом разделе моделей описывается с высокой точностью всего несколькими переменными – амплитудами и фазами пространственных гармоник, наиболее заметно меняющихся за цикл формирования паттерна. Мы опишем более подробно несколько примеров распределенных сред, чье поведение задается уравнениями в частных производных, и перечислим некоторые схожие с ними модели, например, цепочки элементов, в непрерывном пределе переходящие в уже описанные среды. В частности, мы опишем и воспроизведем в едином ключе исследования двух моделей на основе уравнения Свифта–Хохенберга: неавтономной и автономной во времени. Также мы продемонстрируем некоторые результаты исследования модели на основе гипотетической химической реакции и задачи о параметрически возбуждаемой нелинейной струне. Хотим отметить, что эти модели теоретические, их построение основано на некоторых упрощающих математические выкладки предположениях (периодические граничные условия, особый вид пространственной неоднородности).

В работе [59] показана возможность развития турбулентности, связанной с однородно гиперболическим хаосом, в пространственно протяженной системе, описываемой уравнением в частных производных. В качестве исходной математической модели активной среды было использовано хорошо известное уравнение Свифта–Хохенберга [60]. Оно является модельным в теории образования структур и впервые было предложено для описания неустойчивости, приводящей к формированию ячеек Рэлея–Бенара в задаче о тепловой конвекции в подогреваемом снизу слое жидкости[2] [61]. Мы рассмотрим одномерное уравнение Свифта–Хохенберга, описывающее протяженную вдоль одной координаты активную среду, но отстранимся от её конкретной физической природы:

$$\partial_t u + \left(\beta^2 \partial_x^2 + 1\right)^2 u = \mu u - u^3, \tag{20}$$

где $u = u(x, t)$ – макроскопическое поле (возможно, температуры или концентрации вещества), x – пространственная координата. При определенных условиях слагаемое μu в правой части приводит к нарастанию возмущения при равновесном состоянии $u_0 = 0$, слагаемое $-u^3$ ограничивает его рост.

Дифференциальный оператор четвертого порядка $\left(\beta^2 \partial_x^2 + 1\right)^2 = \beta^4 \partial_x^4 + 2\beta^2 \partial_x^2 + 1$ в левой части уравнения (20) требует подробного описания. Линеаризуем уравнение (20) в окрестности равновесного состояния $u_0 = 0$ и будем считать, что некоторое частное решение линейной задачи пропорционально $\propto \exp(\lambda t + ikx)$. Здесь k – волновое число, обратно пропорциональное пространственному периоду возмущения. Если λ – положительная величина, то решение растет со временем; назовем λ инкрементом нарастания возмущения. Сделав подстановку, мы легко выясним, что в линейном приближении среда позволяет существовать возмущениям, описываемым характеристическим уравнением $\lambda = \mu - 1 + 2\beta^2 k^2 - \beta^4 k^4$. При положительных значениях параметра μ волновым числам в интервале $k \in \left(\sqrt{1 - 2\sqrt{\mu}}/\beta, \sqrt{1 + 2\sqrt{\mu}}/\beta\right)$ соответствуют положительные значения инкремента λ с максимумом[3] при $k = 1/\beta$. Таким образом, произвольное малое возмущение среды (20) около равновесного состояния имеет неустойчивые спектральные составляющие в целой полосе на ранних этапах эволюции. Эти составляющие пространственного спектра нарастают из-за присутствия члена $2\beta^2 \partial_x^2$ в дифференциальном операторе, остальные компоненты спектра затухают из-за $\beta^4 \partial_x^4$. Вещественный параметр β характеризует пространственный масштаб нарастающего возмущения.

Пока еще мы не сделали никаких утверждений о границах среды. Поместим среду в «резонатор», добавив к уравнению (20) периодические граничные условия $u(x + L, t) = u(x, t)$,

[2] Интересно, что одна из самых известных математических моделей грубого (но не однородно гиперболического) хаоса – система Лоренца – была впервые получена также в задаче о тепловой конвекции.

[3] Другой максимум обнаруживается при $k = -1/\beta$.

где L – размер резонатора, такой что при достаточно малом μ в полосу неустойчивых составляющих спектра попадает лишь небольшое число пространственных гармоник. Эти гармоники насыщаются благодаря нелинейному слагаемому, так что в резонаторе на больших временах формируется периодическая пространственная структура, постоянная во времени. Возникающий паттерн принадлежит к классу структур Тьюринга [60], поскольку частоты всех его гармоник $\omega = \mathrm{Im}\,\lambda = 0$.

Перед первым конкретным примером напомним, что собой представляет аттрактор Смейла–Вильямса как геометрический объект. Это объект, полученный в результате бесконечно многих отображений внутрь себя тороидальной области в пространстве размерности 3 и выше. Отображение, помимо сильного сжатия, также и растягивает пространство вдоль угловой переменной в целое число раз $M = 2, 3, \ldots$ (или же $-2, -3, \ldots$). Такое преобразование называется отображением Бернулли, оно хаотическое с показателем Ляпунова $\Lambda = \ln|M|$. На рис. 10 показано построение соленоида Смейла–Вильямса с фактором растяжения $M = 2$. Отображение, топологически эквивалентное этому, может возникнуть в сечении Пуанкаре системы дифференциальных уравнений.

В многочисленных примерах [9, 46, 51–54]. моделей, состоящих из нескольких колебательных подсистем, возникновение аттрактора типа Смейла–Вильямса в сечении Пуанкаре потоковой системы обеспечивалось с помощью удачно настроенного преобразования фаз колебаний. Фаза возмущения играла роль угловой переменной, увеличивающейся в целое число раз. В пространственно протяженных системах в качестве таких угловых переменных разумно использовать фазы пространственных гармоник возникающих структур. При этом пространственные фазы могут меняться только во времени, но не вдоль координаты x. Для возникновения гиперболического хаоса в системе, подобной уравнению (20), необходимо переключение между структурами с разными волновыми числами.

Уравнение (20) можно решить численно, например, с помощью спектрального метода, хорошо подходящего для задач с периодическими граничными условиями и обеспечивающего хорошую сходимость. На рис. 11, *a* изображено формирование пространственного паттерна из случайно заданного возмущения. На вставке изображена зависимость инкремента нарастания возмущения λ от волнового числа k. Только одна пространственная гармоника обладает положительным инкрементом.

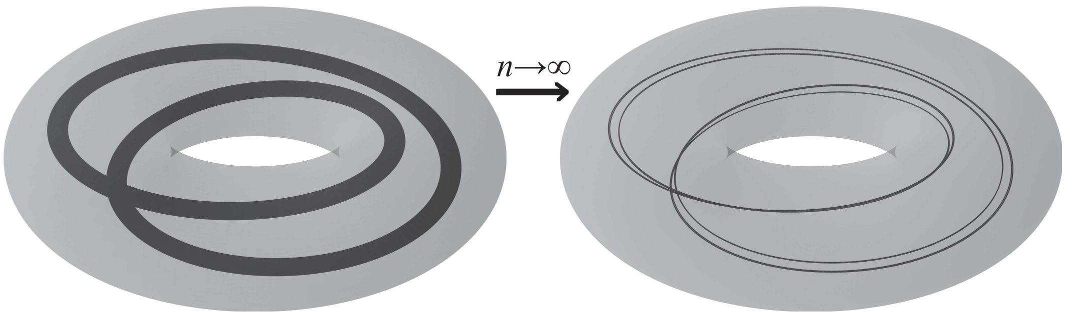


Рис. 10. Процедура геометрического построения аттрактора типа Смейла–Вильямса. Слева первый образ тороидальной области, вложенный внутрь своего прообраза. Справа результат большого числа итераций

Fig. 10. The procedure of geometric construction of the attractor of Smale–Williams type. The first image of a toroidal region is on the left, nested inside its prototype. The result of a large number of iterations is on the right

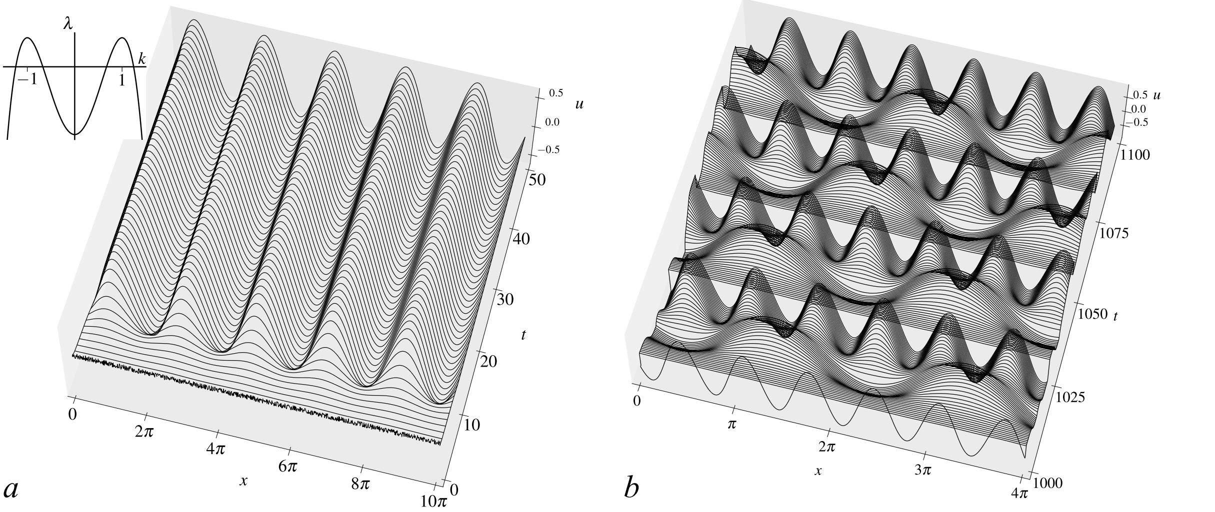


Рис. 11. *a* – Пространственно-временная реализация численного решения уравнения (20) с периодическими граничными условиями. На вставке изображена зависимость инкремента λ от волнового числа k. Параметры системы (20): $\mu = 0.3$, $\beta = 1$, длина резонатора $L = 10\pi$. Параметры численной схемы: шаг по времени $\Delta t = 0.01$, шаг по координате $\Delta x = L/N = 10\pi/1024$. *b* – Пространственно-временная реализация численного решения уравнения (21) с периодическими граничными условиями. Параметры системы: $\mu = 0.6$, $\varepsilon = 0.03$, $T = 25$, $L = 4\pi$. Параметры численной схемы: шаг по времени $\Delta t = 0.01$, шаг по координате $\Delta x = L/N = 4\pi/1024$

Fig. 11. *a* – Spatio-temporal realisation of the numerical solution of (20) with periodic boundary conditions. The insert shows the increment λ dependence on the wave number k. System parameters are (20): $\mu = 0.3$, $\beta = 1$, the length of resonator is $L = 10\pi$. Numerical procedure parameters are: time-step $\Delta t = 0.01$, space-step $\Delta x = L/N = 10\pi/1024$. *b* – Spatio-temporal realisation of the numerical solution of (21) with periodic boundary conditions. System parameters are $\mu = 0.6$, $\varepsilon = 0.03$, $T = 25$, $L = 4\pi$. Numerical procedure parameters are: time-step $\Delta t = 0.01$, space-step $\Delta x = L/N = 4\pi/1024$

2.1. Гиперболический хаос в уравнении Свифта–Хохенберга с периодическим переключением между пространственными гармониками. Рассмотрим неавтономную модификацию уравнения (20):

$$\partial_t u + \left(\beta^2 (t)\, \partial_x^2 + 1\right)^2 u = \mu u + \alpha (x)\, u - u^3, \tag{21}$$

где $\beta(t)$ – переменный параметр с периодом T, переключающийся между двумя значениями: $\beta = 1$ на первом полупериоде $nT \leqslant t < (n+1/2)\,T$ и $\beta = 1/3$ на втором полупериоде $(n+1/2)\,T \leqslant t < (n+1)\,T$. Граничные условия периодические: $u(x+L,t) = u(x,t)$. Функция $\alpha(x)$ периодическая в пространстве, описывает неоднородность среды. Для построения, описанного в [59], необходимо, чтобы пространственная неоднородность содержала вторую $\alpha(x) = \varepsilon\cos 2x$ или четвертую $\alpha(x) = \varepsilon\cos 4x$ гармоники.

В такой среде в широком диапазоне параметров наблюдается грубый гиперболический хаос, ассоциирующийся с аттрактором Смейла–Вильямса [59]. На первом полупериоде единственной неустойчивой модой является первая пространственная гармоника $\propto e^{\mu t}\cos(x+\theta)$ с волновым числом $k = 1/\beta = 1$ и фазой θ. Первая гармоника сначала экспоненциально нарастает, но к концу первого полупериода её рост ограничивается. При этом в спектре появляются за счет слагаемого $-u^3$ другие (нечетные) гармоники с малой амплитудой, в том числе и третья. С началом второго полупериода единственной неустойчивой модой становится третья гармоника $\propto e^{\mu t}\cos(3x+3\theta)$ с волновым числом $k{=}1/\beta{=}3$ и с утроенной фазой 3θ, поскольку «затравкой» для неё становится малая компонента $\propto \cos^3(x+\theta) = (3\cos(x+\theta) + \cos(3x+3\theta))/4$. Третья гармоника нарастает до конца второго полупериода. При взаимодействии с пространственной неоднородностью $\alpha(x)$ возникает первая гармоника с малой амплитудой. Если в неоднородности доминирует вторая гармоника $\alpha(x) \approx \varepsilon \cos 2x$, то появляются компоненты $\propto \cos 2x \cos(3x+3\theta) = (\cos(x+3\theta) + \cos(5x+3\theta))/2$. Таким образом, к началу следующего периода первой гармонике возмущения навязывается утроенная фаза: $\theta_{n+1} = 3\theta_n + \text{const} \pmod{2\pi}$. Это отображение Бернулли с показателем Ляпунова $\Lambda = \ln 3 \approx 1.9086$. Аддитивная константа в отображении не играет существенной роли. Фаза третьей гармоники также утраивается за период, но по сути своей это та же угловая переменная, всегда большая фазы первой гармоники ровно в 3 раза.

Если в неоднородности доминирует не вторая, а четвертая гармоника $\alpha(x) \approx \varepsilon \cos 4x$, то с началом следующего периода первой гармонике навязывается утроенная фаза с отрицательным знаком: $\propto \cos 4x \cos(3x+3\theta) = (\cos(x-3\theta) + \cos(7x+3\theta))/2$. Полученное отображение за период также является отображением Бернулли, но с отрицательным знаком: $\theta_{n+1} = -3\theta_n + \text{const} \pmod{2\pi}$, показатель Ляпунова которого также равен $\ln 3$. В этом обзоре мы будем рассматривать только вариант $\alpha(x) = \varepsilon \cos 2x$.

На рис. 11, *b* изображено численное решение уравнения (21) с параметрами $\mu = 0.6$, $\varepsilon = 0.03$, периодом модуляции $T = 25$, длиной резонатора $L = 4\pi$. Можно видеть, что происходит переключение между структурами с волновыми числами $k = 1$ и 3, на длине резонатора $L = 4\pi$ умещаются два «горба» структуры с $k = 1$, которые сменяются шестью «горбами» структуры с $k = 3$. Максимальные амплитуды структур не меняются от периода к периоду, но между последовательными структурами одной и той же длины волны наблюдаются сдвиги фазы, изменяющиеся нерегулярно.

Численные расчеты показывают, что только первая и третья пространственные гармоники имеют достаточно большие амплитуды. Амплитуды всех остальных гармоник много меньше. Несмотря на то, что уравнение (21) в частных производных, фактически динамика низкоразмерная. На рис. 12, *a* представлены временные реализации амплитуд первой и третьей пространственных гармоник $|z_1|$ и $|z_3|$, полученные численно с помощью дискретного преобразования Фурье. На рис. 12, *b* изображены зависимости от времени действительной и мнимой частей первой гармоники Re z_1 и Im z_1. Зависимости амплитуд гармоник выглядят вполне регулярно, а соотношения между действительными и мнимыми частями меняются нерегулярно, поскольку хаос наблюдается только в динамике фаз.

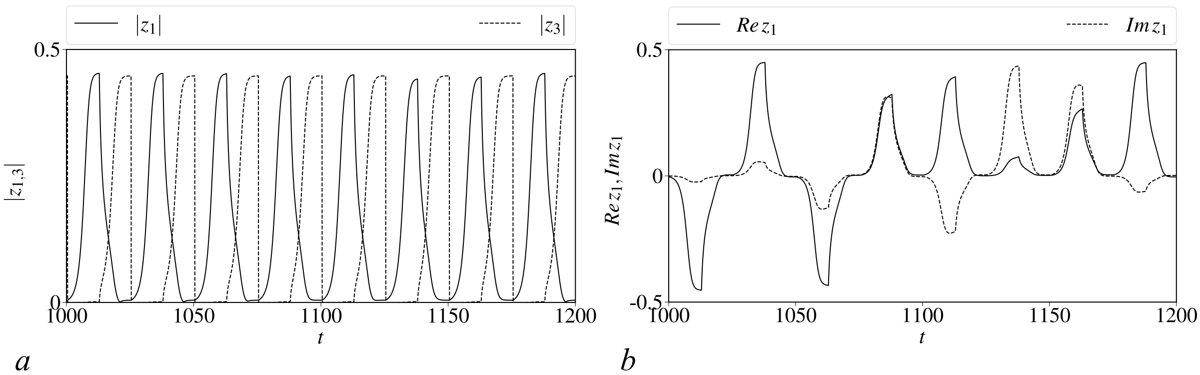


Рис. 12. *a* – Зависимости от времени амплитуд первой и третьей пространственных гармоник уравнения (21). *b* – Зависимости от времени действительной и мнимой частей первой пространственной гармоники. Параметры системы: $\mu = 0.6$, $\varepsilon = 0.03$, $T = 25$, $L = 4\pi$. Параметры численной схемы: шаг по времени $\Delta t = 0.01$, шаг по координате $\Delta x = L/N = 4\pi/1024$

Fig. 12. *a* – Realisations of the first and the third amplitudes of spatial harmonics of (21). *b* – Realisations of the real and imaginary parts of the first spatial harmonics complex amplitude. System parameters: $\mu = 0.6$, $\varepsilon = 0.03$, $T = 25$, $L = 4\pi$. Numerical procedure parameters: time-step $\Delta t = 0.01$, space-step $\Delta x = L/N = 4\pi/1024$

Поскольку динамика уравнения (21) низкоразмерная, имеется смысл говорить о конечномерном аттракторе. На рис. 13, *a* и *d* представлены портреты аттрактора в проекциях на действительные и мнимые части первой и третьей гармоник. Можно видеть, что траектория совершает повороты только в окрестности начала координат (поочередно в проекциях на плоскости первой и третьей гармоник). Изменение направления траектории визуально происходит хаотически. Направление траектории есть не что иное, как фаза гармоники. Для подтверждения того, что фаза меняется в соответствии с преобразованием Бернулли, мы построим численно стробоскопическое отображение Пуанкаре за период модуляции.

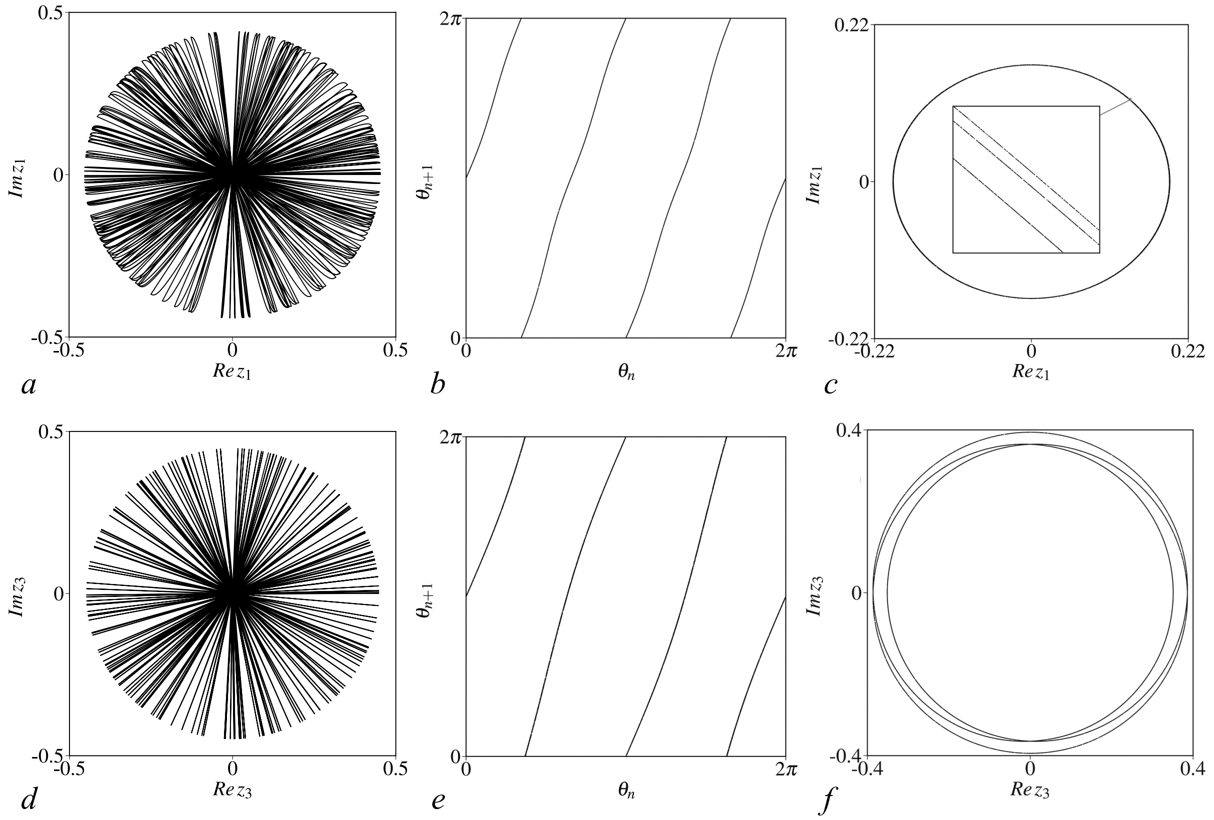


Рис. 13. *a* – Траектория в фазовом пространстве в проекции на плоскость действительной и мнимой частей амплитуды первой гармоники уравнения (21). *b* – Диаграмма иллюстрирует итерации фазы первой гармоники. *c* – Портрет аттрактора стробоскопического отображения Пуанкаре в проекции на действительную и мнимую часть амплитуды первой гармоники. На вставке увеличенный фрагмент аттрактора. *d* – Та же траектория, что и на панели *a*, в проекции на плоскость действительной и мнимой частей третьей гармоники. *e* – Итерационная диаграмма фазы третьей гармоники. *f* – Портрет аттрактора стробоскопического отображения Пуанкаре в проекции на действительную и мнимую часть амплитуды третьей гармоники. Изображения *b* и *e* получены сечением $t_n = (n + 1/4)\,T$, изображения *c* и *f* получены сечением через полпериода $t_n + T/2 = (n + 3/4)\,T$, поэтому уместно заметить, что это аттракторы разных стробоскопических отображений. Параметры системы: $\mu = 0.6$, $\varepsilon = 0.03$, $T = 25$, $L = 4\pi$. Параметры численной схемы: шаг по времени $\Delta t = 0.01$, шаг по координате $\Delta x = L/N = 4\pi/1024$

Fig. 13 *a* – Phase trajectory projected on the plane of real and imaginary parts of the first harmonics amplitude of (21). *b* – The diagram illustrates the iterations of the phase of the first harmonics. *c* – Portrait of attractor of stroboscopic Poincaré map projected on the plane of real and imaginary parts of the first harmonics. The insert shows the enlarged fragment of the attractor. *d* – The same trajectory, as on Panel *a*, but projected on the plane of real and imaginary parts of the third harmonics. *e* – Iteration diagram of the phase of the third harmonics. *f* – Portrait of attractor of stroboscopic Poincaré map projected on the plane of real and imaginary parts of the third harmonics. Panels *b* and *e* are obtained using the cross-section $t_n = (n + 1/4)\,T$, panels *c* and *f* are for the different cross-section $t_n + T/2 = (n + 3/4)\,T$, therefore it is to the point to note that these are attractors of different stroboscopic maps. System parameters: $\mu = 0.6$, $\varepsilon = 0.03$, $T = 25$, $L = 4\pi$. Numerical procedure parameters: time-step $\Delta t = 0.01$, space-step $\Delta x = L/N = 4\pi/1024$

В оригинальной работе [59] пространственная фаза определялась в одной из точек распределенной системы как $\theta_n = \arg\left[u\left(L/2, t_n\right) + i\partial_x u\left(L/2, t_n\right)\right]$. Этот способ работает хорошо, так как в каждой последующей возникающей структуре только одна пространственная гармоника дает большой вклад, а все остальные гармоники не нарастают. Однако мы определяем фазу как аргумент комплексной амплитуды гармоники $\theta_n = \arg z_{1,3}\left(t_n\right)$[4]. Это позволяет подтвердить, что именно взаимодействие гармоник приводит к возникновению грубого гиперболического хаоса. Комплексные амплитуды первой гармоники $z_1\left(t_n\right)$ берутся на первом полупериоде в моменты времени $t_n = \left(n + 1/4\right)T$, комплексные амплитуды $z_3\left(t_n + T/2\right)$ вычисляются на втором полупериоде в моменты времени $t_n + T/2 = \left(n + 3/4\right)T$. На рис. 13, *b* и *e* изображены итерации фаз первой и третьей гармоник за период модуляции. Стробоскопическое отображение Пуанкаре растягивает фазу гармоник в три раза, то есть фаза подвергается отображению Бернулли[5]. Эта неустойчивость по фазовой переменной приводит к возникновению хаотической пространственно-временной динамики[6].

В стробоскопическом отображении Пуанкаре можно наблюдать хаотический аттрактор. На рис. 13, *c* и *f* показаны проекции аттрактора стробоскопического отображения на плоскости действительных и мнимых частей первой и третьей гармоник. На вставке на рис. 13, *c* изображен увеличенный фрагмент аттрактора, можно видеть поперечную фрактальную структуру множества Кантора (есть три витка, поскольку угловая переменная утраивается). На рис. 13, *f* увеличение не потребовалось, три петли видно невооруженным глазом. Топологически эти аттракторы соответствуют соленоиду Смейла–Вильямса.

Для количественного подтверждения хаотичности аттрактора в сечении Пуанкаре были вычислены показатели Ляпунова уравнения (21). Формально модель бесконечномерная, но нас интересует динамика лишь нескольких пространственных гармоник, поэтому были вычислены несколько показателей Ляпунова для стробоскопического отображения

$$\Lambda = \{1.018,\ -9.34,\ -9.34,\ -11.42,\ -18.64, \ldots\}$$

при $\mu = 0.6$, $\varepsilon = 0.03$, $T = 25$, $L = 4\pi$. Самый старший показатель положительный, что свидетельствует о хаосе. При этом его величина близка к $\ln 3$, показателю Ляпунова отображения Бернулли с фактором растяжения 3. Остальные показатели отрицательные, причем по абсолютной величине много большие самого старшего. Таким образом, в фазовом пространстве происходит растяжение в 3 раза по угловой переменной и сильное сжатие по всем остальным переменным, что соответствует построению соленоида Смейла–Вильямса. Мы связываем пространственно-временной хаос в уравнении (21) с присутствием однородно гиперболического аттрактора в стробоскопическом сечении Пуанкаре.

Возможно записать отдельно от модели (21) уравнения для комплексных амплитуд первой и третьей гармоник, отбросив все другие гармоники как несущественные. Для этого в разложении переменной $u\left(x, t\right)$ в ряд Фурье можно ограничиться лишь самыми большими по максимальной амплитуде слагаемыми:

$$u\left(x, t\right) \approx z_1\left(t\right)e^{ikx} + z_1^*\left(t\right)e^{-ikx} + z_3\left(t\right)e^{3ikx} + z_3^*\left(t\right)e^{-3ikx}. \tag{22}$$

[4]Такой способ более удобен для нас, поскольку мы вычисляем комплексные амплитуды на каждом шаге численного решения уравнения в частных производных (спектральный метод).

[5]Дополнительный сдвиг фазы на каждой итерации равен π, его возникновение можно объяснить тем, что при взаимодействии гармоник у компоненты с утроенной фазой возникает множитель $(-1 = e^{i\pi})$, приводящий к сдвигу тригонометрических функций.

[6]Несмотря на то, что фаза есть у каждой гармоники, им соответствует только одна неустойчивая угловая переменная. Фаза гармоники с номером n в n раз больше первой гармоники. К тому же в каждый момент времени только одна гармоника имеет очень большую амплитуду, все остальные по амплитуде близки к нулю, их фазы математически плохо определены.

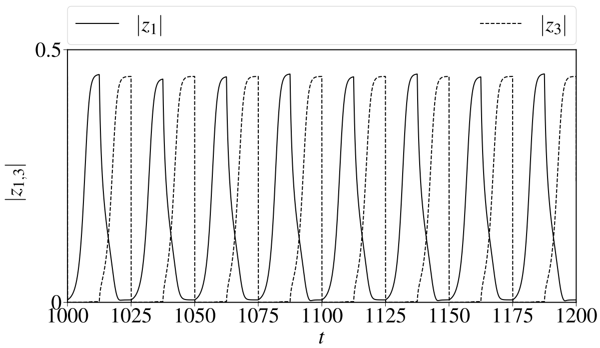
После ряда математических процедур: подстановки (22) в уравнение (21), домножения на e^{-ikx} или e^{-3ikx} и усреднения по длине резонатора, мы получили уравнения для комплексных амплитуд $z_1(t)$ и $z_3(t)$:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= \left[\mu - \left(1 - \beta^2(t)\right)^2\right] z_1 - 3\left[|z_1|^2 + 2|z_3|^2\right] z_1 - \left[3z_1^* z_3 - \frac{\varepsilon}{2}\right] z_1^* + \frac{\varepsilon}{2} z_3, \\ \dot{z}_3 &= \left[\mu - \left(1 - 9\beta^2(t)\right)^2\right] z_3 - 3\left[|z_3|^2 + 2|z_1|^2\right] z_3 + \frac{\varepsilon}{2} z_1 - z_1^3,\end{aligned} \tag{23}$$

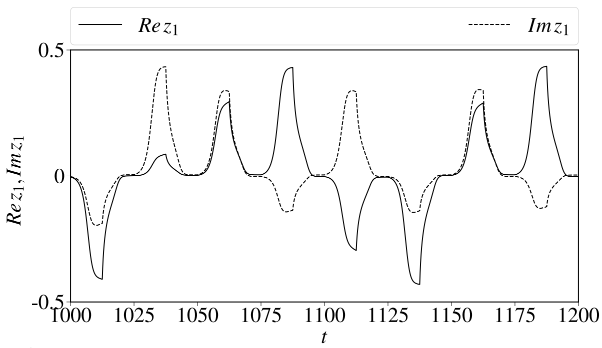
функция $\beta(t)$ по-прежнему переключается между значениями 1 и $1/3$, коэффициент ε остался после усреднения слагаемого $\alpha(x)u = \varepsilon\cos(2x)u$. Уравнения (23) описывают взаимодействие только двух гармоник, являются четырехмерной потоковой неавтономной системой.

Уравнения (23) были решены численно. На рис. 14, *a* изображены временные реализации амплитуд $z_1(t)$ и $z_3(t)$. Динамика амплитуд укороченных уравнений качественно не отличается от динамики амплитуд гармоник уравнения (21) на рис. 12, *a*. Это совпадение подтверждает правильность утверждения о низкоразмерной динамике среды (21). Рис. 14, *b* изображает нерегулярные зависимости Re $z_1(t)$ и Im $z_1(t)$. На рис. 15 изображены аттрактор потоковой системы (23), *a* и *d*, итерационные диаграммы для фаз гармоник *b* и *e*, аттракторы в сечениях Пуанкаре *c* и *f*. Все эти графики не отличаются от аналогичных для распределенной системы (21) на рис. 13.

С помощью уравнений (23) можно точнее объяснить динамику распределенной системы. Линейный коэффициент в первом уравнении $\left[\mu - \left(1 - \beta^2(t)\right)^2\right]$ на первом полупериоде положительный $\mu > 0$, на втором полупериоде при достаточно малом μ он отрицательный $\mu - 64/81 < 0$. Линейный коэффициент во втором уравнении $\left[\mu - \left(1 - 9\beta^2(t)\right)^2\right]$ на первом полупериоде отрицательный $\mu - 64$, на втором полупериоде положительный и равен μ. Если бы мы оставили только слагаемые с этими коэффициентами, мы бы наблюдали поочередные рост и затухание амплитуд гармоник. Третья гармоника затухает намного быстрее, чем первая. Это подтверждается рисунками 12, *a* и 14, *a*, третья гармоника резко спадает до нуля в начале каждого периода. Слагаемые $-3\left[|z_1|^2 + 2|z_3|^2\right] z_1$ и $-3\left[|z_3|^2 + 2|z_1|^2\right] z_3$ ограничивают рост амплитуд гармоник. Описанные выше слагаемые не меняют фазы гармоник, только их амплитуды. Все остальные слагаемые влияют на фазы. Необходимыми для возникновения гиперболического хаоса являются слагаемые $\frac{\varepsilon}{2} z_3$ в первом уравнении и $-z_1^3$ во втором, именно из-за них фаза за период увеличивается



a



b

Рис. 14. *a* – Зависимости от времени амплитуд первой и третьей пространственных гармоник, полученные при численном решении укороченных уравнений (23). *b* – Зависимости от времени действительной и мнимой частей первой пространственной гармоники. Параметры системы: $\mu = 0.6$, $\varepsilon = 0.03$, $T = 25$

Fig. 14. *a* – Realisations of the first and the third amplitudes of spatial harmonics, obtained by the numerical solution of the shortened equations (23). *b* – Realisations of the real and imaginary parts of the first spatial harmonics complex amplitude. System parameters: $\mu = 0.6$, $\varepsilon = 0.03$, $T = 25$

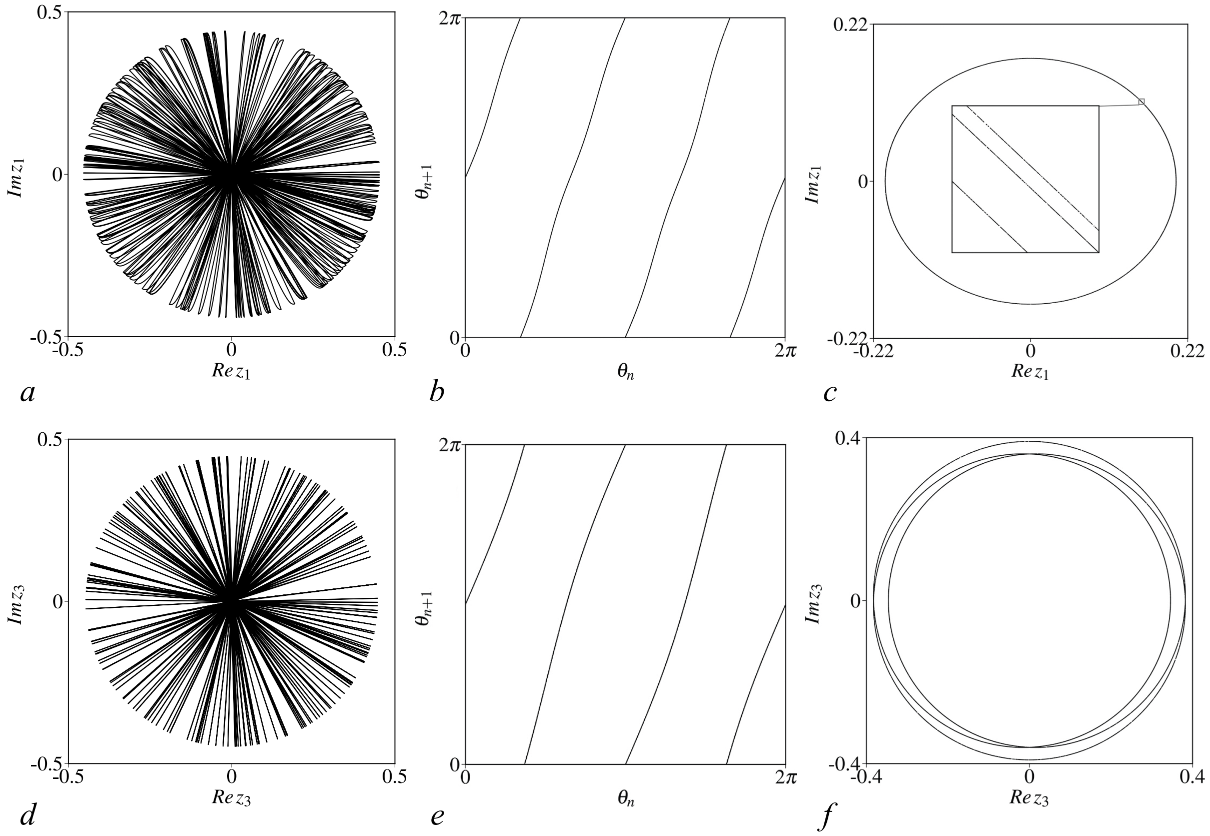


Рис. 15. *a* – Траектория в фазовом пространстве в проекции на плоскость действительной и мнимой частей комплексной амплитуды первой гармоники уравнений (23). *b* – Диаграмма иллюстрирует итерации фазы первой гармоники. *c* – Портрет аттрактора стробоскопического отображения Пуанкаре в проекции на действительную и мнимую часть комплексной амплитуды первой гармоники. На вставке увеличенный фрагмент аттрактора. *d* – Та же траектория, что и на панели *a*, в проекции на плоскость действительной и мнимой частей комплексной амплитуды третьей гармоники. *e* – Итерационная диаграмма фазы третьей гармоники. *f* – Портрет аттрактора стробоскопического отображения Пуанкаре в проекции на действительную и мнимую часть комплексной амплитуды третьей гармоники. Изображения *b* и *e* получены сечением $t_n = (n + 1/4)\,T$, изображения *c* и *f* получены сечением через полпериода $t_n + T/2 = (n + 3/4)\,T$. Параметры системы: $\mu = 0.6$, $\varepsilon = 0.03$, $T = 25$

Fig. 15. *a* – Phase trajectory projected on the plane of real and imaginary parts of the first harmonics amlitude of (23). *b* – The diagram illustrates the iterations of the phase of the first harmonics. *c* – Portrait of attractor of stroboscopic Poincaré map projected on the plane of real and imaginary parts of the first harmonics. The insert shows the enlarged fragment of the attractor. *d* – The same trajectory, as on Panel (a), but projectedon the plane of real and imaginary parts of the third harmonics. *e* – Iteration diagram of the phase of the third harmonics. *f* – Portrait of attractor of stroboscopic Poincaré map projected on the plane of real and imaginary parts of the third harmonics. Panels *b* and *e* are obtained using the cross-section $t_n = (n + 1/4)\,T$, panels *c* and *f* are for the different cross-section $t_n + T/2 = (n + 3/4)\,T$. System parameters: $\mu = 0.6$, $\varepsilon = 0.03$, $T = 25$

в 3 раза. Если в начале первого полупериода $z_1 \propto Ae^{i\theta}$, то в начале второго полупериода третья гармоника получит утроенную фазу $z_3 \propto -A^3e^{3i\theta}$ или $A^3e^{i(3\theta+\pi)}$. В начале следующего периода снова начнет возрастать первая гармоника, но уже с утроенной фазой $\theta_{n+1} = 3\theta_n + \pi \pmod{2\pi}$. Слагаемые $-\left[3z_1^*z_3 - \varepsilon/2\right] z_1^*$ и $\varepsilon z_1/2$ «вредные», они могут привнести некоторый дополнительный сдвиг фазы. При малом ε вклад $\varepsilon z_1/2$ невелик, на фазовом портрете на рис. 15, *d* можно видеть очень тонкие «иголки» траекторий вдали от начала координат. Вклад $-3z_1^{*2}z_3$ чуть более существенный: на фазовом портрете на рис. 15, *a* «иголки» не такие тонкие, а в сечении Пуанкаре на рис. 15, *c* видно, что аттрактор немного сплюснутый, то есть соотношение между действительной и мнимой частью немного искажено. На итерационных диаграммах на рис. 15, *b* и *e*, тем не менее, видно, что отображение Бернулли работает и для первой, и для третьей гармоник.

Причина того, что отображение Бернулли не нарушается, состоит в грубости гиперболического аттрактора, его не так просто разрушить.

Для аттрактора стробоскопического отображения укороченных уравнений (23) были посчитаны показатели Ляпунова при $\mu = 0.6$, $\varepsilon = 0.03$, $T = 25$. Старший показатель положительный и близок к $\ln 3$: $\Lambda_1 = 1.083$. Остальные показатели отрицательные.

Для распределенной модели (21) и укороченной системы (23) была выполнена [59] проверка гиперболичности по критерию углов [43]. В обеих системах подтверждено отсутствие касаний между устойчивым и неустойчивым многообразиями.

В статье [59] указано, что описанные процессы, связанные с грубым гиперболическим хаосом, могут развиваться в среде (21), даже если на неё не наложены периодические граничные условия. Если размер среды достаточно большой, то в середине её друг друга сменяют паттерны Тьюринга со сдвигом фаз, описываемым отображением Бернулли.

С.П. Кузнецов предложил [62] конечномерный вариант среды (21) с однородно гиперболическим хаосом, в котором вместо непрерывной среды действует дискретная решетка. Для получения такой модели дифференциальный оператор $\left(\beta^2(t)\,\partial_x^2 + 1\right)^2$ в (21) заменяется конечно-разностным оператором:

$$\begin{aligned}\dot{u}_j + 2\beta^2\left(1 - 2\beta^2\right)\left[u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}\right] + \beta^4\left[u_{j+2} - 2u_j + u_{j-2}\right] = \\ = (\mu - 1)\,u_j + \varepsilon\alpha_j u_j - u_j^3,\end{aligned} \tag{24}$$

где j – номер узла, α_j – пространственная неоднородность вдоль цепочки, а количество узлов цепочки $2N$. При этом цепочка замкнута в кольцо: $u_{j+2N} = u_j$.

В решетке (24) развиваются те же процессы, что и в непрерывной среде (21). В линейном приближении зависимость инкремента нарастания возмущения с волновым числом k имеет вид $\lambda = \mu - \left(1 - 4\beta^2\sin^2\left(\pi k/(2N)\right)\right)^2$, условие максимума инкремента $\sin\left(\pi k/(2N)\right) = 1/(2\beta)$. Для поочередного возбуждения паттернов с волновыми числами $k = 1$ и 3 можно периодически менять β между значениями $0.5\sin(\pi/N)$ и $0.5\sin(3\pi/N)$. Распределение α_j может иметь вид $\varepsilon\alpha_j = \varepsilon\cos(2\pi j/N)$ или $\varepsilon\alpha_j = \varepsilon\cos(4\pi j/N)$. Как и в распределенной системе (21), в дискретной модели возникают структуры Тьюринга, и в них входят только нечетные гармоники. Поэтому мы можем уменьшить число узлов вдвое, заменив периодические граничные условия на меняющие знак на концах: $u_{j+N} = -u_j$.

2.2. Гиперболический хаос в автономной распределенной системе на основе уравнения Свифта–Хохенберга. В статье [63] предложена автономная модель одномерной среды с грубым гиперболическим хаосом, описываемая двумя полями $u(x,t)$ и $v(x,t)$. Динамика переменной u описывается уравнением Свифта–Хохенберга, динамика v описывается дополнительным уравнением без производных по координате:

$$\begin{aligned}&\partial_t u + \left(\partial_x^2 + 1\right)^2 u = \mu u + u^3 - \frac{1}{5}uv^2 + \varepsilon\cos(3x)\cdot v,\\ &\partial_t v = -v + u^2 + vu^2,\end{aligned} \tag{25}$$

где $\varepsilon\cos(3x)$ описывает пространственную неоднородность среды. Граничные условия периодические по обеим переменным: $u(x+L,t) = u(x,t)$ и $v(x+L,t) = v(x,t)$, L – период среды, длина «резонатора». В соответствии с периодическими граничными условиями поля u и v могут быть представлены в виде рядов Фурье. При этом поле u содержит только нечетные гармоники, поле v содержит только четные гармоники.

Взаимодействие между гармониками при посредничестве пространственной неоднородности приводит к пространственно-временной турбулентности, связанной с грубым гиперболическим хаосом [63]. Пусть на начальном этапе эволюции некоторого возмущения динамический

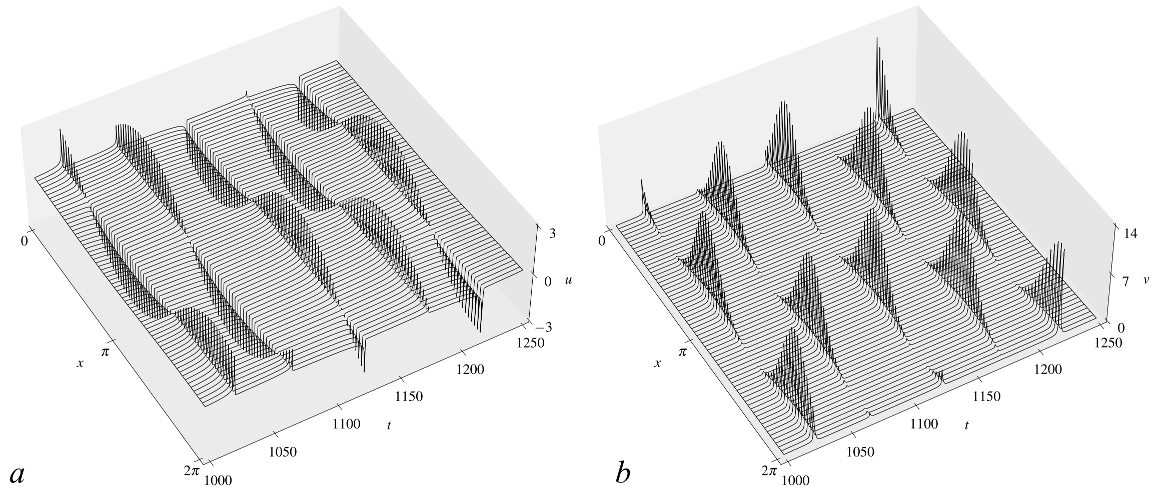


Рис. 16. Пространственно-временные реализации численного решения уравнений (25): a – переменная $u\,(x,t)$, b – переменная $v\,(x,t)$. Параметры системы: $\mu = 0.03$, $\varepsilon = 0.03$, $L = 2\pi$. Параметры численной схемы: шаг по времени $\Delta t = 0.001$, шаг по координате $\Delta x = L/N = 2\pi/1024$

Fig. 16. Spatio-temporal realisations of the numerical solution of equations (25): a – variable $u\,(x,t)$, b – variable $v\,(x,t)$. System parameters: $\mu = 0.03$, $\varepsilon = 0.03$, $L = 2\pi$. Numerical procedure parameters: time-step $\Delta t = 0.001$, space-step $\Delta x = L/N = 2\pi/1024$

коэффициент $\mu + u^2 - v^2/5$, входящий в первое уравнение модели (25), положителен. Это приводит к росту переменной u почти везде[7] на протяжении среды и возбуждению первой гармоники $\propto \cos(x+\theta)$. Вскоре динамический коэффициент $-1+u^2$ во втором уравнении тоже становится положительным, при этом переменная v начинает увеличиваться. Сразу несколько гармоник v нарастают, в том числе важная для наших рассуждений вторая гармоника. Второй гармонике через квадратичное слагаемое u^2 навязывается удвоенная фаза: $\cos^2(x+\theta) = \cos(2x+2\theta)/2 + 1/2$. С ростом v коэффициент $\mu + u^2 - v^2/5$ становится отрицательным и величина u начинает быстро спадать. Вскоре коэффициент $-1+u^2$ тоже становится отрицательным, переменная v тоже уменьшается. Отчетливый паттерн существует очень короткое время, ему следует длительный интервал, когда обе переменные близки к нулю. Со временем фактор $\mu + u^2 - v^2/5$ вновь становится положительным, возникает новый паттерн. Возбуждение поля u стимулируется взаимодействием пространственной неоднородности и поля v: $\cos(2x+2\theta)\cos 3x = \cos(x-2\theta)/2 + \ldots$ Процесс возбуждения и затухания паттернов повторяется снова и снова. При этом пространственные фазы гармоник между последовательными стадиями формирования паттернов изменяются в соответствии с отображением Бернулли: $\theta_{n+1} = -2\theta_n \pmod{2\pi}$ с показателем Ляпунова $\Lambda = \ln 2 = 0.693\ldots$

Качественные рассуждения подтверждаются численным моделированием. На рис. 16 изображены возникающие в среде (25) паттерны при $\mu = 0.03$, $\varepsilon = 0.03$, $L = 2\pi$. Сдвиги между последовательными стадиями выглядят нерегулярными. Средний интервал времени между последовательными этапами возбуждения $\tau \approx 50.37$. На рис. 17 представлены полученные в численном счете зависимости амплитуд пространственных гармоник от времени. На панелях *a*, *c* и *e* изображены амплитуды $|z_1|$, $|z_3|$, $|z_5|$ первой, третьей и пятой пространственных гармоник поля $u\,(x,t)$. Амплитуды высоких гармоник u заметно меньше амплитуды первой гармоники. На панелях b, d и f изображены амплитуды w_0, $|w_2|$ и $|w_4|$ нулевой, второй и четвертой гармоник поля $v\,(x,t)$. Нулевая гармоника несет существенный вклад в паттерн, а амплитуда четвертой гармо-

[7] Кроме малых окрестностей некоторых точек. Эти точки становятся узлами паттерна с ростом возмущения.

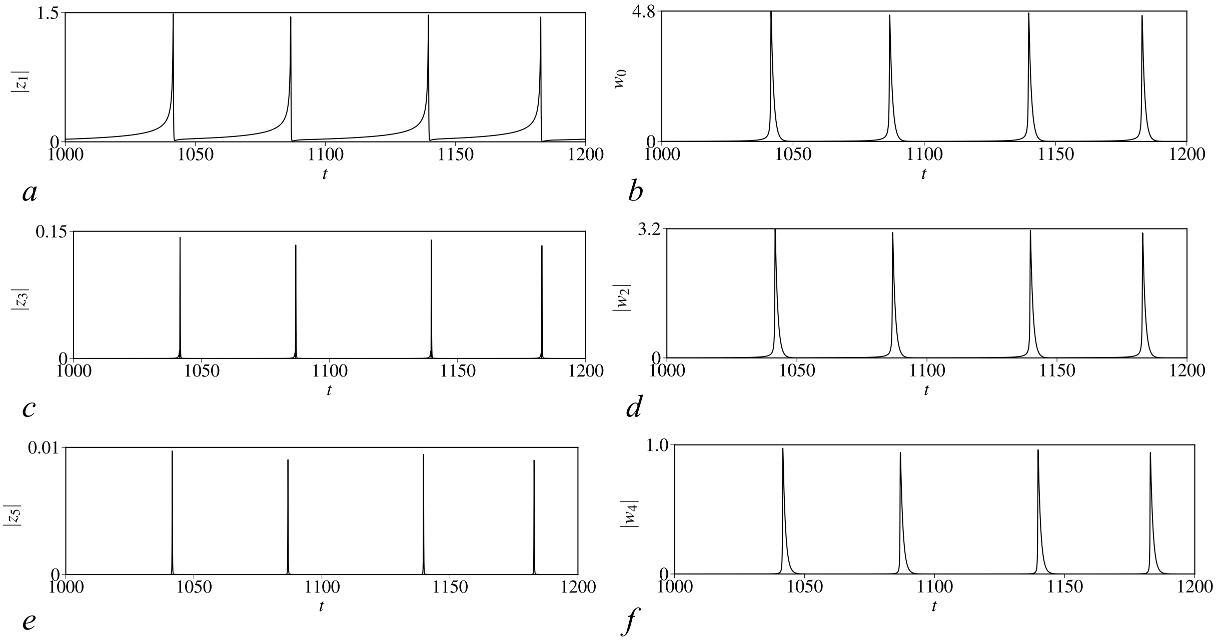


Рис. 17. Зависимости от времени амплитуд пространственных гармоник переменных $u\,(x,t)$ и $v\,(x,t)$, полученные при численном решении уравнений (25). *a, c, e* – Зависимости амплитуд первой $z_1\,(t)$, третьей $z_3\,(t)$ и пятой $z_5\,(t)$ пространственных гармоник переменной $u\,(x,t)$. *b, d, f* – Зависимости нулевой гармоники $w_0\,(t)$, амплитуд второй $w_2\,(t)$ и четвертой $w_4\,(t)$ пространственных гармоник переменной $v\,(x,t)$. Параметры системы: $\mu = 0.03$, $\varepsilon = 0.03$, $L = 2\pi$. Параметры численной схемы: шаг по времени $\Delta t = 0.001$, шаг по координате $\Delta x = L/N = 2\pi/1024$

Fig. 17. Realisations of spatial harmonics amplitudes of $u\,(x,t)$ and $v\,(x,t)$ from numerical solution of (25). *a, c, e* – realisations of the first $z_1\,(t)$, the third $z_3\,(t)$ and the fifth $z_5\,(t)$ spatial harmonics amplitudes of $u\,(x,t)$. *b, d, f* – realisations of zeroth harmonics $w_0\,(t)$, amplitudes of the second $w_2\,(t)$ and fourth $w_4\,(t)$ spatial harmonics of $v\,(x,t)$. System parameters: $\mu = 0.03$, $\varepsilon = 0.03$, $L = 2\pi$. Numerical procedure parameters: time-step $\Delta t = 0.001$, spatial step $\Delta x = L/N = 2\pi/1024$

ники не мала по сравнению с интересующей нас второй гармоникой. Амплитуды гармоник w_0 и w_4 поля v не достаточно маленькие, так как уравнение для v вообще не содержит производных по координате. Амплитуды более высоких гармоник малы, поэтому динамику распределенной системы можно считать эффективно низкоразмерной. Зависимости амплитуд от времени носят почти регулярный характер, поскольку хаос в системе развивается из-за действия на фазы отображения Бернулли.

На рис. 18, *a* и *b* показана типичная фазовая траектория спектрального представления системы (25) в проекциях на действительные и мнимые части комплексных амплитуд первой и второй гармоник. Можно видеть, что аргументы комплексных амплитуд z_1 и w_2 (эти аргументы задают углы направлений, вдоль которых движутся траектории) меняются только рядом с началом координат. Такое поведение траекторий аналогично наблюдаемому в неавтономной системе (21).

Для более наглядного исследования динамики фазы мы используем сечение Пуанкаре потока траекторий спектрального представления системы (25) поверхностью $|z_1|^2 - 1 = 0$ (для определенности, в направлении роста $|z_1|$). На рис. 18, *c* представлен портрет аттрактора отображения Пуанкаре в проекции на действительную и мнимую часть комплексной амплитуды w_2[8]. Объект «состоит» из двух больших витков. На рис. 18, *d* изображена итерационная диаграмма фазы второй гармоники $\theta = \arg w_2$. Диаграмма соответствует отображению Бернул-

[8]При нашем выборе секущей поверхности $\mathrm{Re}\, z_1$ и $\mathrm{Im}\, z_1$ зафиксированы на единичной окружности. В их динамике проявляется отображение Бернулли, но проекция аттрактора на плоскости $(\mathrm{Re}\, z_1, \mathrm{Im}\, z_1)$ не интересна.

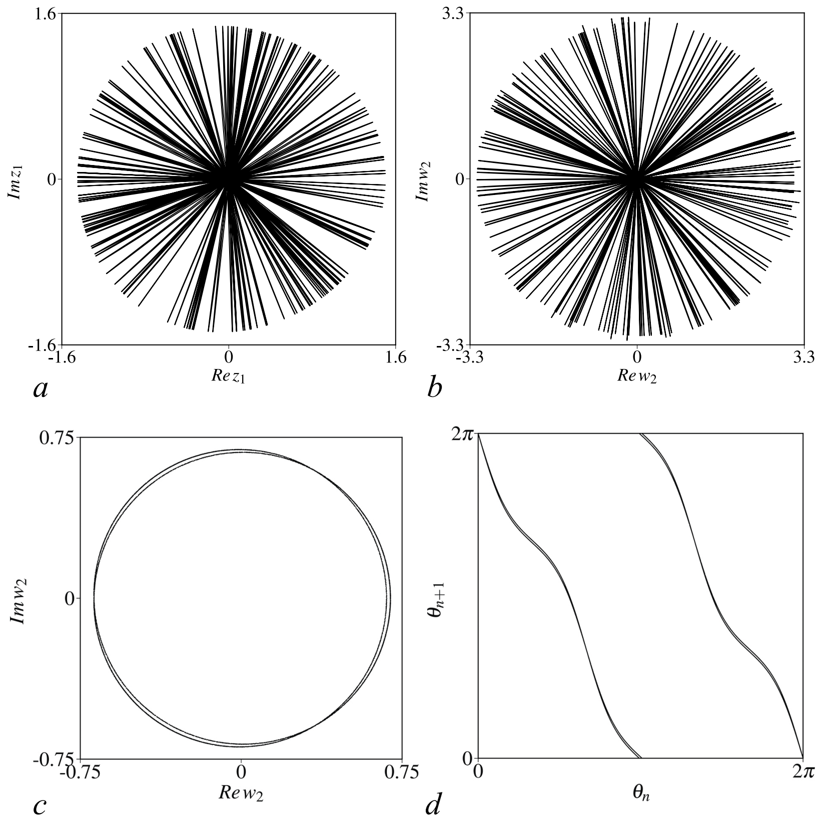


Рис. 18. *a* – Траектория в фазовом пространстве в проекции на плоскость действительной и мнимой частей комплексной амплитуды первой гармоники z_1 переменной u уравнений (25). *b* – Та же траектория, что и на панели *a*, в проекции на плоскость действительной и мнимой частей комплексной амплитуды второй гармоники w_2 переменной v. *c* – Портрет аттрактора отображения возврата Пуанкаре в проекции на действительную и мнимую часть комплексной амплитуды второй гармоники w_2. *d* – Диаграмма иллюстрирует итерации фазы второй гармоники w_2. Сечение Пуанкаре задано условием $|z_1|^2 = 1$ (в направлении роста $|z_1|$). Параметры системы: $\mu = 0.03$, $\varepsilon = 0.03$, $L = 2\pi$. Параметры численной схемы: шаг по времени $\Delta t = 0.001$, шаг по координате $\Delta x = L/N = 2\pi/1024$

Fig. 18. *a* – Phase trajectory projected on the plane of real and imaginary parts of the first harmonics amlitude z_1 of u of equations (25). *b* – The same trajectory, as on Panel (a), but projected on the plane of real and imaginary parts of the second harmonics w_2 of v. *c* – Portrait of attractor of stroboscopic Poincaré map projected on the plane of real and imaginary parts of the second harmonics w_2. *d* – The diagram illustrates the iterations of the phase of the second harmonics w_2. The cross-section surface is $|z_1|^2 = 1$ (in the direction of $|z_1|$ growth). System parameters: $\mu = 0.03$, $\varepsilon = 0.03$, $L = 2\pi$. Numerical procedure parameters: time-step $\Delta t = 0.001$, spatial step $\Delta x = L/N = 2\pi/1024$

ли с фактором растяжения угловой переменной -2: если переменная θ_n меняется на интервале от 0 до 2π, то её образ θ_{n+1} проходит этот интервал дважды в обратном направлении. На основании этого наблюдения мы заключаем, что на панели *c* изображена проекция варианта соленоида Смейла–Вильямса с топологическим фактором -2. Расчет показателей Ляпунова отображения Пуанкаре подтверждает, что по одному из направлений в фазовом пространстве происходит растяжение в 2 раза – старший показатель близок к $\ln 2$: $\Lambda = \{0.665, -42.26, -44.51, -46.46, \ldots\}$.

За возникновение гиперболического хаоса отвечают лишь две пространственные гармоники среды (25). Как и в задаче о неавтономном уравнении Свифта–Хохенберга (21), можно получить укороченную модель системы (25), если учесть вклад только нескольких гармоник. В статье [63] были рассмотрены пятимерная и семимерная укороченные модели. Пятимерная модель описывает взаимодействие первой гармоники z_1, второй гармоники w_2 и не играющей роли в формировании соленоида нулевой гармоники w_0. Семимерная модель дополнительно учитывает вклад гармоники w_4, не малой, как можно видеть на рис. 17, *f*, но не являющейся необходимой для возникновения гиперболического аттрактора. Мы приведем уравнения только для пятимерной модели, которую можно получить подстановками $u\,(x,t) \approx z_1\,(t)\,e^{ix} + z_1^*\,(t)\,e^{-ix}$, $v\,(x,t) \approx w_0\,(t) + w_2\,(t)\,e^{2ix} + w_2^*\,(t)\,e^{-2ix}$ и усреднением по пространственному периоду L:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \left[\mu - \frac{1}{5}w_0^2 + 3|z_1|^2 - \frac{2}{5}|w_2|^2\right] z_1 - \frac{2}{5}w_0 w_2 z_1^* + \frac{1}{2}\varepsilon w_2^*, \\ \dot{w}_2 &= \left[-1 + 2|z_1|^2\right] w_2 + w_0 z_1^2 + z_1^2, \\ \dot{w}_0 &= \left[-1 + 2|z_1|^2\right] w_0 + 2|z_1|^2 + w_2 z_1^{*2} + w_2^* z_1^2. \end{aligned} \tag{26}$$

В уравнениях (26) переменные z_1 и w_2 комплексные, а переменная w_0 вещественная. Динамические коэффициенты $\left[\mu - w_0^2/5 + 3|z_1|^2 - 2|w_2|^2/5\right]$ и $\left[-1 + 2|z_1|^2\right]$ управляют ростом и спадом амплитуд $|z_1|$ и $|w_2|$, но не влияют на аргументы комплексных переменных. Слагаемые z_1^2 и $\varepsilon w_2^*/2$ обеспечивают преобразование аргумента $\theta_{n+1} = -2\theta_n \pmod{2\pi}$. Уравнения (26) по структуре близки к другим известным автономным моделям с аттрактором Смейла–Вильямса [46, 51, 64].

На рис. 19, *a* представлены портрет аттрактора потоковой системы (26) в проекции на действительную и мнимую часть переменной w_2. Как и в распределенной системе, траектория меняет свое направление только рядом точкой начала координат, в которой находится седловое положение равновесия. На рис. 19, *b* и *c* итерационная диаграмма для аргумента комплексной переменной $\arg w_2$ и проекция аттрактора в сечении Пуанкаре на плоскость $(\mathrm{Re}\ w_2, \mathrm{Im}\ w_2)$. Секущая поверхность задавалась как $|z_1|^2 - 1 = 0$ (учитывались траектории, двигавшиеся в направлении увеличения $|z_1|$). Итерационная диаграмма *b* соответствует отображению Бернулли с фактором -2, аттрактор *c* визуально схож с соленоидом Смейла–Вильямса, он «состоит» из двух петель. Показатели Ляпунова для аттрактора отображения Пуанкаре составили $\Lambda = \{0.65,\ -46.95,\ -49.57,\ -51.14\}$. Укороченная модель (26) не воспроизводит поведения распределенной системы (25) с высокой точностью, но качественно демонстрирует основной атрибут её динамики – грубый гиперболический хаос. Систему (26) можно рассматривать и как самостоятельную модель.

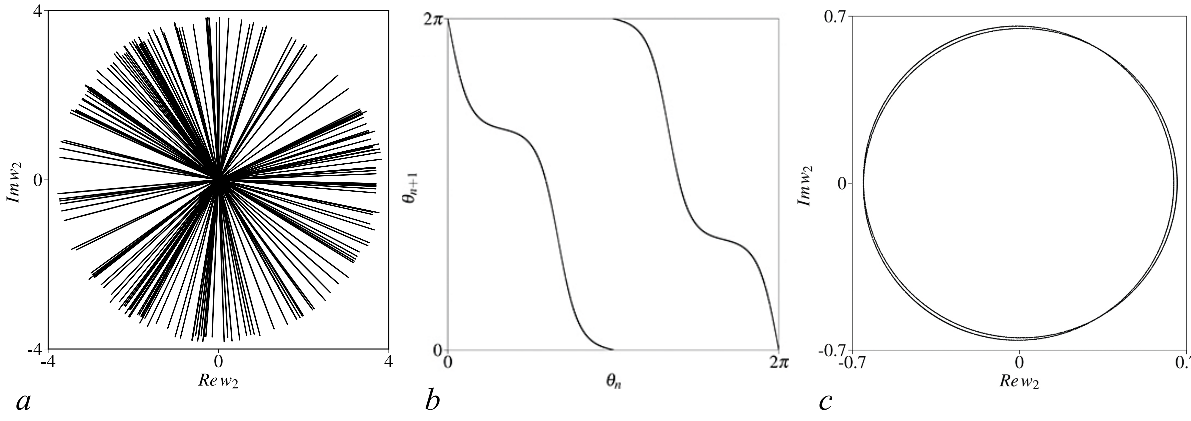


Рис. 19. *a* – Траектория в фазовом пространстве в проекции на плоскость действительной и мнимой частей комплексной амплитуды w_2 переменной u уравнений (26). *b* – Диаграмма иллюстрирует итерации фазы второй гармоники w_2. *c* – Портрет аттрактора отображения возврата Пуанкаре в проекции на действительную и мнимую часть комплексной амплитуды w_2. Сечение Пуанкаре задано условием $|z_1|^2 = 1$ (в направлении роста $|z_1|$). Параметры системы: $\mu = 0.03$, $\varepsilon = 0.03$

Fig. 19. *a* – Phase trajectory projected on the plane of real and imaginary parts of the second harmonics amplitude w_2 of u of (26). *b* – The diagram illustrates the iterations of the phase of the second harmonics w_2. *c* – Portrait of attractor of stroboscopic Poincaré map projected on the plane of real and imaginary parts of the second harmonics w_2. The cross-section surface is $|z_1|^2 = 1$ (in the direction of $|z_1|$ growth). System parameters: $\mu = 0.03$, $\varepsilon = 0.03$

С.П. Кузнецов предложил [65] модель дискретной периодической решетки из автономных элементов на основе среды (25). Дифференциальный оператор четвертого порядка был заменен разностным оператором всего лишь второго порядка, были сделаны и некоторые другие изменения:

$$\begin{aligned}\dot{u}_j &= D\left[u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}\right] + u_j^3 - u_j v_j^2 - \sigma u_{j+N} + \varepsilon \alpha_j v_j,\\ \dot{v}_j &= \left[-\gamma + u_j^2\right] v_j + \mu u_j^2.\end{aligned} \tag{27}$$

Решетка длиной $2N$ замкнута в кольцо: $u_{j+2N} = u_j$, $v_{j+2N} = v_j$. D, σ, ε, γ и μ – параметры. Связь между соседними элементами цепочки характеризуется параметром D. Также каждый элемент связан с противоположным на кольце, с коэффициентом связи σ. Присутствует пространственная неоднородность, заданная набором значений α_j.

Если $\varepsilon = 0$, то в линейном приближении подстановка $u_j \propto e^{\lambda t + i\pi kj/N}$ дает выражения для инкремента с волновым числом k: $\lambda = -\sigma\,(-1)^{-1} - 4D\sin^2(\pi k/2N)$. У всех гармоник с четным k значения инкремента отрицательные. Подбором параметров σ и D можно задать положительный инкремент для нечетных гармоник. Если $0 < 4D\sin^2(\pi/2N) < \sigma < 4D\sin^2(3\pi/2N)$, только у гармоники с $k = 1$ инкремент положительный, а остальные гармоники затухают.

Если выбрать $\alpha_j \propto \cos(3\pi j/N)$, то можно обеспечить растяжение угловой переменной в -2 раза и возникновение однородно гиперболического аттрактора в решетке нелинейных элементов (27), аналогично сплошной среде (25).

Количество элементов цепочки можно уменьшить вдвое, поскольку распределение u_j содержит только нечетные гармоники, а распределение v_j – только четные. Тогда новые условия на цепочку будут такие: $u_{j+N} = -u_j$, $v_{j+N} = v_j$. Тогда дальнодействующая связь $-\sigma u_{j+N}$ исключается, в цепочке остается всего N элементов:

$$\begin{aligned}\dot{u}_j &= D\left[u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}\right] + u_j^3 - u_j v_j^2 + \sigma u_j + \varepsilon \alpha_j v_j,\\ \dot{v}_j &= \left[-\gamma + u_j^2\right] v_j + \mu u_j^2.\end{aligned} \tag{28}$$

2.3. Другие примеры распределенных систем с грубым гиперболическим хаосом. В предыдущих примерах распределенные среды были модификациями уравнения Свифта–Хохенберга, в значительной степени абстрактной системы. Среды с грубым гиперболическим хаосом можно получить и модификацией других известных распределенных систем. Например, на основе модели брюсселятора [66] – гипотетической автокаталитической химической реакции с диффузией реагентов:

$$\begin{aligned}\partial_t u - \sigma\partial_x^2 u &= A - u - Bu + u^2 v,\\ \partial_t v - \partial_x^2 v &= Bu - u^2 v,\end{aligned} \tag{29}$$

где $u(x,t)$ и $v(x,t)$ – безразмерные переменные, описывающие распределение концентраций двух химических веществ. Концентрации u и v в каждой точке среды сами стимулируют и ограничивают свой рост. Вещество v диффундирует значительно быстрее вещества u, параметр σ характеризует отношение коэффициентов диффузии. Параметры A и B имеют и физический смысл, однако мы отметим лишь, что через них выражается равновесное состояние среды: $u_{\text{const}} = A$, $v_{\text{const}} = B/A$.

В отличие от уравнения Свитфа–Хохенберга (20), модель брюсселятора может проявлять не только неустойчивость Тьюринга, но и неустойчивость Хопфа (то есть с ненулевой частотой, по сути автоколебания). Граница неустойчивости тривиального решения по Хопфу $B > 1 + A^2$ и по Тьюрингу $B > \left(1 + \sqrt{\sigma}A\right)^2$. Мы заинтересованы во взаимодействии между пространственными гармониками паттернов Тьюринга, поэтому необходимо исключить неустойчивость

Хопфа подбором параметров. Если выполняется неравенство $A > 2\sqrt{\sigma}/(1-\sigma)$, то могут возникнуть только паттерны Тьюринга, а волновое число самой большой гармоники составляет $k_0 = \sqrt[4]{A^2/\sigma}$.

Неавтономная модификация брюсселятора, в которой может наблюдаться грубый гиперболический хаос паттернов Тьюринга, имеет вид [67]:

$$\begin{aligned} &\partial_t u - \sigma\gamma(t)\,\partial_x^2 u = (A-u)\,(1+\varepsilon\cos 3k_0 x) - Bu + u^2 v,\\ &\partial_t v - \gamma(t)\,\partial_x^2 v = Bu - u^2 v. \end{aligned} \tag{30}$$

Граничные условия периодические: $u(x+L,t) = u(x,t)$ и $v(x+L,t) = v(x,t)$, так что решение может быть представлено в виде рядов Фурье. Обе переменные u и v содержат как четные, так и нечетные гармоники. Также в среде присутствует пространственная периодическая неоднородность $(1+\varepsilon\cos 3k_0 x)$, причем $k_0 = 2$ – волновое число первой пространственной гармоники, его значение подобрано с помощью параметров A и σ. Оба коэффициента диффузии периодически модулируются, это изменение описывает функция $\gamma(t)$, равная 1 на первой половине периода модуляции, и $1/k_0^2 = 1/4$ на второй половине периода. За один период модуляции происходит растяжение пространственной фазы в -2 раза из-за взаимодействия первой $\propto \cos(2x+\theta)$ и второй $\propto \cos(4x+2\theta)$ пространственных гармоник переменной u и периодической пространственной неоднородности $\varepsilon\cos 6x$.

Численное решение уравнений (30) при значениях параметров A=2, B=4.1, σ=1/4, ε=0.03, T=32π, L=2π показывает, что в динамике паттернов проявляется грубый гиперболический хаос. На рис. 20, *a* и *b* изображено изменение во времени распределений u и v. Сдвиг между паттернами на каждом периоде нерегулярный. Траектория стробоскопического отображения за период вычерчивает объект, похожий на соленоид Смейла–Вильямса (рис. 20, *c*) в проекции на действительную и мнимую часть z_1 – первой гармоники u. На вставке можно видеть, что объект – с поперечной фрактальной структурой типа множества Кантора. На рис. 20, *d* изображена диаграмма за период для фазы $\arg z_1$, соответствующая отображению Бернулли с фактором растяжения -2. Старший показатель Ляпунова близок к $\ln 2$: $\Lambda_1 = 0.68$.

Укороченные уравнения для среды (30) также были получены и исследованы. Эти уравнения слишком громоздки, чтобы переписывать их в этом обзоре, укажем лишь разложение переменных u и v, достаточное для качественного описания динамики:

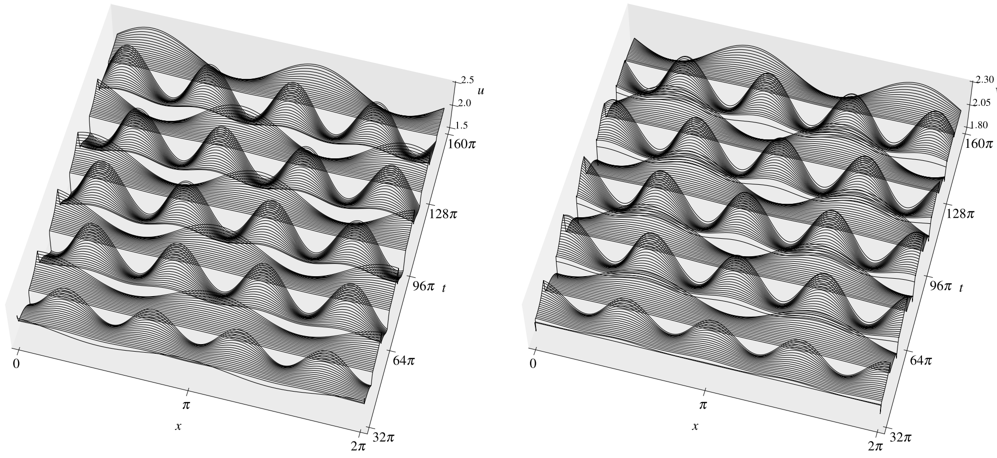
$$\begin{aligned} &u(x,t) \approx A + z_1(t)\,e^{2ix} + z_1^*(t)\,e^{-2ix} + z_2(t)\,e^{4ix} + z_2^*(t)\,e^{-4ix},\\ &v(x,t) \approx \frac{B}{A} + w_1(t)\,e^{2ix} + w_1^*(t)\,e^{-2ix} + w_2(t)\,e^{4ix} + w_2^*(t)\,e^{-4ix}. \end{aligned} \tag{31}$$

Возможны и распределенные системы с грубым гиперболическим хаосом, в которых вместо паттернов Тьюринга взаимодействуют паттерны стоячих волн. В работах [68, 69] была указана и продемонстрирована в численных расчетах возможность гиперболической хаотической динамики, ассоциирующейся с соленоидом Смейла–Вильямса, при параметрическом возбуждении механических колебаний неоднородной струны с нелинейной диссипацией, когда накачка попеременно осуществляется колебаниями на низкой и высокой частоте. Уравнение в частных производных имеет вид:

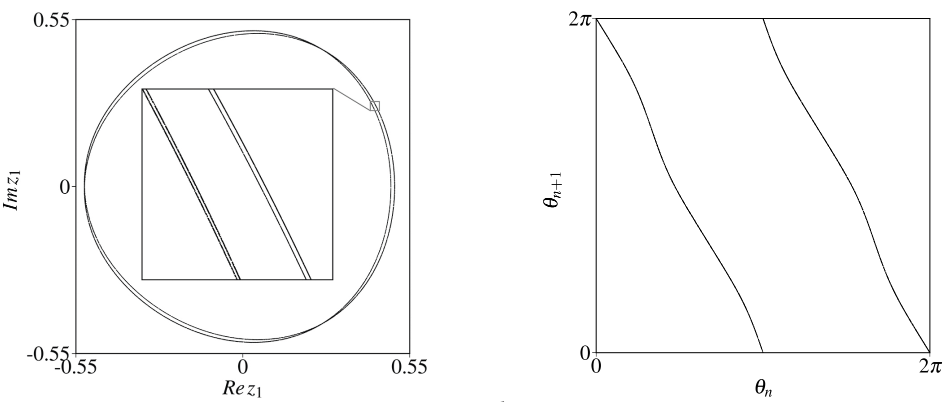
$$\rho(x)\,\partial_t^2 u - \sigma(t)\,\partial_x^2 u = -\left[\alpha + u^2\right]\partial_t u - \gamma u, \tag{32}$$

с периодическими граничными условиями $u(x+L,t) = u(x,t)$.

Слагаемое $-\left[\alpha + u^2\right]\partial_t u$ описывает нелинейную диссипацию, необходимую для стабилизации параметрической неустойчивости на некотором уровне амплитуды колебаний, однако



a *b*



c *d*

Рис. 20. *a* – Пространственно-временная реализация переменной u численного решения уравнения (30) с периодическими граничными условиями. *b* – То же для переменной v. Параметры системы: $A = 2$, $B = 4.1$, $\sigma = 1/4$, $\varepsilon = 0.03$, $T = 32\pi$, $L = 2\pi$. Параметры численной схемы: шаг по времени $\Delta t = 0.0016\pi$, шаг по координате $\Delta x = L/N = 2\pi/256$. *c* – Типичная траектория стробоскопического отображения Пуанкаре в проекции на действительную и мнимую часть комплексной амплитуды первой гармоники z_1 и увеличенный фрагмент на вставке. *d* – Диаграмма иллюстрирует итерации фазы первой гармоники z_1

Fig. 20. *a* – Spatio-temporal realisation of u from numerical solution of (30) with periodic boundary conditions. *b* – The same for variable v. System parameters: $A = 2$, $B = 4.1$, $\sigma = 1/4$, $\varepsilon = 0.03$, $T = 32\pi$, $L = 2\pi$. Numerical procedure parameters: time-step $\Delta t = 0.0016\pi$, space-step $\Delta x = L/N = 2\pi/256$. *c* – Typical trajectory of the stroboscopic Poincaré map projected on the real and imaginary parts of the complex amplitude of the first harmonics z_1 and an enlarged part on the insert. *d* – The diagram illustrates the iterations of the phase of the first harmonics z_1

для гиперболического хаоса важно и возникновение третьей и других нечетных гармоник за счет кубической нелинейности. Слагаемое $-\gamma u$ подавляет возмущения с нулевым волновым числом. Распределение массы вдоль струны неоднородно, линейная плотность струны описывается функцией $\rho(x) = 1 + \varepsilon \cos 4k_0 x$. При малом ε неоднородность слабая. Функция $\sigma(t) = 1 + a\cos^2 \Omega t \sin 2\omega_0 t + b \sin^2 \Omega t \sin 6\omega_0 t$ описывает силу натяжения струны, $\Omega = 2\pi/T$ – частота модуляции, малая по сравнению с ω_0, коэффициенты a и b неотрицательные, причем $a+b < 1$. Частота ω_0 и волновое число k_0 равны друг другу. Длина струны равна целому числу длин волн: $L = 2\pi n/k_0$.

В системе попеременно рождаются и исчезают паттерны стоячих волн с волновым числом k_0 и $3k_0$. На рис. 21, *a* изображена динамика вибраций струны, полученная численным решением

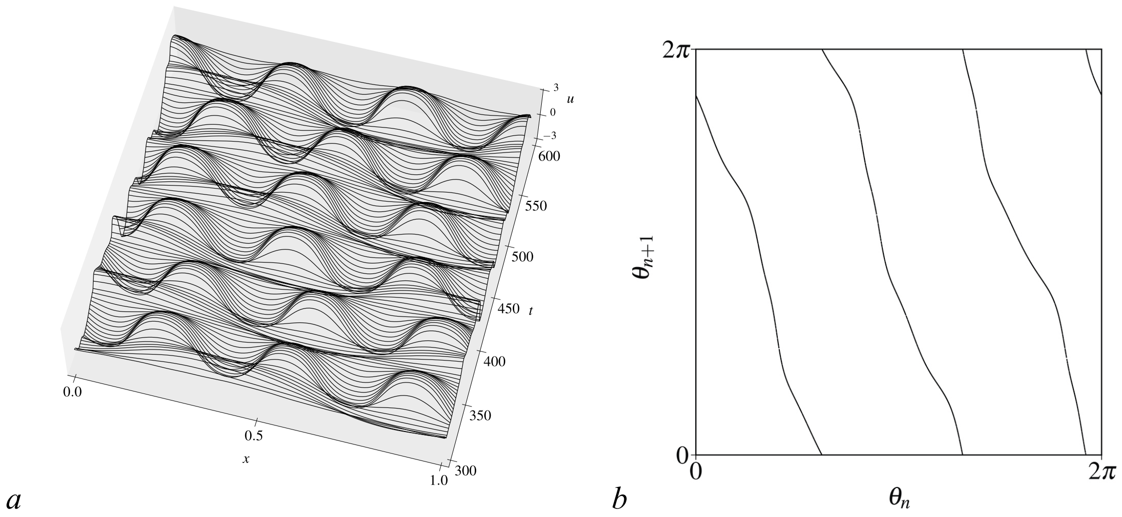


Рис. 21. *a* – Пространственно-временная реализация переменной u численного решения уравнения (32) с периодическими граничными условиями. *b* – То же для переменной v. Параметры системы: $\omega_0 = 2\pi$, $k_0 = 2\pi$, $a = 0.4$, $b = 0.2$, $\varepsilon = 0.2$, $\alpha = 0.4$, $\gamma = 0.03$, $T = 40$, $L = 1$. Параметры численной схемы: шаг по времени $\Delta t = 0.0001$, шаг по координате $\Delta x = L/N = 2\pi/64$. *b* – Диаграмма иллюстрирует итерации фазы первой гармоники z_1

Fig. 21. *a* – Spatio-temporal realisation of u from numerical solution of (32) with periodic boundary conditions. *b* – The same for variable v. System parameters: $\omega_0 = 2\pi$, $k_0 = 2\pi$, $a = 0.4$, $b = 0.2$, $\varepsilon = 0.2$, $\alpha = 0.4$, $\gamma = 0.03$, $T = 40$, $L = 1$. Numerical procedure parameters: time-step $\Delta t = 0.0001\pi$, space-step $\Delta x = L/N = 2\pi/64$. *b* – The diagram illustrates the iterations of the phase of the first harmonics z_1

уравнения (32) при значениях параметров $\omega_0 = 2\pi$, $k_0 = 2\pi$, $L = 1$, $a = 0.4$, $b = 0.2$, $\varepsilon = 0.2$, $\alpha = 0.4$, $\gamma = 0.03$, $T = 40$. Динамика фазы первой гармоники $\arg z_1$ подчиняется отображению Бернулли, что можно видеть из рис. 21, *b*[9].

Для модели струны также можно получить укороченные равнения, описывающие взаимодействие первой и третьей гармоник. Это система уравнений восьмого порядка, поскольку скорости изменения действительных и мнимых частей гармоник также являются динамическими переменными.

В [70] С.П. Кузнецов предложил кольцевую цепочку связанных маятников на периодически вибрирующем подвесе, демонстрирующую гиперболический хаос. Аналогично рассмотренной выше модели струны, в цепочке маятников посредством поочередного параметрического возбуждения стоячих волн с волновыми числами k_0 и $3k_0$ удается наблюдать динамику, соответствующую аттрактору типа Смейла–Вильямса. При переходе к непрерывному пределу цепочка сводится к уравнению типа синус-Гордона.

Интересный пример системы высокой размерности с хаотической динамикой, близкой к гиперболической, предложен в [71]. Система представляет собой два нелинейно взаимодействующих ансамбля глобально связанных осцилляторов ван дер Поля. Наблюдаемый коллективный хаос проявляется в динамике фаз средних полей обоих ансамблей. От модели ансамблей осцилляторов ван дер Поля была осуществлена редукция до нелинейно взаимодействующих ансамблей фазовых осцилляторов. Несмотря на большое число взаимодействующих осцилляторов, хаотическая динамика этой системы имеет очень низкую размерность. Другой пример коллективного гиперболического хаоса описан в [72]. Это ансамбль идентичных глобально связанных осцилляторов с аддитивным шумом. При переключении характера связи между осцилляторами

[9] Подбором функций $\rho(x)$ и $\sigma(t)$ можно добиться переключения между другими гармониками, так что растяжение будет осуществляться в 5, 7, 9, 11 раз [69].

формируется один либо два кластера синхронных осцилляторов. В термодинамическом пределе динамика мод – параметров порядка Дайдо описывается уравнением Фоккера–Планка. Механизм, ответственный за растяжение коллективной фазы, схож с работой неавтономной модели переключающихся паттернов Тьюринга (21).

Список литературы

1. *Андронов А.А., Понтрягин Л.С.* Грубые системы // ДАН СССР. 1937. Т. 14, № 5. С. 247–250.
2. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. М: Физматлит, 1959. С. 916.
3. Hyperbolic Chaos: A Physicist's View. Berlin, Heidelberg : Higher Education Press: Bijing and Springer-Verlag.
4. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос и гиперболические аттракторы: от математики к физике. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2013. С. 488.
5. *Turaev D. V., Shil'nikov L.P.* An example of a wild strange attractor // Sb. Math. 1998. T. 189, № 2. С. 291–314. DOI: 10.4213/sm300.
6. *Turaev D.V., Shil'nikov L.P.* Pseudohyperbolicity and the problem on periodic perturbations of Lorenz-type attractors // Doklady Mathematics. 2008. Vol. 77, no. 1. P. 17–21. DOI: 10.1007/s11472-008-1005-4.
7. Mathematical theory of dynamical chaos and its applications: Review. Part 1. Pseudohyperbolic attractors // Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2017. Т. 25, № 2. С. 4–36. DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-2-4-36.
8. *Gonchenko A.S., Gonchenko S.V.* Variety of strange pseudohyperbolic attractors in three-dimensional generalized Hénon maps // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2016. Vol. 337. P. 43–57. DOI: 10.1016/j.physd.2016.07.006.
9. *Kuznetsov S.P.* Example of a physical system with a hyperbolic attractor of the Smale-Williams type // Physical Review Letters. 2005. Vol. 95, no. 14. P. 144101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.95.144101.
10. *Смейл С.* Дифференцируемые динамические системы // УМН. 1970. Т. 25, № 1(151). С. 113–185.
11. *Williams R. F.* Expanding attractors // Publications Mathématiques de l'IHÉS. 1974. Vol. 43. P. 169–203. DOI: 10.1007/BF02684369.
12. *Гукенхеймер Дж., Холмс Ф.* Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. С. 560.
13. *Аносов Д.В.* Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны // Тр. МИАН СССР. 1967. Т. 90, № 5. С. 3–210.
14. Динамические системы с гиперболическим поведением // Итоги науки и техники. М.: ВИНИТИ, 1991. Т. 66 из Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. С. 5–242.
15. *Balazs N.L., Voros A.* Chaos on the pseudosphere // Physics Reports. 1986. Vol. 143, no. 3. P. 109–240. DOI: 10.1016/0370-1573(86)90159-6.
16. *Wilczak D.* Uniformly hyperbolic attractor of the Smale–Williams type for a Poincaré map in the Kuznetsov system // SIAM Journal on Applied Dynamical Systems. 2010. Vol. 9, no. 4. P. 1263–1283. DOI: 10.1137/100795176.
17. *Кузнецов С.П., Селезнев Е.П.* Хаотическая динамика в физической системе со странным аттрактором типа Смейла-Вильямса // ЖЭТФ. 2006. Т. 129, № 2. С. 400–412.
18. *Belyakin S.T., A. Shyteev S.* Model fibrillation as an analogue of the hyperbolic the Smale-

Williams attractor // American Journal of Biomedical Science & Research. 2019. Vol. 2, no. 5. P. 197–201.
19. *Лоскутов А.Ю.* Очарование хаоса // Усп. физ. наук. 2010. Т. 180, № 12. С. 1305–1329. DOI: 10.3367/UFNr.0180.201012d.1305.
20. *Zeraoulia E., Sprott J.C.* Robust Chaos and Its Applications. World Scientific, 2011. Vol. 79. P. 472. DOI: 10.1142/8296.
21. *Borisov A.V., Kazakov A.O., Sataev I.R.* The reversal and chaotic attractor in the nonholonomic model of Chaplygin's top // Regular and Chaotic Dynamics. 2014. Vol. 19, no. 6. P. 718–733. DOI: 10.1134/S1560354714060094.
22. *Kuznetsov S.P.* Dynamical chaos and uniformly hyperbolic attractors: from mathematics to physics // Phys. Usp. 2011. Vol. 54, no. 2. P. 119–144. DOI: 10.3367/UFNr.0181.201102a.0121.
23. *Кузнецов С.П.* Автогенератор грубого гиперболического хаоса // Известия вузов. ПНД. 2019. Т. 27, № 6. С. 39–62. DOI: 10.18500/0869-6632-2019-27-6-39-62.
24. *Аносов Д.В.* Грубые системы // Тр. МИАН СССР. 1985. Т. 169. С. 59–93.
25. *Позняк Э.Г., Шикин Е.В.* Дифференциальная геометрия: Первое знакомство. М.: Изд-во МГУ, 1990. С. 384.
26. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия: Методы и приложения. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. С. 760.
27. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1968. С. 576.
28. *Meeks III W.H., Ros A., Rosenberg H.* The Global Theory of Minimal Surfaces in Flat Spaces. Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 2002. Vol. 1775 of Lecture Notes in Mathematics. P. 136. DOI: 10.1007/b83168.
29. *Meeks III W.H., Pérez J.* A Survey on Classical Minimal Surface Theory. American Mathematical Society, 2012. Vol. 60 of University Lecture Series. P. 182.
30. *Donnay V., Visscher D.* A new proof of the existence of embedded surfaces with Anosov geodesic flow // Regular and Chaotic Dynamics. 2018. Vol. 23, no. 6. P. 685–694. DOI: 10.1134/S1560354718060047.
31. Введение в топологию. Учебное пособие. М.: Наука. Физматлит, 1995. С. 416.
32. *Козлов В. В.* Топологические препятствия к интегрируемости натуральных механических систем // ДАН СССР. 1979. Т. 249, № 6. С. 1299–1302.
33. *Тёрстон У.П., Уикс Д.Р.* Математика трехмерных многообразий // В мире науки. 1984. № 9. С. 74–88.
34. *Hunt T.J., MacKay R.S.* Anosov parameter values for the triple linkage and a physical system with a uniformly chaotic attractor // Nonlinearity. 2003. Vol. 16, no. 4. P. 1499–1510. DOI: 10.1088/0951-7715/16/4/318.
35. *Kuznetsov S.P.* Hyperbolic chaos in self-oscillating systems based on mechanical triple linkage: testing absence of tangencies of stable and unstable manifolds for phase trajectories // Regular and Chaotic Dynamics. 2015. Vol. 20, no. 6. P. 649–666. DOI: 10.1134/S1560354715060027.
36. All Lyapunov characteristic numbers are effectively computable // C. R. Acad. Sc. Paris, Sér. A. 1978. Vol. 286. P. 431–433.
37. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems: A method for computing all of them. Part I: Theory. Part II: Numerical application // Meccanica. 1980. Vol. 15. P. 9–30.
38. *Shimada I., Nagashima T.* A numerical approach to ergodic problem of dissipative dynamical systems // Prog. Theor. Phys. 1979. Vol. 61, no. 6. P. 1605–1616. DOI: 10.1143/PTP.61.1605.
39. *Кузнецов С.П.* Хаос в системе трех связанных ротаторов: от динамики Аносова к гиперболическому аттрактору // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Физика. 2015. Т. 15, № 2. С. 5–17. DOI: 10.18500/1817-3020-2015-15-2-5-17.

40. *Кузнецов С.П.* От динамики Аносова на поверхности отрицательной кривизны к электронному генератору грубого хаоса // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Физика. 2016. Т. 16, № 3. С. 132–144. DOI: 10.18500/1817-3020-2016-16-3-131-144.
41. *Кузнецов С.П., Круглов В.П.* О некоторых простых примерах механических систем с гиперболическим хаосом // Порядок и хаос в динамических системах. Сборник статей. К 80-летию со дня рождения академика Дмитрия Викторовича Аносова. М.: МАИК «Наука/Интерпериодика», 2017. Т. 297 из Тр. МИАН. С. 208–234. DOI: 10.1134/S0371968517020133.
42. *Аносов Д.В., Синай Я.Г.* Некоторые гладкие эргодические системы // УМН. 1967. Т. 22, № 5(137). С. 107–172.
43. *Kuptsov P.V.* Fast numerical test of hyperbolic chaos // Physical Review E. 2012. Vol. 85. P. 015203. DOI: 10.1103/PhysRevE.85.015203.
44. *Кузнецов С.П.* Хаос и гиперхаос геодезических потоков на многообразиях с кривизной, отвечающих механически связанным ротаторам: примеры и численное исследование // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2018. Т. 28, № 4. С. 565–581. DOI: 10.20537/vm180409.
45. *Kuznetsov S.P.* From geodesic flow on a surface of negative curvature to electronic generator of robust chaos // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2016. Vol. 26, no. 14. P. 1650232. DOI: 10.1142/S0218127416502321.
46. *Kuznetsov S.P., Pikovsky A.S.* Autonomous coupled oscillators with hyperbolic strange attractors // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2007. Vol. 232, no. 2. P. 87–102. DOI: 10.1016/j.physd.2007.05.008.
47. Хаотическая динамика в системах связанных неавтономных осцилляторов с резонансным и нерезонансным механизмом передачи возбуждения // Известия вузов. ПНД. 2007. Т. 15, № 6. С. 75–85. DOI: 10.18500/0869-6632-2007-15-6-75-85.
48. *Кузнецов С.П.* О возможности реализации параметрического генератора гиперболического хаоса // ЖЭТФ. 2008. Т. 133, № 2. С. 438–446.
49. *Тюрюкина Л.В., Пиковский А.С.* Гиперболический хаос в нелинейно связанных осцилляторах Ландау–Стюарта с медленной модуляцией параметров // Известия вузов. ПНД. 2009. Т. 17, № 2. С. 99–113. DOI: 10.18500/0869-6632-2009-17-2-99-113.
50. *Круглов В.П.* Кольцевой неавтономный генератор гиперболического хаоса // Известия вузов. ПНД. 2010. Т. 18, № 5. С. 132–147.
51. *Kuznetsov S.P.* Example of blue sky catastrophe accompanied by a birth of Smale-Williams attractor // Regular and Chaotic Dynamics. 2010. Vol. 15, no. 2–3. P. 348–353. DOI: 10.1134/S1560354710020206.
52. *Kuznetsov S.P.* Some mechanical systems manifesting robust chaos // Nonlinear Dynamics & Mobile Robotics. 2013. Т. 1, № 1. С. 3–22.
53. *Doroshenko V.M., Kruglov V.P., Kuznetsov S.P.* Smale–Williams Solenoids in a System of Coupled Bonhoeffer–van der Pol Oscillators // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2018. Vol. 14, no. 4. P. 435–451. DOI: 10.20537/nd180402.
54. *Kuznetsov S.P., Kruglov V.P.* Hyperbolic chaos in a system of two Froude pendulums with alternating periodic braking // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2019. Vol. 67. P. 152–161. DOI: 10.1016/j.cnsns.2018.07.021.
55. *Кузнецов С.П., Седова Ю.В.* Гиперболический хаос в осцилляторе Бонхоффера–ван дер Поля с дополнительной запаздывающей обратной связью и периодически модулируемым параметром возбуждения // Известия вузов. ПНД. 2019. Т. 27, № 1. С. 77–95. DOI: 10.18500/0869-6632-2019-27-1-77-95.
56. *Kuznetsov S.P., Seleznev E.P.* A strange attractor of the Smale-Williams type in the chaotic dynamics of a physical system // JETP. 2006. Vol. 102, no. 2. P. 355–364. DOI: 10.1134/S1063776106020166.

57. *Кузнецов С.П., Пономаренко В.И.* О возможности реализации странного аттрактора типа Смейла-Вильямса в радиотехническом генераторе с запаздыванием // Письма в ЖТФ. 2008. Т. 34, № 18. С. 1–8.
58. *Кузнецов С.П.* Гиперболические странные аттракторы систем допускающих физическую реализацию // Известия вузов. ПНД. 2009. Т. 17, № 4. С. 5–34. DOI: 10.18500/0869-6632-2009-17-4-5-34.
59. *Kuptsov P.V., Kuznetsov S.P., Pikovsky A.S.* Hyperbolic chaos of Turing patterns // Physical Review Letters. 2012. Vol. 108, no. 19. P. 194101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.108.194101.
60. *Cross M.C., Hohenberg P.C.* Pattern formation outside of equilibrium // Reviews of Modern Physics. 1993. Vol. 65, no. 3. P. 851–1112. DOI: 10.1103/RevModPhys.65.851.
61. *Swift J., Hohenberg P.C.* Hydrodynamic fluctuations at the convective instability // Physical Review A. 1977. Vol. 15, no. 1. P. 319–329. DOI: 10.1103/PhysRevA.15.319.
62. *Kuznetsov S. P.* Some lattice models with hyperbolic chaotic attractors // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2020. Vol. 16, no. 1. P. 13–21. DOI: 10.20537/nd200102.
63. *Kruglov V.P., Kuznetsov S.P., Pikovsky A.S.* Attractor of Smale-Williams type in an autonomous distributed system // Regular and Chaotic Dynamics. 2014. Vol. 19, no. 4. P. 483–494. DOI: 10.1134/S1560354714040042.
64. *Круглов В.П., Хаджиева Л.М.* Однородно гиперболический аттрактор в системе на основе связанных осцилляторов с сепаратрисой в виде «восьмерки» // Известия вузов. ПНД. 2016. Т. 24, № 6. С. 54–64. DOI: 10.18500/0869-6632-2016-24-6-54-64.
65. *Kuznetsov S. P.* Generation of robust hyperbolic chaos in CNN // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2019. Vol. 15, no. 2. P. 109–124. DOI: 10.20537/nd190201.
66. *Гленсдорф П., Пригожин И.Р.* Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций. УРСС, 2003. С. 280.
67. *Круглов В.П.* Методика и результаты численной проверки гиперболической природы аттракторов для редуцированных моделей распределенных систем // Известия вузов. ПНД. 2014. Т. 22, № 6. С. 79–93. DOI: 10.18500/0869-6632-2014-22-6-79-93.
68. *Isaeva O.B., Kuznetsov A.S., Kuznetsov S.P.* Hyperbolic chaos of standing wave patterns generated parametrically by a modulated pump source // Physical Review E. 2013. Vol. 87, no. 4. P. 040901. DOI: 10.1103/PhysRevE.87.040901.
69. *Круглов В. П., Кузнецов С.П, Кузнецов А.С.* Гиперболический хаос в системах с параметрическим возбуждением паттернов стоячих волн // Нелинейная динамика. 2014. Т. 10, № 3. С. 265–277. DOI: 10.20537/nd1403002.
70. *Кузнецов С.П.* Хаотическая динамика кольцевой цепочки маятников с вибрирующим подвесом // Известия вузов. ПНД. 2019. Т. 27, № 4. С. 99–113. DOI: 10.18500/0869-6632-2019-27-4-99-113.
71. *Kuznetsov S. P., Pikovsky A.S., Rosenblum M.* Collective phase chaos in the dynamics of interacting oscillator ensembles // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2010. Vol. 20, no. 4. P. 043134. DOI: 10.1063/1.3527064.
72. *Kuptsov P.V., Kuznetsov S.P., Pikovsky A.S.* Hyperbolic chaos at blinking coupling of noisy oscillators // Physical Review E. 2013. Vol. 87, no. 3. P. 032912. DOI: 10.1103/PhysRevE.87.032912.

References

1. Andronov AA, Pontryagin LS. Rough Systems. Proceedings of the Academy of Sciences of the USSR. 1937;14(5):247–250. In Russian.
2. Andronov AA, Vitt AA, Khaikin SE. Theory of Oscillations. Elsevier; 1966.
3. Kuznetsov SP. Hyperbolic Chaos: A Physicist’s View. Berlin, Heidelberg: Higher Education Press: Bijing and Springer-Verlag; 2012.

4. Kuznetsov SP. Dynamical chaos and hyperbolic attractors: from mathematics to physics. Izhevsk, Moscow: Institute of computer research; 2013. In Russian.
5. Turaev DV, Shil'nikov LP. An example of a wild strange attractor. Sb Math. 1998;189(2):291–314.
6. Turaev DV, Shil'nikov LP. Pseudohyperbolicity and the problem on periodic perturbations of Lorenz-type attractors. Doklady Mathematics. 2008;77(1):17–21.
7. Gonchenko AS, Gonchenko SV, Kazakov AO, Kozlov AD. Mathematical theory of dynamical chaos and its applications: Review. Part 1. Pseudohyperbolic attractors. Izvestiya VUZ Applied Nonlinear Dynamics. 2017;25(2):4–36. In Russian.
8. Gonchenko AS, Gonchenko SV. Variety of strange pseudohyperbolic attractors in three-dimensional generalized Hénon maps. Physica D: Nonlinear Phenomena. 2016;337:43–57.
9. Kuznetsov SP. Example of a physical system with a hyperbolic attractor of the Smale-Williams type. Physical Review Letters. 2005;95(14):144101.
10. Smale S. Differentiable dynamical systems. Bulletin of the American mathematical Society. 1967;73(6):747–817.
11. Williams RF. Expanding attractors. Publications Mathématiques de l'IHÉS. 1974;43:169–203.
12. Guckenheimer J, Holmes PJ. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields. vol. 42 of Applied Mathematical Sciences. New York: Springer-Verlag; 1983.
13. Anosov DV. Geodesic flows on closed Riemannian manifolds of negative curvature. Proceedings of the Mathematical Institute of the Academy of Sciences of the USSR. 1967;90(5):3–210. In Russian.
14. Anosov DV, Aranson DK, Grines VZ, Plykin RV, Sataev EA, Safonov AV, et al. Dynamical systems with hyperbolic behavior. vol. 66 of Encyclopaedia of Mathematical Sciences. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag; 1995. p. 236.
15. Balazs NL, Voros A. Chaos on the pseudosphere. Physics Reports. 1986;143(3):109–240.
16. Wilczak D. Uniformly hyperbolic attractor of the Smale–Williams type for a Poincaré map in the Kuznetsov system. SIAM Journal on Applied Dynamical Systems. 2010;9(4):1263–1283.
17. Kuznetsov SP, Seleznev EP. A strange attractor of the Smale-Williams type in the chaotic dynamics of a physical system. JETP. 2006;102(2):355–364.
18. Belyakin ST, A SS. Model fibrillation as an analogue of the hyperbolic the Smale-Williams attractor. American Journal of Biomedical Science & Research. 2019;2(5):197–201.
19. Loskutov AY. Fascination of chaos. Phys Usp. 2010;53(12):1257–1280.
20. Zeraoulia E, Sprott JC. Robust Chaos and Its Applications. vol. 79. World Scientific; 2011.
21. Borisov AV, Kazakov AO, Sataev IR. The reversal and chaotic attractor in the nonholonomic model of Chaplygin's top. Regular and Chaotic Dynamics. 2014;19(6):718–733.
22. Kuznetsov SP. Dynamical chaos and uniformly hyperbolic attractors: from mathematics to physics. Phys Usp. 2011;54(2):119–144.
23. Kuznetsov SP. Self-oscillating system generating rough hyperbolic chaos. Izvestiya VUZ Applied Nonlinear Dynamics. 2019;27(6):39–62. In Russian.
24. Anosov DV. Rough Systems. Proceedings of the Mathematical Institute of the Academy of Sciences of the USSR. 1985;169:59–93. In Russian.
25. Poznyak EG, Shikin EV. Differential Geometry: First Exposure. Moscow Univerity Press; 1990. In Russian.
26. Dubrovin BA, Novikov SP, Fomenko AT. Modern Geometry–Methods and Applications. Graduate Texts in Mathematics. New York: Springer-Verlag; 1990.
27. Gantmacher FR. The Theory of Matrices. AMS Chelsea Publishing: Reprinted by American Mathematical Society; 2000.
28. Meeks III WH, Ros A, Rosenberg H. The Global Theory of Minimal Surfaces in Flat Spaces. vol. 1775 of Lecture Notes in Mathematics. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag; 2002.

29. Meeks III WH, Pérez J. A survey on Classical Minimal Surface Theory. vol. 60 of University Lecture Series. American Mathematical Society; 2012.
30. Donnay V, Visscher D. A new proof of the existence of embedded surfaces with Anosov geodesic flow. Regular and Chaotic Dynamics. 2018;23(6):685–694.
31. Borisovich UG, Bliznyakov NM, Izrailevich YA, Fomenko TN. Introduction to Topology: A Tutorial. Moscow: Science, Fizmatlit; 1995. In Russian.
32. Kozlov VV. Topological obstructions to the integrability of natural mechanical systems. 1979;249(6):1299–1302. In Russian.
33. Thurston WP, Weeks JR. The mathematics of three-dimensional manifolds. Scientific American. 1984;251(1):108–121.
34. Hunt TJ, MacKay RS. Anosov parameter values for the triple linkage and a physical system with a uniformly chaotic attractor. Nonlinearity. 2003;16(4):1499–1510.
35. Kuznetsov SP. Hyperbolic chaos in self-oscillating systems based on mechanical triple linkage: testing absence of tangencies of stable and unstable manifolds for phase trajectories. Regular and Chaotic Dynamics. 2015;20(6):649–666.
36. Benettin G, Galgani L, Giorgilli A, Strelcyn JM. All Lyapunov characteristic numbers are effectively computable. C R Acad Sc Paris, Sér A. 1978;286:431–433.
37. Benettin G, Galgani L, Giorgilli A, Strelcyn JM. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems: A method for computing all of them. Part I: Theory. Part II: Numerical application. Meccanica. 1980;15:9–30.
38. Shimada I, Nagashima T. A numerical approach to ergodic problem of dissipative dynamical systems. Prog Theor Phys. 1979;61(6):1605–1616.
39. Kuznetsov SP. Chaos in the system of three coupled rotators: from Anosov dynamics to hyperbolic attractor. Izv Saratov Univ (N S), Ser Physics. 2015;15(2):5–17. In Russian.
40. Kuznetsov SP. From Anosov's dynamics on a surface of negative curvature to electronic generator of robust chaos. Izv Saratov Univ (N S), Ser Physics. 2016;16(3):132–144. In Russian.
41. Kuznetsov SP, Kruglov VP. On some simple examples of mechanical systems with hyperbolic chaos. vol. 297. Springer; 2017. p. 208–234.
42. Anosov DV, Sinai YG. Some smooth ergodic systems. Russ Math Surv. 1967;22(5):103–167.
43. Kuptsov PV. Fast numerical test of hyperbolic chaos. Physical Review E. 2012;85:015203.
44. Kuznetsov SP. Chaos and hyperchaos of geodesic flows on curved manifolds corresponding to mechanically coupled rotators: examples and numerical study. The Bulletin of Udmurt University Mathematics Mechanics Computer Science. 2018;28(4):565–581. In Russian.
45. Kuznetsov SP. From geodesic flow on a surface of negative curvature to electronic generator of robust chaos. International Journal of Bifurcation and Chaos. 2016;26(14):1650232.
46. Kuznetsov SP, Pikovsky AS. Autonomous coupled oscillators with hyperbolic strange attractors. Physica D: Nonlinear Phenomena. 2007;232(2):87–102.
47. Kuznetsov AP, Kuznetsov SP, Pikovsky AS, Turukina LV. Chaotic dynamics in the systems of coupling nonautonomous oscillators with resonance and nonresonance communicator of the signal. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2007;15(6):75–85. In Russian.
48. Kuznetsov SP. On the feasibility of a parametric generator of hyperbolic chaos. JETP. 2008;106(2):380–387.
49. Tyuryukina LV, Pikovsky AS. Hyperbolic chaos in a system of nonlinear coupled Landau-Stuart oscillators. Izvestiya VUZ Applied Nonlinear Dynamics. 2009;17(2):99–113. In Russian.
50. Kruglov VP. Circular non-autonomous generator of hyperbolic chaos. Izvestiya VUZ Applied Nonlinear Dynamics. 2010;18(5):132–147. In Russian.
51. Kuznetsov SP. Example of blue sky catastrophe accompanied by a birth of Smale-Williams attractor. Regular and Chaotic Dynamics. 2010;15(2–3):348–353.

52. Kuznetsov SP. Some mechanical systems manifesting robust chaos. Nonlinear Dynamics & Mobile Robotics. 2013;1(1):3–22. In Russian.
53. Doroshenko VM, Kruglov VP, Kuznetsov SP. Smale–Williams Solenoids in a System of Coupled Bonhoeffer–van der Pol Oscillators. Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2018;14(4): 435–451.
54. Kuznetsov SP, Kruglov VP. Hyperbolic chaos in a system of two Froude pendulums with alternating periodic braking. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2019;67:152–161.
55. Kuznetsov SP, Sedova YV. Hyperbolic chaos in the Bonhoeffer–van der Pol oscillator with additional delayed feedback and periodically modulated excitation parameter. Izvestiya VUZ Applied Nonlinear Dynamics. 2019;27(1):77–95. In Russian.
56. Kuznetsov SP, Seleznev EP. A strange attractor of the Smale-Williams type in the chaotic dynamics of a physical system. JETP. 2006;102(2):355–364.
57. Kuznetsov SP, Ponomarenko VI. Realization of a strange attractor of the Smale-Williams type in a radiotechnical delay-feedback oscillator. Technical Physics Letters. 2008;34(9):771–773.
58. Kuznetsov SP. Hyperbolic strange attractors of physically realizable systems. Izvestiya VUZ Applied Nonlinear Dynamics. 2009;17(4):5–34. In Russian.
59. Kuptsov PV, Kuznetsov SP, Pikovsky AS. Hyperbolic chaos of Turing patterns. Physical Review Letters. 2012;108(19):194101.
60. Cross MC, Hohenberg PC. Pattern formation outside of equilibrium. Reviews of Modern Physics. 1993;65(3):851–1112.
61. Swift J, Hohenberg PC. Hydrodynamic fluctuations at the convective instability. Physical Review A. 1977;15(1):319–329.
62. Kuznetsov SP. Some lattice models with hyperbolic chaotic attractors. Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2020;16(1):13–21.
63. Kruglov VP, Kuznetsov SP, Pikovsky AS. Attractor of Smale-Williams type in an autonomous distributed system. Regular and Chaotic Dynamics. 2014;19(4):483–494.
64. Kruglov VP, Khadzhieva LB. Uniformly hyperbolic attractor in a system based on coupled oscillators with «figure-eight» separatrix. Izvestiya VUZ Applied Nonlinear Dynamics. 2016;24(6):54–64. In Russian.
65. Kuznetsov SP. Generation of robust hyperbolic chaos in CNN. Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2019;15(2):109–124.
66. Glansdorff P, Prigogine IR. Thermodynamic theory of structure, stability and fluctuations. Wiley–Interscience; 1971.
67. Kruglov VP. Technique and results of numerical test for hyperbolic nature of attractors for reduced models of distributed systems. Izvestiya VUZ Applied Nonlinear Dynamics. 2014;22(6):79–93. In Russian.
68. Isaeva OB, Kuznetsov AS, Kuznetsov SP. Hyperbolic chaos of standing wave patterns generated parametrically by a modulated pump source. Physical Review E. 2013;87(4):040901.
69. Kruglov VP, Kuznetsov SP, Kuznetsov AS. Hyperbolic chaos in systems with parametrically excited patterns of standing waves. Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2014;10(3):265–277. In Russian.
70. Kuznetsov SP. Chaotic dynamics of pendulum ring chain with vibrating suspension. Izvestiya VUZ Applied Nonlinear Dynamics. 2019;27(4):99–113. In Russian.
71. Kuznetsov SP, Pikovsky AS, Rosenblum M. Collective phase chaos in the dynamics of interacting oscillator ensembles. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2010;20(4):043134.
72. Kuptsov PV, Kuznetsov SP, Pikovsky AS. Hyperbolic chaos at blinking coupling of noisy oscillators. Physical Review E. 2013;87(3):032912.

Круглов Вячеслав Павлович – родился в Саратове в 1990 году. Окончил факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского (2012). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (2016). Участвовал в научных конференциях «ХАОС», «Нелинейные волны», «Наноэлектроника, нанофотоника и нелинейная физика», «Гамильтонова динамика, неавтономные системы и структуры в уравнениях с частными производными», «Динамика, бифуркации и странные аттракторы», «Geometry, Dynamics, Integrable Systems», «Progress In Electromagnetics Research Symposium», «Scientific Heritage of Sergey A. Chaplygin: nonholonomic mechanics, vortex structures and hydrodynamics», «Topological methods in dynamics and related topics. Shilnikov workshop». Автор 15 статей в российских и международных научных журналах. ORCID: 0000-0001-7984-5847.

Россия, 410019 Саратов, Зелёная, 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники
имени В.А. Котельникова РАН
Россия, 410054 Саратов, ул. Политехническая, 77
Саратовский государственный технический университет
имени Гагарина Ю.А.
Россия, 603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Национальный исследовательский Нижегородский государственный
университет имени Н.И. Лобачевского
E-mail: kruglovyacheslav@gmail.com

Купцов Павел Владимирович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Приборостроение» Саратовского государственного технического университета имени Гагарина Ю.А., сотрудник научной группы теоретической нелинейной динамики в Саратовском филиале Института радиотехники и электроники РАН. Область научных интересов – сложные колебания в распределённых системах, хаотическая динамика в системах высокой размерности, численные методы.

Россия, 410054 Саратов, ул. Политехническая, 77
Саратовский государственный технический университет
имени Гагарина Ю.А.
Россия, 410019 Саратов, Зелёная, 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники
имени В.А. Котельникова РАН
E-mail: p.kuptsov@rambler.ru