

## О некоторых простых примерах механических систем с гиперболическим хаосом

С.П. Кузнецов,<sup>(a),(b),(c)</sup> В.П. Круглов<sup>(b),(c)</sup>

<sup>(a)</sup> Удмуртский государственный университет, Университетская, 1, Ижевск, 426034, Россия.

<sup>(b)</sup> Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Зеленая, 38, Саратов, 410019, Россия

<sup>(c)</sup> Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, Астраханская, 83, Саратов, 410012, Россия

Обсуждаются примеры механических систем с гиперболическим хаосом – шарнирный механизм Тёрстона – Уикса – Ханта – МакКэя, где реализуется консервативная динамика Аносова, и диссипативные системы с аттракторами типа Смейла – Вильямса (частица на плоскости под действием периодических импульсных толчков, взаимодействующие частицы, скользящие на двух попеременно вращающихся дисках, и струна с параметрическим возбуждением модулированной накачкой). Рассмотренные примеры интересны с точки зрения наполнения физическим содержанием гиперболической теории, как хорошо разработанного раздела математической теории динамических систем. Представлены результаты компьютерного тестирования гиперболическости в рассмотренных системах на основе анализа статистики углов пересечения устойчивых и неустойчивых многообразий.

**Ключевые слова:** динамическая система, хаос, аттрактор, гиперболичность, динамика Аносова, показатель Ляпунова, соленоид Смейла-Вильямса, параметрические колебания.

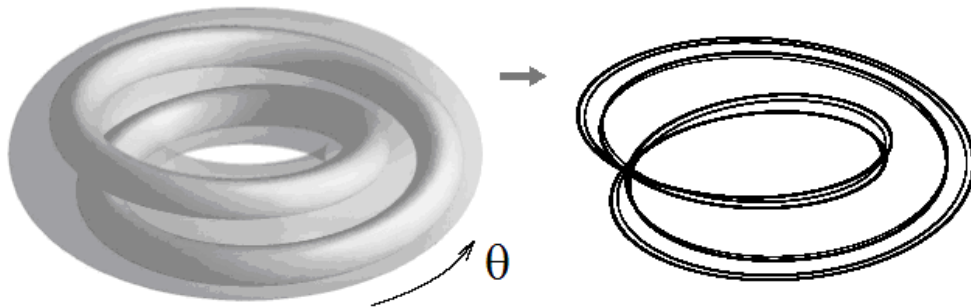
*Посвящается памяти академика Дмитрия Викторовича Аносова*

### Введение

Гиперболическая теория – раздел теории динамических систем, доставляющий строгое математическое обоснование возможности хаотического поведения детерминированных систем как с дискретным временем (итерируемые отображения – диффеоморфизмы) так и с непрерывным временем (потoki) [1-6]. Разработка этой теории, по выражению Д.В. Аносова, составила содержание «гиперболической революции 60-х годов» [7]. Объектами исследования служат равномерно гиперболические инвариантные множества в фазовом пространстве динамических систем, составленные исключительно из седловых траекторий. Для всех точек на такой траектории в пространстве малых возмущений (касательном пространстве) можно определить подпространство векторов, экспоненциально убывающих по норме при эволюции в прямом времени, и подпространство векторов, экспоненциально убывающих при эволюции в обратном времени. В потоковых системах, кроме того, вводится одномерное нейтральное подпространство возмущений вдоль траектории, которые в среднем не нарастают и не убывают. Произвольный вектор малого возмущения обязан допускать представление в виде линейной комбинации векторов, относящихся к указанным подпространствам. Множество точек в фазовом пространстве, которые приближаются к данной траектории в ходе эволюции во времени, называется ее устойчивым многообразием. Аналогично, неустойчивое многообразие есть множество точек, которые приближаются к исходной траектории при эволюции в обратном времени. Касания устойчивых и неустойчивых многообразий должны быть исключены; допускаются лишь пересечения под ненулевым углом.

Для консервативных систем гиперболический хаос представлен динамикой Аносова, когда равномерно гиперболическое инвариантное множество занимает все компактное фазовое пространство (для диффеоморфизма) или отвечает поверхности постоянной энергии (для потока). Для диссипативных систем гиперболическая теория вводит в рассмотрение специальный тип притягивающих инвариантных множеств – равномерно гиперболические хаотические аттракторы. Примером служит аттрактор Смейла – Вильямса в систе-

ме с дискретным временем, в трехмерном пространстве состояний которой область в виде тора за один шаг преобразования претерпевает двукратное продольное растяжение с поперечным сжатием и складывание двойной петли, помещенной внутрь исходного тора (рис. 1). При каждом повторении преобразования полный объем объекта уменьшается (отображение диссипативное), а число витков удваивается и стремится к бесконечности в пределе бесконечного числа шагов, в результате чего возникает образование, называемое соленоидом, с характерной поперечной структурой типа канторова множества. Очевидным обобщением служит построение, где складываемая петля имеет другое число оборотов – три и больше. Хаотическая природа динамики определяется тем, что преобразование угловой координаты отвечает растягивающему отображению окружности, или отображению Бернулли, вида  $\theta_{n+1} = M\theta_n \pmod{2\pi}$ , где  $M \geq 2$ .



**Рис. 1.** Построение аттрактора Смейла – Вильямса. Слева показана область в виде тора, которая подвергается продольному растяжению и поперечному сжатию с последующим вложением в виде двойной петли внутрь исходного тора. Справа – соленоид, получающийся в пределе при многократном повторении преобразования

Фундаментальный математический факт состоит в том, что равномерно гиперболические инвариантные множества характеризуются свойством грубости, или структурной устойчивости [1-6]. После того, как А.А. Андронов и Л.С. Понтрягин ввели понятие грубости (пригодное для систем с регулярной динамикой), в теории колебаний принято постулировать, что реальный интерес должны представлять именно грубые системы, которые демонстрируют движения, качественно не меняющиеся при малой вариации («шевелении») параметров [8-12]. Рассуждая в этом ключе, можно было ожидать, что, как грубый феномен, гиперболический хаос, должен встречаться во многих физических ситуациях. Однако, по мере появления многочисленных примеров хаотических систем различной природы (механика, гидродинамика, электроника, химическая кинетика [13-25]), стало ясно, что они не вписываются в узкие рамки ранней гиперболической теории. В отношении проблем, ведущих происхождение от естественных наук, по замечанию Д.В. Аносова, складывается «такое впечатление, будто Господь Бог предпочитает скорее пойти на некоторое ослабление гиперболичности, нежели возиться с ограничениями на топологию аттрактора, возникающими при его настоящей (полной и равномерной) гиперболичности образца 60-х годов» [7]. Соответственно, гиперболическая динамика такого рода стала рассматриваться лишь как рафинированный абстрактный образ хаоса, не относящийся напрямую к реальным системам, а усилия математиков оказались перенаправлены на развитие более широко применимых обобщений [26,27].

В учебниках и обзорах по динамическим системам равномерно гиперболический хаос обычно представлен искусственно сконструированными математическими примерами, такими как автоморфизмы тора Аносова, геодезические потоки на замкнутых многообразиях постоянной отрицательной кривизны, ДА-аттрактор Смейла, аттрактор Плыкина и упомянутый выше соленоид Смейла – Вильямса [1-6].

Что касается реализации гиперболического хаоса в природе и технике и его практического применения, то вопрос долгое время оставался непроработанным. Если полагать согласно идее школы Андронова, что грубые системы должны быть приоритетными для

теоретического анализа и практического использования, такое положение выглядит странным и неприемлемым. Так, для любых потенциальных приложений хаоса <sup>1</sup> системы с равномерно гиперболической динамикой видятся предпочтительными, поскольку в силу математически обоснованной структурной устойчивости будут обладать малой чувствительностью к несовершенству изготовления, помехам, погрешностям параметров и заданию функциональных характеристик элементов и т.п.

Имея в виду сложившуюся ситуацию, представляется продуктивным вместо поиска «готовых» примеров в природе и технике обратиться к целенаправленному построению систем с гиперболической динамикой с привлечением инструментария физики и теории колебаний (осцилляторы, частицы, поля, взаимодействия, цепи обратной связи). В этом отношении в последнее время достигнут значительный прогресс и предложены многочисленные примеры физически реализуемых систем с аттракторами типа Смейла – Вильямса и с иными разновидностями гиперболических аттракторов [42-54]. С точки зрения наглядности, можно выделить системы механики, которые легко воспринимаются и трактуются благодаря нашему повседневному опыту; их обзору и посвящена настоящая статья.

От физических примеров трудно ожидать, что к ним можно будет применить математически выверенные приемы доказательства гиперболической природы инвариантных множеств, поэтому возникает потребность подтверждения гиперболичности с привлечением компьютерных расчетов. Один из подходов, именуемый для краткости «критерий углов», основан на анализе статистики углов между устойчивыми и неустойчивыми подпространствами векторов возмущений (а значит и многообразиями) фазовых траекторий и был предложен первоначально в работе [55] для седловых инвариантных множеств. Впоследствии он использовался применительно к аттракторам [56-59], в том числе к аттракторам типа Смейла – Вильямса и Плыкина у отображений Пуанкаре систем, допускающих физическую реализацию [45, 47, 50, 42, 43]. Методика состоит в том, что на одной и той же принадлежащей рассматриваемому инвариантному множеству типичной траектории в каждой анализируемой точке определяются углы между подпространствами векторов малых возмущений при проходе по траектории вперед и назад во времени, и инспектируется их статистическое распределение. Отсутствие углов, близких к нулю, указывает на гиперболичность инвариантного множества. Если же обнаруживается положительная вероятность нулевых углов, то касания между устойчивыми и неустойчивыми многообразиями имеют место, и гиперболичности нет.<sup>2</sup> Ниже будет рассмотрено применение этого подхода к механическим системам с гиперболическим хаосом.

В разделе 1 мы обратимся к задаче о тройном шарнирном механизме, который обсуждался в научно-популярной статье Тёрстона и Уикса [60] как объект с конфигурационным пространством в виде нетривиального двумерного многообразия рода 3 («бублик с тремя дырками»). В свое время было доказано, что для двумерных многообразий рода отличного от 0 и 1 динамика геодезического потока не интегрируема [61]. Если кривизна на двумерном многообразии всюду отрицательна, то геодезический поток соответствует гиперболической динамике Аносова [62, 63]. Хант и МакКэй [64] установили, что в тройном шарнирном механизме, такую ситуацию можно обеспечить, и указали при этом соответствующий конкретный набор параметров (размеров и масс дисков и стержней).<sup>3</sup> В контексте настоящей статьи, этот объект весьма удобен для предварительного тестирования метода проверки гиперболичности, поскольку она в данном случае не вызывает сомнений.

<sup>1</sup> Можно упомянуть разработку приложений хаоса в информационно-коммуникационных системах [28-32], для целей криптографии [33,34], для генерации случайных чисел [35,36], в шумовой локации [37], к задачам управления динамики малыми воздействиями на хаотические движения («контроль хаоса»), в том числе в робототехнике [38-41].

<sup>2</sup> Для диссипативных систем это может говорить о наличии квазиаттрактора, представляющего собой сложно устроенное множество, которое помимо хаотических орбит содержит также долгопериодические устойчивые циклы с весьма узкими областями притяжения [9,10].

<sup>3</sup> В последнее время предложены и проанализированы также некоторые другие шарнирные механизмы способные демонстрировать динамику Аносова [65, 66].

В последующих разделах будут рассмотрены три диссипативные системы, у которых отображение Пуанкаре характеризуется присутствием аттракторов в виде соленоида Смейла – Вильямса. Первая задача относится к частице, совершающей скольжение на плоскости в потенциальном поле, имеющем минимум на окружности, под действием периодических импульсных толчков, интенсивность которых зависит от мгновенного положения частицы по специально подобранному закону [52, 53, 54]. Другая система построена на основе двух попеременно вращающихся дисков, на каждый из которых помещена способная скользить по нему частица, притягивающаяся к центру диска, причем обе частицы взаимодействуют между собой через заданное определенным образом потенциальное поле [54]. Наконец, последний пример относится к параметрическому возбуждению стоячих волн в одномерной среде с периодическими граничными условиями в присутствии нелинейной диссипации [67, 68], что можно рассматривать как модификацию классического опыта Мельде по параметрическому возбуждению колебаний струны. В нашем варианте накачка в виде колебаний силы натяжения струны, обеспечиваемых внешним воздействием, модулирована во времени и выполняется попеременно на более низкой и более высокой (утроенной) частоте, что приводит к возникновению по очереди длинноволновых и коротковолновых паттернов. Проверка гиперболичности аттрактора, который реализуется при надлежащем подборе параметров задачи, произведена для конечномерной модели, в рамках которой форма струны представляется комбинацией двух основных с точки зрения функционирования системы пространственных мод.

### 1. Шарнирный механизм Тёрстона – Уикса – Ханта – МакКэя

На рис. 2 схематически показан шарнирный механизм, составленный из размещенных в общей плоскости трех дисков с центрами в вершинах равностороннего треугольника. Каждый диск способен вращаться вокруг своей оси и имеет установленный на краю шарнир. К этим шарнирам  $P_{1,2,3}$  прикреплены три одинаковых стержня, противоположные концы которых соединены вместе посредством еще одного подвижного шарнира  $P_0$ . Мгновенная конфигурация системы задается углами поворота дисков  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  от лучей, соединяющих центры дисков с началом координат, но независимыми являются только две из этих переменных, в силу наложенной механической связи. Хант и МакКэй показали, что при определенном подборе масс и размеров элементов движение такого механизма по инерции с сохранением кинетической энергии отвечает геодезическому потоку на многообразии всюду отрицательной кривизны, так что реализуется динамика Аносова. В настоящей работе мы ограничимся простым для анализа асимптотическим случаем, когда радиус  $r$  мал, а длины стержней  $R$  равны расстоянию от начала координат до центров дисков, принятому за единицу, и, кроме того, массивными элементами являются только диски. В этом случае кривизна отрицательна не везде – имеется конечное число точек, где она нулевая, но этого достаточно для обеспечения динамики Аносова [64].

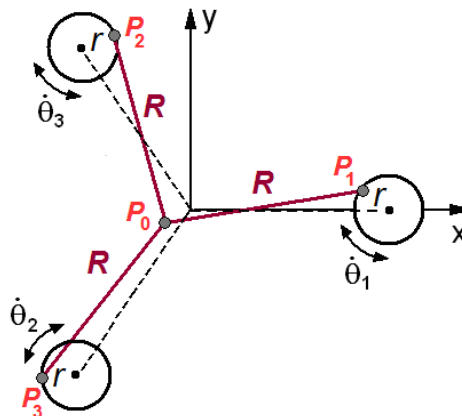


Рис. 2. Шарнирный механизм Тёрстона – Уикса – Ханта – МакКэя (“triple linkage” – тройное соединение)

Декартовы координаты установленных на дисках шарниров  $P_{1,2,3}$  выражаются через углы  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  следующим образом:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - r \cos \theta_1, \quad y_1 = -r \sin \theta_1, \\ x_2 &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} r \cos \theta_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} r \sin \theta_2, \quad y_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} r \sin \theta_2 - \frac{\sqrt{3}}{2} r \cos \theta_2, \\ x_3 &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} r \cos \theta_3 - \frac{\sqrt{3}}{2} r \sin \theta_3, \quad y_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} r \sin \theta_3 + \frac{\sqrt{3}}{2} r \cos \theta_3. \end{aligned} \quad (1)$$

Механическая связь, обусловленная присутствием стержней и шарниров, геометрически соответствует тому, что радиус описанной окружности треугольника  $P_1P_2P_3$  должен равняться длине стержней  $R$ . Известна формула  $R = abc / 4S$ , где  $a, b, c$  длины сторон треугольника, а  $S$  – его площадь. Имея координаты вершин  $(x_i, y_i)$ , находим длины сторон, а площадь выражаем через векторное произведение векторов, идущих из одной вершины в две другие,  $S = \frac{1}{2} |\mathbf{b} \times \mathbf{c}|$ . В результате уравнение связи  $(abc)^2 - 4R^2 (\mathbf{b} \times \mathbf{c})^2 = 0$  записывается через координаты как

$$\begin{aligned} F(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3) &= -4R^2 (x_2 y_3 + x_3 y_1 + x_1 y_2 - x_3 y_2 - x_1 y_3 - x_2 y_1)^2 + \\ &+ [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2][(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2][(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2] = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

а подстановка сюда выражений (1) приводит к его представлению через угловые переменные:  $F(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = 0$ .

Если предположить, что  $r \ll 1$ , и выполнить разложение равенства (2) в ряд Тейлора по малому параметру  $r$  с учетом членов нулевого и первого порядка, получим

$$F(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = 27(R^2 - 1) - 18r(2R^2 - 3)(\cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \cos \theta_3). \quad (3)$$

Полагая  $R = 1$ , приходим к очень простому уравнению голономной связи

$$F(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \cos \theta_3 = 0, \quad (4)$$

которое далее только и будет использоваться в настоящей работе.

Принимая моменты инерции дисков за единицу, можно записать формулу для кинетической энергии, которая задает в данном случае также и функцию Лагранжа:

$$W = L = \frac{1}{2} (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_3^2). \quad (5)$$

Уравнения движения выводятся стандартным образом [69, 70] и представляются в виде

$$\ddot{\theta}_1 = \Lambda \partial F / \partial \theta_1, \quad \ddot{\theta}_2 = \Lambda \partial F / \partial \theta_2, \quad \ddot{\theta}_3 = \Lambda \partial F / \partial \theta_3, \quad (6)$$

где множитель  $\Lambda$  подлежит определению с учетом алгебраического условия голономной механической связи (4).

Дифференцируя уравнение связи по времени однократно и двукратно, имеем

$$\dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 + \dot{\theta}_3 \sin \theta_3 = 0, \quad (7)$$

$$\ddot{\theta}_1 \sin \theta_1 + \ddot{\theta}_2 \sin \theta_2 + \ddot{\theta}_3 \sin \theta_3 + \dot{\theta}_1^2 \cos \theta_1 + \dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2 + \dot{\theta}_3^2 \cos \theta_3 = 0. \quad (8)$$

Подставив в соотношение (8) вторые производные из уравнений движения (6), находим явно множитель  $\Lambda$  и получаем систему уравнений в замкнутой форме

$$\ddot{\theta}_i = - \frac{\sum_{j=1}^3 \dot{\theta}_j^2 \cos \theta_j}{\sum_{j=1}^3 \sin^2 \theta_j} \sin \theta_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (9)$$

Уравнение (4) и соотношение (7) отвечают двум интегралам движения системы (9), при этом начальные условия обязательно должны задаваться так, чтобы равенства (4) и (7) выполнялись. Поскольку система (9) формально шестого порядка, у нее имеется шесть показателей Ляпунова, характеризующих поведение возмущенных фазовых траекторий около опорной траектории в шестимерном фазовом пространстве. Сумма показателей

равна нулю в силу консервативности системы. В случае хаотической динамики один показатель положительный, четыре нулевых, и один отрицательный, равный по абсолютной величине положительному показателю. Один из нулевых показателей обусловлен автономной природой системы и отвечает за возмущение, направленное по касательной к фазовой траектории. Еще один нулевой показатель ассоциируется с возмущением сдвига по энергии. Оставшиеся два нулевых показателя нефизические, так как отвечают возмущениям интегралов движения, обусловленных наложенной голономной связью, и их надо исключить из рассмотрения.

Имея некоторую мгновенную конфигурацию системы, целесообразно использовать в качестве обобщенных координат те две переменные  $\theta_i$  и  $\theta_j$ , синусы которых (производные от функции в уравнении связи) имеют меньшую абсолютную величину. Третью координату  $\theta_k$  и обобщенную скорость  $\dot{\theta}_k$  можно получить из уравнения связи:

$$\cos \theta_k = \pm \arccos(-\cos \theta_i - \cos \theta_j), \quad \dot{\theta}_k = \pm \sqrt{\frac{\dot{\theta}_i^2 \sin^2 \theta_i + \dot{\theta}_j^2 \sin^2 \theta_j}{1 - (\cos \theta_i + \cos \theta_j)^2}}. \quad (10)$$

Выделение пары обобщенных координат отвечает выбору одной из трех согласованных карт атласа двумерного многообразия, что можно делать на каждом шаге численного решения задачи при моделировании динамики. Этим обеспечивается адекватное описание движения на всем конфигурационном пространстве.

Подставив в формулу для кинетической энергии выражение одной из угловых скоростей  $\dot{\theta}_3$  через две другие скорости  $\dot{\theta}_{1,2}$  и координаты  $\theta_{1,2}$ , представим ее в форме

$$W(\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2} [E(\theta_1, \theta_2) \dot{\theta}_1^2 + 2F(\theta_1, \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + G(\theta_1, \theta_2) \dot{\theta}_2^2], \quad (11)$$

где

$$E = 1 + \frac{\sin^2 \theta_1}{1 - (\cos \theta_1 + \cos \theta_2)^2}, \quad F = \frac{\sin \theta_1 \sin \theta_2}{1 - (\cos \theta_1 + \cos \theta_2)^2}, \quad G = 1 + \frac{\sin^2 \theta_2}{1 - (\cos \theta_1 + \cos \theta_2)^2}. \quad (12)$$

Кинетическая энергия сохраняется, и динамика имеет место по геодезическим линиям метрики, заданной в локальных координатах  $(\theta_1, \theta_2)$  выражением

$$ds^2 = E(\theta_1, \theta_2) d\theta_1^2 + 2F(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 + G(\theta_1, \theta_2) d\theta_2^2 \quad (13)$$

и, соответственно, с циклической перестановкой индексов, на других картах атласа. Согласно известной из дифференциальной геометрии формуле [71,72], гауссова кривизна равна

$$K = \frac{1}{(EG - F^2)^2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} F''_{12} - \frac{1}{2}(E''_{22} + G''_{11}) & \frac{1}{2}E'_1 & F'_1 - \frac{1}{2}E'_2 & 0 & \frac{1}{2}E'_2 & \frac{1}{2}G'_1 \\ F'_2 - \frac{1}{2}G'_1 & E & F & -\frac{1}{2}E'_2 & E & F \\ \frac{1}{2}G'_2 & F & G & \frac{1}{2}G'_1 & F & G \end{array} \right), \quad (14)$$

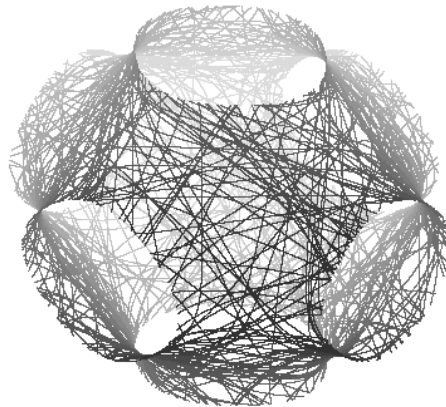
где штрихи и индексы обозначают производные по соответствующим переменным  $(\theta_1, \theta_2)$ , и для метрики (13) ее удастся найти явно [64,73]:

$$K = -\frac{\cos^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2 + \cos \theta_1 \cos \theta_2}{4(-\frac{3}{2} + \cos^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2 + \cos \theta_1 \cos \theta_2)^2}. \quad (15)$$

С учетом уравнения связи, выражение можно переписать в симметричной форме

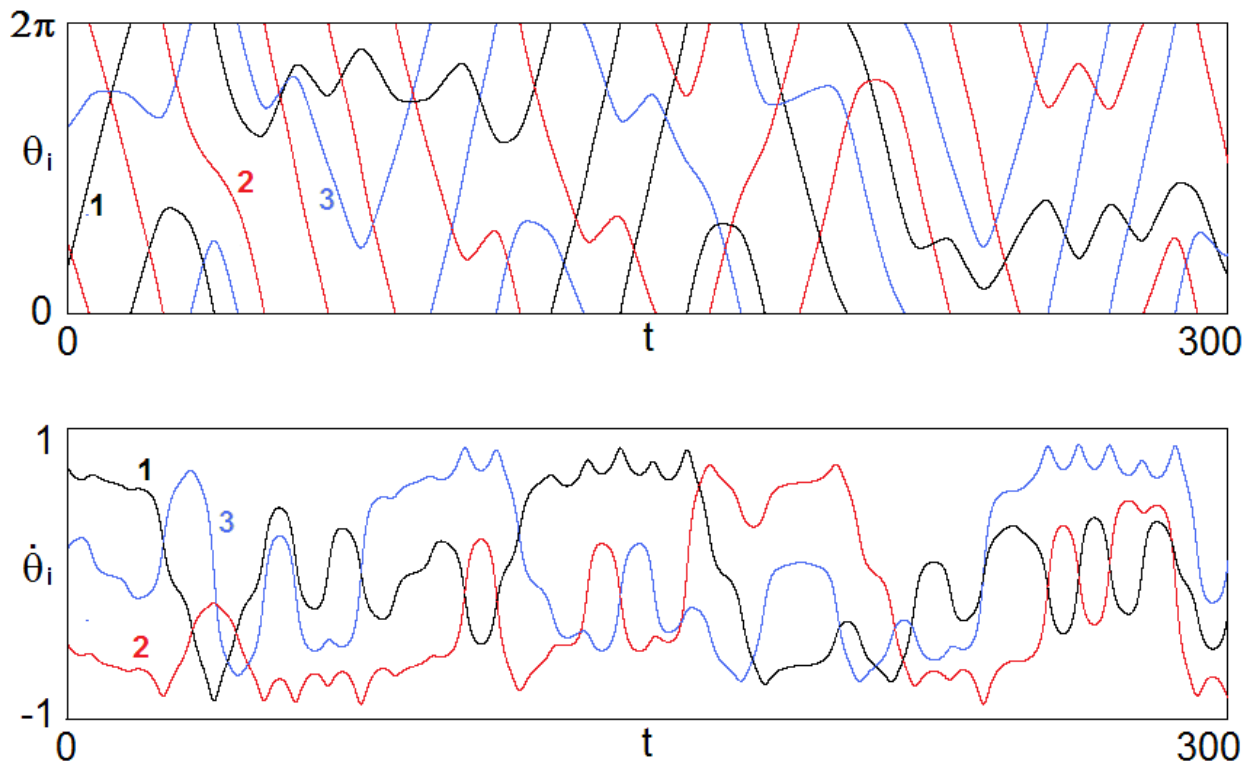
$$K = -\frac{\cos^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2 + \cos^2 \theta_3}{2(\sin^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_3)^2}, \quad (16)$$

откуда видно, что за исключением восьми точек, где она обращается в ноль,  $\theta_1 = \pm\pi/2$ ,  $\theta_2 = \pm\pi/2$ ,  $\theta_3 = \pm\pi/2$ , кривизна везде отрицательна. Этого достаточно, чтобы геодезический поток обеспечивал динамику Аносова [64].



**Рис. 3.** Типичный портрет траектории в трехмерном конфигурационном пространстве  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$

На рис. 3 приводится типичный портрет траектории в конфигурационном пространстве, полученной при численном решении уравнений (9). Траектория непрерывна: при пересечении грани представленной на рисунке кубической ячейки она продолжается от противоположной грани куба в силу периодичности конфигурационного пространства по трем переменным. Видно, что она покрывает поверхность, топологически эквивалентную «кренделю с тремя дырками». На рис. 4 показаны реализации – зависимости обобщенных координат  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  и скоростей  $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3$  от времени для энергии  $W = 0.1$ .



**Рис. 4.** Реализации зависимостей обобщенных координат и скоростей от времени, полученные при величине кинетической энергии  $W = \frac{1}{2}(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_3^2) = 0.1$ . В силу циклической природы обобщенных координат, непрерывные кривые на верхней диаграмме выглядят так, что при пересечении верхней границы кривая продолжается, стартуя от нижней границы, и наоборот

Чтобы охарактеризовать наблюдаемый хаос на количественном уровне, естественно использовать показатели Ляпунова. Как уже говорилось, имеется четыре показателя

Ляпунова, согласующихся с наложенной голономной связью, причем два из них нулевые. Поскольку полная сумма показателей также равна нулю, в численных расчетах достаточно найти один наибольший показатель, после чего остальные три определяются однозначно. Для  $W=0.1$ , что соответствует графикам на рис. 4, показатели Ляпунова, рассчитанные по традиционному алгоритму [74, 23, 24] на основе совместного интегрирования уравнений движения и уравнений в вариациях таковы:  $\lambda_1 = 0.223$ ,  $\lambda_2 = 0$ ,  $\lambda_3 = 0$ ,  $\lambda_4 = -0.223$ .

Имея формулу для кривизны, можно применить альтернативный метод вычисления показателей Ляпунова, рассматривая задачу в терминах полей Якоби [75]. Разность радиус-векторов для близких точек на близких геодезических линиях представляется в локально определенном базисе  $(\mathbf{e}_{\parallel}, \mathbf{e}_{\perp})$ , где  $\mathbf{e}_{\parallel}$  единичный вектор, направленный вдоль геодезической линии, а  $\mathbf{e}_{\perp}$  ортогональный к нему единичный вектор. Тогда для коэффициентов разложения вектора инфинитезимального возмущения  $J_{\parallel}\mathbf{e}_{\parallel} + J_{\perp}\mathbf{e}_{\perp}$  получаются уравнения

$$\ddot{J}_{\parallel} = 0, \quad \ddot{J}_{\perp} = -2K(t)WJ_{\perp}, \quad (17)$$

где  $K(t)$  – локальная кривизна, которая зависит от мгновенных координат,  $W = \frac{1}{2}\dot{s}^2$  – кинетическая энергия. Из первого уравнения видно, что имеется два нулевых показателя, ассоциирующихся с продольной составляющей движения. Из второго уравнения, учитывая, что  $K \leq 0$ , где равенство достигается только в исключительных изолированных точках, следует наличие равных по абсолютной величине положительного и отрицательного показателя. Конкретно найти старший показатель можно, интегрируя численно уравнение для коэффициента  $J_{\perp}$  совместно с уравнениями движения, причем получается хорошее соответствие с приведенным выше результатом. Старший показатель Ляпунова записывается в виде  $\lambda = \kappa\sqrt{W}$ , где эмпирический коэффициент  $\kappa \approx 0.70$  определяется средней кривизной вдоль траектории. Вследствие присущей гиперболическому хаосу эргодичности, этот коэффициент статистически хорошо определен для типичной траектории.

Гиперболичность в данном случае не вызывает сомнений, но представляется интересным выполнить для этого примера тестирование «критерия углов» [55-59], который может применяться также и в ситуациях, когда наличие или отсутствие гиперболичности не тривиально.

Критерий удобно использовать в изящной формулировке работы [58]. Начинаем с вычисления на компьютере опорной орбиты  $\mathbf{x}(t)$  путем решения системы (9)  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$  на достаточно протяженном временном интервале. Затем берем линеаризованное уравнение для вектора возмущения  $\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{F}'(\mathbf{x}(t))\tilde{\mathbf{x}}$ , где  $\mathbf{F}'(\mathbf{x})$  матричная производная (составленная из частных производных матрица размера  $6 \times 6$ ), и интегрируем его вдоль найденной траектории  $\mathbf{x}(t)$  с нормировкой вектора  $\tilde{\mathbf{x}}$  на каждом шаге  $n$  на единицу, чтобы исключить расходимость. (В нашей задаче неустойчивое направление одно, что связано с наличием единственного положительного показателя Ляпунова.) В результате получаем набор единичных векторов  $\{\mathbf{x}_n\}$ . Далее, выполняем интегрирование в обратном времени вдоль той же самой опорной траектории линейного уравнения  $\dot{\mathbf{u}} = -[\mathbf{F}'(\mathbf{x}(t), t)]^T \mathbf{u}$ , где верхний индекс  $T$  означает матричное сопряжение. Это дает набор векторов  $\{\mathbf{u}_n\}$ , определяющих ортогональное дополнение к устойчивому подпространству векторов возмущения в точках опорной траектории. Их также удобно нормировать на единицу. Теперь для оценки угла  $\phi$  между одномерным неустойчивым подпространством и устойчивым подпространством на каждом  $n$ -ом шаге вычисляем угол  $\beta_n \in [0, \pi/2]$  между векторами  $\tilde{\mathbf{x}}_n$  и  $\mathbf{u}_n$ :  $\cos \beta_n = |\mathbf{u}_n(t) \cdot \tilde{\mathbf{x}}_n(t)|$ , и полагаем  $\phi_n = \pi/2 - \beta_n$ .

На рис. 5 показаны полученные численно гистограммы распределения углов между устойчивыми и неустойчивыми подпространствами в системе (9) для  $W=0.1$  и  $0.3$ . Как



можно видеть, распределения отделены от нулевых значений углов  $\phi_n$ , т.е. в обоих случаях тест подтверждает гиперболичность.

Интересно отметить, что гиперболическая природа хаотической динамики сохраняется при рассмотренных в работах [73, 59] модификациях системы с введением диссипации и обратной связи, делающих ее автоколебательной. Это продемонстрировано численными расчетами как в варианте, когда в качестве аттрактора выступает инвариантная энергетическая поверхность, так и в моделях, где энергия для траекторий на аттракторе с течением времени флуктуирует около некоторого среднего значения [59]. Более того, гиперболический аттрактор продолжает существовать до известных пределов и при более глубокой модификации, когда механическая связь трех ротаторов, образующих систему, заменяется их взаимодействием через посредство потенциала, минимум которого отвечает предполагаемому в исходной задаче условию связи [73, 59]. Эти результаты позволяют говорить о возможности создания систем немеханической природы, аналогичных по характеру динамики тройному шарнирному механизму, например, электронных генераторов грубого хаоса с привлекательными для приложений характеристиками [76].

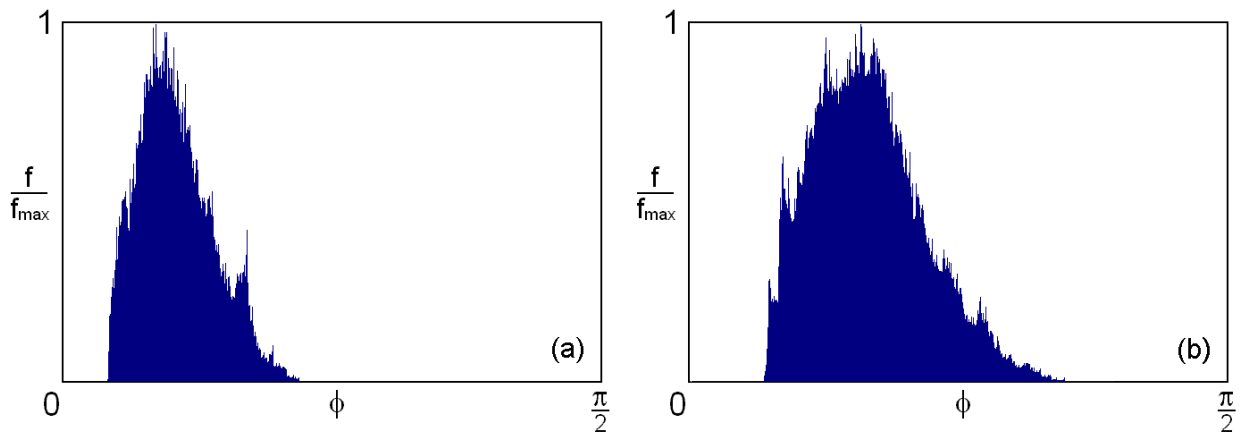


Рис. 5. Проверка критерия углов в системе (9) для траекторий с кинетической энергией  $W = \frac{1}{2}(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_3^2) = 0.1$  (a) и 0.3 (b)

## 2. Движение частицы на плоскости под действием периодических толчков

Задачи о движении частицы на плоскости под действием периодических толчков, когда в отображении за период воздействия реализуется аттрактор типа Смейла – Вильямса, были предложены и исследованы численно в работах [52, 53]. Здесь будет рассмотрен вариант из более поздней работы [54], по-видимому, лучше приспособленный для возможной экспериментальной реализации.

Пусть имеем частицу единичной массы, совершающую движение на плоскости  $(x, y)$  в стационарном потенциальном поле  $U(x, y) = -\frac{1}{2}\mu(x^2 + y^2) + \frac{1}{4}\mu(x^2 + y^2)^2$ , которое обладает вращательной симметрией относительно начала координат, с минимумом на единичной окружности. Примем, что периодически, с периодом  $T$ , на короткое время включается дополнительное силовое поле с потенциалом  $V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{3}x^3 + xy^2$ , так что получаемый частицей импульс по величине и направлению зависит от ее мгновенного положения. Функция Лагранжа для данной задачи имеет вид

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - U(x, y) - V(x, y) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) =$$

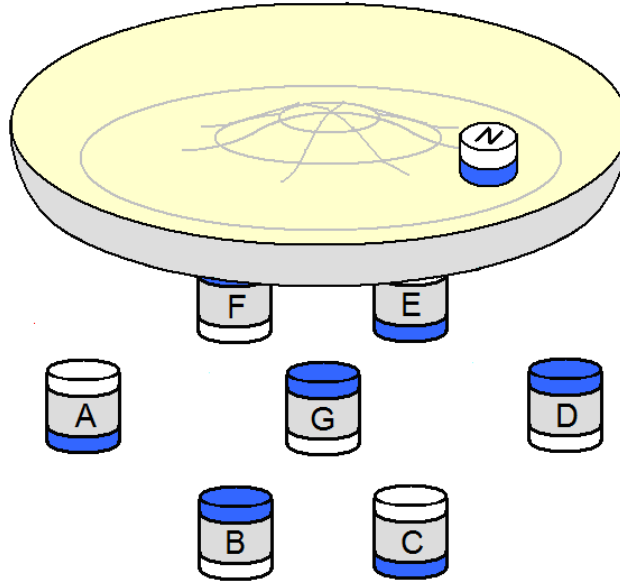
$$= \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}\mu[x^2 + y^2 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^2] + (-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}x^3 - xy^2) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT). \quad (18)$$

Практически, потенциал  $V(x, y)$  можно обеспечить системой шести электромагнитов А-Е в виде гексаполя и дополнительным электромагнитом G, создающим центрально-симметричную часть потенциала, которые все включаются одновременно импульсами тока, следующими периодически (рис. 6). Частицу полагаем магнитом, один полюс которого участвует во взаимодействии, а второй удален за пределы области взаимодействия.

Запишем уравнения движения, как уравнения Лагранжа в виде

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \mu x(1 - x^2 - y^2) + (-x + x^2 - y^2) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) - \dot{x}, \\ \ddot{y} &= \mu y(1 - x^2 - y^2) + (-y - 2xy) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) - \dot{y}.\end{aligned}\tag{19}$$

где добавлена сила трения, пропорциональной мгновенной скорости. Коэффициент трения для простоты принят равным единице.



**Рис. 6.** Схематическое изображение возможной конструкции, где реализуется движение частицы с импульсными толчками, моделируемое уравнениями (19). Серые цилиндры – электромагниты, включаемые периодически следующими импульсами тока; цвет торца указывает полярность

Поясним механизм функционирования системы.

Вместо одной частицы, представим себе кольцо из множества невзаимодействующих частиц, в начальный момент покоящихся на единичной окружности в точках  $x = \cos \varphi$  и  $y = \sin \varphi$ , где  $0 \leq \varphi < 2\pi$ .

После толчка со стороны поля  $V$  частица, имевшая начальный угол  $\varphi$ , получит импульс с компонентами  $P_x = -x + x^2 - y^2$  и  $P_y = -y - 2xy$ . Если временно не учитывать поле  $U$ , то легко найти, что частица остановится из-за трения в точке с координатами

$$x' = x + P_x = x^2 - y^2, \quad y' = y + P_y = -2xy.\tag{20}$$

Подставляя в (20)  $x = \cos \varphi$  и  $y = \sin \varphi$ , получим  $x' = \cos \varphi'$  и  $y' = \sin \varphi'$ , где  $\varphi' = -2\varphi$ . Это значит, что частицы расположатся опять по единичной окружности, но однократный обход исходного кольца отвечает теперь двукратному обходу вновь образовавшегося кольца в обратном направлении. Таким образом, для угловой координаты получаем растягивающее отображение окружности, или отображение Бернулли.

Возвращаясь к уравнениям (19), зададим параметр  $\mu$  относительно малым, чтобы за характерное время, в течение которого происходит движение частицы вследствие импульсного толчка, смещение под действием поля  $U(x, y)$  было невелико. С другой стороны, интервал времени между толчками  $T$  примем достаточно большим, чтобы частица ус-

пелава подойти к минимуму потенциального поля. (Эти условия не очень жесткие, и их достаточно обеспечить хотя бы в грубом приближении, что обусловлено структурной устойчивостью аттрактора, который мы намерены получить.) Задав начальное состояние в момент непосредственно перед  $n$ -м импульсом,  $\mathbf{x}_n = \{x, \dot{x}, y, \dot{y}\}_{t=nT-0}$ , можно определить состояние перед следующим  $n+1$ -ым импульсом из решения уравнений (19) на периоде  $T$ :

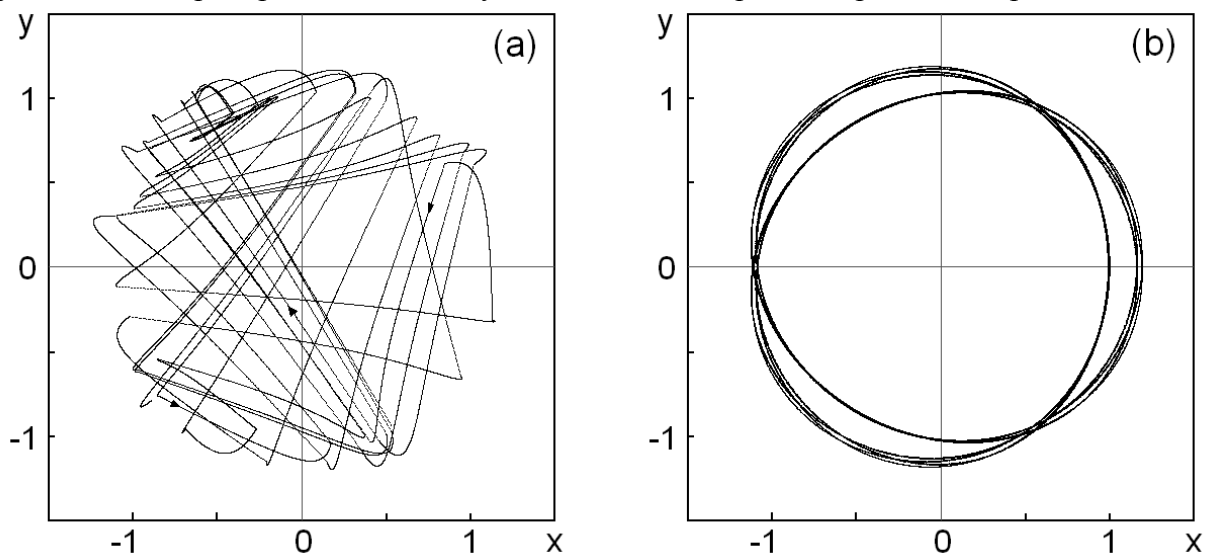
$$\ddot{x} + \dot{x} = \mu x(1 - x^2 - y^2), \quad \ddot{y} + \dot{y} = \mu y(1 - x^2 - y^2) \quad (21)$$

с начальными условиями, определяемыми состоянием сразу после толчка:

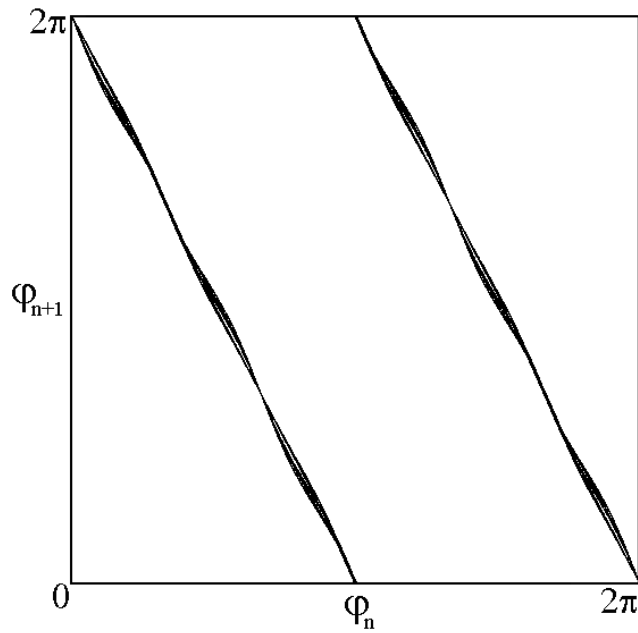
$$\begin{aligned} x|_{t=nT+0} &= x_n, \quad \dot{x}|_{t=nT+0} = \dot{x}_n - x_n + x_n^2 - y_n^2, \\ y|_{t=nT+0} &= y_n, \quad \dot{y}|_{t=nT+0} = \dot{y}_n - y_n - 2x_n y_n. \end{aligned} \quad (22)$$

Соотношения (21) и (22) приводят к четырехмерному отображению Пуанкаре  $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$ , которое, хотя и не выражается в аналитическом виде, легко воспроизводится посредством компьютерной программы с помощью численного решения дифференциальные уравнения (21) при соответствующих начальных условиях. Аттрактором этого отображения служит соленоид Смейла – Вильямса, что обусловлено топологическим свойством ансамбля частиц после преобразования, а именно, появлением конфигурации в виде петли, охватывающей начало координат дважды. Сжатие в фазовом пространстве в поперечном направлении осуществляется за счет трения на той стадии процесса, когда под действием потенциального поля частица дрейфует в направлении потенциального минимума на единичной окружности. В отличие от классического построения, описанного во введении, аттрактор типа Смейла – Вильямса в этой модели вложен в четырехмерное (а не трехмерное) фазовое пространство.

На рис. 7 приводится полученное при численном решении уравнений (19) изображение типичной траектории частицы в процессе движения на плоскости  $(x, y)$  и портрет аттрактора в стробоскопическом сечении в проекции на плоскость  $(x, y)$ , причем различима канторова поперечная структура соленоида. На рис. 8 показана диаграмма для угловой координаты  $\varphi_n = \arg(x(nT - 0) + iy(nT - 0))$ , определенной перед каждым очередным толчком. Можно видеть, что угловая координата изменяется от шага к шагу в соответствии с растягивающим отображением окружности, или отображением Бернулли. Один обход окружности для прообраза отвечает двум обходам для образа в обратном направлении.



**Рис. 7.** Траектория частицы на плоскости  $(x, y)$  в модели, заданной соотношениями (19), при  $\mu=0.3$ ,  $T=4$  за 50 периодов воздействия, где стрелки показывают направление движения (а), и портрет аттрактора в стробоскопическом сечении (б)



**Рис. 8.** Итерационная диаграмма для угловой переменной  $\varphi_n = \arg(x(nT - 0) + iy(nT - 0))$ , полученная при численном моделировании динамики системы (19) на аттракторе при  $\mu=0.3, T=4$

Вычисление полного спектра четырех показателей Ляпунова для отображения Пуанкаре системы (21) основывается на совместном численном решении уравнения (21) для опорной орбиты, с учетом соотношений (22), отвечающих толчкам, и четырех комплектов уравнений в вариациях. После каждого толчка проводится ортогонализация векторов возмущения по Граму – Шмидту и их перенормировка. Показатели Ляпунова определяются как средние коэффициенты роста или убывания накапливающихся сумм логарифмов норм для векторов возмущения после ортогонализации, но до нормировки [74, 23, 24].

На рис. 9 показаны графики показателей Ляпунова в зависимости от параметра  $\mu$  при фиксированном периоде  $T$ . Заметим, что старший показатель Ляпунова остается приблизительно постоянным и близок к величине  $\Lambda_1 \approx \ln 2$ , что соответствует отображению окружности с равномерным двукратным растяжением, приближенно описывающему динамику угловой переменной. Остальные показатели отрицательные. В частности, при  $\mu=0.3, T=4$  показатели Ляпунова таковы:  $\Lambda_1 = 0.687, \Lambda_2 = -1.386, \Lambda_3 = -3.000, \Lambda_4 = -3.733$ . Оценка фрактальной размерности аттрактора системы (21) в сечении Пуанкаре при  $\mu=0.3, T=4$  по формуле Каплана – Йорке дает  $D=1.50$ .<sup>4</sup>

Процедура проверки критерия углов для аттрактора системы (21) в численных расчетах выполнялась по той же схеме, как в предыдущем разделе, с той разницей, что применялась к динамике в дискретном времени, отвечающей итерациям стробоскопического отображения Пуанкаре  $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$ .

<sup>4</sup> Количественной характеристикой присущей аттрактору канторовой структуры служит фрактальная размерность. Каплан и Йорке предложили формулу для оценки размерности аттракторов через показатели Ляпунова  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_m, \dots, \Lambda_N$ , которые считаются занумерованными в порядке убывания [77,23,24]:

$D_{KY} = m + S_m / |\Lambda_{m+1}|, S_m = \sum_{i=1}^m \Lambda_i$ . Здесь  $m$  – такое целое число, что сумма  $S_m$  еще положительна, а сумма  $S_{m+1}$  уже отрицательна. Эмпирически формула дает результаты, близкие к корректно определенной фрактальной размерности аттракторов, но строгого обоснования у нее нет. Поэтому приведенную оценку предпочитают трактовать как отдельную характеристику аттрактора, называемую размерностью Каплана – Йорке или ляпуновской размерностью. Заметим, что эвристический вывод формулы (30) базируется на предположении об однородном сжатии и растяжении фазового объема в ходе динамической эволюции, что оправдано в наибольшей мере как раз для равномерно гиперболических аттракторов.

Первый этап состоит в получении достаточно длинной последовательности четырехмерных векторов состояния  $\mathbf{x}_n$ , отвечающей опорной орбите на аттракторе. Затем берем линейризованное уравнение для вектора возмущения  $\tilde{\mathbf{x}}_{n+1} = \mathbf{f}'(\mathbf{x}_n)\tilde{\mathbf{x}}_n$ , где  $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_n)$  – матрица размера  $4 \times 4$ , составленная из частных производных, и выполняем итерации вдоль опорной траектории  $\mathbf{x}_n$  с нормировкой вектора  $\tilde{\mathbf{x}}_n$  на каждом шаге  $n$  на единицу, чтобы исключить расхожимость. (Неустойчивое направление одно, что связано с наличием единственного положительного показателя Ляпунова.) В результате получаем набор единичных векторов  $\{\tilde{\mathbf{x}}_n\}$ . Далее, выполняем итерации в обратном времени вдоль той же самой опорной траектории линейного уравнения, используя транспонированную обратную матрицу производных  $\tilde{\mathbf{u}}_n = \{[\mathbf{f}'(\mathbf{x}_{n+1})]^{-1}\}^T \tilde{\mathbf{u}}_{n+1}$ , и, проводя нормировку на единицу, получаем набор векторов  $\{\mathbf{u}_n\}$ , определяющих ортогональное дополнение устойчивого подпространства векторов возмущения в точках опорной траектории. Наконец, на каждом  $n$ -ом шаге вычисляем угол  $\beta_n \in [0, \pi/2]$  между векторами  $\tilde{\mathbf{x}}_n$  и  $\mathbf{u}_n$ :  $\cos \beta_n = |\mathbf{u}_n(t) \cdot \tilde{\mathbf{x}}_n(t)|$ , и полагаем  $\phi_n = \pi/2 - \beta_n$ .

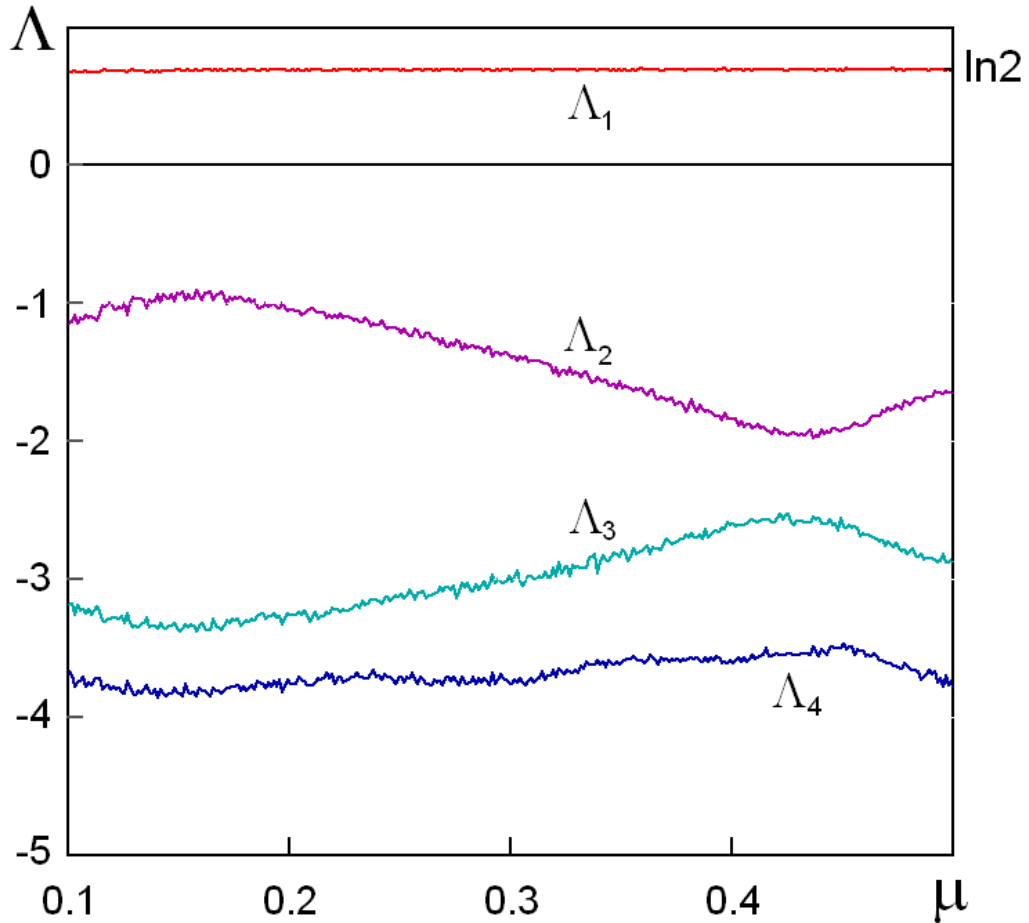


Рис. 9. График показателей Ляпунова для аттрактора отображения Пуанкаре модели (19) в зависимости от параметра  $\mu$  при  $T=4$

На рис. 10 показана гистограмма распределения углов между устойчивыми и неустойчивыми подпространствами для траектории на аттракторе системы (21) при  $\mu=0.3$ ,  $T=4$ . Как можно видеть, распределение отделено от нулевых значений углов  $\phi_n$ , т.е. тест подтверждает гиперболичность аттрактора отображения Пуанкаре данной системы.

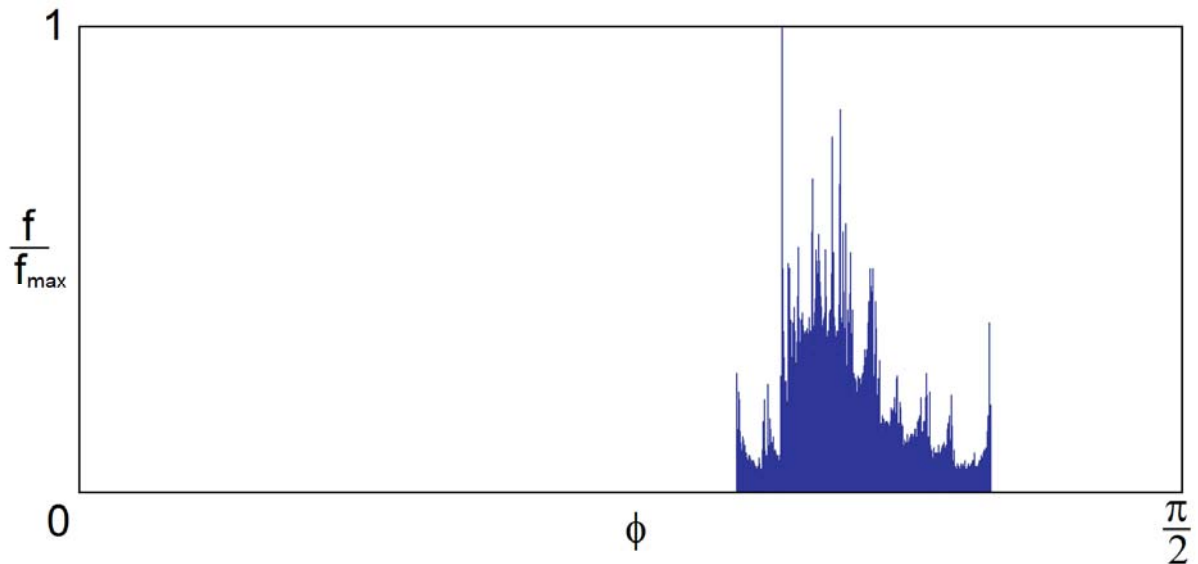


Рис. 10. Проверка критерия углов для принадлежащей аттрактору орбиты, порождаемой отображением Пуанкаре системы (21) при  $\mu=0.3$ ,  $T=4$

### 3. Система двух взаимодействующих частиц, размещенных на попеременно вращающихся дисках

Перейдем к системе, которая была введена в рассмотрение в работе [54] и представляет собой конструкцию в виде двух горизонтально расположенных один над другим дисков, совершающих вращение вокруг общей оси с некоторой угловой скоростью  $\omega$  попеременно (один вращается, другой стоит, затем наоборот) (рис. 11). На каждый диск помещена частица, способная по нему скользить, испытывая вязкое трение, сила которого пропорциональна скорости частицы относительно диска. Пусть также присутствует силовое поле  $U(r)$ , симметричное относительно оси вращения, с минимумом потенциала в центре и сильным нарастанием к краю дисков. Кроме того, будем считать, что обе частицы взаимодействуют посредством потенциального поля  $V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ , где  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  – векторы, задающие положение одной и другой частицы. Как будет показано, в этой системе при надлежащем выборе потенциала взаимодействия и других параметров в отображении, описывающем изменение состояния системы за период смены вращения, возникает хаотическая динамика, соответствующая аттрактору типа Смейла – Вильямса.

Положим<sup>5</sup>

$$U(x, y) = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2) + \frac{1}{4}(x^2 + y^2)^2. \quad (23)$$

и

$$V(x, y) = -\frac{1}{3}x^3 + xy^2. \quad (24)$$

В отсутствие трения система характеризуется функцией Лагранжа

$$L = \sum_{i=1}^2 \left[ \frac{1}{2}(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2) - \frac{1}{2}k(x_i^2 + y_i^2) - \frac{1}{4}(x_i^2 + y_i^2)^2 \right] + \frac{1}{3}(x_1 - x_2)^3 - (x_1 - x_2)(y_1 - y_2)^2, \quad (25)$$

<sup>5</sup> Практически потенциал типа (23) можно реализовать, заменив диски чашеобразными поверхностями, а потенциал (24) – используя вместо первой частицы одиночный магнит, а вместо второй – конструкцию из магнитов типа гексаполя, причем ее пространственная ориентация должна оставаться неизменной, независимо от вращения диска. (При формальном описании мы не концентрируемся на этой конкретной реализации, поскольку она маскирует присущую модели симметрию между составляющими систему двумя подсистемами.)

где  $x_{1,2}, y_{1,2}$  декартовы координаты каждой частицы на своем диске,  $k$  – параметр. Чтобы учесть действие вязкого трения, в соответствующие уравнения Лагранжа надо добавить члены, пропорциональные скорости частиц относительно дисков. Учитывая, что при вращении диска с угловой скоростью  $\omega$  линейная скорость в точке расположения частицы  $(x_i, y_i)$  равна  $(-\omega y_i, \omega x_i)$ , получаем

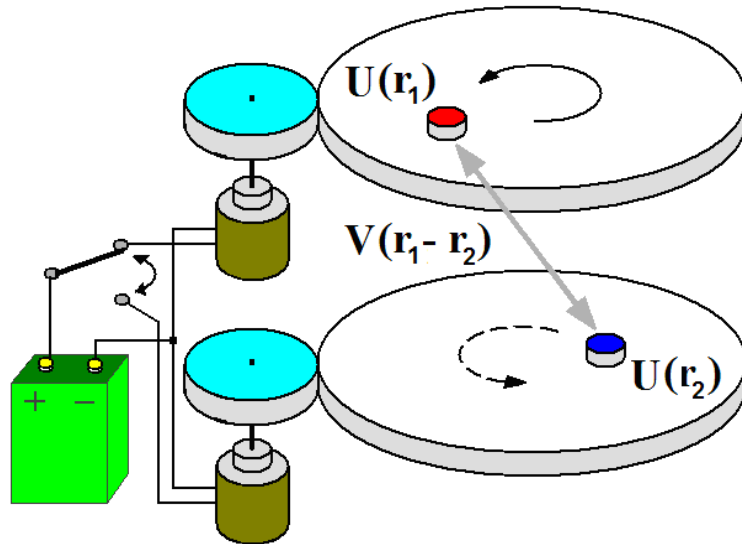
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} &= \frac{\partial L}{\partial x_1} - \alpha \left( \frac{dx_1}{dt} + \omega_1 y_1 \right), \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} &= \frac{\partial L}{\partial y_1} - \alpha \left( \frac{dy_1}{dt} - \omega_1 x_1 \right), \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} &= \frac{\partial L}{\partial x_2} - \alpha \left( \frac{dx_2}{dt} + \omega_2 y_2 \right), \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_2} &= \frac{\partial L}{\partial y_2} - \alpha \left( \frac{dy_2}{dt} - \omega_2 x_2 \right). \end{aligned} \quad (26)$$

или

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= x_1(k + x_1^2 + y_1^2) + \alpha(-\omega_1 y_1 - \dot{x}_1) - \varepsilon[(x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2], \\ \ddot{y}_1 &= y_1(k + x_1^2 + y_1^2) + \alpha(\omega_1 x_1 - \dot{y}_1) + 2\varepsilon(x_1 - x_2)(y_1 - y_2), \\ \ddot{x}_2 &= x_2(k + x_2^2 + y_2^2) + \alpha(-\omega_2 y_2 - \dot{x}_2) + \varepsilon[(x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2], \\ \ddot{y}_2 &= y_2(k + x_2^2 + y_2^2) + \alpha(\omega_2 x_2 - \dot{y}_2) - 2\varepsilon(x_1 - x_2)(y_1 - y_2), \end{aligned} \quad (27)$$

где

$$\omega_1(t) = \begin{cases} \omega_0, & nT \leq t < nT + T/2 \\ 0, & nT + T/2 \leq t < nT, \end{cases} \quad \omega_2(t) = \begin{cases} 0, & nT \leq t < nT + T/2 \\ \omega_0, & nT + T/2 \leq t < nT. \end{cases} \quad (28)$$

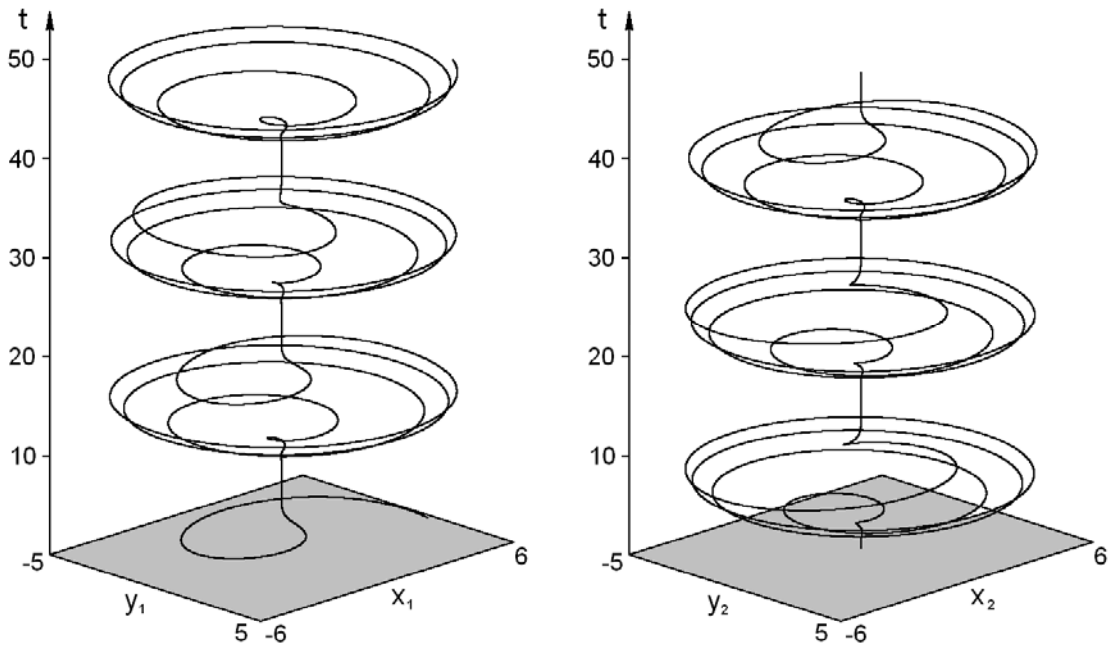


**Рис. 11.** Схематическое изображение конструкции, реализующей движение двух взаимодействующих частиц на попеременно вращающихся дисках, моделируемое уравнениями (27)

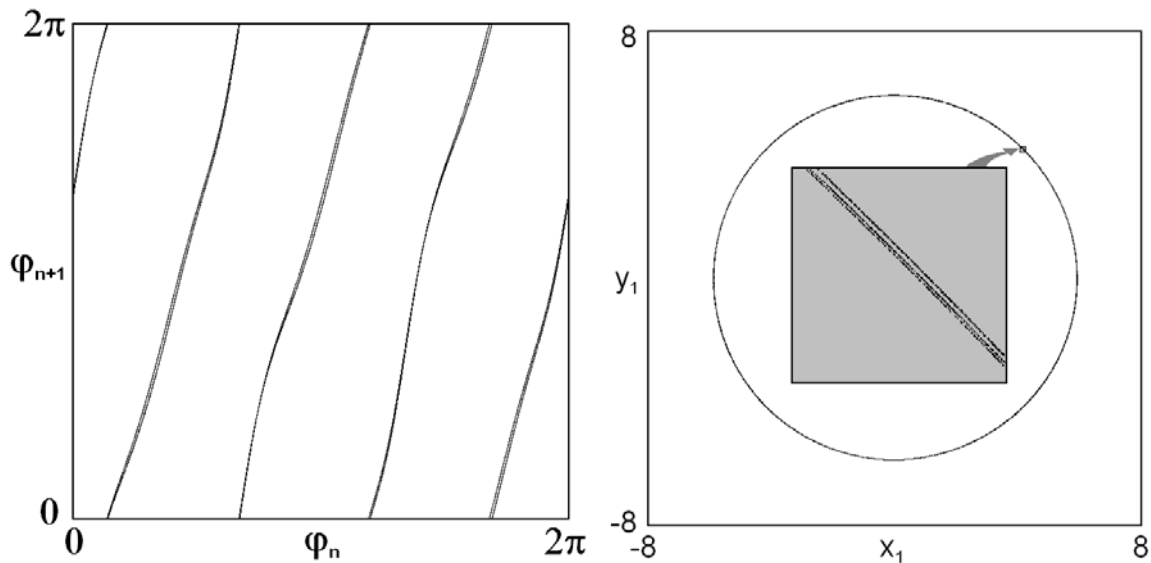
Рис. 12 иллюстрирует типичный режим динамики модели, полученный из численного решения уравнений (27) при задании параметров

$$k = 3, \alpha = 3, \varepsilon = 0.03, T = 16, \omega_0 = 2\pi. \quad (29)$$

На рисунке показано изменение пространственного положения одной и другой частицы во времени в процессе функционирования системы. Можно видеть, что вращение обеих частиц имеет место попеременно, причем движение не является периодическим: форма витков не повторяется на последовательных стадиях активности одной и другой подсистемы.



**Рис. 12.** Изменение пространственного положения частиц на дисках во времени в процессе функционирования модели (27) при параметрах (29)



**Рис. 13.** Итерационная диаграмма для угловой координаты одной из частиц (а) и портрет аттрактора в стробоскопическом сечении (b) для модели, заданной уравнениями (27) при параметрах (29). На вставке можно видеть характерную для аттрактора Смейла – Вильямса поперечную канторову структуру

На рис. 13а приводится итерационная диаграмма для угловой координаты одной из частиц  $\varphi_n = \arg(x(nT - 0) + iy(nT - 0))$ , определенной непосредственно по окончании каждой очередной стадии вращения соответствующего диска перед каждым очередным толчком. Можно видеть, что угловая координата ведет себя в соответствии с растягивающим отображением окружности, или отображением Бернулли. Один обход окружности для прообраза отвечает четырем обходам для образа. На рис. 13b показан портрет аттрактора в стробоскопическом сечении в проекции на плоскость координат одной из частиц  $(x_1, y_1)$ . В исходном масштабе он выглядит, как окружность, но при увеличении становится разли-



чимой характерная для аттрактора типа Смейла – Вильямса поперечная канторова структура, что иллюстрирует вставка. В данном случае аттрактору соответствует четырехкратное складывание образа тороидальной области в восьмимерном фазовом пространстве стробоскопического отображения Пуанкаре.

На рис. 14 показан график показателей Ляпунова в зависимости от угловой скорости вращения дисков  $\omega$ . Показатели Ляпунова вычислялись путем совместного численного решения уравнения (27) для опорной орбиты и восьми комплектов уравнений в вариациях. На каждом шаге интегрирования проводилась ортогонализация векторов по Граму – Шмидту и их перенормировка. Заметим, что старший показатель Ляпунова остается приблизительно постоянным и близок к величине  $\Lambda_1 \approx \ln 4$ , которая соответствует отображению Бернулли, приближенно описывающему динамику угловой переменной. В частности, при  $\omega = 2\pi$  показатели таковы:  $\Lambda_1 = 1.354$ ,  $\Lambda_2 = -6.90$ ,  $\Lambda_3 = -7.65$ ,  $\Lambda_4 = -11.61$ ,  $\Lambda_5 = -32.81$ ,  $\Lambda_6 = -32.92$ ,  $\Lambda_7 = -45.34$ ,  $\Lambda_8 = -47.26$ . Значение фрактальной размерности аттрактора по формуле Каплана – Йорке в данном режиме дает  $D \approx 1.20$ .

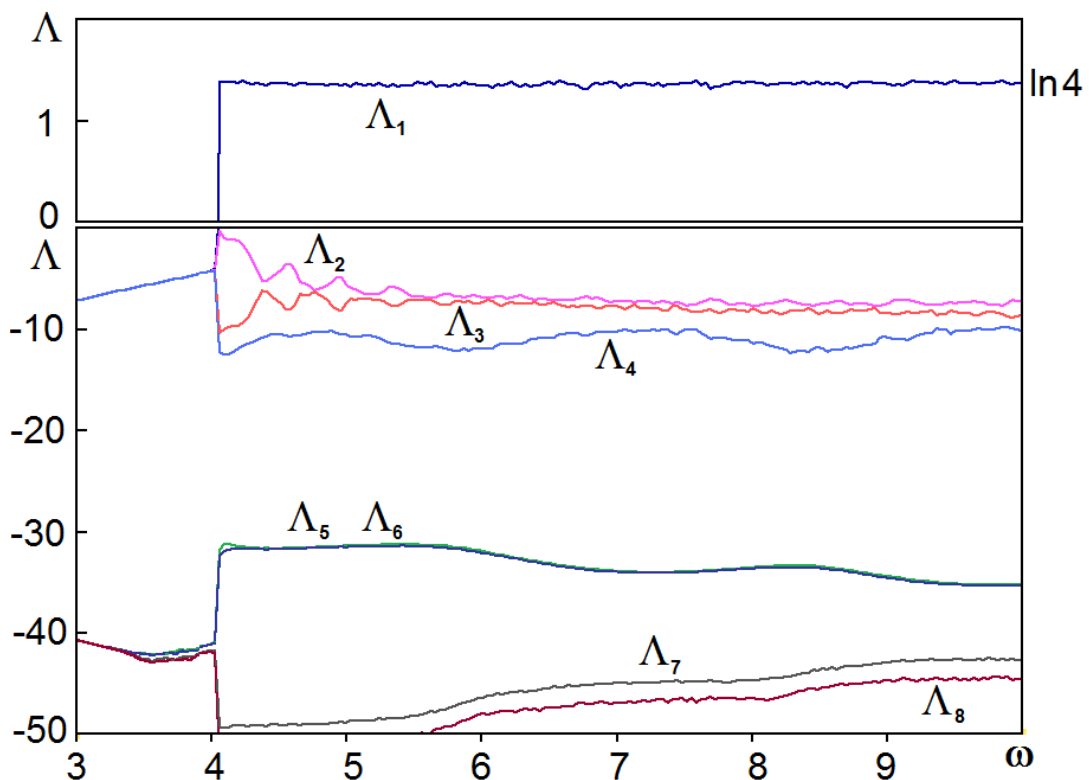
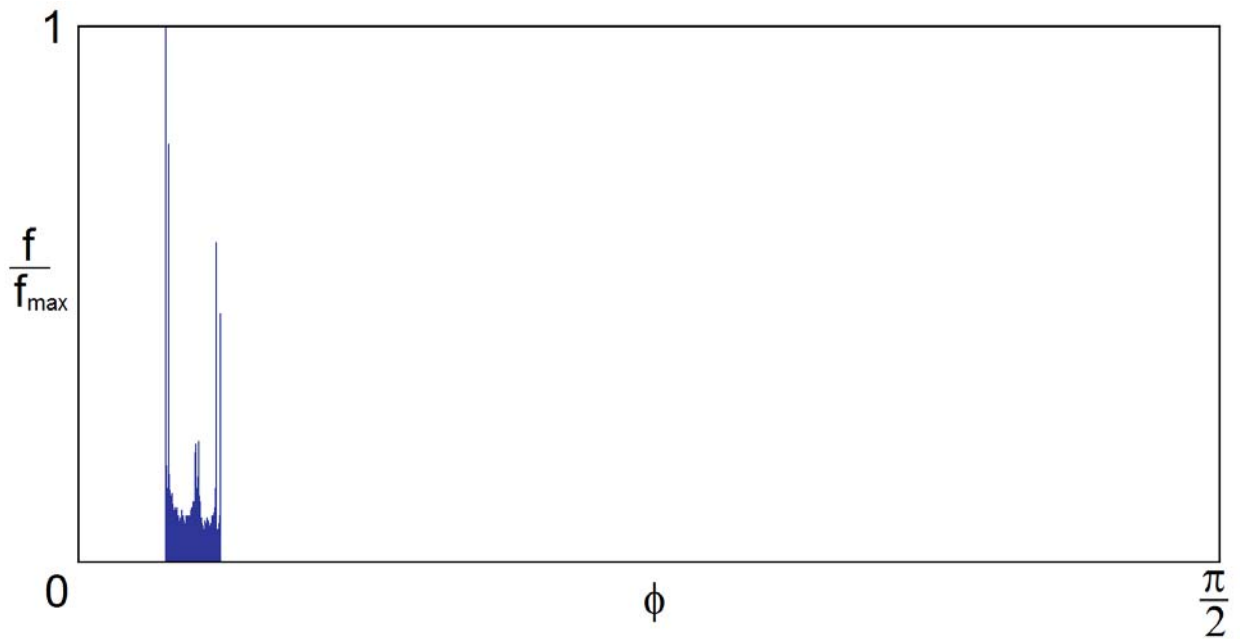


Рис. 14. График показателей Ляпунова модели (27) в зависимости от параметра угловой скорости вращения дисков. Остальные параметры  $k = 3$ ,  $\alpha = 3$ ,  $\varepsilon = 0.03$ ,  $T = 16$

Проверка критерия углов для аттрактора системы (21) в численных расчетах проводилась по той же схеме, как в предыдущем разделе. Рассматривалась динамика в дискретном времени, отвечающая итерациям восьмимерного отображения Пуанкаре  $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$  на аттракторе. На полученной опорной траектории выполнялись итерации в прямом и обратном времени отображений для восьмимерных векторов в прямом времени  $\tilde{\mathbf{x}}_{n+1} = \mathbf{f}'(\mathbf{x}_n)\tilde{\mathbf{x}}_n$  и в обратном времени  $\tilde{\mathbf{u}}_n = \{[\mathbf{f}'(\mathbf{x}_{n+1})]^{-1}\}^T \tilde{\mathbf{u}}_{n+1}$ , где  $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_n)$  матрица Якоби, с последующим построением гистограммы распределения углов между векторами  $\tilde{\mathbf{x}}_n$  и  $\mathbf{u}_n$ . Гистограмма, полученная для траектории на аттракторе системы при параметрах (29), показана на рис. 15. Имея в виду, что распределение отделено от нулевых значений углов  $\phi_n$ , заключаем, что тест подтверждает гиперболичность аттрактора отображения Пуанкаре данной системы.



**Рис. 15.** Проверка критерия углов для принадлежащей аттрактору орбиты модели (27) при задании параметров  $k = 3, \alpha = 3, \varepsilon = 0.03, T = 16, \omega_0 = 2\pi$ . Сечение Пуанкаре отвечает моментам времени  $T/4 + nT$ , где  $n$  целое

### **3. Гиперболический хаос при параметрических колебаниях струны с модулированной накачкой**

В работах [67, 68] была указана и продемонстрирована в численных расчетах возможность хаотической динамики, ассоциирующей с гиперболическим аттрактором типа Смейла–Вильямса, при параметрическом возбуждении механических колебаний неоднородной струны с нелинейной диссипацией, когда накачка попеременно осуществляется колебаниями на низкой и высокой частоте. При этом роль угловой координаты играет пространственная фаза возбуждающихся паттернов стоячих волн.<sup>6</sup>

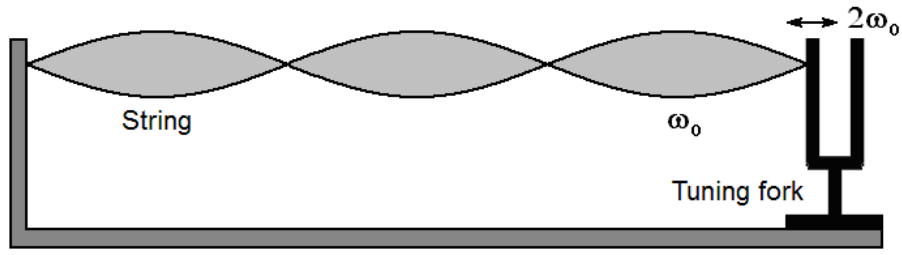
Как известно, в линейном приближении колебания струны описываются уравнением в частных производных [80,81]

$$\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = G \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad (30)$$

где  $y(x, t)$  – поперечное смещение струны в точке с координатой  $x$  в момент  $t$ ,  $\rho$  – линейная плотность струны (масса на единицу длины),  $G$  – сила натяжения. Для однородной струны при постоянном натяжении величина  $c = \sqrt{G/\rho}$  определяет скорость распространения волновых возмущений.

Закрепленная на концах струны длины  $L$  имеет набор собственных мод с частотами  $\omega_s = \pi s c / L$ . В классическом опыте Мельде [80-82] при периодическом изменении во времени силы натяжения струны с частотой  $2\omega_0$ , где  $\omega_0$  отвечает одной из мод, возбуждаются параметрические колебания на этой моде (рис. 16). Начальная стадия раскачки колебаний описывается уравнением вида (30), в котором коэффициент  $G$  является функцией времени, скажем,  $G = G_0(1 + a_2^0 \sin 2\omega_0 t)$ ,  $a_2^0 < 1$ . Колебания силы натяжения выступают в качестве накачки – источника энергии, вызывающего параметрические колебания.

<sup>6</sup> Идея использовать пространственную фазу попеременно возбуждающихся в среде коротковолновых и длинноволновых паттернов для реализации динамики, отвечающей гиперболическому аттрактору, была высказана и продемонстрирована первоначально применительно к системам, описываемым модифицированным уравнением Свифта – Хохенберга в работах [78,79].



**Рис. 16.** Опыт Мельде (1859 г.): колебания камертона на частоте  $2\omega_0$  вызывают периодическое изменение силы натяжения струны, благодаря чему происходит параметрическое возбуждение поперечных колебаний на частоте  $\omega_0$ .

Если использовать накачку попеременно на частотах, различающихся втрое, то можно обеспечить параметрическое возбуждение коротковолновых и длинноволновых паттернов по очереди, с передачей пространственной фазы от одного паттерна к другому так, чтобы за полный период модуляции накачки имело место утроение фазовой переменной [67, 68].<sup>7</sup> При наличии диссипации сжатие по остальным направлениям в пространстве состояний системы обеспечивает присутствие аттрактора типа Смейла – Вильямса. Концептуально проще всего осуществить эту идею для системы с периодическими граничными условиями, т.е. замкнутой в кольцо (хотя это и не самый легкий вариант для воспроизведения в реальном эксперименте).<sup>8</sup>

Пусть в уравнении (30) сила натяжения струны колеблется по закону

$$G(t) = G_0 \cdot [1 + a_2(t) \sin 2\omega_0 t + a_6(t) \sin 6\omega_0 t], \quad (31)$$

где коэффициенты  $a_2, a_6$  изменяются во времени с некоторым периодом  $T$ , поочередно оказываясь по величине большими или близкими к нулю. Конкретно, мы задаем

$$a_2(t) = a_2^0 \sin^2 \pi(t/T - 1/4), \quad a_6(t) = a_6^0 \cos^2 \pi(t/T - 1/4), \quad (32)$$

где неотрицательные постоянные  $a_2^0, a_6^0$  подчинены условию  $a_2^0 + a_6^0 < 1$ . Таким образом, накачка имеет составляющие на частотах  $2\omega_0$  и  $6\omega_0$  с амплитудами, модулированными во времени. Распределение массы по струне будем считать слабо неоднородным, зависящим от пространственной координаты по закону

$$\rho(x) = \rho_0(1 + \varepsilon \sin 4k_0 x), \quad (33)$$

где  $k_0 = \omega_0 / c_0$ ,  $c_0 = \sqrt{G_0 / \rho_0}$ . Кроме того, введем линейную и нелинейную диссипацию, добавив в правую часть уравнения член вида  $-(\alpha + \beta u^2) \partial y / \partial t$ , где параметр  $\alpha$  отвечает за линейную, а параметр  $\beta$  за нелинейную диссипацию. Присутствие нелинейной диссипации необходимо для стабилизации параметрической неустойчивости, однако для рассматриваемой здесь системы существенным является еще и то обстоятельство, что нелинейная диссипация обеспечивает наличие кубической нелинейности и возникновение третьей гармоники при колебательно-волновых движениях. Наконец, добавим линейный член  $-\gamma u$ , чтобы обеспечить затухание колебательно-волновых возмущений с нулевым волновым числом. Физически эту добавку можно интерпретировать так, что колебания струны

<sup>7</sup> В работе [83] рассмотрены ситуации параметрического возбуждения паттернов стоячих волн также при других отношениях частот, когда фактор растяжения для фазовой переменной определяется нечетными числами от 3 до 11

<sup>8</sup> В работах [67, 68] показано, что гиперболический аттрактор можно реализовать также в системе с фиксацией концов струны. Это удастся обеспечить при увеличении длины системы и введении зависимости линейной диссипации от пространственной координаты по определенному профилю, с увеличением параметра диссипации у концов струны.

имеют место в потенциальном поле, зависящем по закону  $U(y) = \gamma y^2 / 2$  от поперечной координаты  $y$ .

Используя нормировку переменных и параметров такую, что  $c_0 = 1$ ,  $k_0 = \omega_0$ ,  $\beta = 1$ , приходим к системе, описываемой уравнением в частных производных следующего вида:

$$(1 + \varepsilon \sin 4k_0 x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -(\alpha + y^2) \frac{\partial y}{\partial t} - \gamma y + \left[ 1 + a_2^0 \sin^2 \pi(t/T - 1/4) \sin 2\omega_0 t + a_6^0 \cos^2 \pi(t/T - 1/4) \sin 6\omega_0 t \right] \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \quad (34)$$

Наложим на систему периодические граничные условия

$$y(x + L, t) \equiv y(x, t), \quad (35)$$

а длину  $L$  примем равной целому числу длин волн с волновым числом  $k_0$ :  $L = 2\pi N / k_0$ .

Механизм функционирования системы состоит в следующем.

Предположим, что при накачке на частоте  $2\omega_0$  в системе возбуждается стоячая волна на частоте  $\omega_0$  с волновым числом  $k_0$ , у которой расположение узлов и пучностей характеризуется фазовой постоянной  $\theta$ , так что в грубом приближении  $y \sim \cos \omega_0 t \sin(k_0 x + \theta)$ . Амплитуда стабилизируется на конечном уровне благодаря нелинейной диссипации. Также из-за ее присутствия колебательно-волновое движение будет иметь составляющую на третьей гармонике вида  $\sin 3\omega_0 t \sin(3k_0 x + 3\theta)$ .

Затем имеет место стадия, когда амплитуда накачки на частоте  $2\omega_0$  становится малой, и колебания частоты  $\omega_0$  затухают. С другой стороны, амплитуда накачки на частоте  $6\omega_0$  теперь достаточна для развития параметрической неустойчивости стоячей волны с частотой  $3\omega_0$  и волновым числом  $3k_0$ . Эта волна формируется из возмущения, оставшегося от предыдущей стадии процесса, и поэтому характеризуется пространственной фазой  $3\theta$ .

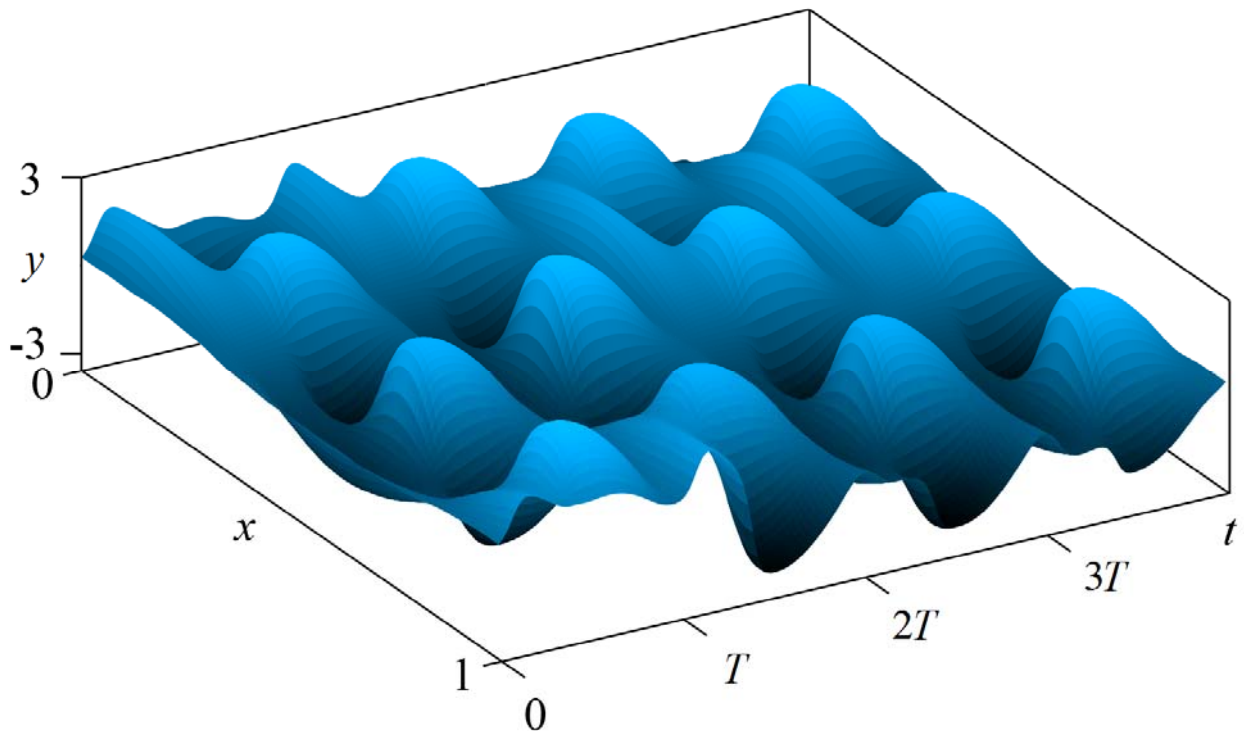
Далее, вновь наступает стадия накачки на частоте  $2\omega_0$ , и коротковолновый паттерн затухает. Затравочное колебательно-волновое возбуждение параметрических колебаний с частотой  $\omega_0$  и волновым числом  $k_0$  обеспечивается теперь благодаря возмущению  $y \sim \sin 3\omega_0 t \sin(3k_0 x + 3\theta)$ , оставшемуся от предыдущей стадии процесса в комбинации с составляющей частоты  $2\omega_0$  и с волновым числом  $4k_0$ , которая присутствует из-за наличия накачки и пространственной зависимости плотности струны (ее пространственная фаза фиксирована). В результате новая величина сдвига пространственной фазы возникающего паттерна  $\theta'$  получается как результат применения трехкратно растягивающего отображения окружности вида  $\theta' = -3\theta + \text{const}$ . Это отображение с хаотической динамикой, характеризуемое положительным показателем Ляпунова  $\Lambda = \ln 3 \approx 1.0986$ .

По остальным направлениям в фазовом пространстве отображения, описывающего изменение состояния системы за период модуляции накачки, будет происходить сжатие, что обеспечивает реализацию аттрактора типа Смейла – Вильямса.

Для численного решения уравнения (34) была использована разностная схема «крест», имеющая второй порядок аппроксимации по пространственному и временному шагу и являющаяся явной [84,83]. Схема устойчива, когда временной шаг мал в сравнении с пространственным шагом, отнесенным к скорости распространения волн. При численном решении уравнений задавались следующие параметры:

$$\omega_0 = 2\pi, k_0 = 2\pi, L = 1, T = 40, a_2^0 = 0.4, a_6^0 = 0.2, \varepsilon = 0.2, \alpha = 0.4, \gamma = 0.03. \quad (36)$$

На рис. 17 показана пространственно-временная диаграмма, из которой видно, что в системе поочередно возбуждаются длинноволновые и коротковолновые структуры, при этом пространственная фаза их меняется от одного периода модуляции накачки к другому. Фаза колебаний стоячих волн во времени, с другой стороны, жестко привязана к фазе накачки.



**Рис. 17.** Пространственно-временная диаграмма, иллюстрирующая динамику системы (34) с периодическими граничными условиями при параметрах, заданных согласно (36), на четырех полных периодах модуляции накачки. Пространственное распределение выводится с шагом, отвечающим периоду быстрых колебаний  $2\pi/\omega_0$ , так что высокочастотного заполнения не видно

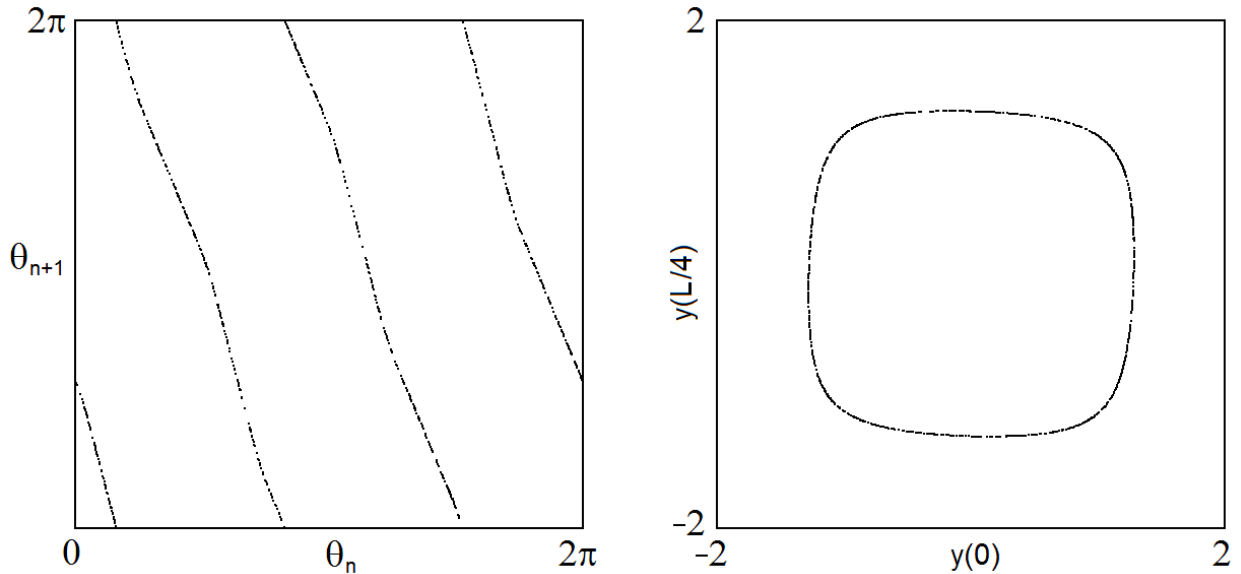
Проверим, что пространственная фаза стоячих волн за период модуляции накачки действительно претерпевает трехкратно растягивающее отображение окружности, для чего в процессе решения уравнения (34) на большом числе периодов модуляции определяем пространственные фазы в моменты времени  $t_n = nT$ . Представив результаты графически в координатах  $(\theta_n, \theta_{n+1})$ , можно видеть, что расположение ветвей получается таким, что однократный обход окружности для прообраза (изменение аргумента на  $2\pi$ ) соответствует трехкратному кратному обходу для образа в обратном направлении с изменением фазы на величину  $-6\pi$  (рис. 18, панель (a)). Панель (b) иллюстрирует портрет аттрактора в стробоскопическом сечении в проекции на плоскость переменных смещения струны в точках, отстоящих одна от другой на четверть основной длины волны. Поперечная фрактальная структура не видна из-за сильного поперечного сжатия, и солениод выглядит как замкнутая кривая, однако расположение изображающих точек на последовательных шагах итераций отображения Пуанкаре отвечает скачкам на этой кривой, в соответствии с трехкратно растягивающим отображением окружности, что видно из диаграммы (a).

Для распределенной системы формально число показателей Ляпунова бесконечно. Для вычисления конечного их числа  $S$  используем метод Бенеттина [74, 23, 24], адаптированный к распределенной системе [85, 86]. Наряду с уравнением (34) одновременно решаем численно комплект уравнений в вариациях

$$(1 + \varepsilon \sin 4k_0 x) \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial t^2} = -(\alpha + y^2) \frac{\partial \tilde{y}}{\partial t} - 2y\tilde{y} \frac{\partial y}{\partial t} - \gamma \tilde{y} + \left\{ 1 + a \cos^2 \frac{\pi t}{T} \sin 2\omega_0 t + b \sin^2 \frac{\pi t}{T} \sin 6\omega_0 t \right\} \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial x^2} \quad (37)$$

в количестве  $S$  экземпляров. При этом используются такие же периодические граничные условия, как для уравнения (34), и такой же конечно-разностный метод. Векторы возмущения представлены заданными на интервале длины  $L$  распределениями добавок к смещению и скорости:  $\mathbf{y} = \{\tilde{y}(t), \tilde{y}'(t)\}$ . В численных расчетах это векторы конечной размерности, определяемой числом узлов разностной сетки на длине системы. По истечении каждого очередного периода модуляции  $T$  производится ортогонализация векторов возмущения  $\tilde{\mathbf{y}}_s, s=1, \dots, S$  по схеме Грама – Шмидта, что дает набор векторов  $\tilde{\mathbf{y}}'_s$ , и при продолжении вычислений в качестве начальных условий каждый раз берутся переопределенные нормированные на единицу векторы  $\tilde{\mathbf{y}}_s^0 = \tilde{\mathbf{y}}'_s / \|\tilde{\mathbf{y}}'_s\|$ .

Показатели Ляпунова для отображения за период определяются как средние коэффициенты роста или убывания накапливающихся сумм логарифмов норм для векторов возмущения после ортогонализации, но до нормировки. При параметрах (36) первые пять показателей таковы:  $\Lambda_1 = 1.091$ ,  $\Lambda_2 = -1.63$ ,  $\Lambda_3 = -7.94$ ,  $\Lambda_4 = -10.62$ ,  $\Lambda_5 = -17.74$ . Наибольший показатель, как и ожидалось, близок к величине  $\ln 3$ . Остальные показатели отрицательные и отвечают за приближение траекторий к аттрактору, представляющему собой разновидность соленоида Смейла – Вильямса, который получается при трансформации исходной тороидальной области во вложенную тройную петлю, претерпевшую продольное растяжение и достаточно сильное сжатие поперек витков.



**Рис. 18.** Диаграмма для пространственных фаз в системе (34) и портрет аттрактора в проекции на плоскость, где по осям отложены поперечные смещения  $y$  в точках струны  $x=0$  и  $L/4$ . Параметры заданы согласно (36). Пространственная фаза определяется по ходу численного решения уравнений через коэффициенты при синусе и косинусе для первой гармоники разложения Фурье волнового поля по пространственной координате:  $\theta_n = \arg \int_0^1 y(x, nT) \exp(-2\pi i x) dx$

Учитывая, что параметрическое возбуждение стоячих волн имеет место на волновых числах  $k_0$  и  $3k_0$ , можно построить редуцированную конечномерную модель, в которой в качестве динамических переменных будут выступать зависящие от времени коэффициенты разложения решения по соответствующим пространственным модам. Эта модель будет ниже использована для проверки гиперболичности аттрактора, поскольку для нее это можно сделать по стандартной схеме, использованной в предыдущих разделах.

Будем искать решение уравнения (34) в виде

$$y(x, t) = u_1(t) \cos k_0 x + v_1(t) \sin k_0 x + u_3(t) \cos 3k_0 x + v_3(t) \sin 3k_0 x. \quad (38)$$

Сделав эту подстановку, умножим обе части уравнения по очереди на функции  $\cos k_0 x$ ,  $\sin k_0 x$ ,  $\cos 3k_0 x$  и  $\sin 3k_0 x$ , выполняя каждый раз интегрирование по пространственному периоду. В результате получается система уравнений для коэффициентов

$$\ddot{u}_1 = \frac{f_1 - \frac{1}{2} \varepsilon g_3}{1 - \frac{1}{4} \varepsilon^2}, \quad \ddot{u}_3 = \frac{f_3 - \frac{1}{2} \varepsilon g_1}{1 - \frac{1}{4} \varepsilon^2}, \quad \ddot{v}_1 = \frac{g_1 - \frac{1}{2} \varepsilon f_3}{1 - \frac{1}{4} \varepsilon^2}, \quad \ddot{v}_3 = \frac{g_3 - \frac{1}{2} \varepsilon f_1}{1 - \frac{1}{4} \varepsilon^2}, \quad (39)$$

где

$$\begin{aligned} f_1 = & -\omega_0^2 (1 + a_2(t) \sin 2\omega_0 t + a_6(t) \sin 6\omega_0 t) u_1 - \gamma u_1 - \alpha \dot{u}_1 \\ & - \frac{1}{2} [(\frac{3}{2} u_1^2 + u_1 u_3 + u_3^2 + \frac{1}{2} v_1^2 + v_1 v_3 + v_3^2) \dot{u}_1 + \frac{1}{2} (u_1^2 + 4u_1 u_3 - v_1^2) \dot{u}_3 \\ & + (u_1 v_1 - u_3 v_1 + u_1 v_3) \dot{v}_1 + (u_1 v_1 + 2u_1 v_3) \dot{v}_3], \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} g_1 = & -\omega_0^2 (1 + a_2(t) \sin 2\omega_0 t + a_6(t) \sin 6\omega_0 t) v_1 - \gamma v_1 \\ & - \alpha \dot{v}_1 - \frac{1}{2} [(\frac{3}{2} v_1^2 - v_1 v_3 + v_3^2 + \frac{1}{2} u_1^2 - u_1 u_3 + u_3^2) \dot{v}_1 + \frac{1}{2} (u_1^2 + 4v_1 v_3 - v_1^2) \dot{v}_3 \\ & + (u_1 v_1 - u_3 v_1 + u_1 v_3) \dot{u}_1 + (-u_1 v_1 + 2u_3 v_1) \dot{u}_3], \end{aligned} \quad (41)$$

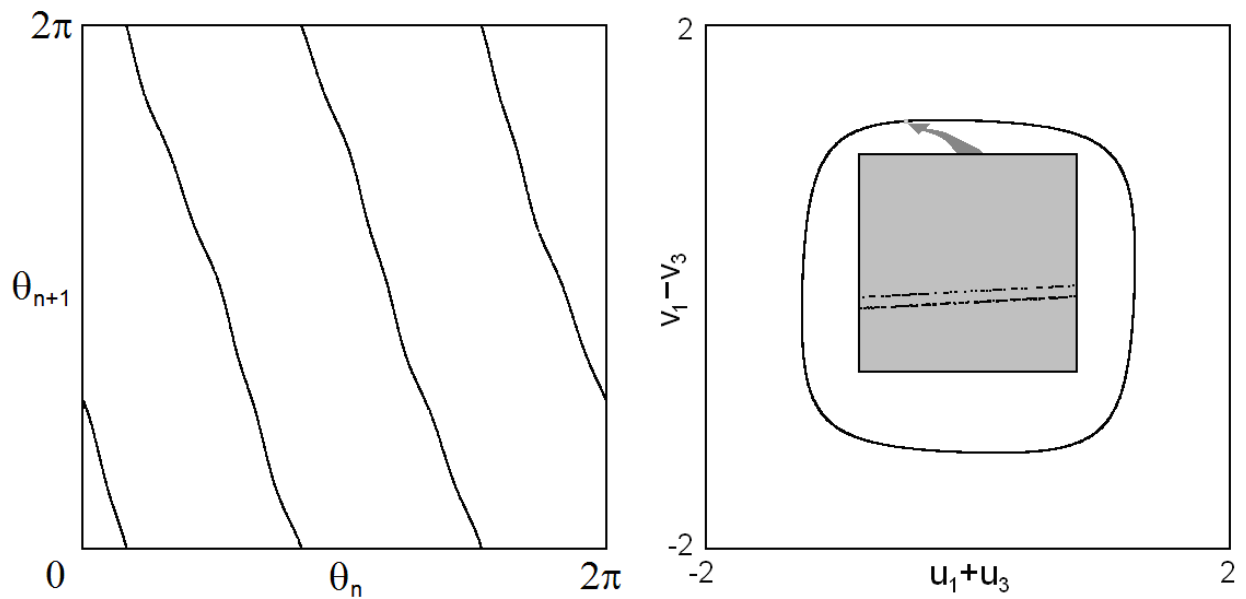
$$\begin{aligned} f_3 = & -9\omega_0^2 (1 + a_2(t) \sin 2\omega_0 t + a_6(t) \sin 6\omega_0 t) u_3 - \gamma u_3 - \alpha \dot{u}_3 \\ & - \frac{1}{4} [(u_1^2 + 4u_1 u_3 - v_1^2) \dot{u}_1 + 2(-u_1 v_1 + 2u_3 v_1) \dot{v}_1 + (2u_1^2 + 2v_1^2 + 3u_3^2 + v_3^2) \dot{u}_3 + 2u_3 v_3 \dot{v}_3], \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} g_3 = & -9\omega_0^2 (1 + a_2(t) \sin 2\omega_0 t + a_6(t) \sin 6\omega_0 t) v_3 - \gamma v_3 - \alpha \dot{v}_3 \\ & - \frac{1}{4} [2(u_1 v_1 + 2u_1 v_3) \dot{u}_1 + (u_1^2 + 4v_1 v_3 - v_1^2) \dot{v}_1 + 2u_3 v_3 \dot{u}_3 + (2u_1^2 + 2v_1^2 + u_3^2 + 3v_3^2) \dot{v}_3]. \end{aligned} \quad (43)$$

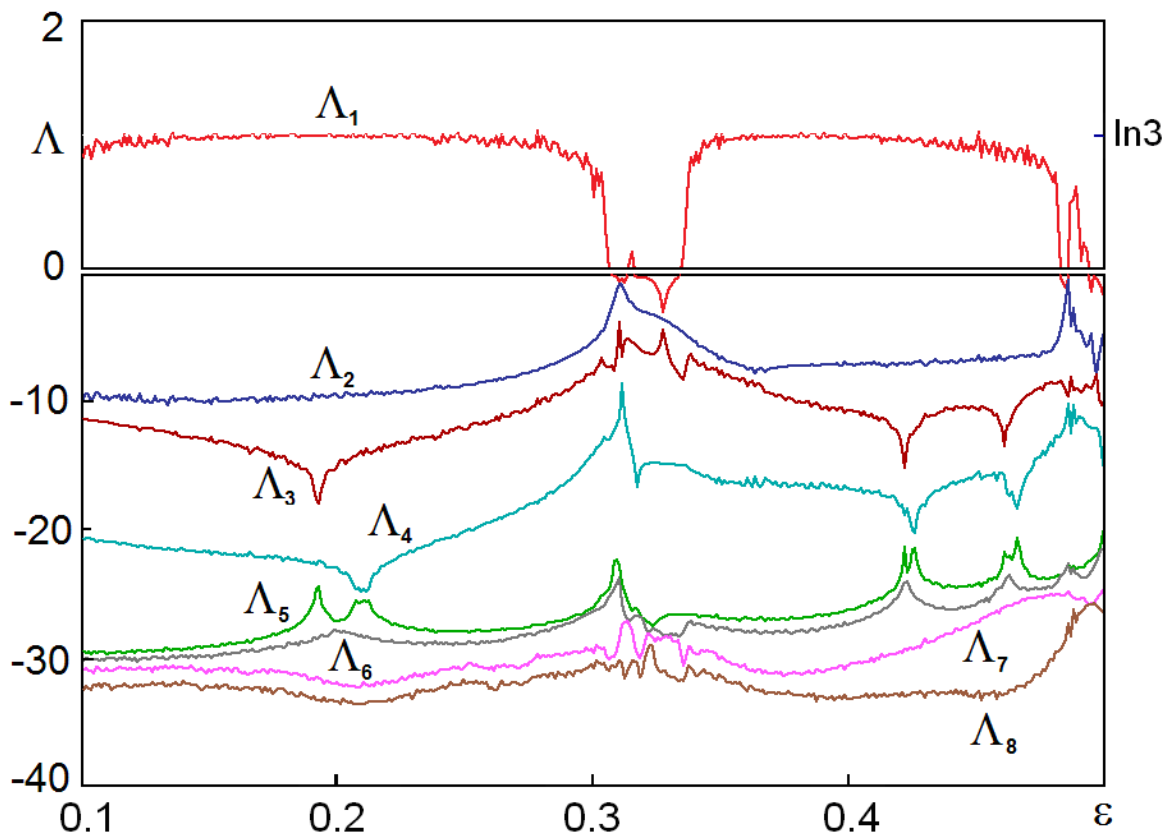
Результаты численного решения редуцированной системы уравнений при параметрах (36) хорошо согласуются с расчетами для уравнения в частных производных. В частности, соотношения между амплитудами синус и косинус составляющих (которые связаны с пространственной фазой возбуждающихся стоячих волн) меняется от одного периода модуляции к другому хаотически. Можно ввести угловую переменную  $\theta_n = \arg[u_1(nT)/v_1(nT)]$ , отвечающую пространственной фазе в момент времени  $t = nT$ . На рис. 19 показаны диаграмма в координатах  $(\theta_n, \theta_{n+1})$ , демонстрирующая, что для фазовой переменной реализуется отображение тройного растяжения окружности, и портрет аттрактора в стробоскопическом представлении на плоскости переменных  $(u_1 + u_3, v_1 - v_3)$ , которые следует сравнить с рис. 18.

Поскольку рассматривается неавтономная система уравнений восьмого порядка, полный спектр показателей Ляпунова отображения Пуанкаре содержит восемь показателей. Их вычисление с помощью алгоритма Бенеттина при задании параметров согласно (36) дает  $\Lambda_1 = 1.098$ ,  $\Lambda_2 = -9.5$ ,  $\Lambda_3 = -14.8$ ,  $\Lambda_4 = -23.2$ ,  $\Lambda_5 = -27.2$ ,  $\Lambda_6 = -28.0$ ,  $\Lambda_7 = -31.8$ ,  $\Lambda_8 = -33.2$ . Оценка размерности аттрактора по формуле Каплана – Йорке дает  $D \approx 1.12$ .

На рис. 20 показан график показателей Ляпунова в зависимости от параметра неоднородности распределения массы  $\varepsilon$ . Интервалы, в которых старший показатель Ляпунова остается приблизительно постоянным и близким к величине  $\Lambda_1 \approx \ln 3$ , соответствуют гиперболическому хаосу, когда отображение Пуанкаре имеет аттрактора типа Смейла – Вильямса с утробением угловой координаты.



**Рис. 19.** Диаграмма для угловой переменной, отвечающей за соотношение амплитуд косинус- и синус- составляющих  $u_1$  и  $v_1$ , полученная при численном решении уравнений конечномерной модели (39) (а). Портрет аттрактора в стробоскопическом изображении в проекции на плоскость, где по осям координат отложены комбинации  $u_1 + u_3$  и  $v_1 - v_3$ , соответствующие величинам  $y(0, t)$  и  $y(L/4, t)$  исходной модели согласно (38). На вставке можно видеть характерную для аттрактора Смейла – Вильямса поперечную канторову структуру

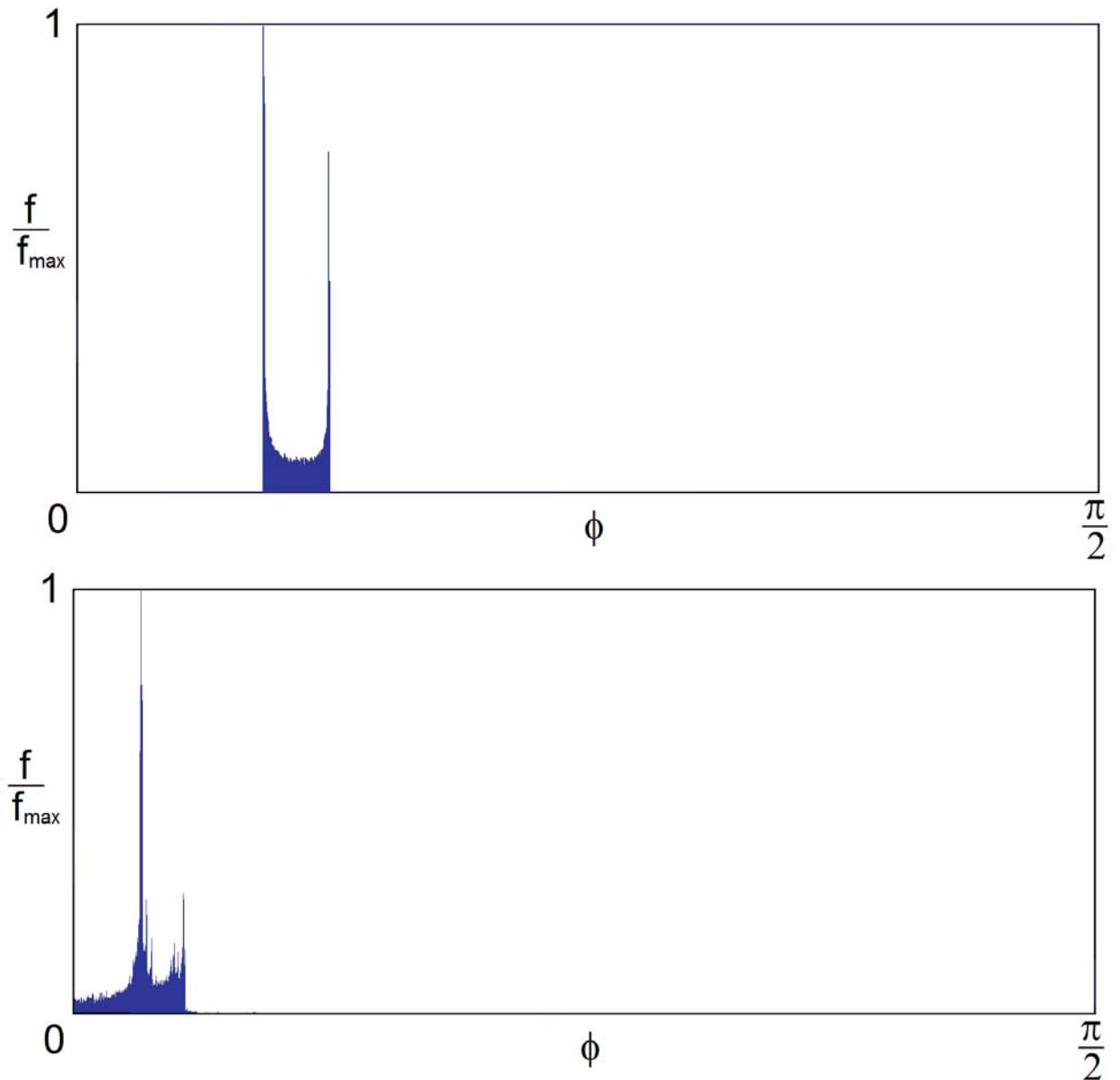


**Рис. 20.** График показателей Ляпунова для конечномерной модели параметрически возбуждаемой струны (39) в зависимости от параметра неоднородности распределения массы  $\varepsilon$ . Остальные параметры:  $\omega_0 = 2\pi$ ,  $k_0 = 2\pi$ ,  $T = 40$ ,  $L = 1$ ,  $a_2^0 = 0.4$ ,  $a_6^0 = 0.2$ ,  $\alpha = 0.4$ ,  $\gamma = 0.03$

Результаты расчетов на основании конечномерной модели находятся в хорошем соответствии с теми, которые получаются при численном решении уравнения в частных



производных (34). Однако при анализе показателей Ляпунова обнаруживается, что в распределенной системе присутствуют дополнительные отрицательные показатели, не находящие соответствия с показателями конечномерной модели и ассоциирующиеся, очевидно, с затухающими возмущениями, исключенными при использовании подстановки (38). Соответственно, различается и оценка размерности аттрактора по Каплану – Йорке.



**Рис. 21.** Проверка критерия углов для аттрактора конечномерной модели (39) при задании параметров  $\omega_0 = 2\pi$ ,  $k_0 = 2\pi$ ,  $T = 40$ ,  $L = 1$ ,  $\alpha = 0.4$ ,  $a_2^0 = 0.4$ ,  $a_6^0 = 0.2$ ,  $\varepsilon = 0.2$ ,  $\gamma = 0.03$ ,  $\varepsilon = 0.2$  (а) и  $\varepsilon = 0.49$  (б). В первом случае аттрактор гиперболический, во втором – тест показывает наличие нулевых углов, т.е. имеют место касания устойчивого и неустойчивого многообразий, и аттрактор гиперболическим не является.

Проверка критерия углов для аттрактора системы, описываемой уравнением в частных производных (34), требует специальной проработки алгоритма, но для редуцированной модели (39) ее можно осуществить, обращаясь с восьмимерным стробоскопическим отображением Пуанкаре по схеме, применявшейся в предыдущих двух разделах. На рис. 21 показаны гистограммы распределения углов между устойчивыми и неустойчивыми подпространствами для траекторий на аттракторе системы (39) в случае гиперболической динамики (а) и в случае, когда аттрактор оказывается негиперболическим, о чем свидетельствует присутствие углов близких к нулю (б). Для параметров, заданных в соответ-

ствии с (36), распределение отделено от нулевых углов  $\phi_n$ , т.е. тест подтверждает гиперболичность аттрактора отображения Пуанкаре конечномерной модели. Учитывая наблюдаемое в численных расчетах хорошее соответствие динамики распределенной системы и конечномерной модели, а также грубость хаотического аттрактора отображения Пуанкаре, можно полагать результаты проверки критерия углов аргументом также и в пользу гиперболичности аттрактора исходной распределенной системы.

## **Заключение**

В статье рассмотрены примеры механических систем с гиперболической хаотической динамикой. Первый пример отвечает шарнирному механизму Тёрстона – Уикса – Ханта – МакКэя, реализующему при движении по инерции динамику Аносова. Остальные три системы диссипативные. Это задача о частице, совершающей движение в потенциальном поле под действием импульсных толчков, конструкция, где реализуется движение двух взаимодействующих частиц на попеременно вращающихся дисках, и задача о параметрическом возбуждении струны с модулированной накачкой. Хаос в этих системах обусловлен аттракторами, которые при описании в терминах отображения Пуанкаре представляют собой разновидности соленоида Смейла – Вильямса.

Обсуждаемые примеры представляют интерес с точки зрения наполнения конкретным физическим содержанием фундаментального раздела теории динамических систем – гиперболической теории, испытывающей в этом плане очевидный дефицит.

Для подтверждения гиперболической природы динамики применительно ко всем обсуждаемым моделям реализован и апробирован метод, основанный на анализе статистики углов между устойчивыми и неустойчивыми многообразиями. Для этого на одной и той же принадлежащей исследуемому инвариантному множеству типичной траектории в каждой рассматриваемой точке определяются углы между подпространствами векторов малых возмущений при проходе по траектории вперед и назад во времени, и анализируется их статистическое распределение. Для всех рассмотренных систем, при подходящем выборе параметров продемонстрировано отсутствие углов, близких к нулю, что указывает на гиперболичность соответствующих инвариантных множеств. Для первой модели это энергетическая поверхность, где реализуется динамика Аносова, а для остальных моделей – аттракторы в виде соленоидов Смейла – Вильямса для отображения Пуанкаре. Наглядным указанием на присутствие аттракторов типа Смейла – Вильямса служит топология итерационных диаграмм для угловых переменных, соответствующих растягивающим отображениям окружности. Стоит оговориться, что аргументация в пользу гиперболической природы аттракторов опирается на качественный анализ и результаты численных расчетов. Более аккуратное математическое обоснование гиперболичности, например, в технике проверки критерия конусов [87-89], представляется желательным, и может быть одним из направлений дальнейшей работы.

Относительная простота устройства и принципа функционирования рассмотренных моделей позволяет надеяться, что они осуществимы в эксперименте. Благодаря структурной устойчивости равномерно гиперболического хаоса, их реализуемость не должна критично зависеть от деталей конструкции.

В чем можно усмотреть значение обсуждавшихся систем с прагматической точки зрения?

Вопрос о практическом применении хаоса привлекает внимание в течение многих лет, проводились многочисленные международные конференции, концентрировавшиеся на этих проблемах. Обсуждаются такие направления, как использование хаоса для скрытой коммуникации [28-32], генерации случайных чисел [35,36], в криптографических схемах [33,34], для шумовой локации [37]. О каких бы приложениях хаоса речь ни шла, предпочтительными, как можно думать, будут грубые системы, динамика которых нечувствительна по отношению к вариации параметров и характеристик элементов системы, к техническим погрешностям и флуктуациям и т.п. Техническая потребность в том, чтобы эти

свойства имели место, специально подчеркивается исследователями, целенаправленно работающими над созданием генераторов хаоса для информационно-коммуникационных приложений [28,29].

В отношении механических систем, по-видимому, наиболее интересна возможность эффективного управления хаотической динамикой посредством малых воздействий [38-41], что связано с принципиально присущей хаосу чувствительностью движения по отношению к возмущениям начальных условий; соответствующая область исследований обозначается как «управление хаосом».

На основе принципов, изложенных в настоящей работе на примере механических систем, по-видимому, возможно построение генераторов хаоса иной физической природы, например, в электронике и нелинейной оптике, имея в виду развивавшуюся Л.И. Мандельштамом и А.А. Андроновым идею о «колебательной взаимопомощи» различных научно-технических дисциплин [81, 8, 90].

*Авторы благодарны А.В. Борисову, предложившему подготовить настоящий обзор. Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 15-12-20035.*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Аносов Д.В., Арансон С.Х., Гринес В.З., Плыкин Р.В., Сатаев Е.А., Сафонов А.В., Солодов В.В., Старков А.Н., Степин А.М., Шлячков С.В.* Динамические системы с гиперболическим поведением // Итоги науки и техники. Серия «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления». М.: ВИНТИ, 1991. Т. 66. [D.V. Anosov, G.G. Gould, S.K. Aranson, V.Z. Grines, R.V. Plykin, A.V. Safonov, E.A. Sataev, S.V. Shlyachkov, V.V. Solodov, A.N. Starkov, A.M. Stepin. Dynamical Systems IX: Dynamical Systems with Hyperbolic Behaviour (Encyclopaedia of Mathematical Sciences) (v. 9). Springer, 1995.]
- [2] *Смейл С.* Дифференцируемые динамические системы // УМН. 1970. V. 25:1 (151). С. 113–185. [Smale S. Differentiable dynamical systems // Bull. Amer. Math. Soc. (NS). 1967. V. 73. P. 747-817.]
- [3] *Williams R.F.* Expanding attractors // Publications mathématiques de l’I.H.É.S. 1974. V. 43. P. 169-203.
- [4] *Каток А.Б., Хасселблат Б.* Введение в современную теорию динамических систем. М.: Факториал, 1999. [Katok A. and Hasselblatt B. Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.]
- [5] *Afraimovich V. and Hsu S.-B.* Lectures on chaotic dynamical systems. Somerville, MA: International Press, 2003.
- [6] *Синай Я. Г.* Стохастичность динамических систем // Нелинейные волны, ред. Гапонов–Грехов А.В. М.: Наука, 1979. С. 192-212.
- [7] *Аносов Д.В.* Динамические системы в 60-е годы: гиперболическая революция // Математические события XX века. М.: Фазис, 2003. С. 1-18. [Anosov D.V. Dynamical Systems in the 1960s: The Hyperbolic Revolution // Mathematical Events of the Twentieth Century, Berlin Heidelberg: Springer-Verlag and Moscow: PHASIS, 2006. P. 1-18.]
- [8] *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959. [Andronov A.A., Vitt A.A., Khaikin S.É. Theory of oscillators. Pergamon Press, 1966.]
- [9] *Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В., Чуа Л.* Методы качественной теории в нелинейной динамике. М.- Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. [Shilnikov L.P., Shilnikov A.L., Turaev D.V., Chua L.O. Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics (Part 1). Singapore: World Scientific, 1998.]
- [10] *Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В., Чуа Л.* Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 2. М.- Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2009. [Shilnikov A.L., Turaev D.V., Chua L.O., Shilnikov L.P. Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics (Part 2). Singapore: World Scientific, 2002.]

- [11] Гапонов-Грехов А.В., Рабинович М.И. Проблемы современной нелинейной динамики //Вестн. РАН. 1997. Т. 67. № 7. С. 608-624.
- [12] Afraimovich V.S., Gonchenko S.V., Lerman L.M., Shilnikov A.L., Turaev D.V. Scientific Heritage of L.P. Shilnikov //Regular and Chaotic Dynamics. 2014. V. 19. No 4. P.435-460.
- [13] Борисов А.В., Мамаев И.С. Странные аттракторы в динамике кельтских камней //УФН. 2003. Т. 173. №4. С. 407-418. [Borisov A.V., Mamaev I.S. Strange attractors in rattleback dynamics //Physics-Uspekhi. 2003. V. 46. No 4. P. 393–403.]
- [14] Борисов А.В., Казаков А.О., Кузнецов С.П. Нелинейная динамика кельтского камня: неголономная модель // УФН. 2014. Т. 184. №5. С. 493-500. [Borisov A.V., Kazakov A.O., Kuznetsov S.P. Nonlinear dynamics of the rattleback: a nonholonomic model //Physics-Uspekhi. 2014. V. 57. No 5. P. 453-460.]
- [15] Bizyaev I.A., Borisov A.V., Kazakov A.O. Dynamics of the Suslov Problem in a Gravitational Field: Reversal and Strange Attractors // Regular and Chaotic Dynamics. 2015. V. 20, No 5. P. 605-626.
- [16] Gonchenko A.S., Gonchenko S.V., Kazakov A.O. Richness of Chaotic Dynamics in Non-holonomic Models of a Celtic Stone //Regular and Chaotic Dynamics. 2014. V. 18. No 5. P. 521-538.
- [17] Kuznetsov S.P. Plate falling in a fluid: Regular and chaotic dynamics of finite-dimensional models //Regular and Chaotic Dynamics. 2015. V. 20. No 3. P. 345-382.
- [18] Монин А.С. О природе турбулентности //Успехи физических наук. 1978. Т. 125. № 5. С. 97-122. [Monin A.S. On the nature of turbulence //Soviet Physics Uspekhi. 1978. V. 21. No 5. P. 429-442.]
- [19] Letellier C. Chaos in nature. Singapore: World Scientific, 2013.
- [20] Scott S.K. Chemical chaos. Oxford University Press, 1993.
- [21] Thompson J.M.T. and Stewart H.B. Nonlinear dynamics and chaos. N.Y.: Wiley, 1986.
- [22] Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Хаотические и стохастические колебания. М.: Наука, 1987.
- [23] Шустер Г. Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988. [Schuster H.G. and Just W. Deterministic chaos: an introduction. Wiley-VCH, 2005.]
- [24] Кузнецов С.П. Динамический хаос. Москва: Физматлит, 2001.
- [25] Kuznetsov A.P., Migunova N.A., Sataev I.R., Sedova Y.V., Turukina L.V. From Chaos to Quasi-Periodicity // Regular and Chaotic Dynamics. 2015. V. 20. No 2. P. 189-204.
- [26] Pesin Ya.B. Lectures on partial hyperbolicity and stable ergodicity. Zurich lectures in advanced mathematics. European Mathematical Society, 2004.
- [27] Bonatti C., Diaz L.J., Viana M. Dynamics beyond Uniform Hyperbolicity. A Global Geometric and Probabilistic Perspective. Berlin, Heidelberg, New-York: Springer, 2005.
- [28] Дмитриев А.С., Панас А.И. Динамический хаос: новые носители информации для систем связи. М.: Физматлит, 2002.
- [29] Дмитриев А.С., Ефремова Е.В., Максимов Н.А., Панас А.И. Генерация хаоса. М.: Техносфера, 2012.
- [30] Дмитриев А.С., Ефремова Е.П., Никушинов А.Ю., Панас А.И. Генераторы хаоса: от вакуумных приборов до наносхем //Радиоэлектроника, наносистемы, информационные технологии. 2009. Т. 1. №. 1-2. С. 6-22.
- [31] Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е. О применении хаотической синхронизации для скрытой передачи информации //УФН. 2009. Т. 179. Вып. 12. С. 1281-1310. [Koronovskii A.A., Moskalenko O.I., Hramov A.E. On the use of chaotic synchronization for secure communication //Physics – Uspekhi. 2009. V. 52. P. 1213-1238.]
- [32] Жалнин А.Ю. Новая схема передачи информации на основе фазовой модуляции несущего хаотического сигнала //Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2014. Т. 22. №5. С. 3-12.
- [33] Baptista M.S. Cryptography with chaos. Physics Letters A. 1998. V. 240. No 1–2. P. 50-54.

- [34] *Птицын Н.* Приложение теории детерминированного хаоса в криптографии. М.: Изд. МГТУ им Н. Э Баумана, 2002.
- [35] *Bernstein G.M., Lieberman M.A.* Secure random number generation using chaotic circuits // IEEE Trans. Circuits and Systems. 1990. V. 37. No 9. P. 1157-1164.
- [36] *Drutarovský M. and Galajda P.* A Robust Chaos-Based True Random Number Generator Embedded in Reconfigurable Switched-Capacitor Hardware // Radioengineering. 2007. V. 16. No 3. P. 120-127.
- [37] *Lukin K.A.* Noise radar technology // Telecommunications and Radio-Engineering. 2001. V. 16. No 12. P. 8–16.
- [38] *Schöll E., Schuster H.G.* Handbook of Chaos Control. John Wiley & Sons, 2008.
- [39] *Bollt E.M., Meiss J.D.* Targeting chaotic orbits to the Moon through recurrence // Phys. Lett. A. 1995. V. 204. P. 373–378.
- [40] *Steingrube S., Timme M., Wörgötter F., Manoongpong P.* Self-organized adaptation of a simple neural circuit enables complex robot behaviour // Nature Physics. 2010. V. 6. No 3. P. 224-230.
- [41] *Gritli H., Khraief N., Belghith S.* Chaos control in passive walking dynamics of a compass-gait model // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2013. V. 18. No 8. P. 2048-2065.
- [42] *Kuznetsov S.P.* Hyperbolic Chaos: A Physicist's View. Beijing: Higher Education Press and Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2012.
- [43] *Кузнецов С.П.* Динамический хаос и гиперболические аттракторы: от математики к физике. Москва – Ижевск: ИКИ, 2013.
- [44] *Кузнецов С.П.* Динамический хаос и однородно гиперболические аттракторы: от математики к физике // УФН. 2011. Т. 181. №2. С. 121-149. [*S.P. Kuznetsov.* Dynamical chaos and uniformly hyperbolic attractors: from mathematics to physics // Physics-Uspekhi. 2011. V. 54. No 2. P. 119-144.]
- [45] *Kuznetsov S.P.* Example of a Physical System with a Hyperbolic Attractor of the Smale-Williams Type // Phys. Rev. Lett. 2005. V. 95. P. 144101.
- [46] *Isaeva O.B., Jalnine A.Yu., Kuznetsov S.P.* Arnold's cat map dynamics in a system of coupled nonautonomous van der Pol oscillators // Phys. Rev. E. 2006. V. 74. P. 046207
- [47] *Кузнецов С.П., Селезнев Е.П.* Хаотическая динамика в физической системе со странным аттрактором типа Смейла – Вильямса // ЖЭТФ. 2006. Т. 129. №2. С. 400-412. [*Kuznetsov S.P., Seleznev E.P.* A strange attractor of the Smale–Williams type in the chaotic dynamics of a physical system // JETP. 2006. V. 102. No. 2. P. 355-364.]
- [48] *Kuznetsov S.P. and Pikovsky A.* Autonomous coupled oscillators with hyperbolic strange attractors // Physica D. 2007. V. 232. P. 87–102.
- [49] *Кузнецов С.П., Пономаренко В.И.* О возможности реализации странного аттрактора типа Смейла-Вильямса в радиотехническом генераторе с запаздыванием // Письма в ЖТФ. 2008. Т. 34. Вып. 18. С. 1-8. [*Kuznetsov S.P. and Ponomarenko V. I.* Realization of a Strange Attractor of the Smale–Williams Type in a Radiotechnical Delay-Fedback Oscillator // Technical Physics Letters. 2008. V. 34. No 9. P. 771–773.]
- [50] *Kuznetsov S.P.* Plykin type attractor in electronic device simulated in MULTISIM // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2011. V. 21. P. 043105.
- [51] *Jalnine A.Yu.* Hyperbolic and non-hyperbolic chaos in a pair of coupled alternately excited FitzHugh–Nagumo systems // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2015. V. 23. No 1-3. P. 202-208.
- [52] *Тюрюкина Л.В.* Гиперболический хаос в системах с импульсным периодическим воздействием // Нелинейный Мир. 2010. Т. 8. №2. С. 72-73.
- [53] *Кузнецов С.П., Тюрюкина Л.В.* Аттракторы типа Смейла – Вильямса в модельных системах с импульсным периодическим воздействием // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2010. Т. 18. №5. С. 80-92.

- [54] *Kuznetsov S.P.* Some Mechanical Systems Manifesting Robust Chaos. *Nonlinear Dynamics and Mobile Robotics*. 2013. V. 1. No 1. P. 3–22.
- [55] *Lai Y.-C., Grebogi C., Yorke J. A., Kan I.* How often are chaotic saddles nonhyperbolic? // *Nonlinearity*. 1993. V. 6. P. 779-798.
- [56] *Anishchenko V.S., Kopeikin A.S., Kurths J., Vadivasova T.E., Strelkova G.I.* Studying hyperbolicity in chaotic systems // *Physics Letters A*. 2000. V. 270. P. 301-307.
- [57] *Ginelli F., Poggi P., Turchi A., Chaté H., Livi R., Politi A.* Characterizing Dynamics with Covariant Lyapunov Vectors // *Phys. Rev. Lett.* 2007. V. 99. P. 130601.
- [58] *Kuptsov P.V.* Fast numerical test of hyperbolic chaos // *Phys. Rev. E*. 2012. V. 85. No 1. P. 015203.
- [59] *Kuznetsov S.P.* Hyperbolic Chaos in Self-oscillating Systems Based on Mechanical Triple Linkage: Testing Absence of Tangencies of Stable and Unstable Manifolds for Phase Trajectories // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2015. V. 20. No 6. P. 649-666.
- [60] *Тёрстон У.П., Уикс Д.Р.* Математика трехмерных многообразий // *В мире науки*. 1984. №9. С. 74-88 (1984). [*Thurston W.P. and Weeks J.R.* The mathematics of three-dimensional manifolds // *Scientific American*. 1984. V. 251. P. 94–106.]
- [61] *Козлов В. В.* Топологические препятствия к интегрируемости натуральных механических систем // *Доклады АН СССР*. 1979. Т. 249. №. 6. С. 1299-1302. [*Kozlov V.V.* Topological obstacles to the integrability of natural mechanical systems // *Soviet Math. Dokl.* 1980. V. 20. P. 1413-1415.]
- [62] *Аносов Д.В.* Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны // *Тр. МИАН СССР*. 1967. Т. 90. С. 3–210.
- [63] *Balazs N.L. and Voros A.* Chaos on the pseudosphere // *Physics Reports*. 1986. V. 143. No 3. P. 109-240.
- [64] *Hunt T.J. and MacKay R.S.* Anosov parameter values for the triple linkage and a physical system with a uniformly chaotic attractor // *Nonlinearity*. 2003. V. 16. P. 1499-1510.
- [65] *Magalhães M. L. S. and Pollicott M.* Geometry and dynamics of planar linkages // *Communications in Mathematical Physics*. 2013. V. 317. No 3. P. 615-634.
- [66] *Kourganoff M.* Anosov geodesic flows, billiards and linkages // *arXiv:1503.04305*. 2015. P. 1-27.
- [67] *Isaeva O.B., Kuznetsov A.S., Kuznetsov S.P.* Hyperbolic chaos of standing wave patterns generated parametrically by a modulated pump source // *Phys. Rev. E*. 2013. V. 87. P. 040901.
- [68] *Исаева О.Б., Кузнецов А.С., Кузнецов С.П.* Гиперболический хаос при параметрических колебаниях струны. *Нелинейная динамика*. 2013. Т. 9. №1. С. 3-10.
- [69] *Гантмахер Ф.Р.* Лекции по аналитической механике. 3-е изд. М.: Физматлит, 2005.
- [70] *Goldstein H., Poole C.P., Safko J.L.* *Classical Mechanics* (3rd ed.). Addison-Wesley, 2001.
- [71] *Александров А.Д., Нецветаев Н.Ю.* *Геометрия*. М.: Наука, 1990.
- [72] *Struik D.J.* *Lectures on classical differential geometry*. Courier Dover Publications, 1988.
- [73] *Кузнецов С.П.* Хаос в системе трех связанных ротаторов: от динамики Аносова к гиперболическому аттрактору // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Физика*. 2015. Т. 15. Вып. 2. С. 5-17.
- [74] *Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.-M.* Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems: A method for computing all of them // *Meccanica*. 1980. V. 15. P. 9-30.
- [75] *Казарян М.Э.* *Курс дифференциальной геометрии (2001–2002)*. М.: МЦНМО, 2002.
- [76] *Kuznetsov S.P.* From geodesic flow on a surface of negative curvature to electronic generator of robust chaos. // *arXiv: 1604.08048*. 2016. P. 1-6.
- [77] *Kaplan J.L. and Yorke J.A.* A chaotic behavior of multi-dimensional differential equations // *Peitgen H.-O. and Walther H.-O.* (eds.) *Functional Differential Equations and Approximations of Fixed Points*. *Lecture Notes in Mathematics*. V. 730. Berlin, N.Y.: Springer, 1979. P. 204–227.

- [78] *Kuptsov P.V., Kuznetsov S.P., Pikovskiy A.* Hyperbolic Chaos of Turing Patterns //Phys. Rev. Lett. 2012. V. 108. P. 194101.
- [79] *Kruglov V.P., Kuznetsov S.P., Pikovskiy A.* Attractor of Smale-Williams type in an autonomous distributed system //Regular and Chaotic Dynamics. 2014. V. 19. No 4. P. 483-494.
- [80] *Стретт Дж.В.* Теория звука. Том 1. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1958. [*Rayleigh J.W.S. and Lindsay R.B.* The Theory of Sound, Volume One. 2nd edition. Dover Pubns, 1976.]
- [81] *Мандельштам Л.И.* Полное собрание трудов, т.4. Лекции по колебаниям. М.: Изд. АН СССР, 1955.
- [82] *Rowland D.R.* Parametric resonance and nonlinear string vibrations //Am. J. Phys. 2004. V. 72. P. 758-766.
- [83] *Круглов В.П., Кузнецов А.С., Кузнецов С.П.* Гиперболический хаос в системах с параметрическим возбуждением паттернов стоячих волн //Нелинейная динамика. 2014. Т. 10. №3. С. 265-277.
- [84] *Калиткин Н.Н.* Численные методы. М.: Наука, 1978, 512с.
- [85] *Farmer J.D.* Chaotic attractors of an infinite-dimensional dynamical system //Physica D: Nonlinear Phenomena. 1982. V. 4. No 3. P. 366-393.
- [86] *Купцов П.В.* Вычисление показателей Ляпунова для распределенных систем: преимущества и недостатки различных численных методов // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2010. Т. 18. №5. 93-112.
- [87] *Кузнецов С.П., Сатаев И.Р.* Проверка условий гиперболичности хаотического аттрактора в системе связанных неавтономных осцилляторов ван дер Поля// Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2006. Т. 14. №5. С. 3-29.
- [88] *Kuznetsov S.P. and Sataev I.R.* Hyperbolic attractor in a system of coupled non-autonomous van der Pol oscillators: Numerical test for expanding and contracting cones //Physics Letters A. 2007. V. 365. No 1-2. P. 97-104.
- [89] *Wilczak D.* Uniformly Hyperbolic Attractor of the Smale–Williams Type for a Poincaré Map in the Kuznetsov System //SIAM J. Applied Dynamical Systems. 2010. V. 9. P. 1263–1283.
- [90] *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М.* Нелинейные колебания. Москва: Физматлит, 2002.

# On some simple examples of mechanical systems with hyperbolic chaos

S.P. Kuznetsov<sup>1,2,3</sup> and V.P. Kruglov<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup> Udmurt State University, University, 1, Izhevsk, 426034, Russian Federation

<sup>2</sup> Kotel'nikov's Institute of Radio-Engineering and Electronics of RAS, Saratov Branch, Zelenaya str., 38, Saratov, 410019, Russian Federation

<sup>3</sup> Saratov State University, Astrakhanskaya, 83, Saratov, 410012,

Examples of mechanical systems with hyperbolic chaos are discussed including a hinge mechanism of Thurston – Weeks – Hunt – MacKay, where conservative Anosov dynamics are realized, and dissipative systems with attractors of Smale – Williams type (a particle in a plane under the periodic impulse kicks, interacting particles moving on two alternately rotating disks, and a string with parametric excitation by modulated pump). The proposed examples are interesting from the point of view of filling with physical content for the hyperbolic theory as a well-developed mathematical chapter of the theory of dynamical systems. Computer verification of hyperbolicity in the considered systems is provided basing on statistical analysis of angles of intersection of stable and unstable manifolds.

**Keywords:** dynamical system, chaos, attractor, hyperbolic dynamics, Anosov dynamics, Lyapunov exponent, Smale-Williams solenoid, parametric oscillations