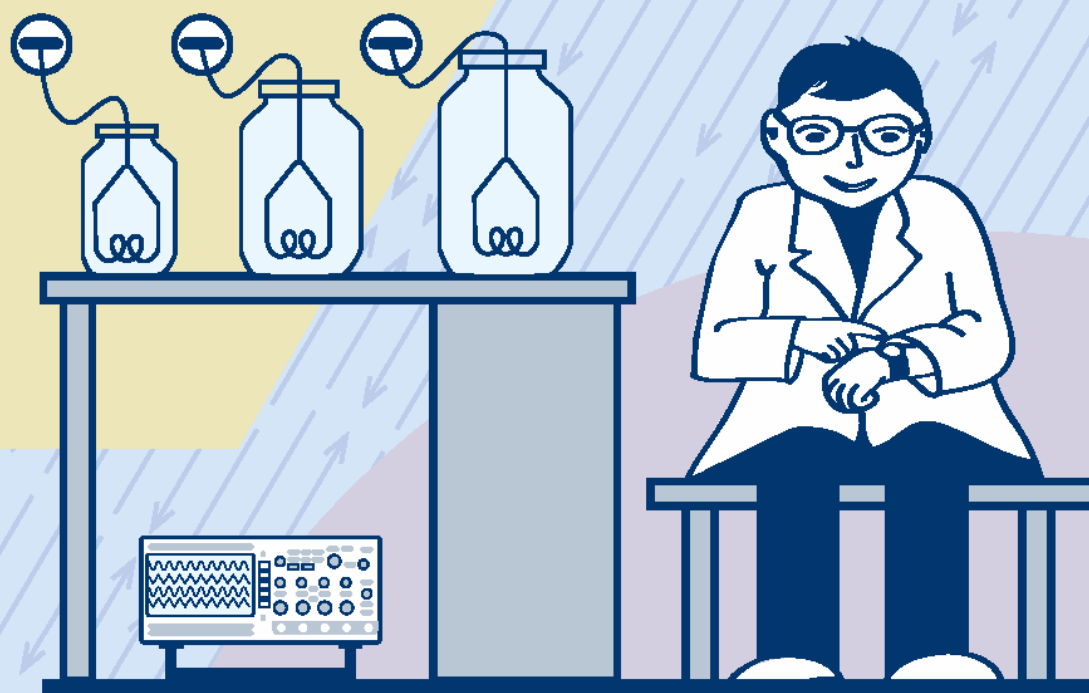


А. П. Кузнецов, С. П. Кузнецов, Л. А. Мельников,
А. В. Савин, В. Н. Шевцов

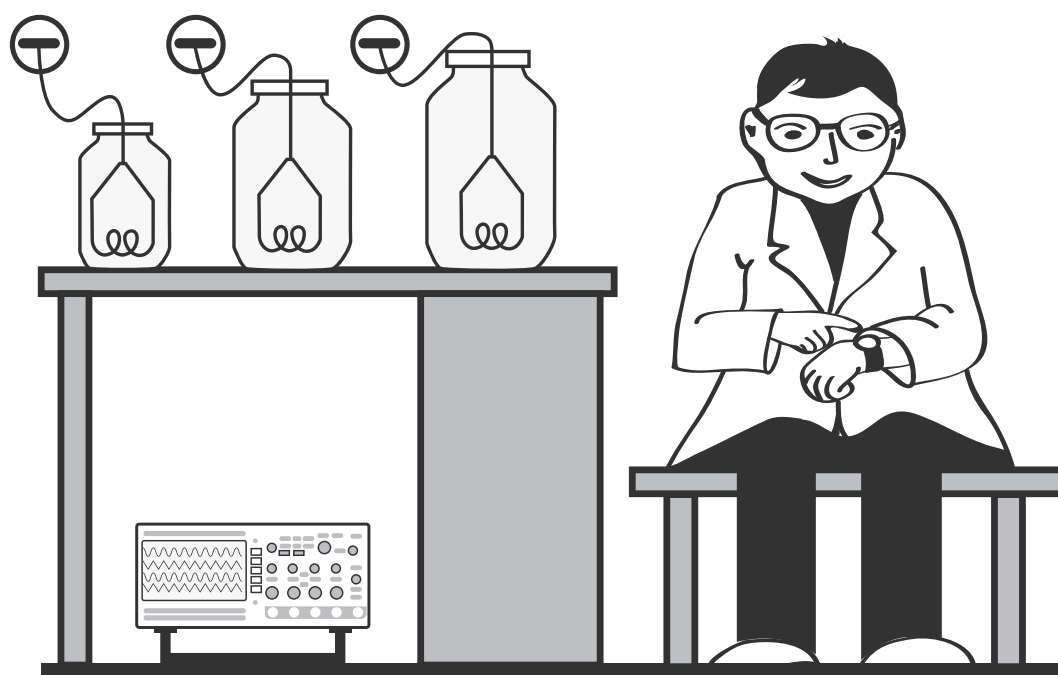
ЗАДАЧИ ФИЗИЧЕСКИХ ОЛИМПИАД

ЗАДАЧИ ФИЗИЧЕСКИХ ОЛИМПИАД



А. П. Кузнецов, С. П. Кузнецов, Л. А. Мельников,
А. В. Савин, В. Н. Шевцов

ЗАДАЧИ ФИЗИЧЕСКИХ ОЛИМПИАД



Москва ♦ Ижевск

2015

УДК 373.5:53(075.3)
ББК 74.262.23-275
3-153

Интернет-магазин
МАТФЕССИС
<http://shop.rcd.ru>

- физика
 - математика
 - биология
 - робототехника
 - нефтегазовые технологии
-

Рекомендовано к печати:

д. ф.-м. н., профессор Н. М. Рыскин,
базовая кафедра динамических систем Саратовского государственного
университета им. Н.Г. Чернышевского.

**Кузнецов А. П., Кузнецов С. П., Мельников Л. А., Савин А. В.,
Шевцов В. Н.**

3-153 Задачи физических олимпиад. — Изд. 2-е. — М.–Ижевск :
Институт компьютерных исследований, 2015. — 168 с.

ISBN 978-5-4344-0314-6

Книга содержит более 200 оригинальных физических задач, предлагавшихся в разные годы на олимпиадах школьников по физике в г. Саратове. Основная цель решения задач состоит в развитии творческого, исследовательского подхода к физике. Книга будет полезной на уроках физики, занятиях олимпиадных кружков, спецкурсов в школах, гимназиях и лицеях. Может также использоваться для более глубокого изучения физики на младших курсах высших учебных заведений.

© А. П. Кузнецов, С. П. Кузнецов,
Л. А. Мельников, А. В. Савин,
В. Н. Шевцов, 2015

© АНО «Ижевский институт
компьютерных исследований», 2015

ISBN 978-5-4344-0314-6

Оглавление

Предисловие	5
-------------------	---

Задачи

Механика	10
Тепловые и молекулярные явления	32
Электромагнитные явления	43
Геометрическая оптика	53
Колебания и волны	57

Ответы, решения, комментарии

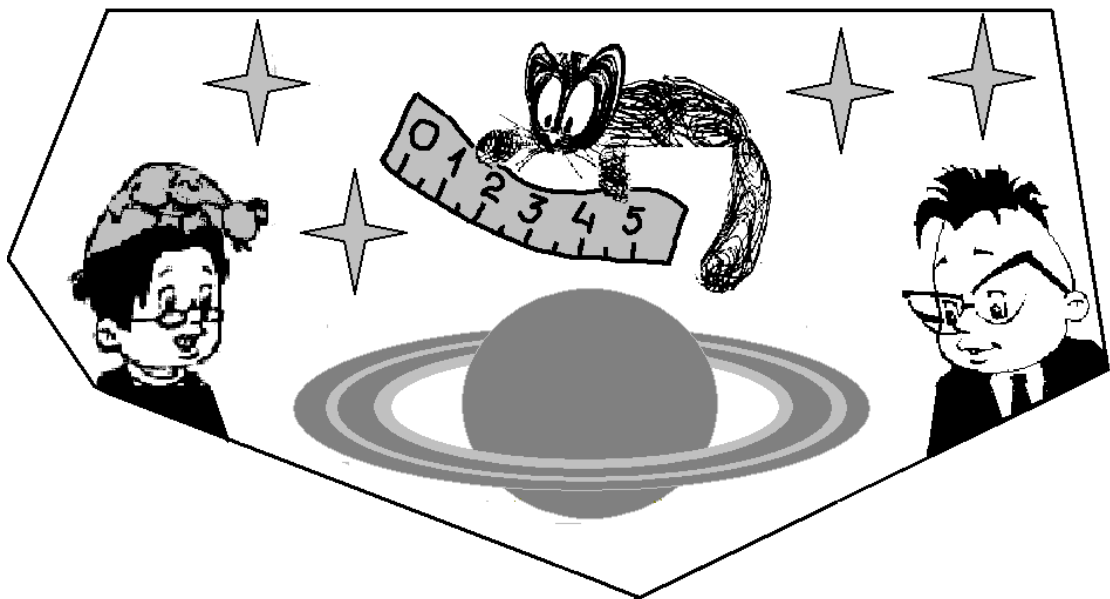
Механика	62
Тепловые и молекулярные явления	110
Электромагнитные явления	132
Геометрическая оптика	148
Колебания и волны	158

...О далеком будущем с его колоссальными проблемами, которые мы сейчас не в состоянии разрешить, но можем поставить, о будущем, которое предстает перед нами, ... как великолепный, но грозный мир человеческого духа, озаряемый молниями великих задач и дел...

А. Стругацкий, Б. Стругацкий

...Оказывается, кроме нашего привычного мира с метрикой Римана, принципом неопределенности, физическим вакуумом и пьяницей Брутом, существуют и другие миры с ярко выраженной реальностью...

А. Стругацкий, Б. Стругацкий



Предисловие

Профессия ученого-исследователя очень увлекательна. Если Вы — настоящий исследователь, то для Вас, наряду с обычным миром проблем и катаклизмов, существует и другой: мир науки. Мир очень интересный, а главное, вполне реальный и весьма населенный. Как попасть в этот мир? Опыт показывает, что для этого нужно тренировать свои творческие возможности, нужны упорство и желание добиться своей цели. Очень важно попасть в какую-либо научную школу, которая активно работает и занимается исследованиями. Атмосфера такой школы, ее традиции и внутренние законы развития сделают из Вас ученого.

Однако первым шагом в научный мир может стать решение физических задач повышенной трудности, или олимпиадных задач. Каждая такая задача — это маленькая проблема, которую Вы должны решить самостоятельно. Олимпиадные задачи — это своего рода модели (рис. 1) тех научных задач, которые встречаются в работе ученых. Заметим, что преимущество олимпиадного задачника в том, что Вы можете посвятить одной задаче много времени (хоть целый месяц!) в отличие от самой олимпиады, где на пять задач отводится обычно четыре часа. А ведь именно так происходит в реальном научном творчестве, когда одну задачу решают иногда даже не месяцы, а годы. Кроме того, Вы можете обсуждать задачи с друзьями, и решать их вместе методом «мозгового штурма», а это очень интересно и тоже принято в науке!

Настоящий сборник представляет собой «мир олимпиадной физики», сконструированный авторами, начиная с 1975 года. За это время сложился свой, определенный стиль саратовской олимпиадной школы. Наряду с традиционными задачами о наклонных плоскостях, сталкивающихся шарах и т.д., предлагались также задачи на оценки порядка величин, метод размерностей, задачи со ссылкой на результаты компьютер-

ного моделирования. При этом читатели должны иметь в виду, что на олимпиаде не разрешалось пользоваться какой-либо литературой. Для решения некоторых задач требуются знания, формально выходящие за рамки современной программы олимпиад, такие задачи отмечены звездочкой.

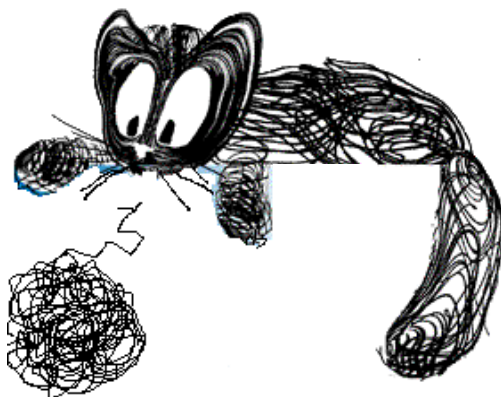


Рис. 1. При построении теории физика заменяет реальные объекты их идеализированными моделями (Д. В. Сивухин. «Общий курс физики»)

Мы даем решения и комментарии ко всем задачам. Рекомендуем познакомиться с решениями в любом случае — даже если Вы уверены, что решили задачу, ведь всегда могут быть определенные «тонкости», о которых полезно узнать. Тем более это стоит сделать, если после приложенных усилий задачу решить не удалось; в этом случае упорная тренировка со временем повысит Ваш уровень (рис. 2).

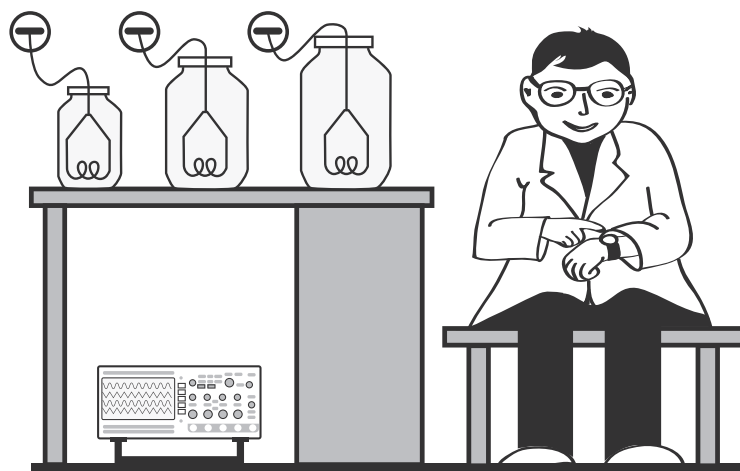


Рис. 2. Но я был один, и я решил рискнуть, а заодно и попрактиковаться... (А. Стругацкий, Б. Стругацкий, «Понедельник начинается в субботу»)

Авторы хотели бы выразить благодарность С. Б. Венигу, В. П. Вешневу, В. Л. Дербову, Б. С. Дмитриеву, Ю. П. Емельяновой, А. И. Жбанову, А. А. Князеву, М. Н. Куликову, Ю. И. Левину, М. Д. Матасову, А. Б. Осину, М. И. Перченко, М. В. Позднякову, С. А. Портнову, А. Г. Рожневу, Д. В. Савину, Е. П. Селезневу, М. М. Стольницу, Г. Н. Татаркову, А. С. Шаповалову, всем членам оргкомитета за увлекательные дискуссии, в ходе которых часто рождались идеи задач. Мы благодарны школьникам, которые решали эти задачи на наших олимпиадах.

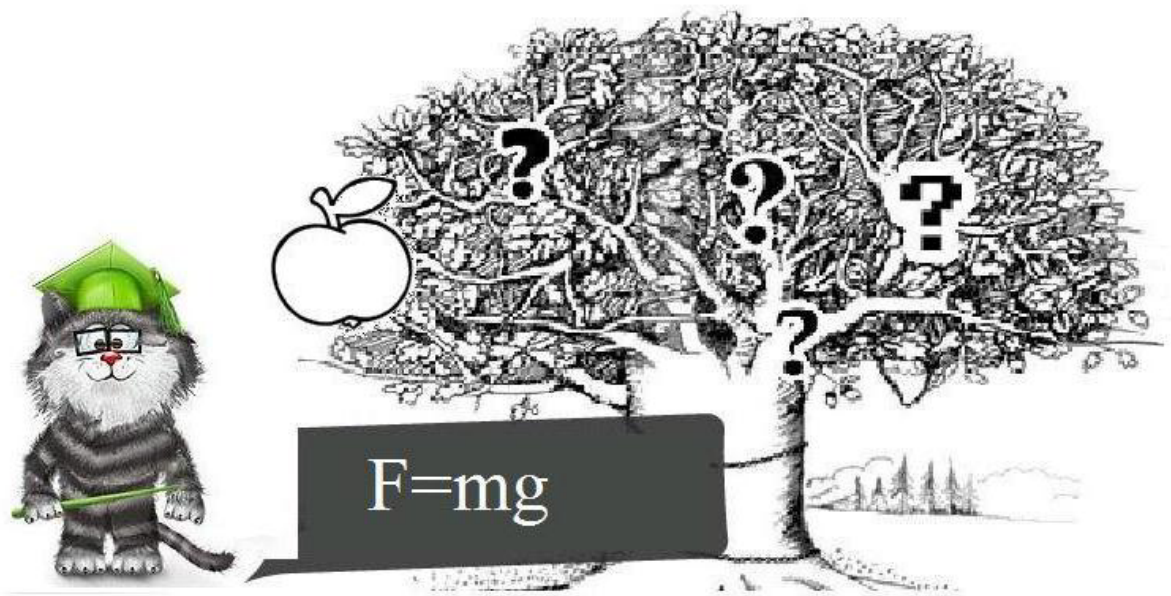
Мы будем рады, если юные читатели этого сборника придут со временем в научные лаборатории. Желаем успехов всем, кто интересуется наукой!

Мы весьма благодарны издательству «Регулярная и хаотическая динамика» за возможность второго издания этой книги.

Авторы

Задачи

*У моря видел дуб зеленый;
Под ним сидел и кот ученый,
Свои мне сказки говорил,
Одну я помню: сказку эту
Поведаю теперь я свету...
А. С. Пушкин*



Механика

1.1. Длина Удава равна 20 попугаям. Определите длину Попугая в удавах. Считайте, что длина Попугая в попугаях равна 1 попугаю.

1.2. Находящийся у борта коробки хоккеист посылает шайбу к противоположному борту строго перпендикулярно к нему и сразу же едет вслед за шайбой. Ровно на середине поля он встречается с шайбой, отскочившей от противоположного борта. Определите, во сколько раз скорость шайбы больше скорости хоккеиста, если они двигались с постоянными скоростями, а при ударе о борт величина скорости шайбы не изменилась.

1.3. При равномерном движении двух тел по одной прямой навстречу друг другу расстояние между ними уменьшается на 16 м каждые 10 с. При движении этих же тел с прежними скоростями в одном направлении расстояние между ними увеличивается на 3 м каждые 5 с. Определите скорость каждого тела.

1.4. Лодка с подвесным мотором, двигаясь по течению реки, проходит расстояние между двумя деревьями за 1 ч. С более мощным мотором скорость этой лодки относительно воды увеличивается вдвое и она преодолевает тот же маршрут за 45 мин. Найдите отношение скорости течения реки к первоначальной скорости лодки.

1.5. Между двумя городами А и В, расположенными на берегу реки, курсирует катер. Из А в В он идет 5 часов, а из В в А — 7 часов. Сколько времени будет двигаться плот от А до В? Считайте, что во время рейса катер все время движется с постоянной скоростью.

1.6. Опоздавший на поезд пассажир спустя 20 минут после его отъезда от вокзала сел в такси, чтобы пересесть на этот поезд на следующей станции. Двигаясь по проложенному вдоль железной дороги шоссе, такси обогнало поезд в момент, когда он уже прошел $\frac{2}{3}$ пути от вокзала до станции. Сколько времени будет пассажир ждать поезда на станции? Считайте, что такси и поезд движутся с постоянной скоростью.

1.7. Когда хвост ползущего Удава поравнялся с пальмой, под которой сидела Мартышка, она, решив измерить длину Удава, побежала вдоль него и положила банан рядом с его головой. Затем Мартышка побежала обратно и положила второй банан рядом с кончиком хвоста Удава. Потом пришел Попугай и измерил расстояния от пальмы до каждого из бананов, которые оказались равными 16 и 48 попугаев. Найдите длину Удава в попугаях, а также определите, во сколько раз быстрее бежит Мартышка, чем ползает Удав.

1.8. На садовой дорожке лежит гибкий, но нерастяжимый шланг длиной 100 м, прикрепленный одним концом к крану и вытянутый вдоль прямой. На расстоянии 60 м от крана на шланге завязан бантик. Мальчик берет свободный конец шланга в руки и бежит с ним вдоль шланга к крану со скоростью 4 м/с. Определите, через какое время бантик а) придет в движение; б) окажется рядом с краном.

1.9. Автомобиль первую четверть пути проехал с постоянной скоростью за половину всего времени движения. Следующую треть пути, также двигаясь с постоянной скоростью, — за четверть всего времени. Остаток пути был преодолен со скоростью 100 км/час. Какова средняя скорость автомобиля на всем пути? Чему равны скорости на первом и втором участках?

1.10. Однажды Винни–Пух и Пятачок отправились от дома Винни–Пуха на очередной день рождения ослика Иа. Винни был занят сочинением поздравительной кричалки и шел неторопливо, а Пятачок на своем велосипеде поехал к ослику. Через три минуты он был у цели, поздравил именинника, отдохнул одну минуту и через три минуты возвратился к дому Винни–Пуха. Отдохнув там минуту, он продолжил свои заезды в прежнем режиме. В конце концов Пятачок оказался у ослика одновременно с Винни–Пухом. Во сколько раз быстрее Винни–Пуха перемещался Пятачок, если за все время движения он проезжал мимо него пять раз (не считая старта и финиша)?

1.11. На бесконечной прямой дороге расположено бесконечное количество светофоров так, что расстояние между соседними светофорами равно L . Каждый светофор в течение времени T показывает красный свет, затем в течение времени T — зеленый, затем опять красный и т. д., при-

чем на двух соседних светофорах в любой момент времени горит разный цвет. Два автомобиля одновременно начинают движение с постоянными скоростями от двух светофоров, расположенных на расстоянии $2L$ друг от друга, в тот момент, когда на них загорается зеленый цвет. «Задний» автомобиль едет с максимально возможной скоростью, позволяющей проезжать все светофоры без остановок. «Передний» автомобиль движется с постоянной скоростью v . Он мгновенно останавливается, если подъезжает к светофору с горящим красным светом, и также мгновенно набирает скорость v после включения зеленого света. Определите, догонит ли «задний» автомобиль «передний» (и если да, то за какое время), если вышеперечисленные правила движения не нарушаются, а переключение светофоров происходит мгновенно.

1.12. На кольцевой автострате установлены 4 светофора (рис. 1.1). С какой максимальной скоростью может равномерно двигаться по кольцу автомобиль так, чтобы не останавливаться перед светофорами? Все светофоры одновременно дают зеленый свет в течение 20 с, потом красный в течение 20 с, затем вновь зеленый и так далее. Автомобиль начинает двигаться в момент, когда зажигается зеленый свет. Считайте, что автомобиль мгновенно набирает скорость, и далее она остается постоянной.

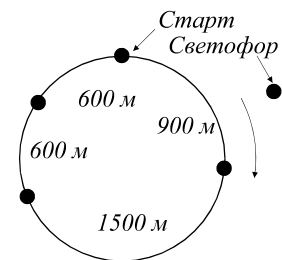


Рис. 1.1

1.13. Балда выпустил зайца одновременно с тем, как бесенок побежал «по берегу морскому» (см. рис. 1.2). Заяц побежал по кратчайшему расстоянию, равному 2 верстам, «в лесок до дому» со скоростью 30 верст/час. Возвращаясь, бесенок видел зайца, мелькнувшего за первыми деревьями леса, но не придал этому значения. Найдите скорость, развиваемую бесенком, если известно, что при беге он может смотреть только вперед, а «море» является окружностью радиусом 2 версты.

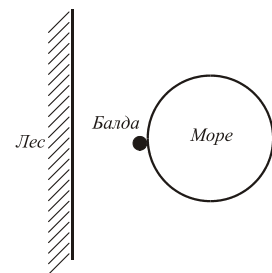


Рис. 1.2

1.14. Знайка живет в доме, стоящем около дороги между остановками А и В на расстоянии 800 м от А. В направлении от А к В по дороге каждый день проезжают автобус со скоростью 40 км/ч и трамвай со скоростью 20 км/ч. На остановку В они приезжают одновременно в 8 часов

утра. В какое самое позднее время должен выйти из дома Знайка, чтобы успеть уехать на автобусе? на трамвае? Знайка ходит со скоростью 4,8 км/ч, расстояние между остановками 2 км. Время, которое транспорт стоит на остановке, очень мало.

1.15. Крокодил Гена ездит на работу в зоопарк на автобусе, который всегда ходит точно по расписанию. Домик Гены стоит около дороги между остановками A и B на расстоянии l от остановки A . Автобус едет в направлении от A к B с постоянной скоростью V . Найдите, за какой минимальный промежуток времени до прибытия автобуса на остановку B Гена должен выходить из дома, чтобы успеть на него, если крокодил ходит со скоростью U , а время, в течение которого автобус стоит на остановке, пренебрежимо мало. Расстояние между остановками равно L .

1.16. На одном берегу реки находятся деревня A и, ниже по течению, деревня B , а на другом берегу — деревня C , так что все три деревни расположены в вершинах равнобедренного треугольника с углом φ при основании AB . Лодочник из деревни A хочет посетить деревни B и C и вернуться назад. По какому маршруту он должен отправиться, чтобы сэкономить время? Исследуйте вопрос в зависимости от соотношения между скоростью лодки в стоячей воде v и скоростью течения реки U .

1.17. С самолета проводят серию бомбометаний. Бомба снабжена парашютом, раскрывающимся автоматически на определенной высоте. Бомба каждый раз сбрасывается над точкой O (рис. 1.3). Если самолет летит по ветру, то бомба падает на расстоянии a_1 от точки O , если против ветра — то на расстоянии a_2 . Найдите координаты точки падения бомбы в случае, когда траектория самолета совпадает с осью x .

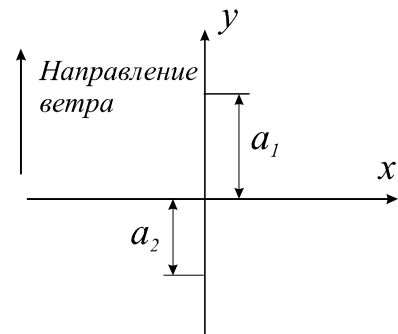


Рис. 1.3

Скорость ветра v , скорость самолета в неподвижном воздухе V .

1.18. Человек, плотно пристегнутый ремнем безопасности, имеет все шансы уцелеть в автомобильной аварии, если при торможении модуль ускорения кратковременно не превышает $20g$ (g — ускорение свободного падения). Предполагая, что авария состоит в столкновении автомобиля с неподвижной стенкой, оцените, на какую минимальную деформа-

цию должна быть в целях обеспечения безопасности рассчитана передняя часть автомобиля, имевшего до столкновения скорость 60 км/ч.

1.19. Трасса для испытания самодвижущихся грузовых роботов представляет собой квадрат, углы которого «скруглены» дугами в четверть окружности (см. рис. 1.4), при этом длина прямолинейных участков 91 м, а радиус кривизны дуг 9 м. Для обеспечения сохранности груза в управляющую программу робота заложено ограничение: его ускорение в любой момент времени не должно превышать 9 м/с^2 . Определите, за какое время робот пройдет десятый круг по трассе, если он старается двигаться как можно быстрее. Все участки трассы горизонтальны.

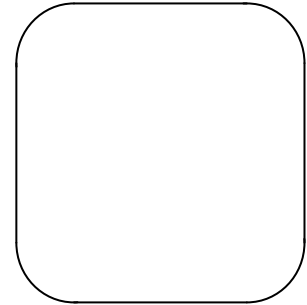


Рис. 1.4

1.20. Прогуливая уроки, двоечник Вася увидел летящую горизонтально ворону и выстрелил в нее из рогатки. Плохо зная кинематику, он целился в то место, где находилась ворона в момент выстрела, однако попал в нее. Определите, на какой высоте летела ворона, если ее скорость 12 м/с , скорость выпущенного из рогатки камня вдвое больше, а направление на ворону в момент выстрела составляло угол 30° с горизонтом. Сопротивлением воздуха пренебречь.

1.21. На рисунке 1.5 показана стробоскопическая фотография шарика, брошенного под углом к горизонту из начала координат. Найдите начальную скорость шарика.

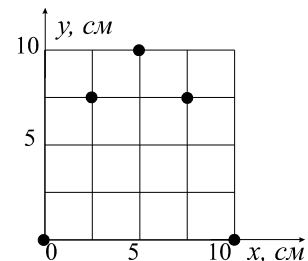


Рис. 1.5

1.22. Поливая грядки из шланга, садовник направляет тонкую струю воды под углом α к горизонту. Считая, что в воздухе струя не распадается на капли, определите ее диаметр в верхней точке траектории, если внутренний диаметр шланга равен d_0 . Сопротивлением воздуха пренебречь, диаметр шланга считайте малым по сравнению с дальностью полета струи.

1.23. Определите, каким образом должна изменяться со временем угловая скорость вращения ведущей катушки магнитофона для того, чтобы линейная скорость движения ленты была постоянна и равна v . Радиус катушки R , толщина ленты d . Считайте, что $d \ll R$, а в начальный момент времени вся лента намотана на другую катушку.

1.24. Наблюдая Землю, марсианский астроном видит, что Солнцем освещена ровно половина видимого диска. Найдите расстояние от Марса до Земли в этот момент, если известно, что Земля и Марс находятся на расстоянии 147 и 245 миллионов километров от Солнца.

1.25. Если мяч опустить в реку, то через 3 минуты он совершит полный оборот вокруг своей оси (рис. 1.6), пройдя при этом по течению 50 метров. Оцените глубину реки.

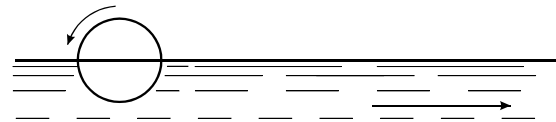


Рис. 1.6

1.26. На некоторых реках недалеко от устья во время прилива наблюдается *бор* — волна, представляющая собой резкое повышение уровня воды (см. рис. 1.7). Определите скорость движения бора, считая, что его форма не меняется со временем. Высота бора $h = 1,5$ м, глубина реки $H = 3$ м, скорость течения реки 1 м/с.

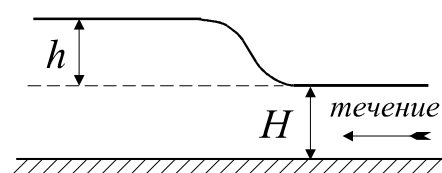


Рис. 1.7

1.27. Лабораторией профессора А. А. Выбегалло предложена новая система измерения скорости автомобиля, использующая инновационные технологии и состоящая в следующем. На обод одного из колес автомобиля крепится датчик. Установленный на автомобиле бортовой компьютер с большой точностью фиксирует положение этого датчика через равные промежутки времени τ . Затем определяется угол φ между двумя последовательными положениями датчика (см. рис. 1.8), по нему рассчитывается угловая скорость вращения колеса как $\omega = \varphi/\tau$ и затем скорость движения автомобиля. При испытаниях системы оказалось, что при установке датчиков на передние колеса модели получаемые значения скорости хорошо совпадают с истинными вплоть до величины 10 м/с, после чего измеряемые новым способом значения становятся существенно меньше истинных. После установки датчика на заднее колесо значение скорости, при котором начинается расхождение результатов, увеличилось до 15 м/с. Объясните причину плохой работы системы при больших скоростях. Найдите диаметр заднего колеса и интервал времени τ , если диаметр переднего колеса модели равен 10 см. Считайте, что колеса модели не проскальзывают.

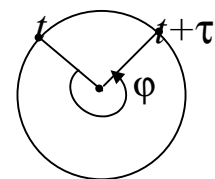


Рис. 1.8

установке датчиков на передние колеса модели получаемые значения скорости хорошо совпадают с истинными вплоть до величины 10 м/с, после чего измеряемые новым способом значения становятся существенно меньше истинных. После установки датчика на заднее колесо значение скорости, при котором начинается расхождение результатов, увеличилось до 15 м/с. Объясните причину плохой работы системы при больших скоростях. Найдите диаметр заднего колеса и интервал времени τ , если диаметр переднего колеса модели равен 10 см. Считайте, что колеса модели не проскальзывают.

1.28. Сосуд объемом 1 л заполнен водой на три четверти. Когда в него аккуратно погрузили кусок меди, уровень воды поднялся и часть ее, объемом 100 мл, вылилась через край. Найдите массу куска меди. Плотность меди $8,9 \text{ г/см}^3$.

1.29. В скале, примыкающей к морю, имеется пещера, вход в которую затоплен (см. рис. 1.9). Глубина моря у входа в пещеру 5 метров, а уровень воды в пещере на 1 метр ниже. Определите давление воздуха в пещере. Атмосферное давление 10^5 Па .

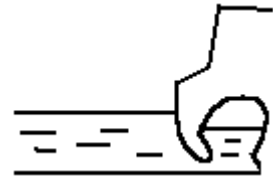


Рис. 1.9

1.30. Согласно одной из средневековых моделей мира, Земля лежит на спине кита, плавающего в океане. Оцените характерные размеры этого кита. Землю считайте полусферой радиуса 6400 км, плотность земных пород $5,5 \text{ г/см}^3$, плотность кита $-0,9 \text{ г/см}^3$.

Указание: кита можно представить в виде цилиндра, диаметр которого в несколько (например, в 10) раз меньше его длины.

1.31. Пустая бутылка емкостью 0,5 литра весит 450 граммов. Найдите плотность стекла, если известно, что погруженная в воду бутылка тонет, будучи наполнена водой более чем на половину.

1.32. Почему нельзя изготовить воздушный шар, наполняемый нагретым воздухом, подъемная сила которого равнялась бы подъемной силе шара того же объема, наполненного водородом?

1.33. В сосуд с теплой водой опускают тело объемом V , внутри которого имеется полость объемом $2V/3$, заполненная льдом и соединяющаяся сквозным отверстием с окружающей средой; при этом тело погружается на $5/6$ своего объема (см. рис. 1.10). Утонет ли тело, когда весь лед растает? Плотность льда и воды равны $0,9 \text{ г/см}^3$ и 1 г/см^3 соответственно.

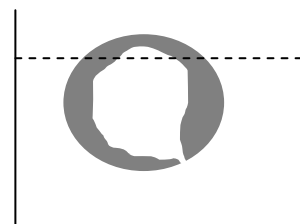


Рис. 1.10

1.34. На легкий тонкий стержень нанизаны два шарика: один из свинца, а другой — из алюминия. Стержень опирается серединой на острие и находится в горизонтальном равновесии в воде, при этом расстояние между центрами шариков $l = 20 \text{ см}$ и они расположены симметрично относительно точки опоры. В какую сторону и на какое расстояние нужно будет сдвинуть алюминиевый шарик для сохранения равновесия

в воздухе? Плотность свинца $\rho_1 = 11\,300 \text{ кг/м}^3$, алюминия $\rho_2 = 2700 \text{ кг/м}^3$, воды $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$.

1.35. Прибор для измерения плотности жидкости — ареометр — в простейшем случае представляет собой цилиндрическое тело, внутри нижней части которого закреплен груз, обеспечивающий устойчивое плавание ареометра в вертикальном положении, а на боковую поверхность нанесена шкала плотностей так, что при плавании ареометра в однородной жидкости он погружается точно до отметки, соответствующей ее плотности. В широкий и глубокий сосуд с водой поверх нее налит слой бензина толщиной 10 см. Какую плотность покажет ареометр массой 10 грамм, опущенный в этот сосуд? Как изменятся его показания, если толщину слоя бензина увеличить вдвое? Считайте, что диаметр ареометра намного меньше диаметра сосуда. Плотность воды $1,0 \text{ г/см}^3$, бензина $0,75 \text{ г/см}^3$, площадь поперечного сечения ареометра 1 см^2 .

1.36. Два шарика массами 1,2 г и 1,3 г и одинакового объема 1 см^3 соединены невесомой нерастяжимой нитью так, что расстояние между их центрами не может превышать 5 см, и погружены в соляной раствор, плотность которого зависит от глубины как $\rho = \rho_0 + kh$, где $\rho_0 = 1 \text{ г/см}^3$, $k = 0,01 \text{ г/см}^4$. На каких глубинах будут находиться шарики в положении равновесия?

1.37. Цилиндрический пластмассовый стакан имеет дно толщиной 1 см и тонкие стенки. Если опустить его в большой сосуд с водой, то он будет плавать в вертикальном положении, погрузившись на 3 см. Если затем налить в него слой неизвестной жидкости высотой 3 см, то стакан окажется погруженным на 5 см. Сколько еще нужно долить в него этой же жидкости, чтобы ее уровень совпал с уровнем «забортовой» воды?

1.38. В воде плавает кольцевая шайба (на рис. 1.11 — вид сверху). Какой должна быть плотность материала шайбы, чтобы её можно было целиком заполнить маслом плотностью 800 кг/м^3 ? Плотность воды 1000 кг/м^3 .

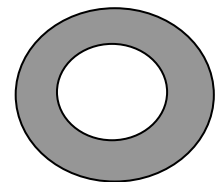


Рис. 1.11

1.39. В один из сообщающихся сосудов налита вода плотностью 1000 кг/м^3 , в другой — масло плотностью 800 кг/м^3 . В соединяющую со- суды горизонтальную трубку вставлена легкая тонкая пробка, которая

разделяет жидкости и может перемещаться по трубке без трения. На какое расстояние сместится эта пробка, если на поверхность воды налить слой масла толщиной 1 см? Площадь поперечного сечения соединительной трубки 1 см^2 , что в 16 раз меньше площади поперечного сечения каждого из сосудов.

1.40. Труба состоит из двух частей, соединенных под прямым углом (рис. 1.12), причем диаметр одной из частей в два раза больше диаметра другой. В трубу налито некоторое количество воды. Найдите угол φ , при котором достигается максимальное давление в наинизшей точке A . Диаметр трубок много меньше высоты воды в них.

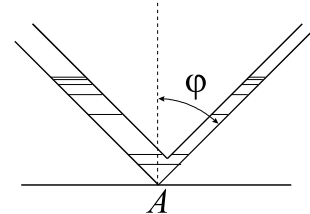


Рис.1.12

1.41* Имеются три шарика одинакового объема (рис. 1.13). Один изготовлен из материала с плотностью 2 г/см^3 , а два других — из материала с плотностью $0,5 \text{ г/см}^3$. Шарики соединили тремя одинаковыми пружинами и бросили в воду. Найдите углы образованного пружинами треугольника. Масса и объем пружин пренебрежимо малы. Объем каждого шарика 1 см^3 , жесткость пружин $0,2 \text{ Н/м}$, длина нерастянутых пружин 10 см .

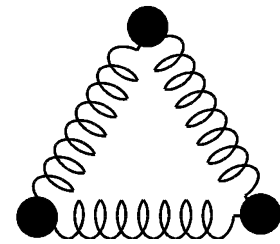


Рис. 1.13

1.42* Открытый сверху цилиндрический бак полностью наполнялся водой из крана за время t_1 . Со временем в его дне образовалось небольшое отверстие, через которое вся вода из полностью наполненного бака при закрытом кране выливается за время t_2 . Теперь пустой бак поставили под открытый кран на промежуток времени, много больший как t_2 , так и t_1 . За какое время выльется вся вода из бака, если кран закрыть? Скорость истечения воды из крана постоянна.

1.43. Мартышка массой $M = 15 \text{ кг}$, обнаружив в городке аттракционов систему блоков (см. рис. 1.14), повисла на свободном конце веревки и стала осматривать окрестности. Какие силы при этом показывают динамометры $D1$ и $D2$?

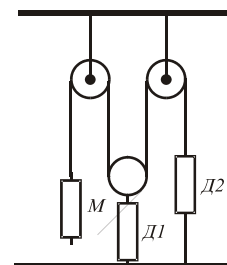


Рис. 1.14

1.44. Лиана выдерживает только двух обезьян, висящих на ее конце. Выдержит ли лиана, если одна обезьяна начнет раскачиваться на ней с максимальным отклонением от вертикали 45° ?

1.45. На рис. 1.15 показана схема известного опыта, демонстрирующего инертность тел. Начиная с некоторого момента времени, нижнюю нить тянут с постоянной силой f . В зависимости от величины силы рвется либо нижняя, либо верхняя нить. Найдите условия, при которых реализуются эти ситуации. Считайте, что разрыв нити наступает при натяжении T ; вплоть до разрыва нить имеет постоянный коэффициент жесткости k . Масса груза M , нить невесома.

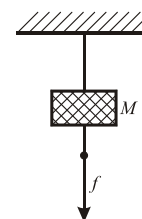


Рис. 1.15

1.46. Тело массой 2 кг движется вдоль оси x по гладкой горизонтальной плоскости. График зависимости v_x от x показан на рис. 1.16. Постройте график зависимости модуля силы, действующей на тело, от времени.

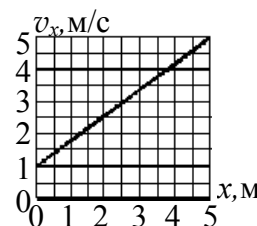


Рис. 1.16

1.47. Плывущая по реке с постоянной скоростью баржа тянет под водой на тросах два шарообразных контейнера одинакового размера, но разного веса (см. рис. 1.17). Угол отклонения первого троса по вертикали 45° , а второго 30° . Когда скорость баржи уменьшилась, угол отклонения первого троса составил 30° . Каков стал угол отклонения от вертикали второго троса?

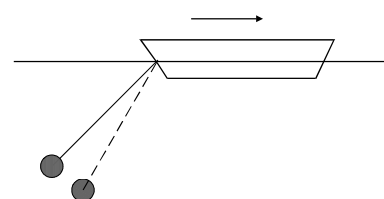


Рис. 1.17

1.48. Фотография цепочки массой 10 г, подвешенной за концы, приведена на рис. 1.18. Найдите максимальную силу натяжения в цепочке.



Рис. 1.18

1.49. Даны две пружины из одинакового материала, каждая из которых свита виток к витку. Диаметры пружин 3 и 9 мм, длины 1 и 7 см, диаметры проволок 0,2 и 0,6 мм. Коэффициент жесткости первой пружины 14 Н/м. Найдите коэффициент жесткости второй пружины.

1.50. Имеются две пружины с одинаковыми упругими свойствами. Все размеры пружин одинаковы; масса же первой пружины m_1 больше, чем масса второй m_2 . Обе пружины подвешены в поле тяжести (см. рис. 1.19), причем к концу второй пружины прикреплен груз, масса которого равна разности масс

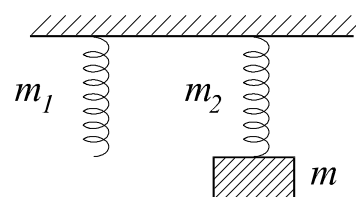


Рис. 1.19

пружин. Какая из пружин растянута на большую длину? Ответ обоснуйте.

1.51. Физик-экспериментатор исследовал упругие свойства элемента, состоящего из двух резинок различной длины, концы которых связаны (рис. 1.20). Зависимость силы упругости от расстояния AB приведена в таблице. Используя данные этой таблицы, найдите коэффициент жесткости каждой резинки.

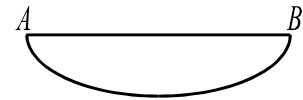


Рис. 1.20

AB , см	2	4	6	8	10	12
F , Н	0	0,2	0,6	1,0	2,0	4,0

1.52. К дну цилиндрического сосуда на пружине жесткости k прикреплен шарик радиуса R . В сосуд налили столько воды, что шарик касается ее поверхности, полностью располагаясь над ней (см. рис. 1.21). Насколько нужно повысить уровень воды в сосуде, чтобы шарик полностью оказался под водой? Считайте, что пружина не изгибается и все время остается вертикальной. Плотность воды ρ_0 .

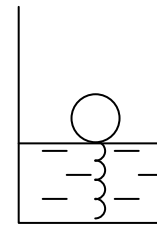


Рис. 1.21

1.53. Из резинового шнура длины l и массы m с коэффициентом жесткости k изготовили кольцо, которое вращается с угловой скоростью ω вокруг своего центра. Найдите радиус кольца.

1.54. На доске массы M лежит небольшой брусок массы m (см. рис. 1.22). Коэффициент трения между доской и бруском равен μ_1 , а между доской

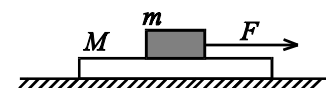


Рис. 1.22

и поверхностью — μ_2 . К бруску прикладывают горизонтальную силу F . Укажите все возможные качественно различные варианты поведения системы и изобразите на плоскости параметров (μ_1, μ_2) соответствующие им области.

1.55. На столе в один ряд лежат 10 одинаковых кубиков. С какой силой нужно, взявшись за два крайних руки, сдавить кубики, чтобы оторвать их от стола? Массы кубиков m , коэффициент трения кубика о кубик μ .

1.56. Один конец расположенной горизонтально плоской доски шарнирно закреплен. На расстоянии R от шарнира на доске лежит

маленький груз, коэффициент трения покоя которого о доску равен μ . Незакрепленный конец доски начинают поднимать так, что она вращается вокруг шарнира с постоянной угловой скоростью ω (см. рис. 1.23). Определите, при каком угле наклона доски груз начнет скользить по ней. Считайте, что это произойдет раньше, чем доска придет в вертикальное положение.

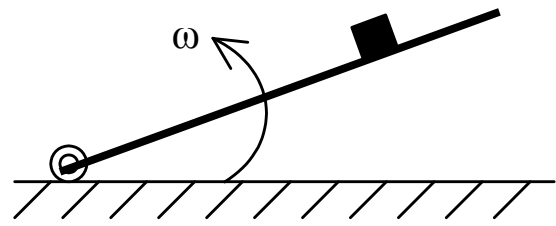


Рис. 1.23

Примечание: верна формула $a \sin \varphi + b \cos \varphi = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\varphi + \alpha)$, $\operatorname{tg} \alpha = b/a$.

1.57. Мальчик положил небольшой плоский грузик на наклонную горку с углом при основании α , а затем поставил горку в кузов игрушечного грузовика (рис. 1.24), стоящего на ровном горизонтальном полу. С каким ускорением нужно

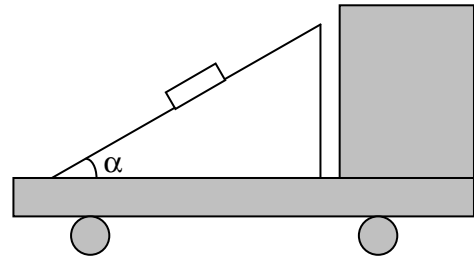


Рис. 1.24

двигать грузовик, чтобы грузик скользил вниз по плоскости? вверх по плоскости? В неподвижном грузовике грузик покоится, коэффициент трения скольжения грузика о горку $\mu < 1$, грузовик может двигаться только по прямой, горка относительно грузовика не смещается.

1.58. На горизонтальной поверхности лежат один на другом три одинаковых кирпича (рис. 1.25). Среднему кирпичу сообщили толчком скорость 1 м/с. Найдите смещение кирпичей по отношению друг к другу к моменту прекращения их относительного движения. Коэффициент трения между кирпичами 0,4; трение между нижним кирпичом и поверхностью отсутствует.

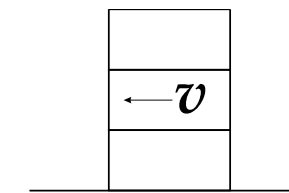


Рис. 1.25

1.59* Перекидывая легкую нить с привязанными к ее концам грузами через блок, ученик заметил, что она находится в равновесии, если массы грузов различаются не более чем в 2 раза, и соскальзывает в противном случае. Определите коэффициент трения нити по блоку.

1.60. На наклонной плоскости с сухим трением вбит гвоздь, к которому прикреплен маятник (см. рис. 1.26). Маятник отпускают без

начальной скорости из положения, в котором нить параллельна ребру наклонной плоскости. Возможно ли, чтобы маятник остановился в положении с углом: а) $\varphi_1 = \pi/2 + \pi/6$, б) $\varphi_2 = \pi/2 + \pi/12$ к первоначальному положению нити сразу после первого полукачания? Маятник может лишь скользить по плоскости.

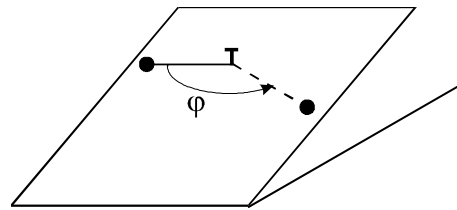


Рис. 1.26

1.61. Две одинаковые шайбы массы M каждая скреплены невесомой пружиной и лежат на плоскости. Коэффициент трения между шайбами и плоскостью равен μ , а трение пружины о плоскость отсутствует. Плоскость начинают медленно наклонять так, что пружина сохраняет горизонтальное расположение. При каком угле наклона плоскости к горизонту шайбы начнут скользить по ней? Первоначальная сила натяжения пружины T_0 .

1.62. К стене при помощи пружины жесткости k прикреплен груз массы m , расположенный на ленте транспортера (см. рис. 1.27). В начальный момент времени пружина не деформирована. Лента начинает двигаться со скоростью v_0 , направленной от стены. Найдите размах установившихся колебаний груза, если коэффициенты трения скольжения и трения покоя груза о ленту равны μ_c и μ_n соответственно ($\mu_c < \mu_n$).

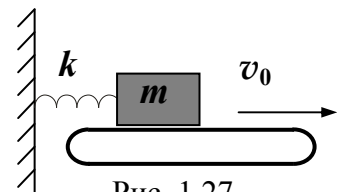


Рис. 1.27

1.63. Горизонтально расположенный однородный стержень с прикрепленным на одном из его концов грузом малых размеров находится в равновесии, если точка опоры отстоит от груза на $1/7$ длины стержня. Чему равна масса стержня, если масса груза $7,5$ кг?

1.64. На дощечке длины L в ряд по росту поставлены 4 матрешки. При этом самая маленькая и самая большая стоят на краях; каждая меньшая матрешка находится от своей большей соседки на расстоянии, равном своему росту. Как далеко от края дощечки следует расположить опору, чтобы система пребывала в равновесии? Все матрешки геометрически подобны друг другу и изготовлены из одного и того же материала, рост каждой следующей матрешки в A раз больше предыдущей.

1.65. На горизонтальной поверхности лежат два грузика с массами $m_1=70$ г и $m_2=120$ г. (рис. 1.28) Некто с помощью рычага пытается сдвинуть их с места. Какой груз начнет двигаться первым? Длина рычага 30 см, расстояние $l = 20$ см. Массой рычага пренебречь.

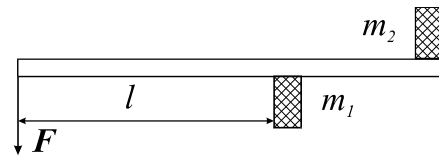


Рис. 1.28

1.66. Если на наклонную плоскость положить карандаш так, как показано на рис. 1.29, то он начинает катиться без проскальзывания, если угол β больше 60° . Найдите угол α . Карандаш в сечении представляет собой правильный шестиугольник.

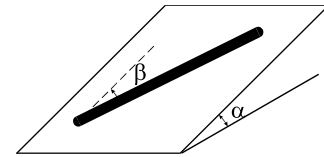


Рис. 1.29

1.67. Определите максимальное ускорение, с которым заднеприводный автомобиль с расстоянием между осями 1,2 м, центр тяжести которого расположен на высоте 1 м от земли посередине между осями, может начать двигаться, если он находится а) на льду, б) на асфальте. Коэффициент трения скольжения колес по льду 0,1; по асфальту 0,7.

1.68. Определите сжатие Юпитера у полюсов $\Delta r/r_0$ (Δr — разность экваториального и полярного радиусов), если известно, что средний радиус Юпитера $r_0 = 70\,000$ км, ускорение свободного падения у поверхности $g = 20$ м/с², время обращения вокруг оси T равно 10 часам. Считайте для простоты, что основная часть массы планеты сосредоточена в компактном центральном ядре.

1.69. Межзвездная экспедиция обнаружила планету, имеющую ту же массу M и радиус R , что и Земля. Оказалось, однако, что половина массы планеты сосредоточена в ядре радиуса $R/2$, центр которого смещен на $R/4$ относительно центра планеты. В каких пределах изменяется ускорение силы тяжести на поверхности планеты?

1.70. Почему, спускаясь по канату «на руках», можно обжечься? Какое количество теплоты может выделиться, если высота каната 5 м, а масса человека 70 кг?

1.71. Считая, что сопротивление воздуха отсутствует, оцените, с какой высоты должна упасть капля воды, чтобы от нее «не осталось мокрого места». Можно ли на самом деле пренебречь сопротивлением воздуха при решении этой задачи?

1.72. На столе лежит книга размером $l \times l$. Наименьшая работа, необходимая для того, чтобы раскрыть ее на середине, равна A . Какова масса книги?

1.73. На горизонтальную поверхность нанесли покрытие так, что коэффициент трения маленького кубика об эту поверхность зависит от координаты x , как показано на рис. 1.30а. Кубику ударом сообщают скорость v_0 (рис. 1.30б). Какое расстояние проедет кубик? В начальный момент кубик находится в начале координат.

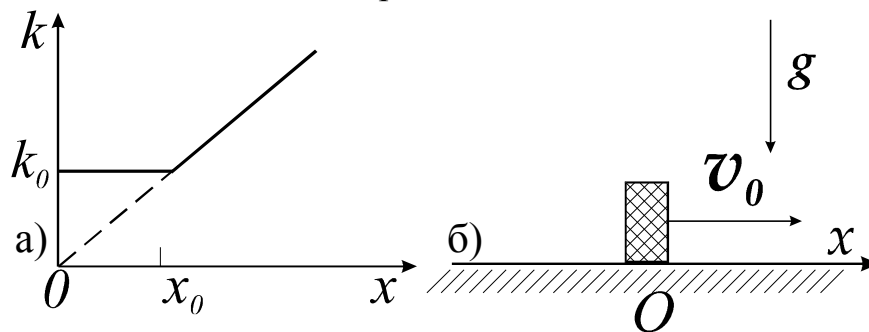


Рис. 1.30

1.74. Маленькому шарикому сообщают скорость v , направленную вдоль наклонной плоскости, образующей угол 45° с горизонтом (рис. 1.31). На какую максимальную высоту поднимется шарик? Высота наклонной плоскости H . Трение отсутствует.

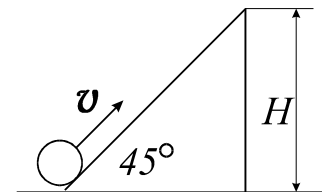


Рис. 1.31

1.75. На гладкой поверхности покоится система, состоящая из трех одинаковых кубиков массы M и пружины жесткости k

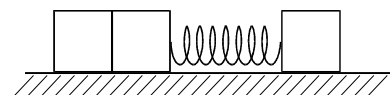


Рис. 1.32

(рис. 1.32). Два кубика укреплены на пружине, а третий свободен. Первоначально пружина сжата на величину Δx . Пружину отпускают. Определите скорость левого кубика в момент отрыва.

1.76. Маятник представляет собой легкий стержень длины l с укрепленным на конце грузом массы m (рис. 1.33). Стержень может вращаться в вертикальной плоскости вокруг другого своего конца. Первоначально груз находится в нижнем положении равновесия. Грузу сообщают горизонтально

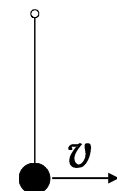


Рис. 1.33

направленную скорость v . При каких ее значениях маятник будет колебаться, а при каких — вращаться? Чему равна сила упругости, возникающая в стержне, когда грузик находится в верхней точке? При каком

значении начальной скорости стержень в верхней точке будет сжат, а при каком — растянут?

1.77. К вбитому в стену гвоздю на невесомой нерастяжимой нити длины L подвешен маленький тяжелый груз. Под гвоздем на расстоянии l от нижнего положения груза ($l < L$) вбит еще один гвоздь. Груз отклоняют вправо так, что нить образует острый угол α с вертикалью (см. рис. 1.34), и отпускают без начальной скорости. Перечислите все возможные качественно различные типы поведения этой системы и изобразите соответствующие им области на плоскости безразмерных параметров ($l/L, \cos\alpha$). Потерями энергии пренебречь.

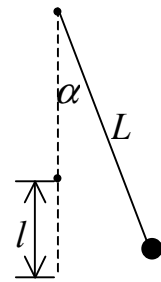


Рис. 1.34

1.78. К вертикальной стенке прикреплено пять одинаковых маятников в виде небольших массивных шаров на невесомых стержнях длины l . Точки подвеса расположены на одной вертикали, расстояние между ними $2l$ (см. рис. 1.34), система находится в покое. Какую скорость надо сообщить самому нижнему маятнику, чтобы самый верхний мог совершить полный оборот вокруг своей оси? Все удары неупругие.

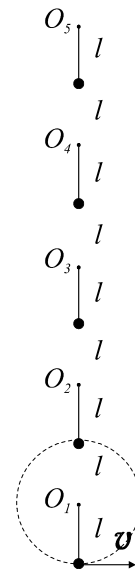


Рис. 1.35

1.79. На санях, запряженных одной лошадейю, от деревни Медвежий Угол до деревни Новомедвежий Угол можно доехать за 11 часов, а на тех же санях, запряженных тройкой — за 5 часов. За какое время можно добраться от одной деревни до другой, если запрячь в сани 6 лошадей? Считайте, что при движении на сани и лошадь действует сила сопротивления, пропорциональная их весу, причем коэффициент пропорциональности одинаков во всех случаях. Считайте также, что за время движения лошади не устают и все время движутся с максимально возможной в данных условиях скоростью.

1.80. Насос мощностью 150 Вт, качая воду для полива дачного участка из скважины по цилиндрической трубе, может обеспечить максимальный расход воды 1 л/с, а насос мощностью 600 Вт, качая воду из той же скважины по той же трубе — 2 л/с. Насос какой мощности обеспечивает расход воды 4 л/с? Потерями на трение пренебречь, примите $g = 10 \text{ м/с}^2$.

1.81. «Однажды, — рассказывал барон Мюнхгаузен, — я ехал в последнем вагоне поезда. Вдруг я почувствовал, что мой вагон начал останавливаться. Выглянув в окно, я увидел, что вагон отцепился от поезда. Положение создавалось отчаянное, однако я не растерялся. Обнаружив в вагоне большое количество пустых бутылок, я начал с силой выбрасывать их из вагона против направления движения. В полном соответствии с законами физики, скорость вагона при этом увеличивалась. Так, благодаря сообразительности и знанию физики, мне удалось догнать поезд». Оцените правдоподобность рассказа барона, считая, что во время описываемых событий вагон двигался по горизонтальному участку пути и на него действовала сила сопротивления движению, прямо пропорциональная весу вагона с коэффициентом $\mu = 0,001$. Масса пустой бутылки равна 0,5 кг, масса вагона 50 т.

1.82. На гладкой горизонтальной поверхности лежит мишень массы 9 кг. С интервалом в 1 с в нее попадают и застревают 4 пули, первая из которых летит с юга, вторая — с запада, третья — с севера и четвертая — с востока. На какое расстояние и в какую сторону сместится в итоге мишень? Масса каждой пули 9 г, скорость 200 м/с.

1.83. Снаряд, выпущенный со скоростью v_0 из пушки, находящейся на поверхности земли, разорвался на два одинаковых осколка. Один из них полетел вертикально вверх, а второй — горизонтально, оба со скоростями $v_0/2$. На какой высоте произошел взрыв?

1.84. Внутри полого шара массы M с внутренним радиусом 5 см находится маленький шарик массы $M/10$. Снаружи на большой шар налетает еще один маленький шарик массы $M/10$ со скоростью 2 м/с. Найдите период возникших в результате столкновения колебаний малого шара. Все удары центральные и абсолютно упругие, опыт проводится в невесомости.

1.85. Два колеса радиусами R и $R/2$ установлены в вертикальной плоскости так, что касаются друг друга и могут вращаться вокруг своих центров без проскальзывания, при этом центры колес неподвижны. На ободе каждого колеса укреплено по одному маленькому массивному грузу одинаковой массы. Первоначально колеса удерживают так, что грузик на большом колесе находится в крайнем левом, а на малом — в ниж-

нем положении (рис. 1.36). На какой угол повернется большое колесо, если колеса отпустить?

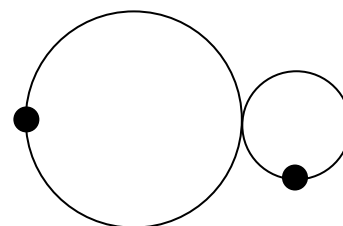


Рис. 1.36

1.86. На гладкой поверхности лежат 4 свинцовых шара (рис. 1.37). На них слева налетает шар со скоростью v_0 . Все шары одинаковы, центры шаров лежат на одной прямой. Найдите скорость правого шара после всех соударений.

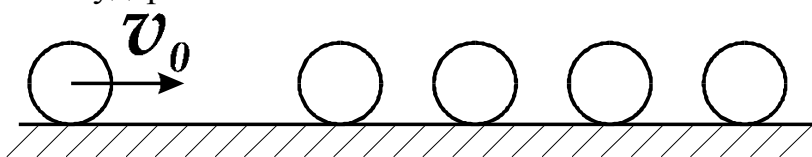


Рис. 1.37

1.87. На гладкой горизонтальной поверхности установлены 17 шаров (рис. 1.38), причем масса каждого последующего шара в 3 раза меньше массы предыдущего. Самому массивному шару сообщают скорость v_0 . Найдите скорость самого легкого шара после всех соударений. Все удары центральные и абсолютно упругие.

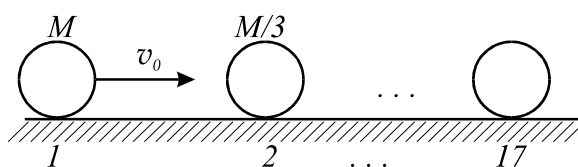


Рис. 1.38

1.88. Двум шарам, расположенным как показано на рис. 1.39, сообщили некоторые скорости, причем скорость правого была направлена вправо. Шары столкнулись 10 раз и больше не сталкивались. Оцените, на сколько процентов изменилась скорость правого шара. Все удары абсолютно упругие и центральные, трение отсутствует. Правый шар массивней левого в 2000 раз.

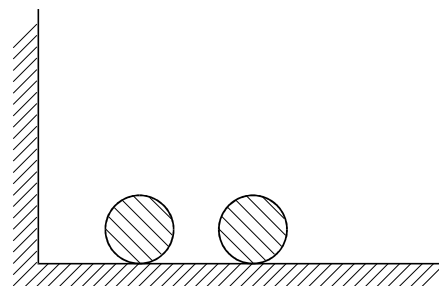


Рис. 1.39

1.89. Известно, что шарик для настольного тенниса, брошенный без начальной скорости с высоты H на неподвижную ракетку, подпрыгивает на высоту $0,64H$. Играя таким шариком, мальчик отбивает его ракеткой вверх так, что после каждого удара шарик подпрыгивает на высоту $0,9$ м. Найдите скорость движения ракетки в момент удара. Масса ракетки много больше массы шарика.

1.90. Металлический полый шар массы M заполнен резиной массы $M/4$. Два таких шара, двигаясь в невесомости навстречу друг другу с равными скоростями v , испытали центральное столкновение. Найдите скорости шаров через большое время после удара. Известно, что незаполненные шары сталкивались упруго, а скорость звука в резине значительно меньше, чем в металле.

1.91. На шар массы m , находящийся в покое в точке O , налетает другой шар такой же массы, движущийся со скоростью v_0 . На рис. 1.40 показаны траектории шаров до и после удара. Какое количество теплоты выделось при ударе?

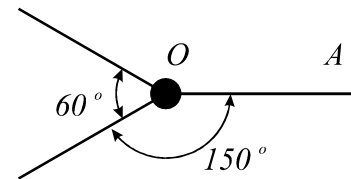


Рис. 1.40

1.92. На гладком горизонтальном столе лежат шесть одинаковых бильярдных шаров, расположенных в вершинах правильного шестиугольника. Седьмому такому же шару сообщают начальную скорость v и пускают его вдоль одной из сторон шестиугольника так, чтобы он испытал соударения со всеми шестью шарами, после чего двигался бы по прямой, являющейся продолжением первоначальной траектории. Какой будет его конечная скорость? Все удары абсолютно упругие, шары свободно катятся без трения по поверхности стола.

1.93. На бесконечной плоской поверхности, наклоненной под углом α к горизонту, покоится кубик, масса которого равна M , а коэффициент трения о поверхность составляет μ . Скользя по плоскости, сверху на него налетает другой кубик, движущийся без трения (рис. 1.41). При каких значениях массы второго кубика первый будет спускаться по наклонной плоскости неограниченно далеко? Удар кубиков упругий.

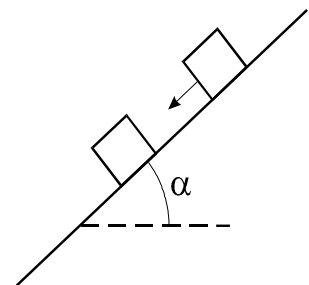


Рис. 1.41

1.94. Шарик, брошенный без начальной скорости с высоты h на горизонтальную поверхность, подпрыгивает на высоту $h/2$. На каком расстоянии от точки броска шарик перестанет прыгать и начнет двигаться по поверхности, если его бросить с поверхности со скоростью 1 м/с под углом 45° к горизонту?

1.95. Из точки O (рис. 1.42) отпустили без начальной скорости шарик. Он ударяется сначала об одну, затем о вторую, потом снова о пер-

вую плоскость и летит вверх точно по линии OA . Найдите высоту h . Известно, что $l = 9$ см; все удары абсолютно упругие.

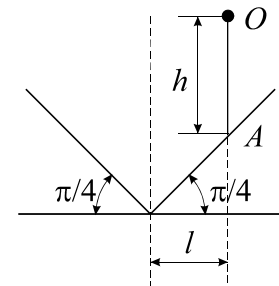


Рис. 1.42

1.96. Маленькому шарик, лежащему на краю лестницы, сообщили некоторую горизонтальную скорость (рис.1.43). Через 0,3 секунды шарик ударился о первую ступеньку лестницы, а еще через 0,4 секунды — о вторую. Затем опыт повторили снова, но начальную скорость шарика удвоили. Стукнется шарик о сороковую ступеньку лестницы или нет? Высота ступенек равна их ширине. Удар шарика о ступеньки абсолютно неупругий, трение отсутствует.

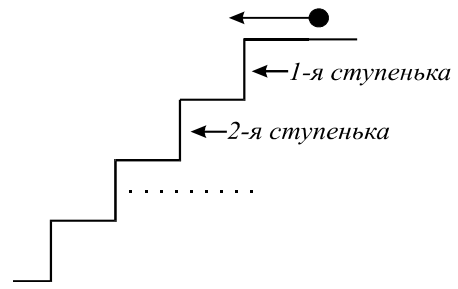


Рис. 1.43

1.97. Гантелька, состоящая из невесомого стержня длиной l и двух точечных масс, движется поступательно со скоростью v . На пути гантельки находится стенка с тоннелем шириной l (рис. 1.44). В начальный момент времени центр гантельки расположен на расстоянии L от плоскости AB . Через какое время центр гантельки вновь окажется на таком же расстоянии от этой плоскости? Все удары абсолютно упругие, действие происходит в невесомости.

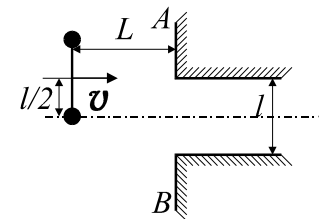


Рис. 1.44

1.98. На концах и в середине невесомого нерастяжимого стержня длины l расположены одинаковые тяжелые шарики. Стержень ставят вертикально и отпускают. Считая, что трение между плоскостью и нижним шариком отсутствует, найти скорость верхнего шарика в момент его удара о горизонтальную поверхность.

1.99* Тонкому жесткому кольцу радиусом 10 см, лежащему на гладком горизонтальном столе, сообщили скорость 1 м/с. Кольцо при движении налетает на шероховатую стенку так, что скорость его центра образует с ней угол α . Коэффициент трения кольца о стенку равен 0,2. С какой угловой скоростью будет вращаться кольцо после удара о стенку? Вычислить ее значение для $\alpha = 60^\circ$ и $\alpha = 45^\circ$. До удара кольцо не вращалось.

1.100. Известно, что максимальная высота гор на Земле около 10 км. Оцените размер астероидов, начиная с которого они имеют шарообразную форму. Считайте, что астероид сложен из тех же пород, что и Земля.

1.101. Внутри металлического баллона для газа, имеющего форму толстостенной металлической сферы, содержится газ молярной массы μ при температуре T . Плотность металла ρ , масса баллона в N раз превышает массу газа. Определите отношение внешнего и внутреннего радиусов баллона, если напряжение в металле (отношение силы к единице площади, Н/м²) равно σ . Всегда ли задача имеет решение?

1.102. Имеются два одинаковых баллона цилиндрической формы, которые склеены из двух составных частей каждый (рис. 1.45). Толщина стенок баллонов равна h . Внутренние размеры баллонов составляют: высота — $8h$, диаметр — $2h$. Атмосферное давление равно p_0 . Первый баллон выдерживает давление $4p_0$. Какое давление выдерживает второй баллон? Прочность стенок значительно превышает прочность склеивания.

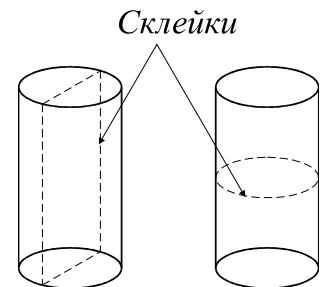


Рис. 1.45

1.103. В джунглях Амазонки к расположенному высоко над полной голодной крокодилы заводью прочному горизонтальному суку прикреплена легкая прочная упругая лиана (рис. 1.46)¹. Если лиана свисает с сука, то ее длина равна L , а нижний конец не достает до поверхности воды. Обезьянки, зажав

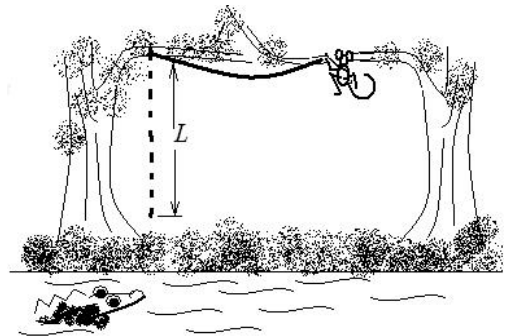


Рис. 1.46

в лапах нижний конец лианы, отходят по суку на расстояние L от точки крепления лианы, и прыгают с него, держась за свободный конец лианы. Если обезьянка не отталкивается от сука, то минимальное расстояние от нее до воды в процессе полета составляет $2/3$ расстояния от поверхности воды до конца свободно свисающей лианы, при этом максимальное удлинение лианы во время движения составляет $1/9 L$. Определите, с какой

¹ Рис. 1.46 выполнен А. А. Князевым.

максимальной скоростью может оттолкнуться от сука обезьянка, если она не хочет попасть в зубы крокодила. Считайте, что скорость обезьянки при отталкивании направлена вертикально вниз, масса лианы много меньше массы обезьянки, лиана подчиняется закону Гука, сопротивлением воздуха и трением лианы о сук можно пренебречь, крокодилы из воды не выпрыгивают.

Тепловые и молекулярные явления

2.1. Оцените количество теплоты, выделяющееся при экстренном торможении современного грузового железнодорожного состава.

2.2. Однажды Кролик решил попить чаю. Он налил в чайник ковшик воды и поставил его на плиту. Через 3 минуты после этого в дверь постучали, и появился Пятачок. Кролик тут же долил в чайник еще один такой же ковшик воды. Однако еще через 3 минуты появился Винни-Пух, и Кролику пришлось налить в чайник еще один ковшик. Сколько времени придется Винни-Пуху ждать закипания воды, если один ковшик закипает за 9 минут, а теплоемкостью чайника и потерями тепла можно пренебречь. Начальная температура доливаемой воды равна 10°C . Чайник большой и вмещает больше трех ковшиков воды.

2.3. В теплоизолированный сосуд, содержащий воду массы M при температуре $T^{\circ}\text{C}$, бросили кусок льда массы m при температуре $-t^{\circ}\text{C}$. Какие качественно различные состояния системы возможны после установления теплового равновесия? Изобразите на плоскости (T, t) области, соответствующие каждому из этих состояний. Каким точкам на этой плоскости соответствует нулевая конечная температура?

2.4. Небольшой алюминиевый шарик с привязанной к нему легкой ниткой вморожен в ледышку массой $M_0 = 100$ г. Свободный конец нити прикреплен ко дну теплоизолированного цилиндрического сосуда, в который налита вода (см. рис. 2.1) массой 0,5 кг, имеющая температуру 20°C . Температура льда и шарика 0°C , начальная сила натяжения нити 0,08 Н. Какова будет температура воды в тот момент, когда сила натяжения нити станет равной нулю? Удельная теплоемкость воды 4200 Дж/(кг $\cdot^{\circ}\text{C}$). Плотность воды 1000 кг/м³, льда 900 кг/м³, алюминия 2700 кг/м³, удельная теплота плавления льда 330 кДж/кг. Считайте, что тепловое равновесие в воде устанавливается мгновенно.

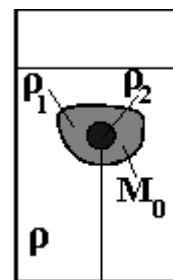


Рис. 2.1

Какова будет температура воды в тот момент, когда сила натяжения нити станет равной нулю? Удельная теплоемкость воды 4200 Дж/(кг $\cdot^{\circ}\text{C}$). Плотность воды 1000 кг/м³, льда 900 кг/м³, алюминия 2700 кг/м³, удельная теплота плавления льда 330 кДж/кг. Считайте, что тепловое равновесие в воде устанавливается мгновенно.

2.5. Ведро, содержащее смесь воды со льдом, внесли в комнату и сразу же начали измерять температуру смеси. Оказалось, что сначала

температура смеси была 0°C , а через 50 минут она начала повышаться и за следующие 10 минут повысилась до 2°C . Какую долю (в процентах) первоначально составляла масса льда от общей массы смеси, находящейся в ведре? Удельная теплоемкость воды $4,2 \text{ кДж}/(\text{кг}\cdot\text{K})$, удельная теплота плавления льда $0,33 \text{ МДж}/\text{кг}$, теплоемкостью ведра пренебречь.

2.6. Экспериментатор набрал на улице мокрого снега, имеющего температуру 0°C , поместил его в морозильную камеру и начал через равные промежутки времени измерять его температуру, заносая данные в журнал (первая запись была сделана сразу после начала эксперимента). Однако впоследствии журнал был испорчен, так что удалось прочитать только значения температуры, соответствующие десятой и одиннадцатой записям: $-0,5^{\circ}\text{C}$ и $-4,0^{\circ}\text{C}$ соответственно. Определите по этим данным массовую долю воды в мокром снеге. Удельная теплоемкость льда $2,1\cdot 10^3 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot^{\circ}\text{C})$, удельная теплота плавления льда $3,35\cdot 10^5 \text{ Дж}/\text{кг}$.

2.7. При испытании новой модели электрического чайника оказалось, что вода нагревается почти до 100°C , но все же не закипает. Чайник рассчитан на мощность нагревателя P и напряжение 110 В . За какое время чайник выкипит наполовину, если его подключить к сети напряжением 220 В ? Масса воды в чайнике M , удельная теплота парообразования воды L . Чайник изготовлен из металла, крышка чайника плотно закрывается.

2.8. В сосуд с водой температуры 20°C поместили электронагреватель и включили его в сеть. За первую минуту вода нагрелась на 3°C , но через очень длительное время вода нагрелась только до температуры 80°C . Когда нагреватель выключили, вода за первую минуту остыла на 4°C . Определите температуру окружающей среды, если известно, что тепловая мощность, отдаваемая в окружающую среду, пропорциональна разности температур тела и среды.

2.9. Экспериментатор запустил секундомер в момент закипания воды в чайнике и определил, что вся вода выкипела через 1781 секунду. Затем экспериментатор заполнил чайник льдом той же массы при нулевой температуре, зажег газ и одновременно запустил секундомер. В журнале экспериментатора записано, что на этот раз вся вода выкипела через 2075 секунд. Цифра θ изображена неразборчиво, это может быть 0 , 3 или 6 .

Определите, какая цифра стоит в журнале? Удельная теплоемкость воды $4,2 \cdot 10^3$ Дж/(кг К), удельная теплота плавления льда $3,34 \cdot 10^5$ Дж/кг, удельная теплота парообразования воды $2,26 \cdot 10^6$ Дж/кг.

2.10*. На рис. 2.2 приведен график зависимости температуры воды в стакане от времени при ее нагревании кипятильником постоянной мощности. Определите, за какое время вода нагреется до 50°C , если ее нагревать в таком же стакане кипятильником в два раза меньшей мощности. Начальная температура воды — комнатная, отсчет времени начинается в момент начала нагрева. Масштаб по оси времени указан в минутах, по оси температуры — в градусах Цельсия.

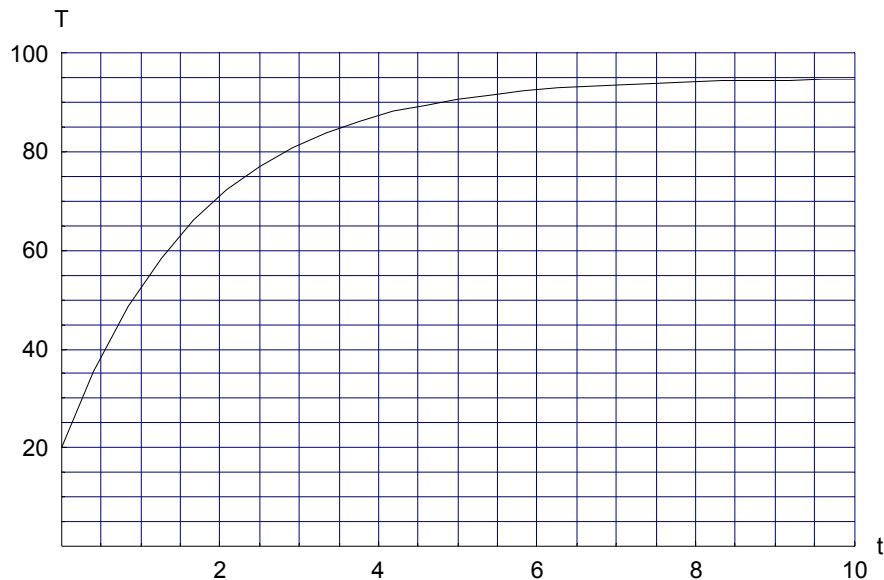


Рис. 2.2

2.11. На краю крыши висят две геометрически подобные сосульки конической формы разной длины. После резкого потепления от 0°C до 10°C меньшая сосулька длины 10 см растаяла за 2 часа. За какое время растает бóльшая сосулька длины 30 см, если внешние условия не изменятся?

2.12. Горячий суп, налитый доверху в большую тонкостенную тарелку, охлаждается до температуры, при которой его можно есть без риска обжечься, за 20 мин. Через какое время можно будет есть суп с той же начальной температурой, если разлить его по маленьким тарелкам, которые также заполнены доверху и геометрически подобны большой? Известно, что суп из большой тарелки помещается в 8 маленьких, а количество тепла, отдаваемое в единицу времени с единицы поверхности

каждой тарелки, пропорционально разности температур супа и окружающей среды.

2.13*. Однажды вечером участники олимпиады решили приготовить чай, для чего опустили кипятильник мощностью 300 Вт в трехлитровую банку с водой и закрыли ее крышкой. Через достаточно длительное время они с удивлением заметили, что вода не закипает, а ее температура равна 80°C и не изменяется. Смогут ли они этим же кипятильником вскипятить воду в двухлитровой банке? В литровой? Если нет, то укажите, до какой максимальной температуры нагреется вода, если да, то оцените, за какое время она закипит. Считайте, что все банки геометрически подобны и заполняются водой полностью, начальная температура воды равна 20°C и совпадает с температурой воздуха в комнате. Удельная теплоемкость воды $c = 4200 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot\text{K})$, теплоемкостью пустой банки можно пренебречь.

2.14. В некотором доме стенки, крыша и пол изготовлены из полностью теплоизолирующих материалов; теплопроводящими являются только двери. В комнате установлена печь (рис. 2.3), выделяющая постоянную мощность. Если дверь между комнатой и прихожей открыта, а на улицу закрыта, то по всему дому устанавливается температура 8°C . Какая температура установится в комнате и прихожей, если закрыть обе двери? Температура воздуха на улице -10°C .

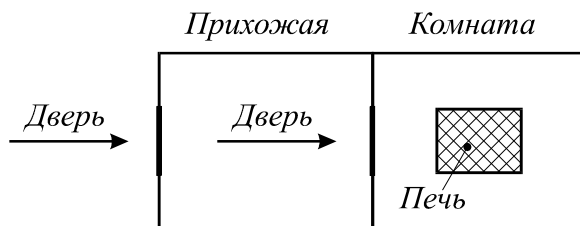


Рис. 2.3

Если дверь между комнатой и прихожей открыта, а на улицу закрыта, то по всему дому устанавливается температура 8°C . Какая температура установится в комнате и прихожей, если закрыть обе двери? Температура воздуха на улице -10°C .

2.15. Когда в лес пришла настоящая зима и температура воздуха понизилась до -30°C , температура внутри ледяной избушки Лисы даже при постоянно топящейся печи упала до -10°C . Приглашенный Лисой Волк модернизировал печь, вследствие чего выделяемая ей тепловая мощность увеличилась вдвое. Определите толщину стенок избушки после такой модернизации, если до нее она составляла 30 см. Считайте, что толщина стенок избушки намного меньше расстояния между ними, а температура воздуха одинакова в любой точке избушки.

Указание: количество тепла, проходящее через единицу площади стены в единицу времени, прямо пропорционально разности температур внутри и снаружи стены и обратно пропорционально ее толщине.

2.16. При проведении эксперимента записывались зависимости напряжения на нити вакуумной лампы накаливания и температуры нити от времени, однако запись температуры была прекращена к моменту подачи второго импульса напряжения (рис. 2.4). Восстановите недостающую часть графика и определите максимальную температуру нити на этом участке.

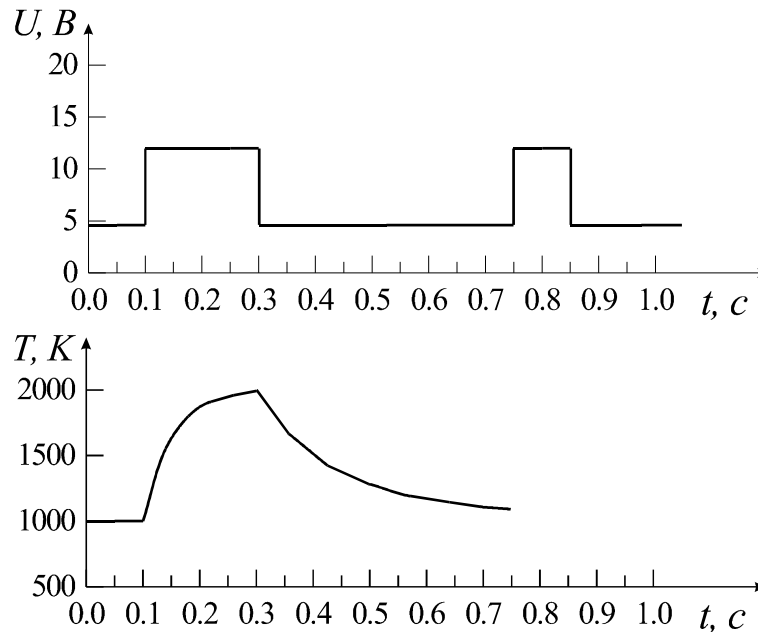


Рис. 2.4

2.17. Оказалось, что температура воздуха в некоторой местности в безветренный пасмурный день может быть описана зависимостью $T(^{\circ}\text{C}) = 20 + 10 \cdot \cos(2\pi t/24 + \varphi)$, где t — время в часах, φ — безразмерная постоянная. Определите, когда достигается максимальная температура воды, равная 25°C , в небольшом пруду, расположенном в той же местности. Температура воздуха максимальна в 15 часов.

2.18. Резиновый шарик массой 2 г надувается гелием при температуре 17°C . По достижении в шарике давления, равного $1,1 \cdot 10^5$ Па, он лопается. Какова была масса гелия в шарике перед тем, как он лопнул, если он имел сферическую форму? Известно, что резиновая пленка рвется при толщине $2 \cdot 10^{-3}$ см. Плотность резины $1,1$ г/см³, молярная масса гелия 4 г/моль.

2.19. При «зарядке» сифонов углекислотой некоторая ее часть растворяется в воде. Определите эту часть при зарядке сифона одним баллончиком, содержащим 1 г углекислоты. Объем не занятой водой части

сифона 0,2 л, температура воды 24°C, давление в сифоне после зарядки и растворения углекислоты 3 атм. Объемом баллончика и изменением температуры при зарядке пренебречь. Молярная масса углекислоты 44 г/моль.

2.20. В цилиндрическом вертикальном сосуде под подвижным поршнем находится воздух. После того, как на поршень положили еще три таких же поршня, расстояние между ним и дном сосуда уменьшилось в три раза. Сколько нужно добавить поршней, чтобы это расстояние уменьшилось еще в три раза? Температура воздуха остается постоянной.

2.21. На столе стоит цилиндрический сосуд высоты h , изготовленный из металла и открытый сверху. Сначала в него опускают один поршень, через большой промежуток времени — второй и так далее — всего 10 поршней. Найдите расстояние между первым и вторым поршнем. Масса m каждого поршня и атмосферное давление p_0 связаны соотношением $mg = p_0S$, где S — площадь сечения цилиндра. Толщина поршней мала по сравнению с высотой сосуда, трением пренебречь.

2.22. Два одинаковых цилиндрических сосуда высоты H с вертикальными стенками соединены трубками (рис. 2.5). В левом сосуде имеется тонкий массивный поршень, способный без трения двигаться вдоль стенок, над поршнем и под поршнем находится идеальный газ. Кран на верхней трубке закрыт, а на нижней открыт; поршень пребывает в равновесии точно в середине цилиндра, при этом давление под поршнем в два раза больше, чем над ним. Нижний кран закрывают, одновременно с этим открывая верхний. На какой высоте установится поршень? Система поддерживается при постоянной температуре.

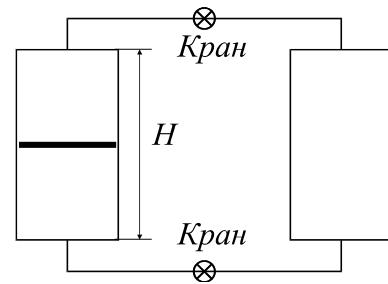


Рис. 2.5

2.23. Внутри сосуда тороидальной формы закреплены симметричным образом три поршня a , b , c . В образованных поршнями отсеках сосуда находятся газы трех сортов: A , B и C (рис. 2.6). Каждый поршень проницаем для газа, обозначенного той же буквой, и непроницаем для двух других газов. Крепления поршней убирают. Найдите относительное

расположение поршней после их остановки. Полное количество газа A — 1 моль, газа B — 2 моля, газа C — 3 моля. Опыт проводится при постоянной температуре.

2.24. В поставленном вертикально цилиндрическом сосуде на высоте h удерживают массивный поршень так, что давление идеального газа в сосуде равно атмосферному давлению p .

Внутри помещен еще один сосуд вдвое меньшего радиуса, заполненный тем же газом под вторым поршнем, который находится в равновесии на высоте $h/2$, при этом давление внутри малого сосуда составляет $(5/4)p$ (рис. 2.7). Как расположатся поршни в равновесии, если поршень в большом сосуде отпустить? Массы обоих поршней одинаковы, оба сосуда изготовлены из материала, хорошо проводящего тепло, температура окружающей среды постоянна.

2.25. Имеется сосуд тороидальной формы, в котором находятся два поршня массы m каждый (рис. 2.8). Один из поршней начинают двигать со скоростью v , а затем через достаточно большой промежуток времени останавливают. Найдите изменение давления газа в сосуде. Первоначальное давление газа p_0 , суммарная масса газа M . Сосуд теплоизолирован, трение отсутствует.

2.26. Цилиндрический сосуд разделен перегородкой на две части, в каждой из которых содержится по 1 молю идеального одноатомного газа, занимающего объем V_0 при давлении p_0 (рис. 2.9а). С газом, находящимся слева от перегородки, проводят процесс, pV -диаграмма которого изображена на рис. 2.9б, а с газом, находящимся справа — на рис. 2.9в. После этого сосуд изолируют от окружающей среды, а перегородку убирают. Найдите установившееся давление газа в сосуде.

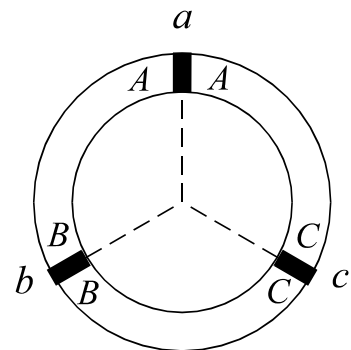


Рис. 2.6

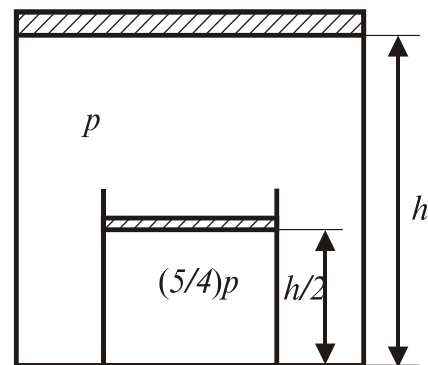


Рис. 2.7

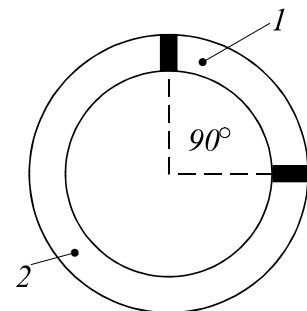


Рис. 2.8

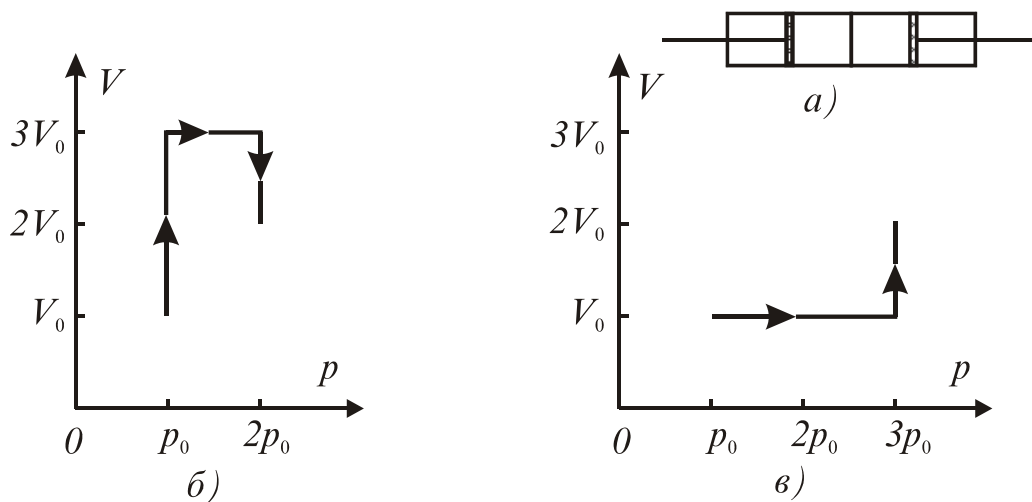


Рис. 2.9

2.27. Внутри сосуда объема V помещена резиновая оболочка объема $V/4$. И сосуд, и оболочка заполнены идеальным газом. В начальном состоянии температура газа T_0 и оболочка не растянута. Когда газ внутри оболочки нагрели до температуры T_1 , сохраняя температуру остального газа неизменной, оболочка раздулась, и ее объем увеличился вдвое. До какой температуры нужно охладить газ в сосуде, поддерживая температуру T_0 внутри оболочки, чтобы она раздулась до тех же размеров? Считайте, что упругие свойства оболочки не зависят от температуры.

2.28. Имеется сосуд, содержащий два одинаковых отсека с клапаном на перегородке. Конструкция клапана такова, что он открывается, если разность давлений превышает определенную величину p , остается открытым в течение времени, достаточного для установления теплового равновесия во всем сосуде, а потом закрывается. Первоначально в обоих отсеках находится одинаковое количество идеального одноатомного газа при давлении p и температуре T . Газ в левом отсеке начинают нагревать до тех пор, пока не откроется клапан. Затем нагрев прекращают и возобновляют его после того, как клапан закроется. Какова будет температура газа, когда клапан закроется в четвертый раз?

2.29. В верхней и нижней частях высокой пустотелой колонны отделены перегородками два отсека, высотой 120 см каждый. Отсеки соединены с основной частью маленькими отверстиями (рис. 2.10). Стенки колонны поддерживаются при некоторой постоянной температуре. Внутри

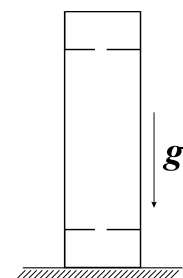


Рис. 2.10

колонны находится одна молекула массы $1,4 \cdot 10^{-22}$ г. При компьютерном моделировании ее движения оказалось, что в нижнем отсеке она проводит $1/1900$, а в верхнем $1/2000$ часть времени. Найдите температуру стенок.

2.30. При проведении процесса, изображенного на pV -диаграмме (см. рис. 2.11), газ водород совершил работу 5 МДж при постоянных давлении и температуре. Определите изменение массы газа в этом процессе, если температура — нулевая по Цельсию. Газ можно считать идеальным.

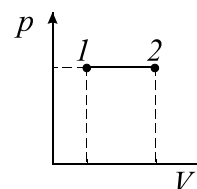


Рис. 2.11

2.31. Идеальному одноатомному газу сообщают количество теплоты Q таким образом, что его внутренняя энергия изменяется пропорционально квадрату объема. Найдите работу, совершенную газом.

2.32. В вертикально расположенном цилиндрическом сосуде с площадью основания S под поршнем массы M находится 1 моль идеального одноатомного газа. В начальном состоянии поршень находится на высоте $2h$ от дна сосуда. Газ медленно охлаждают до тех пор, пока поршень не опустится до высоты h , а затем медленно нагревают до достижения поршнем исходной высоты. Определите среднюю теплоемкость газа в процессе нагревания, если между поршнем и стенками сосуда действует сила сухого трения скольжения F . Атмосферное давление p_0 .

2.33. С одним молем идеального газа совершают цикл, который на pV -диаграмме изображается окружностью (рис. 2.12). Найдите максимальную температуру газа. Получает или отдает газ тепло при прохождении точек, в которых являются минимальными: а) давление, б) температура, в) объем?

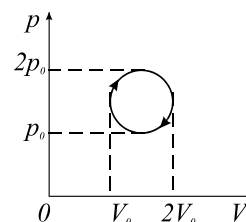


Рис. 2.12

2.34. С некоторым объемом идеального газа осуществляется цикл, показанный на рис. 2.13, причем минимальная температура газа в нем равна T_{min} . Какой объем занимает газ, когда его температура равна $2T_{min}$?

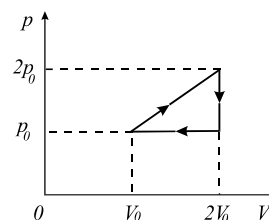


Рис. 2.13

2.35. Тепловой двигатель работает по циклу, состоящему из двух изохор и двух адиабат (см. рис. 2.14). Температура рабочего тела (одноатомного идеального газа) в точках 1, 2 и 4 равна соот-

ответственно $T_1 = 524$ К, $T_2 = 786$ К и $T_4 = 300$ К. Найдите температуру в точке 3 T_3 и коэффициент полезного действия двигателя.

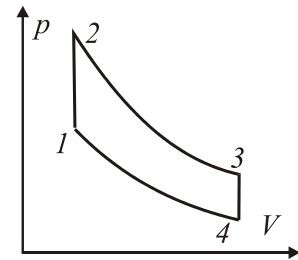


Рис. 2.14

2.36. С идеальным газом совершают цикл 1–2–3–4–5–1–2–6–5–1 (см. рис. 2.15). Найдите работу газа за цикл. Масштаб приведенной диаграммы считайте известным.

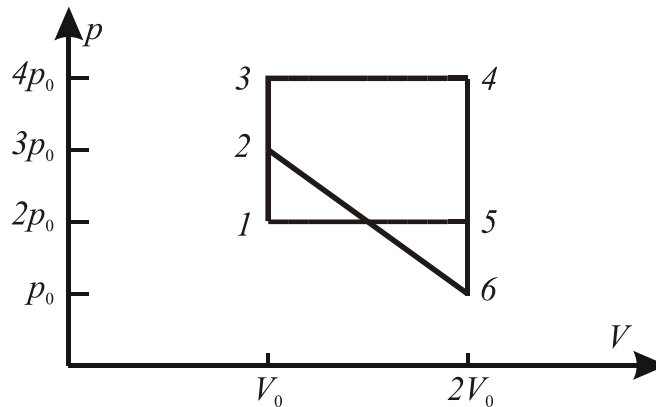


Рис. 2.15

2.37. Имеется теплоизолированный сосуд сложной формы (рис. 2.16), заполненный неоном при давлении P и температуре T . Трубка объемом V соединена небольшим отверстием с так называемым балластным объемом. Через трубку пропускают кратковременный импульс тока длительностью τ .

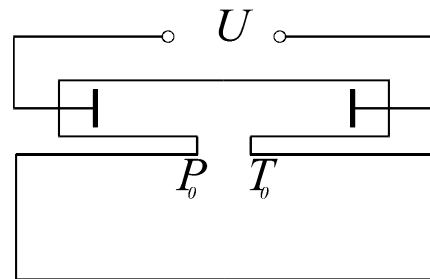


Рис. 2.16

Сила тока I , напряжение U . Для газа в разрядной трубке найдите: а) максимальную температуру, б) температуру в момент, когда давление в трубке и в балластном объеме сравняются. Величина балластного объема намного превышает объем трубки. Известно, что при адиабатическом процессе величина T^5/p^2 остается постоянной.

2.38. Предлагается тепловая машина, работающая на использовании суточного перепада температур. Проектная мощность машины 10 л.с. (1 л.с.=736 Вт). Оцените массу воды, которую понадобится использовать в качестве теплового резервуара. Исходя из результата, объясните, почему такие машины не нашли широкого применения.

2.39. Домашний аквариум в виде полусферы диаметром 30 см был налит водой почти до краев и поставлен в комнате. Через двое суток уровень воды в нем понизился на 1 см. Считая, что температура и влажность воздуха в комнате постоянны, найдите время, за которое вода из аквариума полностью испарится.

2.40. В открытый сосуд налили некоторое количество воды, находящейся при 0°C , а затем герметично закрыли его (при этом в сосуде оказалось также некоторое количество воздуха). Подождав длительное время, сосуд начали медленно нагревать, измеряя при этом температуру и давление внутри сосуда. Полученные результаты представлены в таблице. Оцените по этим данным температуру, при которой вся вода в сосуде испарилась, а также относительную влажность воздуха в сосуде при температуре 100°C . Атмосферное давление 10^5 Па.

$t, ^\circ\text{C}$	0	10	20	30	40	50
$p, 10^5$ Па	1,005	1,050	1,097	1,152	1,221	1,309
$t, ^\circ\text{C}$	60	70	80	90	95	100
$p, 10^5$ Па	1,422	1,574	1,776	1,928	1,954	1,980

2.41. Под подвижным поршнем в вертикально расположенном цилиндре находится 22,4 л воздуха при давлении 3 атм. ($1 \text{ атм.} \approx 10^5$ Па.) Кроме того, на дне цилиндра разлито немного воды, объемом которой можно пренебречь. Медленно поднимая поршень, объем цилиндра увеличили вдвое, оставив температуру стенок неизменной, при этом вода на дне почти исчезла, а давление в цилиндре упало до 2 атм. Каким станет давление в цилиндре, если его объем еще раз удвоить, сохраняя температуру стенок прежней? Определите, какая часть воды находилась в жидком состоянии в начале опыта, а также массы воздуха и воды в цилиндре. Молярные массы воздуха 29 г/моль, воды 18 г/моль.

Электромагнитные явления

3.1. Проточный нагреватель воды Винтика и Шпунтика состоит из трубы длиной $L = 1$ м, поперечное сечение которой представляет собой прямоугольник размерами $a \times d$. Стенки размера $L \times a$ сделаны из металла, а размера $L \times d$ — из диэлектрика (см. рис. 3.1). Нагрев прокачиваемой по трубе воды осуществляется электрическим током, для чего к металлическим стенкам прикладывается постоянное напряжение. Определите, каким должно быть это напряжение, чтобы устройство обеспечивало нагрев 600 литров воды в час от 10°C до 60°C , если $a = 20$ см, $d = 1$ см. Используемая в нагревателе вода имеет следующие характеристики: плотность 10^3 кг/м³, удельная теплоемкость $4,2 \cdot 10^3$ Дж/(кг \cdot °C), удельное сопротивление 10 Ом \cdot м. Теплоемкостью трубы и потерями тепла пренебречь.

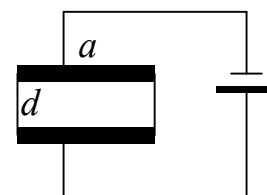


Рис. 3.1

3.2. Электронагреватель плоской формы рассчитан на напряжение 220 В. После того, как слева от нагревателя на небольшом расстоянии поставили плоское идеально отражающее зеркало, оказалось возможным уменьшить питающее напряжение; при этом показание термометра, установленного вблизи нагревателя справа от него, не изменилось. Найдите новое значение питающего напряжения.

3.3. Во время лабораторной работы ученик соединил последовательно три одинаковых резистора и подключил их к источнику постоянного напряжения (см. рис. 3.2), а затем измерил напряжение на различных участках этой цепи при помощи вольтметра.

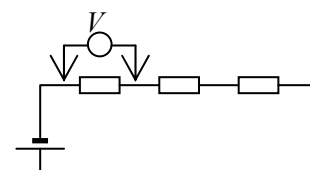


Рис. 3.2

Подключенный параллельно всем трем резисторам вольтметр показал 4 В, а подключенный параллельно одному резистору (см. рис. 3.2) — 1 В. Каковы будут показания вольтметра, если его подключить параллельно двум резисторам? Источник идеальный.

3.4. Вольтметр, подключенный к идеальному источнику постоянного напряжения через некоторое неизвестное сопротивление (рис. 3.3),

показывает 10 В. Если параллельно к этому вольтметру присоединить второй такой же вольтметр, то показания каждого из приборов составят 8 В. Каково напряжение источника?

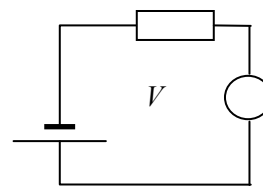


Рис. 3.3

3.5. Из куска проволоки с сопротивлением 5 Ом изготовлено кольцо. В каком отношении должны делить окружность точки подключения проводов, чтобы сопротивление между ними оказалось равным 1 Ом?

3.6. Определите сопротивление изготовленного из однородной проволоки контура (рис. 3.4), подключенного за клеммы А и В. Сопротивление одной стороны «внутреннего» треугольника R .

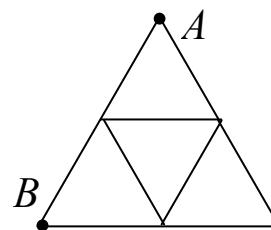


Рис. 3.4

3.7. Определите токи I_1 , I_2 и I_3 , текущие через амперметры A_1 , A_2 и A_3 соответственно (рис. 3.5). Напряжение $U = 10$ В, сопротивление $R = 100$ Ом, сопротивлением амперметров пренебречь.

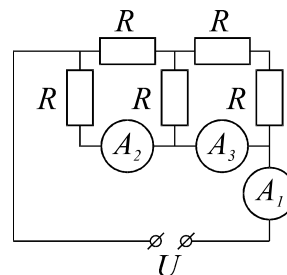


Рис. 3.5

3.8. Найдите ЭДС и внутреннее сопротивление сложного источника с бесконечным числом звеньев (см. рис. 3.6). ЭДС и внутреннее сопротивление каждого отдельного элемента равны соответственно \mathcal{E} и R .

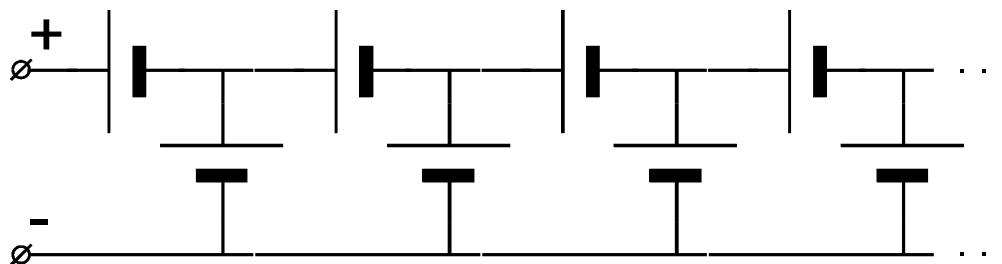


Рис. 3.6

3.9. На вход показанной на рис. 3.7 бесконечной цепочки из одинаковых сопротивлений $R = 1$ Ом подано напряжение $U = 1$ В. Найдите ток через сопротивление, показанное штриховкой.

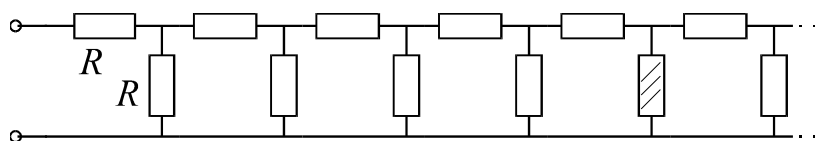


Рис. 3.7

3.10. Имеется проволочная рамка (рис. 3.8), составленная из одинаковых ячеек в форме квадрата. Сопротивление рамки, измеренное между точками В и D, оказалось равным 25 Ом, а между точками А и С — 3,66 Ом. Определите число звеньев в рамке. Точки В и D расположены точно посередине соответствующих сторон, проволока однородная.



Рис. 3.8

3.11. Исследуя зависимость тока, протекающего через некоторый электрический элемент, от приложенного к нему напряжения, ученик получил изображенный на рис. 3.9 график. Какая тепловая мощность будет выделяться на этом элементе, если его подключить к источнику постоянного напряжения 5 В? Как изменится эта мощность, если к тому же источнику подключить последовательно два таких элемента? Считайте, что напряжение на выводах источника не зависит от текущего в цепи тока.

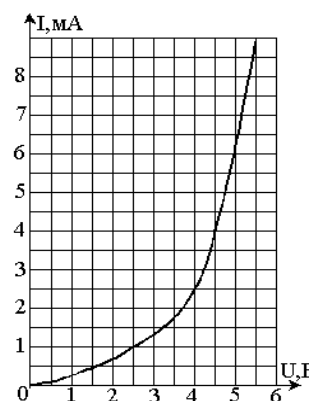


Рис. 3.9

3.12. Имеется цепь, состоящая из источника постоянного тока напряжением U , сопротивления R , конденсатора C и неоновой лампы N (см. рис. 3.10).

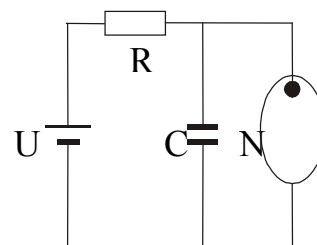


Рис. 3.10

Неоновая лампа обладает следующими свойствами: она загорается, когда напряжение на ней больше, чем некоторое значение U_1 ($U_1 < U$), и гаснет, когда напряжение на ней меньше некоторого значения U_2 ($U_2 < U_1$). Сопротивление горящей лампы равно R_0 ($R_0 \ll R$), сопротивление потухшей лампы бесконечно велико. Рассчитайте среднеквадратичное значение тока, протекающего через лампу за время её горения, если между двумя последовательными моментами ее зажигания и погасания проходит время τ .

3.13. Постройте вольт-амперную характеристику (зависимость силы тока I от напряжения U , которое может быть как положительным, так и отрицательным) схемы, показанной на рис. 3.11. Диоды и источники идеальные (сопротивление идеального диода бесконечно мало при вклю-

чении в прямом направлении и бесконечно велико при включении в обратном направлении).

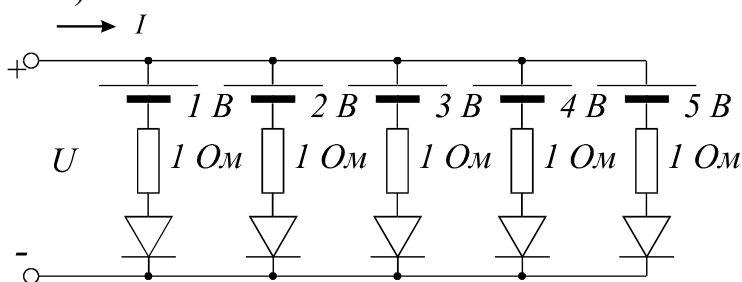


Рис. 3.11.

3.14. На стеклянный стержень, покрытый непроводящей смазкой, надета заряженная бусинка с зарядом q . В пространстве создано постоянное во времени электрическое поле, у которого параллельная стержню составляющая напряженности зависит от координаты вдоль стержня по закону $E = E_0 \sin(kx)$, где E_0 и k — постоянные. Частице толчком сообщают некоторую скорость вдоль стержня. Вследствие потерь на вязкое трение когда-нибудь частица остановится. В каких точках можно обнаружить остановившуюся частицу?

3.15. На абсолютно гладкой непроводящей поверхности удерживают два металлических кубика (рис. 3.12). На один кубик помещен положительный заряд $+q$, на другой — отрицательный $-q$. Кубики отпускают. Через какое время они столкнутся? Расстояние h между ближайшими друг к другу гранями кубиков много меньше стороны кубика a . Плотность материала кубиков ρ .

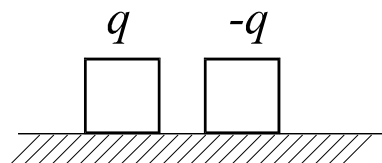


Рис. 3.12

3.16. Из вершин правильного шестиугольника со стороной 1 м одновременно пускают по направлению к центру шесть одинаковых заряженных частиц. Начальная скорость частиц 1 м/с. Когда расстояние между частицами уменьшилось в два раза, скорость каждой также уменьшилась вдвое. До какого минимального расстояния сблизятся частицы?

3.17. В вершинах А и В квадрата ABCD закреплены два одинаковых положительных заряда Q , а в вершинах С и D — два одинаковых отрицательных заряда $-q$. Электрон, отпущенный из бесконечности, движется точно по оси, проходящей через центр квадрата параллельно сторонам ВС и AD. При каком отношении Q/q электрон может пролететь систему насквозь? Считайте, что электрон все время остается на оси системы.

3.18. Две бесконечные плоскости, по каждой из которых равномерно распределен заряд с поверхностной плотностью σ , пересекаются под прямым углом (рис. 3.13). Посередине линии АВ расположена точечная частица с зарядом q того же знака, что и плоскости, и массы m , которой сообщают скорость v , направленную параллельно одной из плоскостей. На каком расстоянии от начальной точки частица вновь пересечет линию АВ? Столкновения частицы с плоскостью не происходит.

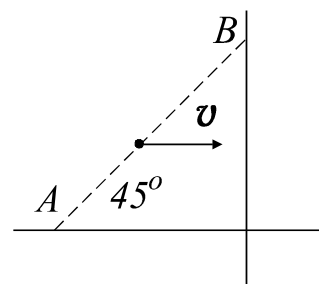


Рис. 3.13

3.19. Предложена следующая модель молекулы водорода: два протона находятся на некотором расстоянии друг от друга, а два электрона движутся симметрично по круговой орбите радиуса $64 \cdot 10^{-12}$ м в плоскости, перпендикулярной к соединяющей протоны оси. Найдите расстояние между протонами, при котором они пребывают в равновесии. Заряды электрона и протона равны по величине и противоположны по знаку.

3.20. Тонкий диэлектрический стержень, на концах которого укреплены два разноименно заряженных шарика, помещен в однородное электрическое поле напряженности E и ориентирован параллельно его силовым линиям. Какую минимальную работу надо затратить, чтобы повернуть его на 180° ? Длина стержня l , заряд каждого шарика q .

3.21. Оцените отношение электрического поля на расстояниях $x = 0,01r$ и $x = 100r$ от центра O равномерно заряженного диска с поверхностной плотностью σ . Радиус диска r . Ось Ox перпендикулярна плоскости диска и проходит через его центр (рис. 3.14).

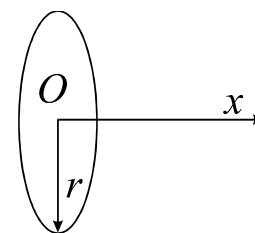


Рис. 3.14

3.22. По поверхности полусферы (рис. 3.15) равномерно распределен электрический заряд. В таблице приведена рассчитанная на компьютере зависимость потенциала электростатического поля от расстояния вдоль оси Ox при $x > 0$. Найдите потенциал в точке А ($OA = 1,5R$). Начало координат совпадает с центром полусферы.

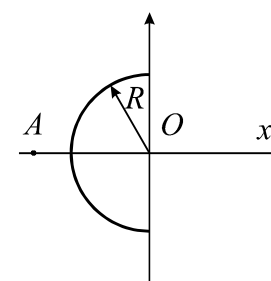


Рис. 3.15

x/R	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
φ , В	100	76,4	58,6	46,5	38,2	32,3	27,6

3.23. В таблице приведены рассчитанные на компьютере значения напряженности электрического поля E , создаваемого квадратной решеткой (рис. 3.16) из $N \times N$ одинаковых точечных зарядов, в зависимости от координаты x . Определите величины точечных зарядов, шаг решетки a , число N . Ось x перпендикулярна решетке и проходит через ее центр.

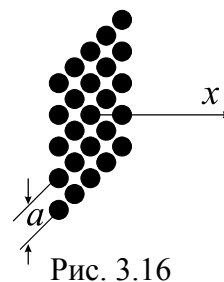


Рис. 3.16

x	0,1 см	0,25 см	0,5 см	1 см	1,5 см	2 см	3 м
E , В/м	100,8635	18,0659	7,6039	6,0110	5,8020	5,6405	0,0135657

3.24. По дуге в одну четверть окружности равномерно распределен некоторый заряд q (рис. 3.17а). При этом в точке А вектор электрического поля имеет составляющие $E_x = 4,41$ В/м, $E_y = 12,28$ В/м, а в точке В $E_x = 0,91$ В/м, $E_y = -3,25$ В/м. Найдите составляющие вектора электрического поля в точке С в случае, когда тот же самый заряд q распределен по дуге в три четверти окружности (рис. 3.17б).

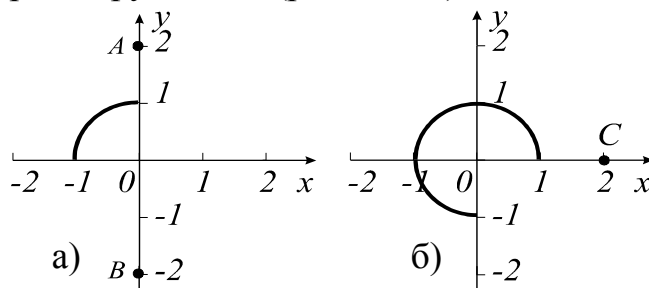


Рис. 3.17

3.25. Исследуется сила взаимодействия металлического шара и точечной положительно заряженной частицы, находящейся на фиксированном расстоянии от шара. Когда на шар поместили некоторый положительный заряд, то оказалось, что шар и частица притягиваются с силой f_1 , а когда заряд удвоили — с силой f_2 . Какова будет сила взаимодействия, если заряд шара утроить?

3.26. Точечный заряд q помещен в центр сферы, по поверхности которой равномерно распределен заряд Q . В сфере вырезают маленькое отверстие радиуса r . Найдите силу, действующую на точечный заряд. Радиус сферы R .

3.27. Вокруг звезды «Икс» вращаются две планеты массой $6 \cdot 10^{24}$ кг каждая, состоящие из несжимаемой жидкости плотностью 1000 кг/м³.

Одна из планет электрически нейтральна, а по объему второй равномерно распределен электрический заряд 10^4 Кл. Найдите отношение давлений в центре планет.

3.28. В невесомости в состоянии покоя находится гантелька, которая состоит из двух маленьких одинаковых массивных шаров, несущих заряды $+q$ и $-q$ и скрепленных нерастяжимым изолирующим легким стержнем длины l . В пространстве внезапно возникает однородное электрическое поле. Какова должна быть его напряженность, чтобы гантелька разорвалась? Известно, что стержень рвется, если сила его натяжения превышает F .

3.29. В невесомости покоится заряженное кольцо. Из бесконечности через него пускают другое кольцо меньшего радиуса с той же массой и несущее такой же заряд. Оказалось, что малое кольцо пролетает через большое, если начальная скорость малого кольца превышает величину v_0 . Какими будут скорости колец в момент пролета малого через большое, если начальная скорость малого кольца равна $2v_0$? Плоскости колец все время остаются перпендикулярны оси движения.

3.30. Воздушный конденсатор, заряженный до напряжения 120 В, подключается параллельно к незаряженному конденсатору таких же геометрических размеров, но заполненному непроводящей жидкостью, относительная диэлектрическая проницаемость которой прямо пропорциональна напряжению на конденсаторе. При каком коэффициенте пропорциональности этой зависимости напряжение на соединенных конденсаторах станет равным 40 В?

3.31. Горизонтально расположенный плоский конденсатор подключен к источнику напряжения. Около верхней пластины удерживают с помощью магнита маленький железный шарик (рис. 3.18), затем магнит быстро убирают. Известно, что шарик начинает прыгать внутри конденсатора, попеременно касаясь обеих пластин, если значение приложенного напряжения превышает некоторое значение U_0 . Найдите период колебаний шарика, если приложенное напряжение равно $\sqrt{3} U_0$. Известно, что

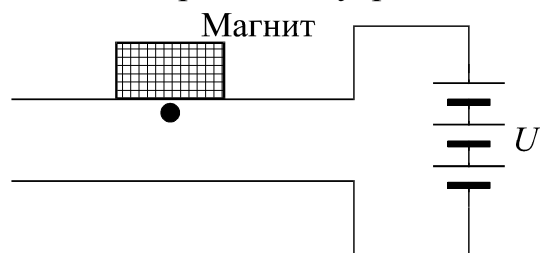


Рис. 3.18

в отсутствие напряжения высота каждого последующего подпрыгивания шарика в 2 раза меньше высоты предыдущего. Пластины изготовлены из немагнитного проводящего материала, расстояние между ними h . Удар шарика о верхнюю пластину абсолютно упругий.

3.32. В плоский конденсатор помещен легкий стержень длины l , на концах которого находятся два точечных заряда $+q$ и $-q$ (рис. 3.19). Стержень может без трения вращаться вокруг оси, проходящей через его середину.

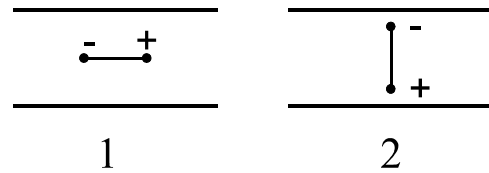


Рис. 3.19

В моменты, когда стержень находится в положении 1, на пластины конденсатора подают напряжение U_0 , которое выключают, когда стержень оказывается в положении 2. Определите интервал времени между 9-м выключением и 10-м включением напряжения. В начальный момент времени стержень находится в положении 1 и не вращается. Расстояние между пластинами d , масса каждого шарика m .

3.33. Три тонких листа, несущих положительные заряды с поверхностными плотностями σ , 2σ , 3σ соответственно, удерживают параллельно друг другу так, что расстояние между ними много меньше их размеров (рис. 3.20). С какими ускорениями начнут разлетаться листы, если их отпустить? Масса единицы площади каждого листа ρ .

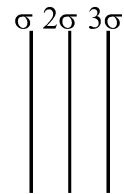


Рис. 3.20

3.34. Моль воздуха находится в диэлектрическом цилиндре сечения S между двумя свободно скользящими металлическими поршнями, к которым приложено постоянное напряжение U . Как зависит установившееся расстояние между поршнями от температуры, если атмосферное давление постоянно и равно p_0 ? Оцените возможность экспериментального наблюдения этой зависимости и ее использования для измерения температуры. Электрическая постоянная $0,885 \cdot 10^{-11}$ Ф/м; атмосферное давление $1,013 \cdot 10^5$ Па; универсальная газовая постоянная $8,314$ Дж/(моль \cdot К), диэлектрическую проницаемость воздуха считать равной единице.

3.35. На две близко расположенные металлические сетки подано переменное напряжение с амплитудой U и частотой ω . Через сетки со скоростью v_0 летит пучок электронов. Оказалось, что за сетками электроны собираются в компактные сгустки (рис.3.21). Оцените, на каком расстоя-

нии от сеток они образуются. Считайте, что изменение энергии электронов при прохождении промежутка мало по сравнению с их кинетической энергией ($eU \ll mv_0^2 / 2$), а кулоновским расталкиванием электронов можно пренебречь.

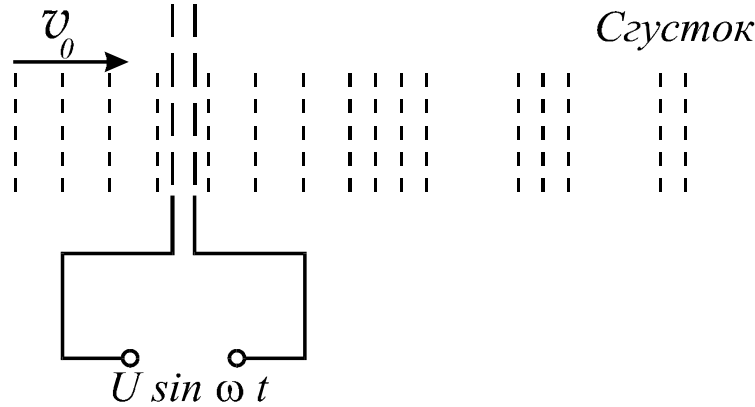


Рис. 3.21

3.36. Два подобных друг другу гальванических элемента изготовлены из идентичных материалов, а все размеры одного из них в 2 раза больше, чем другого. Как соотносятся их электрические характеристики: ЭДС, внутреннее сопротивление, эффективное время работы на постоянную нагрузку?

3.37. В однородное магнитное поле с индукцией B помещена фигура в виде тонкой металлической пластинки толщины d , имеющей форму равностороннего треугольника со стороной $l \gg d$. К вершинам А и В треугольника (рис. 3.22) с помощью длинных и мягких проводов подключен источник постоянного напряжения с внутренним сопротивлением R_0 . Найдите ускорение пластинки. Массой и сопротивлением подводящих проводов, а также сопротивлением пластинки пренебречь. Плоскость фигуры перпендикулярна магнитному полю, плотность материала пластинки ρ , ЭДС источника \mathcal{E} .

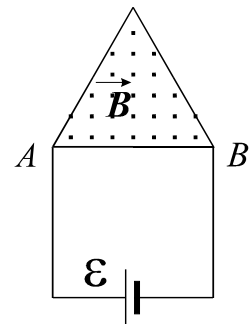


Рис. 3.22

3.38. Из точки А с высоты H (см. рис. 3.23) отпускают без начальной скорости частицу с массой M и зарядом Q . Движение происходит в однородном поле силы тяжести (ускорение свободного падения g направлено вертикально вниз) и в однородном магнитном поле (вектор магнитной индукции B направлен перпендикулярно плоскости рисунка).

В момент прохождения нижней точки траектории (т. В) эта частица сталкивается со второй, незаряженной частицей, отпущенной также без начальной скорости с той же высоты (из т. С) в подходящий момент времени. После соударения заряженная частица полетела по горизонтальной траектории в плоскости рисунка, а вторая приземлилась в точке Е, отклонившись от вертикали на $DE = l$. Найдите массу второй частицы. Длина отрезка BC равна h . Считайте, что удар абсолютно упругий и заряд при ударе не передается.

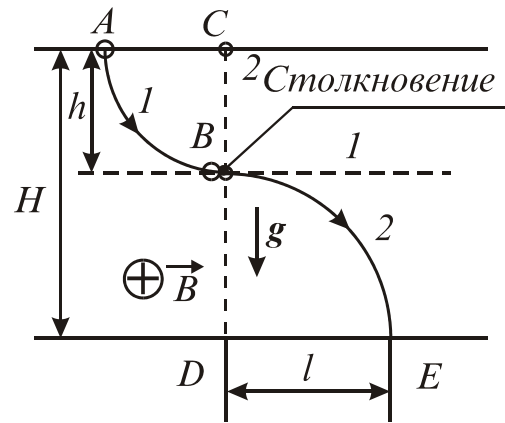
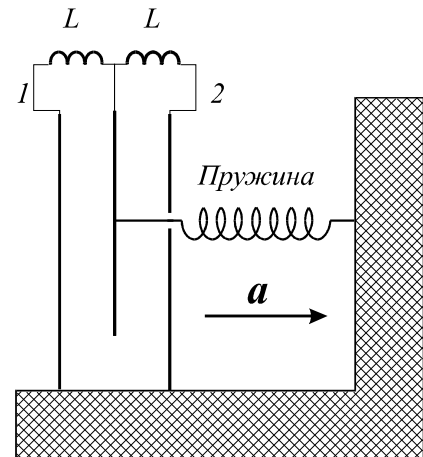


Рис. 3.23

3.39. Прибор для измерения ускорения содержит три металлические пластины — две неподвижные и одну подвижную, прикрепленную к пружине. Пластины соединены легкими гибкими проводами с двумя катушками индуктивности, как показано на рис. 3.24. При движении прибора с некоторым ускорением были измерены собственные частоты электрических контуров 1 и 2, и их отношение оказалось равным 1,05. Найдите величину ускорения. Жесткость пружины 100 Н/м, масса подвижной пластины 1 г. В покое подвижная пластина расположена на расстоянии 0,5 мм от каждой из подвижных пластин.



Непроводящий материал

Рис. 3.24

3.40. Электромобиль снабжен электромотором, для которого угловая скорость вращения ведущих колес прямо пропорциональна ЭДС индукции с известным коэффициентом пропорциональности k . Найдите установившуюся скорость движения автомобиля. Сила сопротивления воздуха прямо пропорциональна скорости автомобиля с известным коэффициентом пропорциональности α . Колеса автомобиля не проскальзывают, их радиус r . Электромотор включен в сеть с ЭДС E , сопротивление цепи R .

Геометрическая оптика

4.1. Болельщик на стадионе делает снимок финиша забега на 100 метров, находясь сбоку от дорожки на расстоянии 10 м от фотографируемого спортсмена. Оцените выдержку, с которой он должен фотографировать, чтобы при печати с негатива фотоснимка размером 10×15 см он получился резким. Размеры кадра фотопленки 24×36 мм, расстояние от объектива до фотопленки 30 мм, разрешающая способность используемой фотопленки 120 лин/мм. Известно, что глаз способен различить два объекта, угол между направлениями на которые составляет одну угловую минуту, а снимок рассматривается с расстояния наилучшего зрения 25 см.

4.2. Трюмо в комнате Знайки состоит из трех одинаковых зеркал, два из которых закреплены под углом 45° к третьему (см. рис. 4.1).



Рис. 4.1

От времени центральное зеркало испортилось и перестало отражать свет. Сколько своих изображений сможет увидеть Знайка, если он находится на оси симметрии трюмо на расстоянии a от центрального зеркала? Постройте все изображения Знайки в зеркалах трюмо. Длина каждого зеркала l , высота больше роста Знайки.

4.3. К одному концу цилиндрической трубы радиуса R и длины $4F$, внутренние стенки которой являются идеальными зеркалами, представлена идеальная собирающая линза с фокусным расстоянием F , главная оптическая ось которой совпадает с осью трубы, а другой конец трубы закрыт непрозрачной заслонкой (см. рис. 4.2).

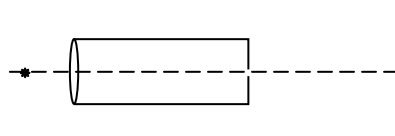


Рис. 4.2

На расстоянии $4F$ справа от трубы размещен перпендикулярно ее оси экран, а слева от трубы на ее оси находится точечный источник света. В точке пересечения оси трубы с заслонкой в последней проделано маленькое отверстие так, что если источник света находится в фокусе линзы, то в центре экрана видно точечное световое пятно. Каковы будут

форма и размер светлых пятен на экране, если источник удален от линзы на расстояние $L > F$?

4.4. В меньшее основание усеченного конуса с углом наклона образующей 30° и зеркальной внутренней поверхностью встроена собирающая тонкая линза. Конус освещается широким параллельным пучком света, падающим параллельно его оси (см. рис. 4.3). Изобразите картину, наблюдаемую в фокальной плоскости линзы.

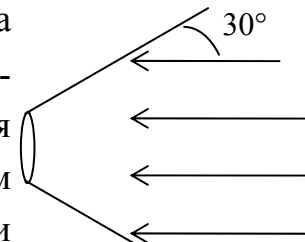


Рис. 4.3

4.5. Три среды с показателями преломления n_1 , n_2 и n_3 ($n_1 > n_2 > n_3 > 1$) располагаются так, как показано на рис. 4.4. Два луча идут параллельно друг другу, при этом луч 1 проходит только через среды I и III, а луч 2 — через среды II и III. Определите угол между этими лучами в среде III.

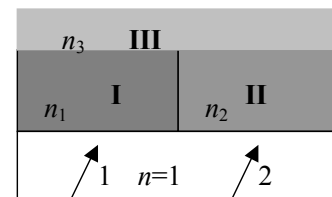


Рис. 4.4

4.6. Объясните, почему часто близорукие люди наклоняют очки, а дальнорюкие — сдвигают очки на нос?

4.7. Перед идеальной собирающей линзой с фокусным расстоянием F расположен квадрат со стороной F так, что его центр находится на главной оптической оси на расстоянии $2F$ от линзы, а две стороны параллельны главной оптической оси. Постройте изображение квадрата в линзе и определите, во сколько раз его площадь больше площади самого квадрата.

4.8. Идеальная собирающая тонкая линза с фокусным расстоянием F имеет форму диска диаметра d и заключена в оправу с внешним диаметром D . За линзой на расстоянии F от ее оптического центра перпендикулярно главной оптической оси расположен плоский экран достаточно большой площади. Перед линзой на ее главной оптической оси размещен точечный источник света. Получите формулу зависимости площади тени, отбрасываемой оправой на экран, от расстояния l между источником и оптическим центром линзы, если $F < l < \infty$. Постройте график этой зависимости.

4.9. В пустом аквариуме установлены изготовленная из стекла двояковыпуклая линза и предмет, находящийся в ее фокусе. Аквариум запол-

няют водой так, что линза и предмет оказываются полностью погруженными в воду. Постройте (качественно) изображение предмета в линзе.

4.10. В центре собирающей линзы с фокусным расстоянием F_1 вырезано круговое отверстие и в него вставлена собирающая линза с меньшим фокусным расстоянием F_2 (см. рис. 4.5). Постройте изображение предмета, показанного на рисунке, в этой «двойной» линзе.

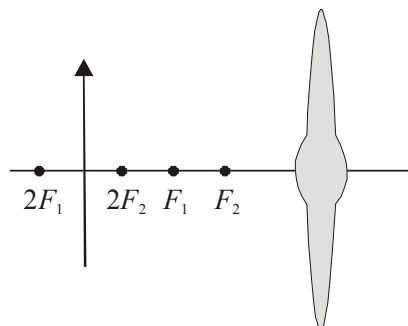


Рис. 4.5

4.11. Аккуратно распилив симметричную двояковыпуклую линзу, получили две одинаковые плоско-выпуклые линзы. Их сложили плоскими сторонами и осветили параллельным пучком света, получив при этом точечное изображение источника на расстоянии F за ними. Затем одну из них оставили на месте, а другую сдвинули в то место, где было изображение при сложенных линзах (см. пунктир на рис. 4.6). Постройте ход лучей в получившейся системе и определите, где (на каком расстоянии от первой линзы) теперь будет изображение. Все линзы считайте тонкими.

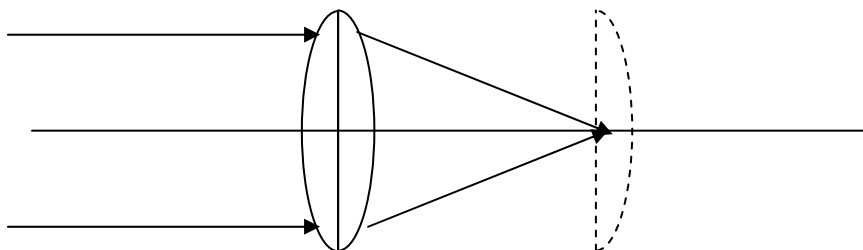


Рис. 4.6

4.12. Две одинаковые собирающие линзы с фокусным расстоянием F и точечный источник света расположены так, как показано на рис. 4.7, при этом расстояние от источника до первой линзы и расстояние между линзами равны F . Определите, как (в каком направлении и на какое расстояние) сместится изображение источника в этой системе, если повернуть на небольшой угол α а) вторую линзу (см. пунктир на рис. 4.7); б) первую линзу?

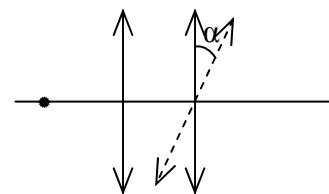


Рис. 4.7

4.13. Тонкую собирающую линзу диаметром D с фокусным расстоянием F аккуратно распилили пополам по плоскости, содержащей глав-

ную оптическую ось, и каждую из полученных половинок повернули на угол α относительно «старого» положения (см. рис. 4.8). Полученный «угол» вставили в отверстие в непрозрачном экране и освещают широким параллельным пучком света, идущим параллельно оси симметрии «угла». На расстоянии F от его вершины перпендикулярно его линии симметрии и направлению падающего пучка расположили линейку. Определите размер освещенной области на ней. Считайте, что линза столь тонкая, что влиянием «щели», образовавшейся в ней в результате наклона половинок, можно пренебречь.

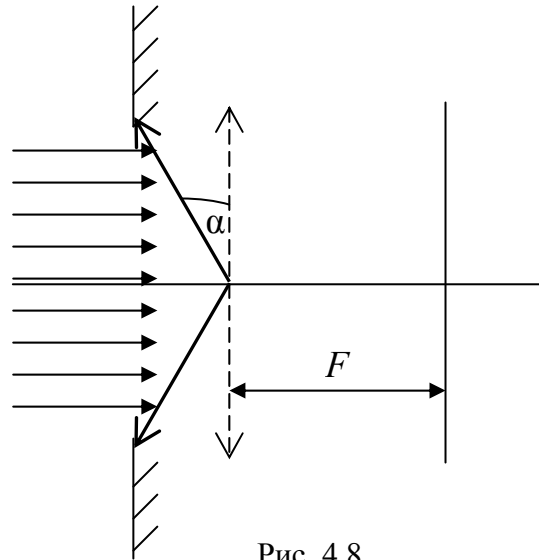


Рис. 4.8

Колебания и волны

5.1. К концу пружины подвешены два одинаковых груза массы m каждый, соединенные нитью (рис. 5.1). В некоторый момент нить пережигают. Найдите амплитуду колебаний верхнего груза. Коэффициент жесткости пружины k , массами пружин и нити можно пренебречь.

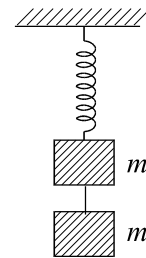


Рис. 5.1

5.2. Маятник отклонили на угол $\pi/2$ от вертикали и отпустили, при этом он вернулся в исходное положение через время t_1 . Когда же на пути маятника поставили стенку (рис. 5.2), время возвращения в исходное положение составило t_2 . Найдите угол α , если известно, что он мал. Удар о стенку мгновенный и абсолютно упругий, длина нити l , трением пренебречь.

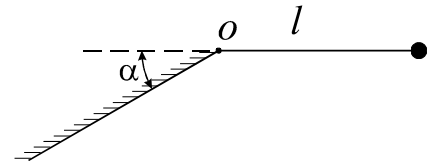


Рис. 5.2

5.3. К наклонной стенке, составляющей малый угол α с вертикалью, подвешен на невесомой нерастяжимой нити тяжелый шарик. Его отвели влево на малый угол β , больший α (см. рис. 5.3), и отпустили. Удары шарика о стенку таковы, что отношение кинетической энергии шарика сразу после удара к кинетической энергии шарика сразу перед ударом равно K ($0 < K < 1$). Определите последовательность максимальных углов отклонения шарика влево.

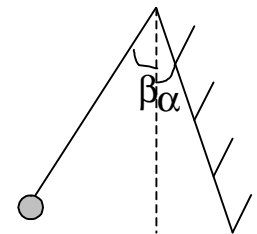


Рис. 5.3

5.4. Грузик массы m прикреплен к пружине жесткости k и может двигаться по горизонтальной плоскости без трения (рис. 5.4). Грузику ударом сообщают скорость v_0 . Нарисуйте график зависимости его периода колебаний от начальной скорости v_0 . Расстояние от грузика до стенки l , удары о стенку абсолютно упругие.

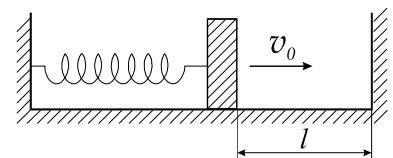


Рис 5.4

5.5. Шарик массы 100 г может колебаться на пружине с частотой 2 Гц. Вначале система находится в покое, затем на шарик начинает дей-

ствовать сила, график зависимости которой от времени приведен на рис. 5.5. Найдите амплитуду колебаний шарика.

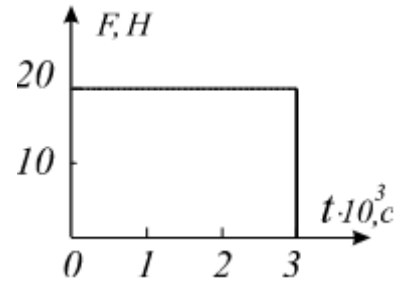


Рис. 5.5

5.6*. Шарнирная конструкция в виде квадрата лежит на гладком горизонтальном столе и жестко скреплена с ним в вершине А (см. рис. 5.6). Шарниры В и С соединены пружиной жесткости k . Найдите период малых колебаний системы, если массами пружин, стержней, шарниров В и С по сравнению с массой m шарнира Н можно пренебречь, а трение всюду отсутствует.

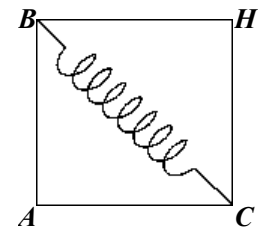


Рис. 5.6

5.7. В сосуде с газом находятся два поршня массы M каждый, скрепленные пружиной жесткости k (рис. 5.7). В состоянии покоя пружина не деформирована, а объемы всех трех частей сосуда одинаковы. Считая, что температура системы остается постоянной, определите частоту колебаний поршней. Трение между поршнями и стенками сосуда отсутствует. Полная длина сосуда L , площадь поперечного сечения S .

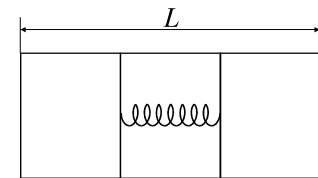


Рис. 5.7

5.8. В каждой части горизонтально расположенного цилиндрического сосуда длины $2l$, разделенного пополам поршнем массы m , находится по 1 молю насыщенного водяного пара. Сосуд поддерживается при постоянной температуре T_0 .

а) Определите период малых колебаний поршня.

б) Как он изменится, если немного нагреть сосуд? Немного охладить?

в) Каким будет период колебаний, если при температуре T_0 в каждой части сосуда находится по 1 молю воды и насыщенного водяного пара? Насыщенного водяного пара и воздуха? Молярная масса воды $M_{\text{воды}}$, воздуха $M_{\text{возд}}$, трением пренебречь.

5.9. На боковой поверхности трубы (рис. 5.8) равномерно распределен положительный заряд с поверхностной плотностью σ . По оси трубы может двигаться

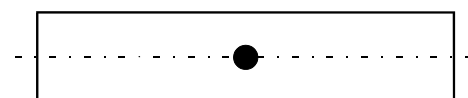


Рис. 5.8

шарик массы m , несущий отрицательный заряд $-q$. Найдите период малых колебаний шарика возле середины трубы. Длина трубы l намного больше ее диаметра d .

5.10. Математический маятник в виде невесомого стержня с грузом массы m находится вблизи верхнего (неустойчивого) положения равновесия (рис. 5.9а). Маятник может совершать движения только в плоскости, перпендикулярной рисунку. Его прикрепляют к двум пружинам жесткости k так, как показано на рис. 5.9б. Пружины не деформированы, когда маятник находится точно в верхнем положении равновесия. Маятник смещают на очень малое расстояние перпендикулярно плоскости рисунка и отпускают (рис. 5.9в). Найдите размах колебаний маятника. Считайте, что смещение маятника мало по сравнению с его длиной L и длинами недеформированных пружин l .

Указание. При малых x и α справедливы соотношения $(1+x)^a \approx 1 + ax$ и $\cos\alpha \approx 1 - \alpha^2/2$.

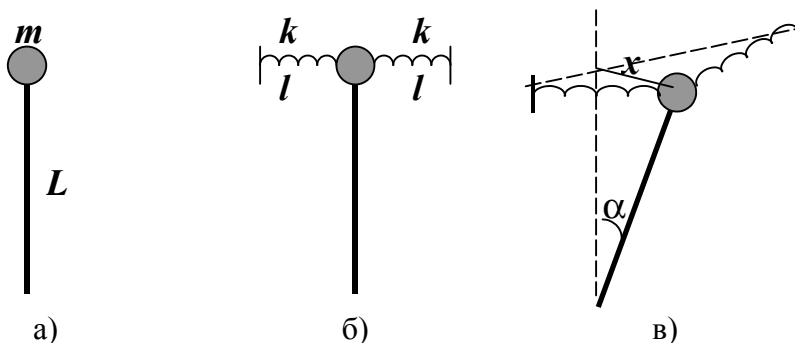


Рис. 5.9

5.11. Центр тяжести шарика радиуса r находится на расстоянии h от его геометрического центра. Шарик установлен на внутреннюю поверхность неподвижно закрепленной сферы радиуса R так, что его центр тяжести находится точно над геометрическим центром

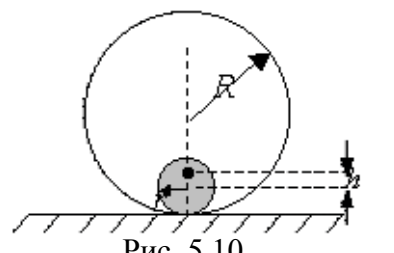


Рис. 5.10

(см. рис. 5.10). На плоскости безразмерных параметров $(h/r, R/r)$ изобразите область устойчивости такого положения равновесия.

5.12* Модель игрушки «Ванька-встанька» представляет собой легкую твердую сферу радиуса r , внутри которой на расстоянии h от центра закреплен небольшой тяжелый груз. Определите период малых колеба-

ний такой модели, установленной на вершину полусферы радиуса R (см. рис. 5.11). Полусфера неподвижна относительно земли, модель не проскальзывает по полусфере.

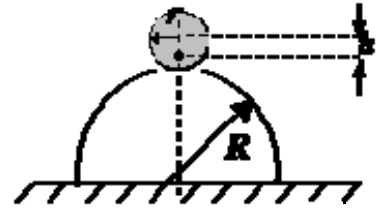


Рис. 5.11

5.13. На рис.5.12 показаны две последовательные фотографии бегущих звуковых волн в трубе, заполненной воздухом при близких к нормальным условиям, полученные с помощью «теневого» метода. Интервал времени между фотографиями равен 0,001 секунды. Определите скорость звука. Масштаб показан на рисунке.

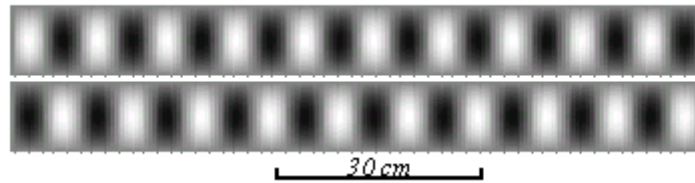


Рис. 5.12

Ответы, решения, комментарии

*И вот Знайка стал думать.
Думал он три дня и три ночи
и придумал...*

Н. Н. Носов

Земля – Луна

$$U = -\gamma m \sum_{i=1}^3 \frac{M_i}{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}}$$

$$V \approx 12 \text{ км/с}$$



Механика

1.1. Ответ: 0,05 попугаев.

1.2. Ответ: в 3 раза.

1.3. Если v_1 и v_2 — скорости первого и второго тел, то они удовлетворяют системе уравнений $v_1 + v_2 = 16/10$; $v_1 - v_2 = 3/5$. Решая ее, получаем $v_1 = 1,1$ м/с, $v_2 = 0,5$ м/с.

Ответ: 1,1 м/с; 0,5 м/с

1.4. Пусть v — скорость лодки относительно воды, u — скорость течения, t_1 и t_2 — время в пути в первом и втором случаях, l — расстояние между деревнями. Тогда для первого случая можно записать $(v + u)t_1 = l$, а для второго $(2v + u)t_2 = l$. Исключая l и выражая искомое соотношение, получаем $u/v = 2$.

Ответ: 2.

1.5. Пусть S — расстояние между городами, v — скорость катера в стоячей воде, u — скорость течения, t_1 и t_2 — время движения в первом и втором случае, t_3 — искомое время. Очевидно, что в первом случае катер идет вниз по течению, а во втором — вверх. Тогда:

$$\begin{cases} v + u = S/t_1, \\ v - u = S/t_2, \\ u = S/t_3. \end{cases}$$

Вычитая второе уравнение из первого, получим $2u = \frac{S}{t_1} - \frac{S}{t_2}$. Отсюда

скорость течения реки $u = \frac{S}{2} \cdot \frac{t_2 - t_1}{t_1 \cdot t_2}$. Разделив это уравнение на третье,

находим время движения плота: $t_3 = \frac{2 \cdot t_1 \cdot t_2}{t_2 - t_1} = 35$ часов.

Ответ: 35 часов

1.6. Будем отсчитывать время от момента отправления поезда. Пусть S — расстояние до станции, $\tau = 20$ минут — опоздание пассажира,

а T — время движения поезда до станции. По условию, обгон произошел в момент времени $t_1 = \frac{2}{3}T$. Обозначим через t_2 тот момент времени, когда пассажир на такси прибыл на станцию. При таких обозначениях искомый интервал времени $t_x = T - t_2$, а, следовательно, $t_2 = T - t_x$. Поскольку скорость такси постоянна, $\frac{S}{(t_2 - \tau)} = \frac{2S}{3(t_1 - \tau)}$. Подставляя t_1 и t_2 , получим $t_x = \tau/2 = 10$ минут.

Ответ: 10 минут.

1.7. Пусть L — длина Удава, v — скорость бегущей Мартышки, u — скорость ползущего Удава, t_1 — время забега Мартышки до головы Удава, t_2 — время забега в обратном направлении. В системе отсчета, связанной с пальмой, можно записать следующие очевидные соотношения: $v = \frac{x_1}{t_1}$; $v = \frac{x_1 - x_2}{t_2}$ (здесь $x_1 = 48$ и $x_2 = 16$ — координаты первого и второго бананов, выраженные в попугаях). В системе, связанной с ползущим Удавом, Мартышка оба раза пробежала расстояние L , но с разными скоростями, поэтому можно записать: $(v - u) = \frac{L}{t_1}$; $(v + u) = \frac{L}{t_2}$. Решая эту систему, получим $L = 38,4$ попугая и $v/u = 5$.

Ответ: 38,4 попугая, в 5 раз.

1.8. Когда мальчик начинает бежать, на шланге появляется сгиб, разделяющий еще лежащий на земле и уже движущийся вместе с мальчиком участок шланга. Бантик придет в движение, когда весь участок шланга длиной 40 м, лежавший между бантиком и мальчиком, окажется с другой стороны от бантика. Соответственно, к этому моменту мальчик будет на расстоянии 40 м в сторону крана от бантика и пробежит путь в $2 \cdot 40 = 80$ м, что займет 20 с. После того, как бантик пришел в движение, он движется со скоростью мальчика (т.к. шланг нерастяжим), поэтому мимо крана он пройдет еще через $60 \text{ м} / 4 \text{ м/с} = 15$ с, т. е. через 35 с после начала движения мальчика.

Интересно заметить, что *любая точка шланга* при таком движении либо покоится, либо движется со скоростью мальчика. В то же время

точка сгиба шланга будет двигаться по направлению к крану со скоростью, вдвое меньшей, чем скорость мальчика, т.е. 2 м/с.

Ответ: а) 20 с, б) 35 с.

1.9. Пусть S — весь пройденный автомобилем путь, t — затраченное на прохождение всего пути время. По определению средняя скорость есть отношение всего пути ко всему времени движения: $v_{\text{ср}} = S/t$. Из условия следует, что длина третьего участка составляет $5/12$ всего пути, а время —

$1/4$ всего времени. Тогда скорость на нем $v_3 = \frac{S_3}{t_3} = \frac{5}{3} \cdot \frac{S}{t} = \frac{5}{3} v_{\text{ср}}$ км/ч, откуда

$v_{\text{ср}} = \frac{3}{5} v_3 = 60$ км/ч. Скорости на первом и втором участках вычисляются аналогично: $v_1 = \frac{S_1}{t_1} = \frac{1}{2} v_{\text{ср}} = 30$ км/ч, $v_2 = \frac{S_2}{t_2} = \frac{S \cdot 4}{3 \cdot t} = \frac{4}{3} v_{\text{ср}} = 80$ км/ч.

1.9. Пусть S — весь пройденный автомобилем путь, t — затраченное на прохождение всего пути время. По определению средняя скорость есть отношение всего пути ко всему времени движения: $v_{\text{ср}} = S/t$. Из условия следует, что длина третьего участка составляет $5/12$ всего пути, а время — $1/4$ всего времени. Тогда скорость на нем $v_3 = \frac{S_3}{t_3} = \frac{5}{3} \cdot \frac{S}{t} = \frac{5}{3} v_{\text{ср}}$ км/ч, откуда $v_{\text{ср}} = \frac{3}{5} v_3 = 60$ км/ч. Скорости на первом и втором участках вычисляются аналогично: $v_1 = \frac{S_1}{t_1} = \frac{1}{2} v_{\text{ср}} = 30$ км/ч, $v_2 = \frac{S_2}{t_2} = \frac{S \cdot 4}{3 \cdot t} = \frac{4}{3} v_{\text{ср}} = 80$ км/ч.

Ответ: средняя скорость 60 км/ч, скорость на первом участке 30 км/ч, а на втором 80 км/ч.

1.10. Задачу проще всего решить, построив графики движения Пятачка (сплошная линия) и Винни-Пуха (пунктир). Т. к. по условию они встретились 5 раз и пришли к Ослику одновременно, то график будет иметь вид, изображенный на рис. 6.1. Из графика видно, что Винни-Пух шел 27 минут, поэтому его скорость в $27/3 = 9$ раз меньше скорости Пятачка.

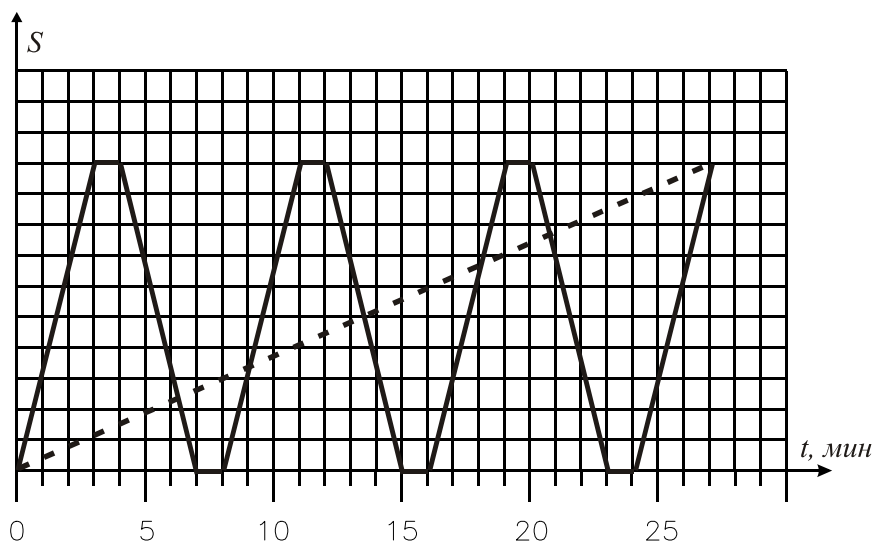


Рис. 6.1.

Ответ: в 9 раз.

1.11. Решим данную задачу графическим способом.

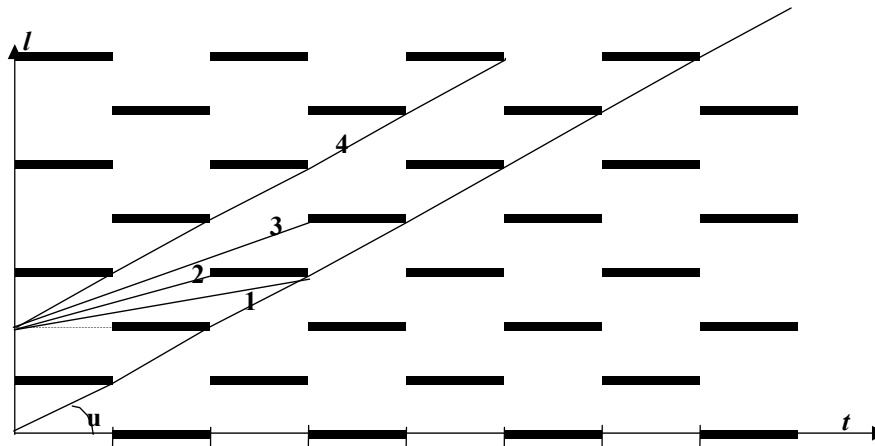


Рис. 6.2

На приведенной диаграмме (рис. 6.2) изображена «пространственно-временная картина дороги» (по горизонтальной оси отложено время, по вертикальной — расстояние). Жирным обозначены точки, соответствующие красному свету на светофоре в данной точке дороги в данный момент времени. Движение автомобиля изображается в виде прямой линии, тангенс угла наклона которой к оси времени равен его скорости. Если линия должна пересечь жирный отрезок («закрытый светофор»), то она прерывается и возобновляется под тем же углом с правого конца данного отрезка (автомобиль остановился и дождался включения зеленого света). Пересечение двух изображающих линий соответствует встрече автомобилей.

Очевидно, что по условиям задачи «задний» автомобиль движется со скоростью $u = L/T$, поскольку это максимально возможная скорость, при которой изображающая линия не пересечет жирных отрезков (т. е. автомобиль не останавливается на светофорах).

Для движения второго автомобиля можно рассмотреть несколько «пограничных» изображающих линий.

1) Линия 1.

Соответствующая скорость $v_1 = L/3T$. При этом автомобиль подъедет к следующему светофору в тот момент, когда на нем загорается зеленый свет, и в этот момент его и догонит «задний» автомобиль. При меньших скоростях обгон произойдет еще раньше и его время очевидным образом определится как $t = 2L/(u-v) = 2LT/(L-vT)$.

2) Линия 2.

Соответствующая скорость $v_2 = L/2T$. Обгон произойдет в точке $3L$ в момент времени $3T$, так как первый автомобиль будет вынужден остановиться на светофоре. Таким образом, для всех скоростей между линиями 1 и 2 $t = 3T$.

Аналогично для скоростей между линиями 2 и 3 (соответствующая скорость $v = 2L/3T$) $t = 4T$, и т. д.

3) Линия 4, соответствующая скорость $v = L/T = u$.

При скоростях больше, чем данная, второй автомобиль не сможет догнать первый, поскольку средняя скорость их обоих будет равна u .

$$\text{Ответ: } t = \left\{ \begin{array}{l} \frac{2LT}{LT-v}, 0 \leq v \leq \frac{L}{3T} \\ 3T, \frac{L}{3T} < v \leq \frac{L}{2T} \\ 4T, \frac{L}{2T} < v \leq \frac{2L}{3T} \\ \dots \\ nT, \frac{(n-3)L}{(n-2)T} < v \leq \frac{(n-2)L}{(n-1)T} \\ \dots \\ \infty, v \geq \frac{L}{T} \end{array} \right.$$

1.12. Автомобиль должен вернуться в точку «старт» точно в момент зажигания зеленого света – только тогда он будет двигаться по кольцу сколь угодно долго. Предположим, что за время одного обхода прошло m циклов переключения, т. е. $T = 40m$ секунд. Поскольку длина кольца 3600 м, то скорость машины $v = 90/m$ м/с. Теперь находим время прибытия к светофорам 2, 3 и 4: $t_2 = 900/v = 10m$, $t_3 = 2400/v = 80m/3$, $t_4 = 3000/v = 100m/3$. По условию зеленый свет горит в первой половине 40-секундного цикла светофора, поэтому условие того, что машина проходит светофор без остановки, можно записать в виде $\{t_i/40\} < 1/2$, где фигурные скобки обозначают дробную часть числа. Проверая эти условия последовательно для $m = 1, 2, \dots$, находим минимально возможное $m = 5$, при котором оно выполнено. Итак, $v_{\max} = 90/5 = 18$ м/с ≈ 65 км/ч.

Ответ: 18 м/с.

1.13. Из условия задачи вытекает, что в тот момент, когда первый заяц достиг опушки леса (точка B), Бесенок должен был находиться в точке A (см. рис. 6.3). При этом в прямоугольном треугольнике AOB угол AOC равен 60° , так как $OC = BC = OA = R$ (R — радиус моря). Заяц, пробежав путь $CB = R$ со скоростью v , затратил время $t = R/v$. За такое же время Бесенок проделал путь по дуге CA окружности. Тогда длина пу-

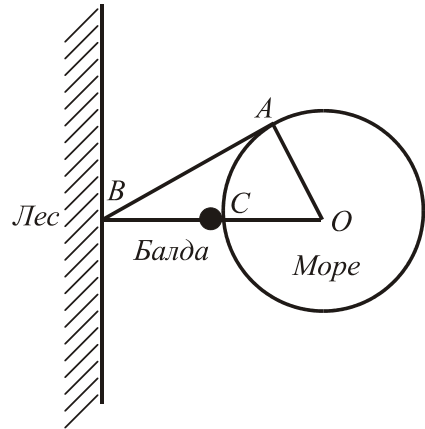


Рис. 6.3

ти Бесенка $S_B = R(2\pi - \frac{\pi}{3}) = \frac{5\pi R}{3}$. Так как времена бега зайца и Бесенка

одинаковы, то $\frac{R}{v} = \frac{5\pi R}{3v_B}$. Отсюда находим скорость Бесенка:

$$v_B = v \frac{5\pi}{3} = 50\pi \approx 150 \text{ верст/ч.}$$

Ответ: 150 верст/час.

1.14. У Знайки есть два варианта поведения: идти к остановке A или к остановке B , соответственно, он должен выбрать тот из них, который требует меньше времени, чтобы попасть на остановку B .

Пусть Знайка хочет успеть на автобус. Если он пойдет на остановку B , то он должен выйти за $(2 \text{ км} - 0,8 \text{ км})/4,8 \text{ км/ч} = 15 \text{ мин.}$ до 8 часов. Если же он пойдет на остановку A , то чтобы успеть на автобус, ему необходимо прийти туда не к 8.00, а на $2 \text{ км}/40 \text{ км/ч} = 3 \text{ мин}$ раньше, поэтому ему надо выйти за $0,8 \text{ км}/4,8 \text{ км/ч} + 3 \text{ мин} = 13 \text{ мин}$ до 8.00. Поэтому в этом случае для Знайки выгоднее идти к остановке A и нужно выйти из дома в 7.47.

Аналогичные рассуждения для случая, когда Знайка хочет успеть на трамвай, приводят к следующему результату: если Знайка идет к остановке B , то он должен выйти за 15 минут до 8.00, а если к A — за 16 минут до 8.00, поэтому Знайка должен выйти в 7.45 и пойти к остановке B .

Ответ: на автобус — в 7.47, на трамвай — в 7.45.

1.15. Решение: Если Гена идет к остановке A , то он должен выйти за время $t = l/U$ до прибытия автобуса на эту остановку, т. е. за время

$t_1 = \frac{l}{U} + \frac{L}{V}$ до прибытия автобуса на остановку B . Если он идет к остановке B , то ему надо выйти за время $t_2 = \frac{L-l}{U}$.

Для ответа на вопрос задачи нужно выбрать минимальное время из t_1 и t_2 . Пусть $t_1 > t_2$, т. е. $\frac{l}{U} + \frac{L}{V} > \frac{L-l}{U}$. Решая это неравенство, находим: $\frac{l}{L} > \frac{1-U/V}{2}$. При значениях параметров, удовлетворяющих этому условию, Гена должен идти ко второй остановке (B), в противном случае — к первой (A).

Ответ: за $t = \frac{l}{U} + \frac{L}{V}$ при $\frac{l}{L} < \frac{1-U/V}{2}$ и за $t = \frac{L-l}{U}$ при $\frac{l}{L} > \frac{1-U/V}{2}$.

1.16. Время движения по маршруту $ABCA$ (рис. 6.4):

$$T_{ABCA} = t_{AB} + t_{BC} + t_{CA}.$$

Если обозначить скорость лодки в стоячей воде V , скорость течения U , а расстояние AB через L , то

$$T_{ABCA} = \frac{L}{V+U} + 2 \frac{L}{2V_1 \cos \varphi},$$

где V_1 — скорость при движении по маршрутам BC и CA . Эту скорость можно найти из треугольника скоростей по теореме косинусов

$$V^2 = U^2 + V_1^2 + 2UV_1 \cos \varphi \Rightarrow V_1^2 + 2V_1U \cos \varphi + (U^2 - V^2) = 0,$$

откуда $V_1 = -U \cos \varphi + \sqrt{V^2 - U^2 \sin^2 \varphi}$. Время движения по маршруту $ACBA$

$$T_{ACDF} = \frac{L}{V-U} + 2 \frac{L}{2V_2 \cos \varphi},$$

где V_2 — скорость при движении по маршрутам AC и CB . Эта скорость находится также как и скорость V_1 :

$$V^2 = U^2 + V_2^2 - 2UV_2 \cos \varphi \Rightarrow V_2^2 - 2V_2U \cos \varphi + (U^2 - V^2) = 0 \Rightarrow$$

$$V_2 = U \cos \varphi + \sqrt{V^2 - U^2 \sin^2 \varphi}$$

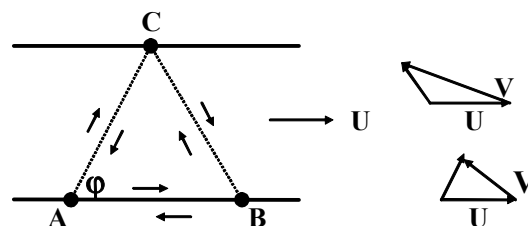


Рис. 6.4

Составив разность времен движения по этим двум маршрутам, получим нуль. Это показывает, что время движения не зависит от выбора маршрута.

Исследуем теперь зависимость времени движения от соотношения скоростей лодки в стоячей воде и течения реки. Рассмотрим маршрут $ABCA$. На участке AB никаких ограничений на соотношение скоростей нет. На участках BC и CA из условия, что суммарная скорость должна быть направлена по линии BC или CA , следует $V > U$, в этом случае и подкоренное выражение тоже больше нуля. Если же $V < U$, то нельзя пересечь реку к пункту, расположенному выше по течению реки. Для маршрута $ACBA$ на участке BA при $V < U$ нельзя доплыть из деревни B в деревню A , время этого движения не определено (деление на ноль). При движении по маршрутам AC и CB накладывается ограничение $V > U \sin \phi$, минимальной скорости, при которой можно плыть по заданному маршруту. Однако все ограничения перекрываются требованием $V > U$, при котором путешествие по любому маршруту вообще возможно.

Ответ: время движения по обоим маршрутам одинаково.

1.17. В системе отсчета, движущейся со скоростью ветра, бомба падает во всех трех случаях совершенно одинаково. Поэтому $a_1 = l + vt$, $a_2 = l - vt$, где l — расстояние, проходимое бомбой за время падения в данной системе отсчета, t — время падения. Чтобы лететь перпендикулярно ветру, самолет должен вносить поправку на снос, направляя скорость под углом α к оси X , причем $\sin \alpha = v/V$. Тогда в неподвижной системе отсчета координаты точки падения будут выражаться как $x = l \cos \alpha$, $y = vt - l \sin \alpha$. Из полученной системы уравнений находим

$$x = \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot \sqrt{1 - v^2/V^2}, \quad y = \frac{a_1 - a_2}{2} - \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot \frac{v}{V}.$$

Ответ: $x = \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot \sqrt{1 - v^2/V^2}, \quad y = \frac{a_1 - a_2}{2} - \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot \frac{v}{V}.$

1.18. Предположим, что движение автомобиля после удара о стенку является равнозамедленным с ускорением a , тогда до полной остановки он пройдет путь $s = v^2/2a$, где v — скорость до столкновения. Подставляя заданные значения скорости и ускорения, получаем $s \approx 70$ см. Обратите

внимание, что это именно *минимальная* деформация, при меньшей деформации значение ускорения будет больше допустимого. По этой причине механическая прочность передней части корпуса автомобиля не должна быть слишком большой, чтобы при ударе возникала деформация достаточной величины.

Ответ: 70 см.

1.19. В момент прохождения скругленных участков робот будет испытывать центростремительное ускорение, равное v^2/R . Поскольку целью является наиболее быстрое прохождение трассы, то целесообразно поддерживать на этих участках максимально возможную скорость v , при которой ускорение не превышает заданного, т. е. $v = \sqrt{aR} = 9 \text{ м/с}^2$. В этом случае на прохождение каждого из скругленных участков робот затратит $9 \cdot \pi / 2v \approx 1,57 \text{ с}$. Задача о наиболее быстром прохождении прямолинейного участка тривиальна: необходимо половину пути двигаться равноускоренно с максимальным ускорением, а вторую половину — равнозамедленно с тем же ускорением, чтобы скорость при входе в поворот не превышала рассчитанной ранее. Тогда время прохождения половины прямолинейного участка найдем из уравнения $s = v_0 t + at^2/2$, откуда получаем $t = \frac{v + \sqrt{v^2 + 2as}}{a} \approx 4,33 \text{ с}$, т. е. на прохождение прямолинейного участка робот затратит 8,67 с, а на прохождение полного круга 40,96 \approx 41 с. Вообще говоря, необходимо также проверить, что к десятому кругу робот успеет разогнаться до скорости 9 м/с, что выполняется тривиально.

Ответ: 41 с.

1.20. Пусть L — расстояние от вороны до Васи по горизонтали в момент выстрела, l — путь, который пролетела ворона от момента выстрела до момента попадания, h — высота полета вороны, u — скорость вороны, v_0 — начальная скорость камня, τ — время полета камня. Тогда можно записать следующие очевидные соотношения: $\frac{l}{u} = \frac{l + L}{v_0 \cos \alpha} = \tau$,

$$h = L \operatorname{tg} \alpha = v_0 \sin \alpha \tau - \frac{g \tau^2}{2}.$$

Проводя преобразования, получаем:

$$L = l \left(\frac{v_0 \cos \alpha}{u} - 1 \right), \quad l = \frac{2u^2}{g \cos \alpha} \left(1 + \frac{v_0}{u} - \frac{v_0 \cos \alpha}{u} \right),$$

тогда $h = \frac{2u^2 \sin \alpha}{g} \left(1 + \frac{v_0}{u} - \frac{v_0 \cos \alpha}{u} \right) \left(\frac{v_0 \cos \alpha}{u} - 1 \right) \approx 13,4 \text{ м.}$

Ответ: примерно на высоте 13 м.

1.21. При движении из верхней точки траектории шарик за время t проходит одну клетку фотографии как по горизонтали, так и по вертикали. Тогда $v_x t = a$, $gt^2/2 = a$, где $a = 2,5 \text{ см}$ — размер одной клетки, t — интервал времени между вспышками стробоскопа, v_x — горизонтальная компонента скорости шарика, остающаяся неизменной все время полета. Отсюда находим $v_x^2 = ga/2$. При падении с высоты $4a$ шарик приобретает вертикальную компоненту скорости $v^2 = 8ga$, тогда суммарная скорость в точке падения $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{17gh/2} \approx 1,44 \text{ м/с}$. В силу обратимости движения шарика, она совпадает с его начальной скоростью.

Ответ: 1,44 м/с

1.22. Расход воды (объем воды, проходящий через поперечное сечение в единицу времени) одинаков в любом месте струи (условие непрерывности). Поэтому можно записать: $\pi v_0 d_0^2/4 = \pi v d^2/4$, где d — искомый диаметр, v_0 и v — скорость струи при выходе из шланга и в верхней точке траектории соответственно. Поскольку любой малый объем воды после выхода из шланга можно рассматривать как тело, брошенное под углом к горизонту, то скорость струи в верхней точке траектории определится как $v = v_0 \cos \alpha$. Тогда искомый диаметр $d = d_0 \sqrt{\cos \alpha}$.

Ответ: $d = d_0 \sqrt{\cos \alpha}$.

1.23. Для того, чтобы линейная скорость ленты была постоянна, необходимо, чтобы в любой момент времени выполнялось равенство $\omega r = v$. Радиус катушки с намотанной на нее лентой зависит от времени. Явный вид этой зависимости проще всего найти из следующих соображений: пусть через время t после начала движения радиус катушки с намотанной лентой равен r . Тогда на катушке намотана лента объемом $V = \pi(r^2 - R^2)l$, где l — ширина ленты. В то же время этот же объем ленты прошел мимо считывающей головки со скоростью v , поэтому $V = v t l d$.

Приравнивая эти выражения, находим

$$r(t) = \sqrt{R^2 + \frac{vtd}{\pi}}$$

$$\text{Тогда угловая скорость вращения } \omega(t) = \frac{v}{\sqrt{R^2 + \frac{vtd}{\pi}}}$$

$$\text{Ответ: } \omega(t) = \frac{v}{\sqrt{R^2 + \frac{vtd}{\pi}}}$$

1.24. В момент, когда наблюдается половина диска, Марс, Земля и Солнце находятся в вершинах прямоугольного треугольника (с прямым углом при Марсе). Поэтому искомое расстояние $S = \sqrt{245^2 - 147^2} = 196$ млн. км.

Ответ: 196 млн. км.

1.25. Мяч вращается из-за того, что скорость течения меняется в зависимости от глубины реки. Для оценки логично предположить, что она линейно меняется от максимальной у поверхности до нулевой у дна. В системе отсчета, связанной с центром мяча, скорость воды в нижней точке мяча равна $u = vr/h$, где r — радиус мяча, h — глубина реки, v — скорость течения. Мяч совершит полный оборот за время $t = 2\pi r/u$ и пройдет при этом по течению расстояние $l = vt$. Используя полученные соотношения, находим, что $h = l/2\pi$. Для приведенных в условии численных значений $h \approx 8$ м.

Ответ: 8 м.

1.26. Пусть скорость бора равна c , а скорость течения v . Перейдем в систему отсчета, связанную с движущимся бором. Тогда вода набегает со скоростью $v_1 = c + v$, а после бора движется с некоторой скоростью v_2 . Из закона Бернулли $v_1^2/2 = gh + v_2^2/2$, тогда с учетом уравнения непрерывности $v_1 H = v_2(h + H)$ получаем $v_1^2 = g(h + H)^2/(H + h/2)$. Окончательно $c = v_1 - v = 6,3$ м/с.

Ответ: 6,3 м/с.

1.27. Причина расхождения получаемых значений скорости с истинными заключается в том, что при описанном методе наблюдения невоз-

можно определить, на какой именно угол повернулось колесо за время τ : φ или $\varphi + 2\pi n$, где n — произвольное целое число. Соответственно правильная формула для угловой скорости колеса $\omega = (\varphi + 2\pi n)/\tau$, а скорость движения автомобиля определяется по формуле $v = \omega r = r(\varphi + 2\pi n)/\tau$, где r — радиус колеса. При использовании предложенного проф. Выбегалло метода фактически предполагается $n = 0$, соответственно правильные результаты он дает лишь при небольших скоростях, для которых это действительно так.

«Граничное» значение скорости соответствует $\varphi = 2\pi$, из чего получаем $\tau = 2\pi r/v \approx 30$ мс. Из аналогичного соотношения для заднего колеса получаем значение его диаметра 15 см.

Ответ: 15 см, 30 мс.

1.28. Объем V_M куска меди равен объему вытесненной им воды, которая складывается из объема V_0 вылившейся воды и объема V_1 воды, заполнившей 1/4 часть сосуда: $V_1 = V/4 = 1000 \text{ мл}/4 = 250 \text{ мл}$; $V_M = V_0 + V_1 = 100 \text{ мл} + 250 \text{ мл} = 350 \text{ мл}$; тогда $m = \rho V_M = 8,9 \text{ г/см}^3 \cdot 350 \text{ см}^3 = 3115 \text{ г}$.

Ответ: 3115 г.

1.29. По закону сообщающихся сосудов давление у дна внутри пещеры и снаружи должно быть одинаково, а т. к. внутри пещеры высота столба воды на 1 м меньше, чем снаружи, то давление воздуха внутри нее должно быть больше наружного на $\rho g \Delta h = 10\,000 \text{ Па}$, следовательно, давление внутри пещеры равно 110 000 Па (110 кПа).

Ответ: 110 кПа.

1.30. Обозначим длину Кита L , тогда его радиус $r = L/20$. В соответствии с представлениями того времени предположим, что Кит и Земля находятся в однородном гравитационном поле (как объяснить возникновение этого поля, в рамках данной задачи нас не интересует). Тогда существование описанной конструкции возможно, если суммарная масса Кита и Земли не больше массы воды в объеме Кита,

т. е. $\frac{2}{3} \pi r^3 \rho_3 + 20r\pi r^2 \rho_K \leq 20r\pi r^2 \rho_B$, откуда несложно получить

$r \geq \sqrt[3]{\frac{\rho_3}{30(\rho_B - \rho_K)}} R_3 \approx 8700 \text{ км}$. Тогда длина Кита должна быть не меньше

174 000 км. В действительности эта оценка несколько занижена, т. к. для

устойчивого плавания необходимо, чтобы Кит не полностью погружался в воду. Соответственно, характерный размер Кита имеет порядок 10^8 м.

Ответ: порядка 10^8 м.

1.31. Обозначив V — внутренний объем бутылки, а ρ и ρ_0 — плотности стекла и воды соответственно, можно записать условие плавания бутылки в случае, когда она наполнена водой ровно наполовину:

$$\rho_0(V + m/\rho) = \rho_0 V/2 + m. \text{ Отсюда находим } \rho = \frac{1}{1 - \rho_0 \frac{V}{2m}} = 2,25 \text{ г/см}^3.$$

Ответ: $2,25 \text{ г/см}^3$.

1.32. Подъемная сила шара определяется соотношением $F = g(\rho - \rho_0)V = g(m - m_0)$, где m и m_0 — массы газа в оболочке и атмосферного воздуха в объеме, равном объему оболочки. Понятно, что тогда шары одинакового объема и одинаковой подъемной силы должны содержать равные массы газа. Давление газа в обоих шарах также примерно одинаково (оно должно быть равно сумме атмосферного давления и давления растянутой оболочки). Тогда можно записать уравнение состояния идеального газа $pV = mRT_{\text{H}}/M_{\text{H}}$ и $pV = mRT_{\text{B}}/M_{\text{B}}$. Отсюда находим $T_{\text{B}} = T_{\text{H}}M_{\text{B}}/M_{\text{H}}$. Принимая $T_{\text{H}} = 300 \text{ К}$, получим $T_{\text{B}} \approx 4200 \text{ К}$. Такую температуру не выдержит самый тугоплавкий металл.

1.33. Пусть m — масса тела безо льда, тогда условие плавания до таяния льда имеет вид $m + \rho_{\text{л}}2V/3 = \rho_{\text{в}}5V/6$, откуда находим собственную (без учета полости) плотность тела $\rho_{\text{т}} = 3m/V = 5\rho_{\text{в}}/2 - 2\rho_{\text{л}} = 0,7 \text{ г/см}^3$, поэтому тело не утонет.

Ответ: нет.

1.34. Запишем условие равновесия системы в воде:

$$(m_1 g - F_{A1}) \frac{l}{2} = (m_2 g - F_{A2}) \frac{l}{2}$$

Здесь $m_1 = \rho_1 V_1$, $m_2 = \rho_2 V_2$, $F_{A1} = \rho V_1 g$, $F_{A2} = \rho V_2 g$. Следовательно, условие равновесия в воде можно представить в виде: $(\rho_1 - \rho)V_1 g = (\rho_2 - \rho)V_2 g$. Отсюда получаем, что

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\rho_1 - \rho}{\rho_2 - \rho}. \quad (1)$$

Для сохранения равновесия системы в воздухе передвинем алюминиевый шарик ближе к свинцовому на расстояние x . Тогда условие равновесия в воздухе запишется в виде:

$$m_1 g \frac{l}{2} = m_2 g \left(\frac{l}{2} - x \right).$$

Так как $m_1 = \rho_1 V_1, m_2 = \rho_2 V_2$, то $\rho_1 V_1 \frac{l}{2} = \rho_2 V_2 \left(\frac{l}{2} - x \right)$ и для соотношения объемов шариков получим:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\rho_1 l}{2\rho_2 \left(\frac{l}{2} - x \right)}. \quad (2)$$

Из (1) и (2) находим $\frac{\rho_1 l}{2\rho_2 \left(\frac{l}{2} - x \right)} = \frac{\rho_1 - \rho}{\rho_2 - \rho}$, откуда $x = \frac{l \rho (\rho_1 - \rho_2)}{2 \rho_2 (\rho_1 - \rho)} \approx$

$\approx 3,1$ см.

Ответ: алюминиевый шарик нужно передвинуть на 3,1 см ближе к свинцовому.

1.35. Введем обозначения L — длина ареометра, x — высота, на которую он выступает над поверхностью жидкости (см. рис. 6.5), S — площадь его поперечного сечения. Тогда при погружении в однородную жидкость плотностью ρ имеет место соотношение $M = \rho S(L - x)$, из которого получаем градуировочное соотношение $x_\rho = L - \frac{M}{\rho S}$. Оно

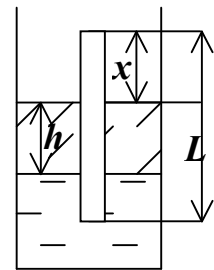


Рис. 6.5

определяет, на каком расстоянии от верхнего края ареометра должна быть нанесена отметка, соответствующая плотности ρ .

Из этой формулы следует, что в чистый бензин ареометр погрузился бы на $L - x = 13$ см, следовательно, при толщине слоя $2h > 13$ см ареометр плавает только в бензине и, естественно, показывает его плотность. Если же толщина слоя $h < 13$ см, то часть ареометра погружена в воду (см. рис. 6.5). В этом случае условие плавания имеет вид $M = S(\rho_6 h +$

$+ \rho_B(L - h - x_1))$, откуда $x_1 = L - h \left(1 - \frac{\rho_6}{\rho_B} \right) - \frac{M}{\rho_B S}$.

В то же время в соответствии с градировочным соотношением ареометр показывает такую плотность ρ_x , что $x_1 = L - \frac{M}{\rho_x S}$. Приравнявая эти

выражения, получаем $\rho_x = \rho_\epsilon \frac{M}{hS(\rho_\epsilon - \rho_\delta) + M} = 0,8 \text{ г/см}^3$.

Заметим, что при удвоенной толщине слоя бензина эта формула дает очевидно неправильный ответ $0,66 \text{ г/см}^3$.

Ответ: $0,8 \text{ г/см}^3$; $0,75 \text{ г/см}^3$.

1.36. Несложный анализ показывает, что, если бы шарики были свободны, то более легкий шарик погрузился бы на глубину 20 см, а более тяжелый — на 30 см. Поэтому следует ожидать, что в условиях задачи более тяжелый шарик будет внизу, более легкий — выше, а нитка между ними будет натянута. Пусть центр верхнего (легкого) шарика находится на глубине H . На каждый из шариков действуют сила тяжести, сила Архимеда и сила натяжения нити, которые уравнивают друг друга. В проекциях на вертикаль соответствующие соотношения имеют вид:

$$\begin{aligned} m_1 g - F_{A1} + T &= 0, \\ m_2 g - F_{A2} - T &= 0. \end{aligned}$$

Здесь учтено, что вследствие невесомости нити модули сил натяжения одинаковы на обоих ее концах. Складывая уравнения, исключаем силу натяжения нити:

$$(m_1 + m_2)g = F_{A1} + F_{A2}. \quad (1)$$

Учитывая зависимость плотности жидкости от глубины и принимая во внимание малые размеры шариков, получим для сил Архимеда следующие выражения:

$$\begin{aligned} F_{A1} &= (\rho_0 + kH)Vg, \\ F_{A2} &= (\rho_0 + k(H + L))Vg. \end{aligned}$$

После подстановки их в (1), получим уравнение относительно глубины H , решение которого выражается формулой:

$$H = \left(\frac{m_1 + m_2}{V} - (2\rho_0 + kL) \right) \frac{1}{2k} = 22,5 \text{ см.}$$

Видно, что более легкий шарик погрузится несколько глубже, чем в свободном состоянии, а более тяжелый будет находиться на несколько меньшей глубине.

Ответ: Более легкий шарик будет плавать на глубине 22,5 см, а более тяжелый — на глубине 27,5 см.

1.37. Запишем условия равновесия стакана, погруженного в воду.

Для пустого стакана: $mg = Spgh_1$, где ρ — плотность воды, S — площадь дна стакана, $h_1 = 3$ см — глубина погружения пустого стакана. Для стакана со слоем жидкости плотностью ρ_1 высотой $h_1 = 3$ см: $mg + Sp_1gh_1 = Spgh_2$, где $h_2 = 5$ см — глубина погружения стакана с жидкостью. Для стакана с дополнительным слоем жидкости высотой x : $mg + Sp_1g(h_1 + x) = Spg(h_1 + x + h_0)$, где $h_0 = 1$ см — толщина дна стакана. Комбинируя эти выражения, получим $\rho h_1 + \rho_1 h_1 = \rho h_2$ и $\rho h_1 + \rho_1 (h_1 + x) = \rho (h_1 + x + h_0)$.

Первое из этих уравнений позволяет найти плотность неизвестной жидкости: $\rho_1 = \rho \left(\frac{h_2}{h_1} - 1 \right)$, а из второго выражаем искомую глубину x :

$$x = \frac{\rho_1 h_1 - \rho h_0}{\rho - \rho_1} = h_1 \cdot \frac{h_2 - h_1 - h_0}{2h_1 - h_2} = 3 \text{ см.}$$

Ответ: нужно долить слой жидкости глубиной 3 см.

1.38. Требуемая ситуация изображена на рис. 6.6, там же виден смысл обозначений (ΔS — площадь кольца, служащего основанием шайбы).

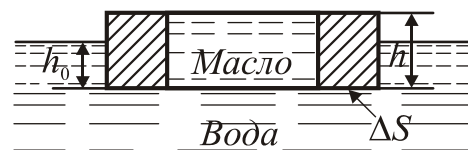


Рис. 6.6

Чтобы изображенная ситуация реализовалась, необходимо, чтобы

а) сила гидростатического давления на нижнюю поверхность шайбы была равна силе тяжести, действующей на шайбу, и

б) гидростатическое давление масла на границе раздела с водой было равно гидростатическому давлению воды на этой же границе.

Условие а) означает, что $\rho_0 \Delta S h g = \rho \Delta S h_0 g$, а условие б) — что $\rho_1 h g = \rho h_0 g$, где ρ , ρ_0 и ρ_1 — плотности воды, шайбы и масла соответственно.

Из этих условий видно, что $\rho_0 = \rho_1$, т. е. плотность шайбы должна совпадать с плотностью масла.

Ответ: 800 кг/м³

1.39. Предположим для определенности, что пробка на границе раздела воды (плотность ρ_1) и масла (плотность ρ_2) находится у левого конца соединительной трубки (см. рис. 6.7а). Условие равновесия воды и масла имеет вид $\rho_1 h_1 = \rho_2 h_2$.

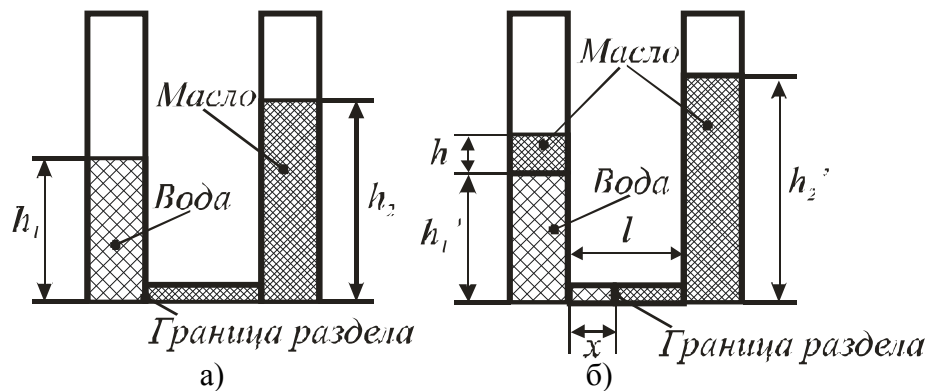


Рис. 6.7

После того, как на воду нальют слой масла высотой h , часть воды перейдет в соединительную трубку, и уровень водяного столба уменьшится до h_1' , уровень масла в правом сосуде увеличится до h_2' , а пробка сместится на x (см. рис. 6.7б). В этом состоянии условие равновесия имеет вид: $\rho_1 h_1' = \rho_2 (h_2' - h)$.

Кроме этого, надо учесть сохранение объемов воды и масла (k — отношение площадей поперечного сечения сосуда и трубки):

$$h_1 k S = h_1' k S + x S,$$

$$h_2 k S + l S = h_2' k S + (l - x) S.$$

Решая полученную систему уравнений, получаем $x = \frac{\rho_2 h k}{\rho_1 + \rho_2} \approx 7,1$ см.

Ответ: Пробка сместится на 7,1 см.

1.40. По закону сообщающихся сосудов уровень жидкости в обоих коленах одинаков, а поскольку гидростатическое давление зависит только от высоты столба жидкости, то задача сводится к поиску такого угла φ , при котором уровень жидкости в трубе максимален.

Постоянным является объем залитой в трубу жидкости, который можно представить как сумму объемов жидкости в правом и левом коле-

нах, каждое из которых представляет собой прямой круговой цилиндр с высотами $H/\cos \varphi$ и $H/\sin \varphi$ соответственно. При этом мы дважды учитываем закрашенный на рис. 6.8 объем, однако в условиях задачи им можно пренебречь по сравнению с полным объемом.

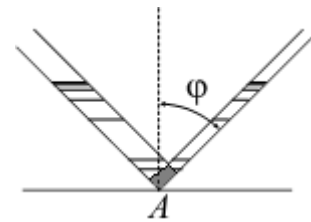


Рис. 6.8

Тогда $V = \frac{\pi d^2}{4} H \left(\frac{1}{4 \cos \varphi} + \frac{1}{\sin \varphi} \right)$, следовательно, H максимально при

минимальном значении выражения в скобках. Угол, при котором достигается этот минимум, можно найти, приравняв к нулю производную:

$$\frac{\sin \varphi}{4 \cos^2 \varphi} - \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} = 0, \text{ откуда } \varphi = \arctg \sqrt[3]{4} \approx 57,8^\circ \approx 1 \text{ рад.}$$

Ответ: 1 рад.

1.41. Обозначим через m массу воды, объем которой равен объему шарика. Тогда с учетом заданных значений плотностей равнодействующая сил тяжести и Архимеда, действующая на тяжелый шарик, равна mg и направлена вниз, а на легкий — равна $0,5mg$ и направлена вверх. Поэтому равнодействующая внешних сил, действующих на систему, равна нулю и система будет плавать, полностью погрузившись в воду.

Из соображений симметрии очевидно, что шарики образуют равнобедренный треугольник (см. рис. 6.9, пружинки заменены линиями), обозначим его угол при вершине 2φ . Пусть длина боковой стороны равна $l + x_1$, а длина основания $l - x_2$ (l — длина нерастянутой пружины), соответственно силы упругости пружин $F_1 = kx_1$ и $F_2 = kx_2$. Тогда условие равновесия легкого шарика в проекции на вертикаль и горизонталь имеет вид:

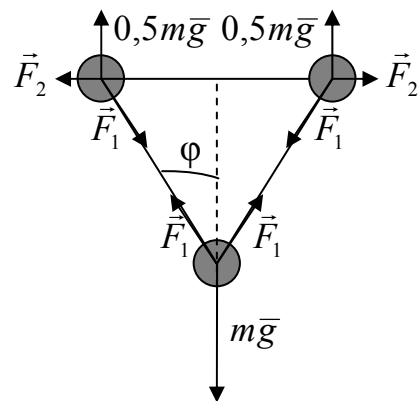


Рис. 6.9

$$\begin{aligned} 0,5 mg &= kx_1 \cos \varphi, \\ kx_2 &= kx_1 \sin \varphi. \end{aligned}$$

К этим соотношениям нужно добавить геометрическую связь сторон и углов треугольника, например, $\sin \varphi = \frac{l - x_2}{2(l + x_1)}$. Проводя очевидные

преобразования, приходим к уравнению $2 - 4\sin \varphi = 3^4 \operatorname{tg} \varphi$, где $A = \frac{mg}{kl} = \frac{1}{2}$. Обозначая $t = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$, получаем (с учетом численного значения A) $f(t) = 2t^4 - 5t^3 + 11t - 2 = 0$. Это уравнение можно решить численно, например, делением отрезка пополам: $f(0) = -2 < 0$, $f(1) = 6 > 0$; $f(0,5) = 3 > 0$; $f(0,25) = 0,68 > 0$; $f(0,125) = -0,634 < 0$; $f(0,188) = 0,064 > 0$; $f(0,156) = -0,302 < 0$; $f(0,172) = -0,131$; $f(0,180) = -0,047$; $f(0,184) = -0,005 \approx 0$.

Таким образом, $t \approx 0,184$, что соответствует $\varphi \approx 21^\circ$. Тогда углы треугольника равны 42° , 69° , 69° .

Ответ: 42° , 69° , 69° .

1.42. Пусть высота бака равна H , его площадь основания — S , а площадь отверстия — S_0 . Свяжем эти параметры с данными условия. Известно, что скорость истечения воды из отверстия под действием столба высотой h определяется формулой $V = \sqrt{2gh}$. Тогда объемная скорость истечения воды из бака определяется формулой

$$u_2 = \frac{dV}{dt} = S \frac{dh}{dt} S_0 \sqrt{2gh}.$$

Поскольку за время t_2 вытекла вся вода, тогда: $\frac{S}{S_0} \int_H^0 \frac{dh}{\sqrt{h}} = \int_0^{t_2} \sqrt{2g} dt$,

откуда получаем $\frac{S}{S_0} 2\sqrt{H} = \sqrt{2gt_2^2}$.

Пусть u_1 — объемная скорость истечения воды из крана, то $SH = u_1 t_1$. Очевидно, что за время, много большее t_1 и t_2 , в системе установится равновесие, т.е. бак наполнится водой до того уровня, при котором скорость истечения воды через отверстие будет равна скорости u_1 , т.е. $S_0 \sqrt{2gh} = u_1$. Из этого равенства с использованием полученных ранее соотношений находим: $h_0 = H \frac{t_2^2}{4t_1^2}$.

Теперь несложно определить время t_3 , за которое выльется вода, наливая в бак до уровня h_0 : $\frac{S}{S_0} \int_H^{h_0} \frac{dh}{\sqrt{h}} = \int_0^{t_3} \sqrt{2g} dt$; откуда находим ответ:

$t_3 = \frac{t_2^2}{2t_1}$. Очевидно, что все приведенные рассуждения справедливы

лишь в том случае, когда бак с отверстием не наполняется полностью, то есть $h_0 < H$. В противном случае бак полностью наполняется и искомое время равно t_2 .

Ответ: за время $t_2^2/2t_1$ при $t_2 < 2t_1$ и за время t_2 в противном случае.

1.43. Т.к. мартышка висит неподвижно, то действующая на нее сила тяжести уравновешивается силой натяжения нити, поэтому $T = mg = 150$ Н. Изобразив силы натяжения, действующие со стороны нити на блоки и связанные с ними динамометры, несложно получить, что первый динамометр показывает $2 \cdot 150$ Н = 300 Н, а второй — 150 Н.

Ответ: 300 Н, 150 Н.

1.44. Лиана выдерживает некоторое предельное натяжение $T_{пр}$, причем из условия ясно, что $2mg < T_{пр} < 3mg$. Сила натяжения лианы максимальна, когда обезьяна находится в нижней точке траектории. По второму закону Ньютона $T - mg = mv^2/l$, где l — длина лианы, а скорость v можно найти из закона сохранения энергии $mv^2/2 = mgl(1 - \cos 45^\circ)$. Поскольку $\cos 45^\circ = 1/\sqrt{2}$, то нетрудно получить, что $T = (3 - \sqrt{2})mg \approx 1,596mg$. Таким образом, лиана выдержит раскачивающуюся обезьяну.

Ответ: выдержит.

1.45. Прежде всего отметим, что если $f > T$, то рвется нижняя нить. Обсудим теперь, что будет происходить, если $f < T$. В этом случае сила натяжения нижней нити равна f (нить невесома). В рамках предложенной в условии модели мы приходим к ситуации, когда имеется груз на пружинке, который потянули вниз с силой f . Такая система будет совершать колебания около

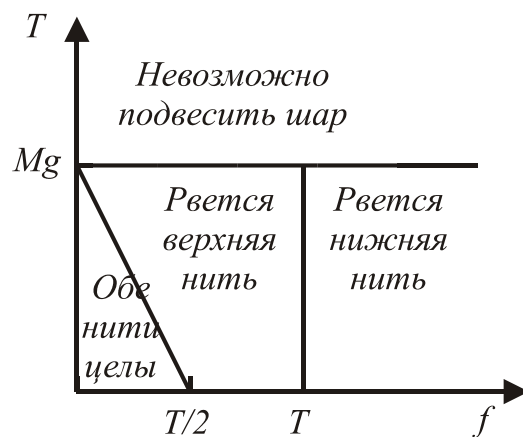


Рис. 6.10

положения равновесия по гармоническому закону. По такому же закону будет изменяться и сила натяжения около среднего положения $f_{\text{ср}} = f + Mg$ с амплитудой f . Нить порвется, если максимальная сила натяжения $f + f_{\text{ср}} = 2f + Mg$ превысит T , и не порвется при выполнении противоположного условия. Области на плоскости параметров, соответствующие различным возможным случаям, иллюстрируются рис. 6.10.

Ответ: см. рис. 6.10.

1.46. Согласно 2 закону Ньютона $F_x = ma_x$. С другой стороны, по определению $a_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{\Delta v_x}{\Delta x} \frac{\Delta x}{\Delta t} = v_x \frac{\Delta v_x}{\Delta x}$, поэтому $F_x = m v_x \frac{\Delta v_x}{\Delta x}$. Из гра-

фика видно, что $\frac{\Delta v_x}{\Delta x} = \text{const}$, поэтому график зависимости F_x от x также будет линейным (см. рис. 6.11а). Остается произвести пересчет координат в моменты времени. По определению скорости имеем: $v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}$. От-

сюда $\Delta t = \frac{1}{v_x} \Delta x$, то есть промежуток времени численно равен площади под графиком зависимости обратной скорости от координаты x . Такой график представлен на рис. 6.11б.

Подсчитывая при помощи этого графика площади узких трапеций, находим промежутки времени, затраченные на прохождение каждого отрезка $\Delta x = 0,5$ м. Результаты заносим в таблицу 1 и по ее двум последним колонкам строим требуемый график зависимости силы от времени (рис. 6.11в).

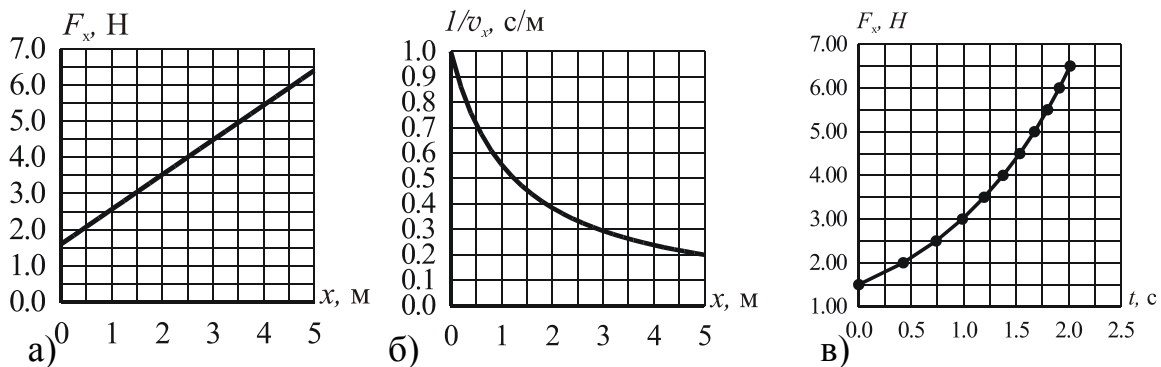


Рис. 6.11

Таблица 1.

$x, \text{ м}$	$1/v_x \text{ м/с}$	$\Delta t, \text{ с.}$	$t, \text{ с.}$	$F_x, \text{ Н}$
0	1,0	–	0	1,5
0,5	0,7	$\frac{1}{2}(1+0,7) \cdot 0,5 = 0,425$	0,425	2
1,0	0,55	$\frac{1}{2}(0,7+0,55) \cdot 0,5 = 0,3125$	0,7375	2,5
1,5	0,45	$\frac{1}{2}(0,55+0,45) \cdot 0,5 = 0,25$	0,9875	3
2,0	0,38	$\frac{1}{2}(0,45+0,38) \cdot 0,5 = 0,2075$	1,195	3,5
2,5	0,34	$\frac{1}{2}(0,38+0,34) \cdot 0,5 = 0,18$	1,375	4
3,0	0,30	$\frac{1}{2}(0,34+0,30) \cdot 0,5 = 0,16$	1,535	4,5
3,5	0,26	$\frac{1}{2}(0,30+0,26) \cdot 0,5 = 0,14$	1,675	5
4,0	0,24	$\frac{1}{2}(0,26+0,24) \cdot 0,5 = 0,125$	1,800	5,5
4,5	0,21	$\frac{1}{2}(0,24+0,21) \cdot 0,5 = 0,1125$	1,9125	6
5,0	0,20	$\frac{1}{2}(0,21+0,20) \cdot 0,5 = 0,1025$	2,015	7,4

Ответ: рис. 6.11в.

1.47. Записав условие равенства сил, действующих на контейнер, получим выражение для величины силы сопротивления: $F = mg \cdot \operatorname{tg} \alpha$. Сила сопротивления для контейнеров одинакова, поскольку определяется лишь их формой и скоростью. Поэтому $m_1 g \cdot \operatorname{tg} \alpha_1 = m_2 g \cdot \operatorname{tg} \alpha_2$. Если баржа изменит скорость, то изменятся величины углов: $m_1 g \cdot \operatorname{tg} \varphi_1 = m_2 g \cdot \operatorname{tg} \varphi_2$. Таким образом $\operatorname{tg} \varphi_2 = \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_2 / \operatorname{tg} \alpha_1$. По условию $\varphi_1 = \alpha_2 = 30^\circ$, $\alpha_1 = 45^\circ$. Поэтому искомый угол равен $\varphi_2 = \arctg(1/3) \approx 18^\circ$

Ответ: 18° .

1.48. Рассмотрим участок цепочки между ее самой нижней точкой и некоторой произвольной точкой (см. рис. 6.12). Из проекции второго закона Ньютона для этого участка на вертикаль следует, что

$mg = T \cos \varphi$, $T_0 = T \sin \varphi$, где m — масса рассматриваемого участка цепочки, φ — угол, который касательная к цепочке в данной точке образует с вертикалью, T_0 — сила натяжения в нижней точке. Чем ближе вторая точка находится к краю цепочки, тем меньше $\sin \varphi$, следовательно, наибольшая сила натяжения будет на краю цепочки. Непосредственно по рисунку (например, построив касательную и измерив тангенс ее угла наклона) можно определить, что в этой точке $\varphi \approx 52^\circ$, тогда легко находит $T = Mg/2\cos \varphi \approx 8$ мН.

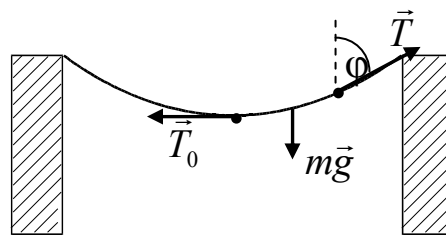


Рис. 6.12

Ответ: 8 мН.

1.49. Из соображений размерности для геометрически подобных пружин $k = CaE$, где C — безразмерная постоянная, a — какой-нибудь из геометрических размеров пружины, E — модуль Юнга, имеющий размерность Н/м². Поэтому некоторая третья пружина диаметра 9 мм из проволоки диаметра 0,6 мм и длиной 3 см имеет коэффициент жесткости в 3 раза больше первой, т. е. $3 \cdot 14$ Н/м. Очевидно, что коэффициент жесткости третьей пружины отличается в $3/7$ раза от коэффициента жесткости второй. Окончательно $k = 18$ Н/м.

Ответ: 18 Н/м.

1.50. Заметим, что тяжелая пружина под действием собственного веса растянется меньше, чем под действием груза такого же веса, прикрепленного к его концу, поскольку, например, нижняя половина пружины эффективно растягивает только ее верхнюю половину, а жесткость пружины обратно пропорциональна ее длине. Логично считать, что в случае тяжелой пружины массы m ее удлинение под собственным весом будет таким же, как и от груза массой αm , подвешенного к его концу, где α — некоторый постоянный коэффициент, меньший единицы (можно показать, что его значение приближенно равно $1/3$, но в данной задаче этого не требуется). Тогда до подвешивания груза первая пружина растянута больше второй на величину $\alpha(m_1 - m_2)/k$, где k — жесткость пружин. После подвешивания дополнительного груза вторая пружина растянется еще на $(m_1 - m_2)/k$, и, таким образом, станет длиннее первой на $(1 - \alpha)(m_1 - m_2)/k$.

Ответ: вторая пружина растянута сильнее.

1.51. Решение: наносим табличные точки на график (см. рис. 6.13). Так как для упругих элементов действует закон Гука, накладываем на точки две прямые 1 и 2. Первая прямая отвечает растяжению более короткого элемента, вторая – растяжению обоих элементов. Начальная точка таблицы не попадает на прямые, поскольку в этом случае расстояние между точками A и B меньше естественной длины элементов.

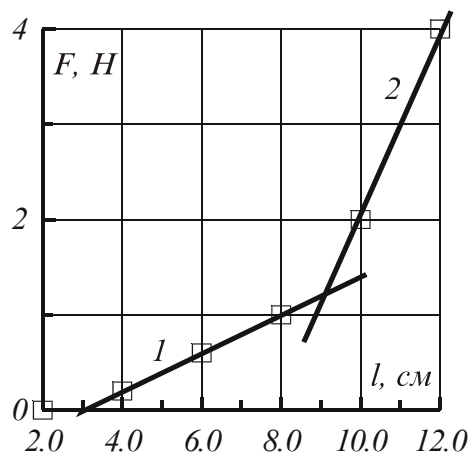


Рис. 6.13

Коэффициент жесткости первого элемента: $k_1 = 0,4 \text{ Н}/2 \text{ см} = 0,2 \text{ Н}/\text{см}$. Коэффициент жесткости параллельно соединенных элементов $k_{1+2} = 2 \text{ Н}/2 \text{ см} = 1 \text{ Н}/\text{см}$. При параллельном соединении жесткости суммируются, поэтому жесткость второго элемента $k_2 = k_{1+2} - k_1 = 0,8 \text{ Н}/\text{см}$.

Ответ: 0,2 Н/см, 0,8 Н/см.

1.52. Пусть длина пружины в нерастянутом состоянии равна l_0 , плотность шарика ρ . Запишем условие равновесия шарика в начальном положении: $g\rho V = k(l_0 - l_1)$, где l_1 — высота воды в сосуде, $V = 4\pi R^3/3$ — объем шарика.

После того, как шарик полностью оказался под водой, условие его равновесия имеет вид: $g\rho V + k(l_2 - l_0) = g\rho_0 V$. Несложно видеть, что это уравнение справедливо как для более легкого, чем вода, шарика (при этом пружина растянута и $l_2 > l_0$, а сила упругости действует вниз), так и для более тяжелого (при этом пружина сжата и $l_2 < l_0$, а сила упругости действует вверх).

Вычитая эти уравнения, имеем $k(l_2 - l_1) = g\rho_0 V$, откуда и находим повышение уровня воды в $\Delta H = l_2 - l_1 + 2R = 4\pi g\rho_0 R^3/3k + 2R$.

(Здесь учтено, что пружина крепится к нижней точке шарика, поэтому уровень воды должен превышать длину пружины на диаметр шарика, чтобы он полностью был под водой.)

Ответ: $\Delta H = 4\pi g\rho_0 R^3/3k + 2R$

1.53. Рассмотрим элемент кольца длины $R\alpha$ и массы $m\alpha/2\pi$, где α — малый центральный угол. На него действует сила $2T\sin(\alpha/2) \approx T\alpha$ в направлении центра кольца, которая сообщает этому элементу ускоре-

ние $\omega^2 R$. Отсюда находим $T = m\omega^2 R/2\pi$. С другой стороны, по закону Гука $T = k(2\pi R - l)$. Окончательно $R = l/2\pi(1 - m\omega^2/4\pi^2 k)$.

Ответ: $l/2\pi(1 - m\omega^2/4\pi^2 k)$.

1.54. Брусок либо скользит по доске, либо нет. В первом случае приложенная сила F больше, чем максимальная сила трения покоя между бруском и доской $F_{\text{тр.1}} = \mu_1 mg$, во втором — меньше. Если брусок скользит, то по III закону Ньютона на доску в направлении силы F действует сила трения скольжения $F_{\text{тр.1}}$, если нет — то сила трения покоя, равная F . Если эта сила меньше, чем максимальная сила трения покоя между доской и поверхностью $F_{\text{тр.2}} = \mu_2(m + M)g$, то доска скользит по поверхности, если нет, то доска покоится. Таким образом, возможны четыре различные ситуации:

1) Брусок и доска скользят относительно друг друга.

В этом случае $F > \mu_1 mg$ и $\mu_1 mg > \mu_2(m + M)g$, т.е. $\mu_1 < \frac{F}{mg}$, $\mu_2 < \mu_1 \frac{m}{m + M}$.

2) Брусок скользит по доске, доска покоится относительно поверхности.

При этом $F > \mu_1 mg$ и $\mu_1 mg < \mu_2(m + M)g$, т.е. $\mu_1 < \frac{F}{mg}$, $\mu_2 > \mu_1 \frac{m}{m + M}$.

3) Брусок неподвижен относительно доски, доска скользит.

Это соответствует $F < \mu_1 mg$ и $F > \mu_2(m + M)g$, или $\mu_1 > \frac{F}{mg}$, $\mu_2 < \mu_1 \frac{m}{m + M}$.

4) Брусок и доска неподвижны.

$F < \mu_1 mg$ и $F < \mu_2(m + M)g$, или $\mu_1 > \frac{F}{mg}$,

$\mu_2 > \mu_1 \frac{m}{m + M}$.

Соответствующие этим ситуациям области на плоскости параметров приведены на рис. 6.14.

Ответ: рис. 6.14

1.55. Пусть искомая сила равна F , тогда каждые два соседних кубика взаи-

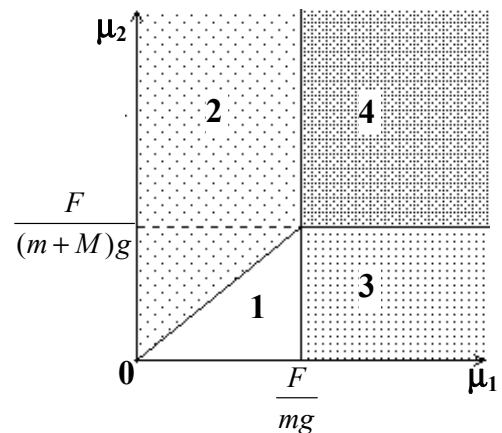


Рис. 6.14

модействуют с силой F , направленной горизонтально, и максимальная сила трения покоя между ними равна μF . По условию задачи относительно друг друга кубики не перемещаются, поэтому рассмотрим все кубики, кроме двух крайних, которые держат руками, как одно тело. В этом случае должно выполняться очевидное условие $8mg \leq 2\mu F$, откуда получаем $F \geq 4mg/\mu$.

Ответ: $4mg/\mu$.

1.56. Пусть груз неподвижен относительно доски, а угол наклона доски составляет $\alpha = \omega t$. Поскольку груз вращается вместе с доской, его ускорение направлено к центру вращения, т. е. вниз вдоль доски, и равно $\omega^2 R$.

Направим ось OX вдоль текущего положения доски, а ось OY перпендикулярно к ней. Тогда, записав для максимального угла, при котором груз еще не скользит, второй закон Ньютона в проекциях на эти оси, имеем:

$$OY : N = mg \cos \alpha$$

$$OX : m\omega^2 R = mg \sin \alpha - \mu N$$

(Здесь N , как обычно, обозначена нормальная сила реакции доски).

$$\text{Отсюда } \sin \alpha - \mu \cos \alpha = \frac{\omega^2 R}{g}, \quad \alpha = \operatorname{arctg} \mu + \arcsin \frac{\omega^2 R}{g\sqrt{\mu^2 + 1}}.$$

$$\text{Ответ: } \alpha = \operatorname{arctg} \mu + \arcsin \frac{\omega^2 R}{g\sqrt{\mu^2 + 1}}$$

1.57. а) Движение вниз по плоскости (рис. 6.15 а)

Запишем второй закон Ньютона в проекциях:

$$\text{на плоскость: } ma_1 - m\alpha \cos \alpha = mg \sin \alpha - F_{\text{тр}}$$

$$\text{на нормаль к плоскости: } -m\alpha \sin \alpha = N - mg \cos \alpha$$

(здесь a — ускорение грузовика, a_1 — ускорение грузика относительно грузовика).

Отсюда имеем $a_1 = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) + a(\cos \alpha + \mu \sin \alpha)$. Поскольку для движения необходимо $a_1 > 0$, а $\sin \alpha < \mu \cos \alpha$ (грузик не соскальзывает сам по себе), то

$$a > g \frac{\mu \cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha} = g \frac{\cos(\alpha + \operatorname{arctg} \mu)}{\sin(\alpha + \operatorname{arctg} \mu)} = g \operatorname{ctg}(\alpha + \operatorname{arctg} \mu) \quad (1)$$

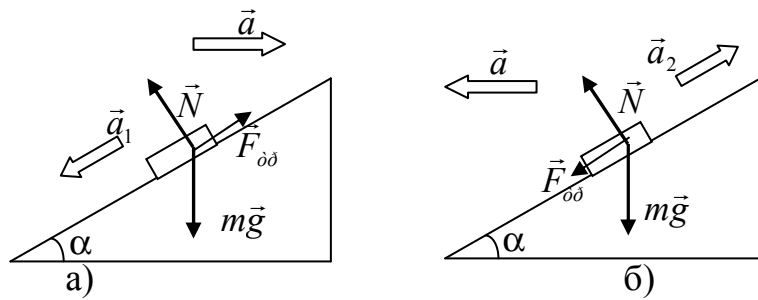


Рис. 6.15

Следует также учесть, что грузик не должен отрываться от плоскости, т. е. $N > 0$. Отсюда следует, что $a < g \operatorname{ctg} \alpha$. Понятно, что $g \operatorname{ctg} \alpha > g \operatorname{ctg}(\alpha + \operatorname{arctg} \mu)$, т. к. котангенс — убывающая функция угла α , поэтому существует диапазон ускорений, при которых грузик скользит вниз по горке.

б) Движение вверх по плоскости (рис. 6.15б)

Второй закон Ньютона в проекциях:

$$\text{на плоскость: } ma_2 - ma \cos \alpha = -mg \sin \alpha - F_{\text{тр}}$$

$$\text{на нормаль к ней: } ma \sin \alpha = N - mg \cos \alpha$$

Отсюда $a_2 = -g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) + a(\cos \alpha - \mu \sin \alpha)$. Из условия $a_2 > 0$ с учетом $1 > \mu > \operatorname{tg} \alpha$ имеем

$$a > g \frac{\mu \cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha} = g \frac{\sin(\alpha + \operatorname{arctg} \mu)}{\cos(\alpha + \operatorname{arctg} \mu)} = g \operatorname{tg}(\alpha + \operatorname{arctg} \mu). \quad (2)$$

Непосредственным вычислением несложно убедиться, что минимальное значение ускорения в этом случае больше, чем в предыдущем.

Ответ: а) $g \operatorname{ctg} \alpha > a > g \operatorname{ctg}(\alpha + \operatorname{arctg} \mu)$, б) $a > g \operatorname{tg}(\alpha + \operatorname{arctg} \mu)$.

1.58. Движение состоит из двух этапов. На первом проскальзывают друг относительно друга все кирпичи, а на втором — только верхний и средний, а средний и нижний движутся как единое целое. На первом этапе, как видно из рисунка 6.16а, ускорения кирпичей составляют соответственно gk , $-3gk$, $2gk$ (k — коэффициент трения).

Поэтому относительное ускорение среднего и нижнего кирпичей равно $5gk$. Первый этап длится до тех пор, пока скорости среднего и нижнего кирпичей не сравняются, что произойдет через $t = v/5gk$. За это время нижний и средний кирпичи смещаются друг относительно друга на расстояние $S_1 = v^2/10gk = 2,55$ см. Относительное ускорение верхнего и среднего кирпичей составляет $4gk$.

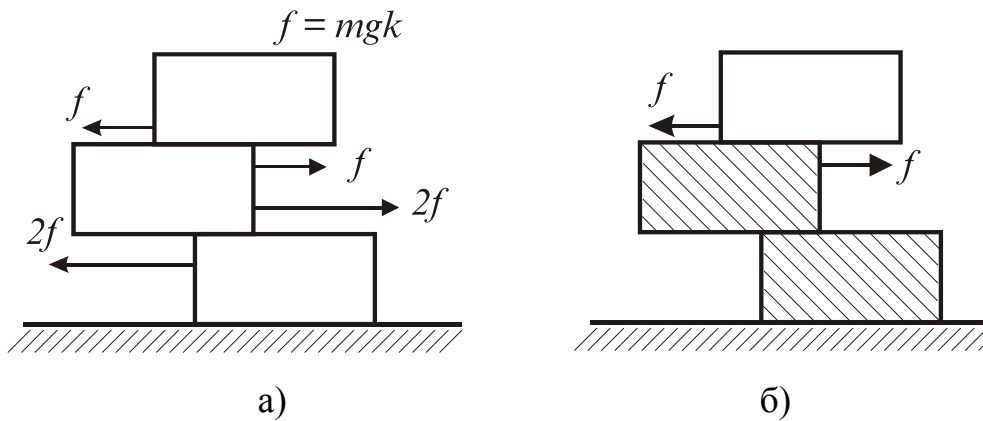


Рис. 6.16

За время t они пройдут друг относительно друга расстояние $S_2 = vt - 4gkt^2/2 = 3v^2/25gk$, а величина их относительной скорости составит $v - 4gkt = v/5$. На втором этапе (рис. 6.16б) верхний кирпич по-прежнему имеет ускорение gk , а средний и нижний вместе — ускорение $-gk/2$, так что их относительное ускорение $3gk/2$. Поэтому на втором этапе верхний кирпич пройдет до остановки относительно среднего расстояние $S_3 = (v/5)^2/3gk$. Суммарное относительное смещение верхнего кирпича $S = S_2 + S_3 = 2v^2/15gk = 3,40$ см.

Ответ: относительно нижнего кирпича средний сместится на 2,55 см, а верхний — на 3,40 см.

1.59. Рассмотрим малый элемент нити, охватывающий угол $d\varphi$ (рис. 6.17). Записав условие равновесия этого элемента, находим (т. к. угол $d\varphi$ малый): $N = T d\varphi$ и $T(\varphi + d\varphi) - T(\varphi) = F_{\text{тр}} = \mu T d\varphi$, что приводит к уравнению $dT/T = \mu d\varphi$. Интегрируя его, получаем, что отношение сил натяжения на ее концах выражается формулой $T_1/T_2 = e^{\mu\varphi}$, где φ — угол охвата блока нитью.

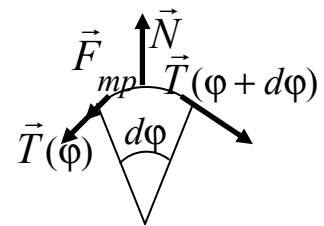


Рис. 6.17

В состоянии покоя силы натяжения равны силам тяжести, действующим на подвешенные к концам грузы. Тогда можно записать $e^{\mu\varphi} = 2$, откуда $\mu = (\ln 2)/\pi \approx 0,22$.

Ответ: 0,22.

1.60. В плоскости клина на тело действуют скатывающая сила $mgs\sin\alpha$, сила трения скольжения $f = \mu mg \cos \alpha$ и сила натяжения нити (α — угол наклона плоскости к горизонту, μ — коэффициент трения по-

коя). Чтобы тело остановилось и осталось на месте, пройдя угол φ , необходимо выполнение двух условий. Во-первых, скорость тела должна стать равной нулю. Приравняем работу силы трения и изменение потенциальной энергии: $fR\varphi = mgh \sin \alpha$, где $h = R \cos(\varphi - \pi/2)$. Откуда $\sin \varphi / \varphi = \mu \operatorname{ctg} \alpha$ (1). Во-вторых, проекция скатывающей силы на касательную к окружности, по которой движется тело, не должна превышать силы трения скольжения f : $mg \sin \alpha \sin(\varphi - \pi/2) \leq \mu mg \cos \alpha$, т. е. — $\cos \varphi \leq \mu \operatorname{ctg} \alpha$, что с учетом (1) можно записать как $\varphi \leq |\operatorname{tg} \varphi|$ (2) (здесь учтено, что $\operatorname{tg} \varphi < 0$). Непосредственная проверка показывает, что в случае а) соотношение (2) не выполняется, а в случае б) выполняется, поэтому остановка возможна.

Ответ: а) нет, б) да.

1.61. На плоскости на шайбу действуют скатывающая сила $mg \sin \alpha$, сила натяжения пружины T_0 и сила трения покоя f , где α — угол наклона плоскости к горизонту. Векторная сумма этих сил должна равняться нулю. Отсюда получаем соотношение $T_0^2 + (mg \sin \alpha)^2 = f^2$. Скольжение начнется, когда сила трения f достигнет величины $\mu mg \cos \alpha$. Из этих двух условий легко найти предельное значение угла: $\sin \alpha = \sqrt{(\mu^2 - (T_0/mg)^2)/(1 + \mu^2)}$.

Ответ: $\sin \alpha = \sqrt{(\mu^2 - (T_0/mg)^2)/(1 + \mu^2)}$.

1.62. Поместим начало координат в точку начального положения грузика. Условимся также, что если нет дополнительных уточнений, то под скоростью грузика мы будем понимать скорость относительно начала координат. Вначале грузик движется вместе с лентой до тех пор, пока действующая на него со стороны ленты и направленная вправо сила трения покоя $\mu_n mg$ не станет равна силе упругости пружины, что произойдет в точке $x_0 = \mu_n mg/k$, причем в этот момент грузик имеет скорость v_0 . Далее он начинает проскальзывать относительно ленты, и на него действует сила трения скольжения $\mu_c mg/k$, также направленная вправо. В то же время относительно начала координат груз также движется вправо, растягивая пружину, поэтому в некоторой точке x_1 его скорость станет равна нулю. Определим эту точку из уравнения энергетического баланса

(обратите внимание, что работа силы трения в этом случае положительна):

$$mv_0^2 + kx_0^2 + 2\mu_c mg(x_1 - x_0) = kx_1^2.$$

Отсюда находим $x_1 = \frac{mg}{k}(\mu_c + \sqrt{(\mu_n - \mu_c)^2 + \frac{k}{m}(\frac{v_0}{g})^2})$ (из двух корней необходимо выбрать больший, т. к. $x_1 > x_0$).

Далее груз начинает двигаться влево, и продолжает движение до тех пор, пока в некоторой точке x_2 его скорость опять не обратится в ноль. Опять запишем закон изменения энергии:

$$kx_2^2 + 2\mu_c mg(x_1 - x_2) = kx_1^2,$$

из которого легко найти $x_1 + x_2 = 2\mu_c mg/k$. Тогда несложно определить и размах колебаний $A = x_1 - x_2 = 2x_1 - 2\mu_c mg/k = \frac{2mg}{k} \sqrt{(\mu_n - \mu_c)^2 + \frac{k}{m}(\frac{v_0}{g})^2}$.

Обратим внимание, что эффект будет наблюдаться и при одинаковых коэффициентах трения скольжения и покоя.

Ответ: $\frac{2mg}{k} \sqrt{(\mu_n - \mu_c)^2 + \frac{k}{m}(\frac{v_0}{g})^2}$.

1.63. Равновесие «тяжелого» стержня достигается при балансе между моментами силы тяжести груза и силы тяжести самого стержня относительно оси, проходящей через точку опоры. Поскольку сила тяжести приложена в центре тяжести, указанный баланс моментов сил будет иметь вид: $m_0 g \frac{L}{7} = mg \left(\frac{L}{2} - \frac{L}{7} \right)$, где L — длина стержня, g — ускорение свободного падения, m_0 — масса груза, m — масса стержня. Решая это уравнение относительно массы стержня, получим: $m = \frac{2}{5} m_0 = 3$ кг

Ответ: 3 кг.

1.64. Пусть h — рост наименьшей матрешки, а m — ее масса. Тогда по условию задачи $h(1 + A + A^2) = L$. Масса каждой матрешки пропорциональна объему ее стенок, а значит третьей степени роста: $m_1 = m$, $m_2 = A^3 m$, $m_3 = A^6 m$, $m_4 = A^9 m$. Предполагая, что опора находится на расстоянии x от наибольшей матрешки, запишем условие равновесия

моментов сил тяжести

$$m_4 g x = m_3 g (h_3 - x) + m_2 g (h_3 + h_2 - x) + m_1 g (L - x),$$

где h_i — рост i -й матрешки. Тогда $x = \frac{L + h(A^8 + A^5 + A^4)}{(A^9 + A^6 + A^3 + 1)}$, и после под-

становки h получаем $x = L \frac{1 + (A^8 + A^5 + A^4)/(1 + A + A^2)}{(A^9 + A^6 + A^3 + 1)}$.

Ответ: на расстоянии $x = L \frac{1 + (A^8 + A^5 + A^4)/(1 + A + A^2)}{(A^9 + A^6 + A^3 + 1)}$

1.65. Поскольку закрепленной оси у рычага нет, условие равенства суммы моментов сил нулю можно записывать относительно любой его точки. Записывая его относительно левого конца, получаем $f_2/f_1 = 3/2$, где f_2 и f_1 — силы трения покоя, действующие на грузы. Предположим, что сдвинулся второй груз. Тогда $f_2 = \mu m_2 g$ и $f_1 = 2f_2/3 = 2\mu m_2 g/3 > \mu m_1 g$. Получили противоречие — сила трения, действующая на первый груз, больше максимальной силы трения покоя. Следовательно, сдвинется первый груз.

Ответ: первый груз.

1.66. Вдоль наклонной плоскости на карандаш действуют скатывающая сила $mg \sin \alpha$ (компонента силы тяжести, направленная вдоль плоскости) и сила трения. При начале качения карандаша в направлении качения действует лишь часть силы тяжести, равная $f_x = mg \sin \alpha \sin \beta$. Карандаш устойчив, когда векторная сумма этой компоненты с перпендикулярной к плоскости компонентой силы тяжести $f_y = mg \cos \alpha$ проходит через ребро карандаша. Это приводит к условию $\operatorname{tg} \gamma = f_x/f_y = \operatorname{tg} \alpha \sin \beta$, где для шестиугольника $\gamma = 30^\circ$. Известно, что $\beta = 60^\circ$, тогда $\alpha = \operatorname{arctg}(2/3)$.

Ответ: $\operatorname{arctg}(2/3) \approx 34^\circ$.

1.67. На автомобиль действуют сила тяжести Mg , приложенная к его центру масс, и силы реакции опоры на передние и задние колеса N_1 и N_2 соответственно (рис. 6.18). Кроме того, на задние колеса действует сила трения $F_{\text{тр}}$, являющаяся силой трения покоя и направленная по направлению движения автомобиля (это становится очевидным, если заметить,

что нижняя точка колеса неподвижна относительно земли, а действующий на колесо со стороны двигателя момент сил стремится сдвинуть ее против направления движения автомобиля). Именно эта сила трения покоя и движет автомобиль вперед. В то же время на переднее колесо не действуют ни сила трения покоя, ни сила трения скольжения, т. к. оно катится без проскальзывания и не приводится во вращение мотором.

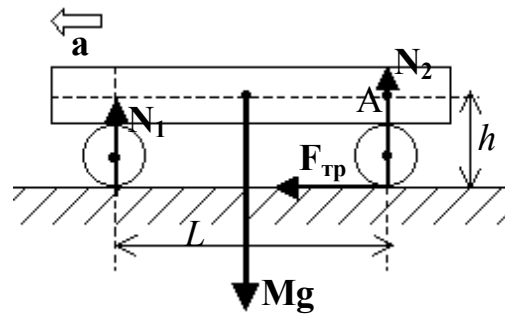


Рис. 6.18

Записав второй закон Ньютона в проекциях на вертикальную и горизонтальную ось и уравнение моментов относительно т. А, являющейся точкой пересечения проведенной через центр тяжести горизонтали и проведенной через заднего колеса вертикали (см. рис. 6.18), получим систему уравнений, описывающую движение автомобиля:

$$\begin{cases} F_{mp} = Ma_{\max} \\ N_1 + N_2 = Mg \\ N_1 L + F_{mp} h = Mg \frac{L}{2} \end{cases} \quad (1)$$

Учитывая, что сила трения покоя $F_{тр} \leq \mu N_2$, можно прийти к системе неравенств, ограничивающих значение ускорения:

$$\begin{cases} a \leq \mu \frac{N_2}{M} \\ a \leq \left(\frac{N_2}{M} - \frac{g}{2} \right) \frac{L}{h} \end{cases} \quad (2)$$

При нарушении первого условия системы (2) задние колеса начнут проскальзывать, а при нарушении второго условия нарушится третье уравнение системы (1), суммарный момент сил N_1 и $F_{тр}$ превысит момент силы тяжести и автомобиль опрокинется назад.

Поскольку правые части неравенств системы (2) прямо пропорциональны силе N_2 , то максимальное ускорение достигается при ее максимальном значении. Очевидно, что оно равно значению силы тяжести,

тогда (2) принимает вид

$$\begin{cases} a \leq \mu g \\ a \leq \frac{L}{2h} g \end{cases}.$$

Непосредственным вычислением несложно убедиться, что при $\mu = 0,1$ существенным оказывается первое неравенство, а при $\mu = 0,7$ — второе.

Ответ: а) 1 м/с^2 , б) 6 м/с^2 .

1.68. Искажение формы связано с вращением планеты. Работа по перемещению элементарного тела по замкнутому контуру от полюса вдоль полярного радиуса до центра планеты, затем вдоль экваториального радиуса до поверхности и вдоль поверхности вновь до полюса равна нулю. При этом работа при движении вдоль поверхности равна нулю, а против центробежной силы $A = \int_0^r m\omega^2 r dr = m\omega^2 r^2/2$ (работу также можно вычислить как площадь под графиком зависимости центробежной силы от радиуса). Окончательно получаем $mg\Delta r = m\omega^2 r^2/2$, или $\Delta r/r = \omega^2 r/2g = 1/18$.

Ответ: $1/18$.

1.69. Определим плотности ядра планеты и самой планеты, учитывая, что объем вещества планеты равен ее полному объему без объема ядра:

$$\rho_1 = \frac{M/2}{\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi R^3/8} = \frac{3M}{7\pi R^3}, \quad \rho_2 = \frac{M/2}{\frac{4}{3}\pi R^3/8} = \frac{3M}{\pi R^3}.$$

Очевидно, что максимальное и минимальное значения ускорения свободного падения находятся в точках планеты, расположенных на концах диаметра, проходящего через центры планеты и ядра. В этом случае ускорения свободного падения равны

$$g_1 = \gamma \left(\frac{\rho_1 V_1}{R^2} + \frac{(\rho_2 - \rho_1) V_2}{\left(\frac{3}{4}R\right)^2} \right) = \gamma \left(\frac{8\rho_1 V_2}{R^2} + \frac{16(\rho_2 - \rho_1) V_2}{9R^2} \right) = \frac{8\gamma V_2}{9R^2} (7\rho_1 + 2\rho_2) =$$

$$\frac{\gamma \pi R^3}{9R^2} \cdot \frac{72}{\pi R^3} \frac{M}{3R^2} = \frac{4}{3} \frac{\gamma M}{R^2} = \frac{4}{3} g_0 \approx 1,33 g_0 \approx 13,07 \text{ м/с}^2$$

$$g_2 = \gamma \left(\frac{\rho_1 V_1}{R^2} + \frac{(\rho_2 - \rho_1) V_2}{\left(\frac{5}{4}R\right)^2} \right) = \gamma \left(\frac{8\rho_1 V_2}{R^2} + \frac{16(\rho_2 - \rho_1) V_2}{25 R^2} \right) = \frac{\gamma 8 V_2}{25 R^2} (23\rho_1 + 2\rho_2) =$$

$$= \frac{8\gamma V_2}{25 R^2} (23\rho_1 + 14\rho_1) = \frac{296\gamma V_2 \rho_1}{25 R^2} = \frac{296\gamma \frac{\pi R^3}{6} \frac{3M}{7\pi R^3}}{25 R^2} = \frac{148}{175} \gamma \frac{M}{R^2} = \frac{148}{175} g_0 \approx 8,29 \text{ м/с}^2$$

Ответ: Ускорение силы тяжести изменяется от 8,29 м/с² до 13,07 м/с².

1.70. Считая (для оценки), что вся потенциальная энергия перешла в работу, получим $E \approx mgh \approx 3,5$ кДж. Эта энергия не столь велика (например, стакан воды за счет этой энергии нагреется всего на 4°C), однако вследствие слабой теплопроводности воды она идет на нагрев только поверхностного слоя ладоней, и повышение температуры оказывается значительным.

Ответ: 3,5 кДж.

1.71. Для капли, свободно упавшей с высоты h , по закону сохранения энергии: $mgh = mL + c\lambda\Delta T$, откуда $h = (L + c\lambda\Delta T)/g$, где $c = 4,18 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К), $L = 2,25 \cdot 10^6$ Дж/кг. После подстановки численных значений, найдем, что капля должна упасть с высоты около 272 км, при этом скорость капли в момент приземления должна составить около 2,5 км/с. На самом деле эта модель слишком идеализирована и сопротивление воздуха сильно скажется на движении капли. Кроме того, при падении с такой высоты капля, скорее всего, полностью испарится задолго до удара о землю.

Ответ: 272 км.

1.72. При раскрытии книги посередине центр масс ее половины поднимается на расстояние, равное половине длины стороны книги. Тогда соответствующая работа равна $A = \frac{m}{2} g \frac{l}{2}$. Отсюда находим массу книги: $m = 4A/gl$.

Ответ: $4A/gl$.

1.73. При условии $v_0^2 < 2gk_0x_0$ координату кубика найти легко, так как задача сводится к скольжению тела по поверхности с коэффициентом

трения k_0 : $x = v_0^2/2gk_0$. Если же $v_0^2 > 2gk_0x_0$, то координату кубика ищем из энергетических соображений: $mv_0^2/2 = A$. Работу силы трения A найдем, вычисляя площадь под графиком зависимости силы трения от координаты. Поскольку уравнение прямолинейного участка имеет вид $k = k_0x/x_0$, то получаем $A = mg(k_0x^2/x_0 + k_0x_0)/2$. Окончательно $x = x_0\sqrt{v^2/gk_0x_0}$.

Ответ: $x = v_0^2/2gk_0$ при $v_0^2 < 2gk_0x_0$ и $x = x_0\sqrt{v^2/gk_0x_0}$ в противном случае.

1.74. По закону сохранения механической энергии: $mv^2/2 = mv_1^2/2 + mgh$, где v_1 — скорость шарика на высоте h . Возможны следующие ситуации:

а) $v^2 < 2gH$ — шарик не вылетит за пределы наклонной плоскости, достигнув высоты $h_{max} = v^2/2g$.

б) $v^2 = 2gH$ — шарик достигнет вершины наклонной плоскости, имея нулевую скорость ($h_{max} = H$).

в) $v^2 > 2gH$ — шарик стартует с вершины наклонной плоскости со скоростью $v_1 = \sqrt{v^2 - 2gH}$, направленной под углом 45° к горизонту. Тогда в верхней точке траектории он имеет скорость $v_1/\sqrt{2}$, поэтому $h_{max} = v^2/4g + H/2$. График зависимости h_{max} от v^2 является совокупностью двух прямых (см. рис. 6.19).

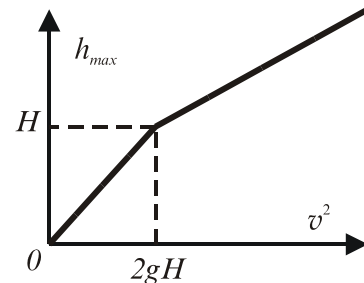


Рис. 6.19

Ответ: $v^2/2g$ при $v^2 < 2gH$ и $v^2/4g + H/2$ при $v^2 > 2gH$.

1.75. Моменту отрыва соответствует обращение в ноль силы взаимодействия двух кубиков. Поскольку на прикрепленный к пружине кубик действуют (в горизонтальном направлении) только эта сила и сила упругости пружины, то в момент отрыва должна обратиться в ноль и сила упругости, т. е. пружина будет не деформирована. Записав закон сохранения энергии и импульса и считая, что два левых кубика образуют «тело» массы $2M$, получим: $v = \sqrt{k/6M} \cdot \Delta x$.

Ответ: $v = \sqrt{k/6M} \cdot \Delta x$.

1.76. По закону сохранения механической энергии условие перехода от колебательного движения к вращательному запишется в виде: $mv^2/2 = mg2l$. При $v^2 > 4gl$ происходит вращение, при меньшей скорости — колебания около нижней точки. При прохождении телом верхней точки со скоростью v_1 согласно второму закону Ньютона $mg + T = mv_1^2/l$, откуда сила натяжения стержня: $T = m(v_1^2/l - g)$. При $v_1^2/l > g$ получим $T > 0$ (стержень растянут). Наоборот, при $v_1^2/l < g$ получим $T < 0$ (стержень сжат). Согласно закону сохранения механической энергии $v_1^2 = v^2 - 4gl$. Следовательно, при $v^2 > 5gl$ стержень в верхней точке растянут, при $4gl < v^2 < 5gl$ стержень в верхней точке сжат, при $v^2 < 4gl$ наблюдается колебательное движение.

1.77. Сразу очевидны три качественно различных ситуации: когда нить закручивается вокруг нижнего гвоздя, при этом грузик движется по окружности; когда грузик совершает колебания и нить все время остается натянутой и «промежуточный» вариант.

Нить все время остается натянутой, если отклонение грузика влево не превышает 90° . Тогда по закону сохранения энергии $mgL(1 - \cos \alpha) < mgl$, откуда получаем условие $l/L > 1 - \cos \alpha$.

Для того, чтобы грузик закручивался вокруг нижнего гвоздя и нить все время оставалась натянутой, необходимо, чтобы сила натяжения нити в верхней точке траектории была больше нуля, т. е. $mv^2/l > mg$, тогда по закону сохранения энергии $mgL(1 - \cos \alpha) > mgl/2 + mgl$, откуда $l/L < 2/5(1 - \cos \alpha)$.

Промежуточный случай требует более подробного рассмотрения. Если грузик отклоняется вправо на угол, больший 90° , но его энергии не хватает для движения по окружности, то в некоторый момент натяжение нити становится равным нулю. Пусть в этот момент угол между нитью и горизонталью составляет β (см. рис. 6.20). Из условия равенства нулю силы натяжения нити получим $mv^2/l = mg \sin \beta$. В то же время по закону сохранения энергии $mv^2/2 = mgL(1 - \cos \alpha) - mgl(1 + \sin \beta)$, откуда получим выражение для угла β : $\sin \beta = 2/3(L/l(1 - \cos \alpha) - 1)$.

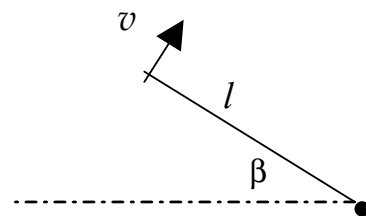


рис. 6.20

Дальнейшее движение грузика можно рассматривать как полет тела, брошенного под углом к горизонту. Возможны две качественно различных ситуации: когда грузик проходит над нижним гвоздем (в этом случае нить наматывается на гвоздь, но траектория грузика не является окружностью), и когда грузик проходит ниже этого гвоздя, при этом нить не наматывается, а грузик совершает сложные движения. Найдем условие, разграничивающее эти ситуации.

Пусть грузик оказывается на одной вертикали с гвоздем через время t . Тогда $v \sin \beta t = l \cos \beta$, откуда $t = l \cos \beta / v \sin \beta$. Грузик пройдет выше гвоздя и нить намотается на гвоздь, если $l \sin \beta + v \cos \beta t - gt^2/2 > 0$. Подставив t и проведя некоторые преобразования с использованием ранее полученных соотношений, получим следующее неравенство: $l/L < 2/(2 + \sqrt{3})(1 - \cos \alpha)$.

Таким образом, окончательно имеем 4 различных ситуации: I — колебания по дуге окружности; II — сложное движение без закручивания нити вокруг гвоздя; III — нить закручивается вокруг гвоздя, шарик движется по сложной кривой; IV — шарик движется по спирали, нить закручивается вокруг гвоздя. Соответствующие им области представлены на рис. 6.21.

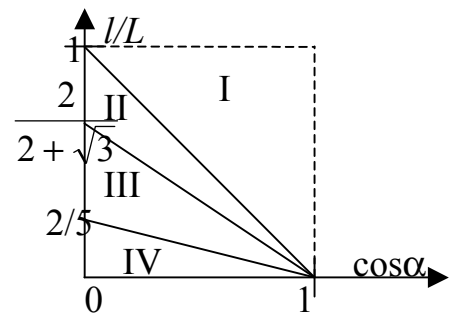


Рис. 6.21

Ответ: рис. 6.21.

1.78. По закону сохранения энергии, чтобы верхний (пятый) маятник смог совершить полный оборот, в нижней точке ему нужно сообщить скорость $v_{50} = \sqrt{2gl}$. Эту скорость он получает при неупругом соударении с четвертым маятником в верхней точке траектории последнего. При неупругом соударении два одинаковых шара свои скорости делят поровну, поэтому четвертый шар перед столкновением с пятым должен иметь скорость $2v_{50}$. Следовательно, в нижней точке ему нужно сообщить начальную скорость v_{40} , определяемую из закона сохранения механической энергии:

$$\frac{mv_{40}^2}{2} = \frac{m(2v_{50})^2}{2} + mg2l.$$

Отсюда, зная v_{50} , находим $v_{40} = 2\sqrt{(4+1)gl} = 2\sqrt{5gl}$. Проводя аналогичные рассуждения для нижерасположенных маятников, получим:

$$\begin{aligned}v_{30} &= 2\sqrt{(4 \cdot 5 + 1)gl} = 2\sqrt{21gl}, \\v_{20} &= 2\sqrt{(4 \cdot 21 + 1)gl} = 2\sqrt{85gl}, \\v_{10} &= 2\sqrt{(4 \cdot 85 + 1)gl} = 2\sqrt{341gl}.\end{aligned}$$

Ответ: $2\sqrt{341gl} \approx 37\sqrt{gl}$.

1.79. Пусть каждая лошадь развивает мощность P (по условию она постоянна), а коэффициент сопротивления движению k . Тогда одна лошадь, запряженная в сани, может развивать скорость $v_1 = P/k(m + M)g$, где m и M — массы лошади и саней соответственно. Аналогично для саней, запряженных тройкой, имеем $v_3 = 3P/k(3m + M)g$. Т. к. $5v_3 = 11v_1$, то $M = 4,5m$. Тогда для саней, запряженных шестеркой лошадей, имеем $v_6 = 6P/k(6m + M)g = 6P/10,5km g = (22/7)v_1$, т. е. на них можно доехать за $77/22 = 3,5$ часа.

Ответ: за 3,5 часа

1.80. Работа, совершаемая насосом, идет на сообщение воде потенциальной (подъем на высоту h) и кинетической энергии, т. к. на выходе из трубы вода должна иметь скорость $v = V/S$, где V — объемный расход, а S — площадь поперечного сечения трубы, по которой идет вода. Тогда можно записать энергетическое соотношение для мощности насоса

$$P = \rho Vgh + \frac{\rho V \cdot \left(\frac{V}{S}\right)^2}{2} = \rho \left(Vgh + \frac{V^3}{2S^2}\right).$$

Записывая два таких соотношения для мощностей 150 Вт и 600 Вт и соответствующих расходов, получаем систему уравнений, из которой несложно определить площадь поперечного сечения трубы $S = 10^{-4} \text{ м}^2$ и глубину скважины $h = 10$ м. Тогда из аналогичного соотношения для расхода 4 л/с находим $P = 4$ кВт.

Ответ: 4 кВт.

1.81. Для того, чтобы барон смог догнать поезд, необходимо, чтобы скорость вагона хотя бы не убывала. Поскольку на вагон действует сила сопротивления, то за время τ его импульс убывает на $\mu M g \tau$, где

$\mu = 0,001$ — коэффициент сопротивления, M — масса вагона (массой самого барона и бутылок по сравнению с ней, очевидно, можно пренебречь). Чтобы компенсировать это изменение импульса, барон должен за это же время выбросить некоторое количество бутылок N , при этом должно выполняться условие $Nmv \geq \mu Mgt$, откуда, подставляя числовые данные, получаем $Nv/t \geq 1000$. Если предположить, что барон бросает 1 бутылку в секунду, то им нужно сообщать скорость не менее 1000 м/с, что, конечно, невозможно.

1.82. Поскольку масса мишени M много больше массы пули m , то можно пренебречь изменением массы мишени после попадания в нее пули; тогда попадание каждой из пуль приводит к изменению скорости мишени на одну и ту же величину $\Delta v = mv/M$. После попадания первой пули мишень приобретет скорость Δv , направленную на север, которая будет через две секунды погашена третьей пулей. Аналогично после попадания второй пули мишень приобретет скорость Δv , направленную на восток, которая будет погашена четвертой пулей. Таким образом, пуля двигалась со скоростью Δv 2 с на север и две на восток, в результате сместилась на северо-восток на $\sqrt{2} \Delta vt \approx 0,566$ м.

Ответ: на 0,566 м на северо-восток.

1.83. Из закона сохранения импульса понятно, что перед взрывом скорость снаряда была направлена под углом 45° к горизонту и равна $u = v_0/\sqrt{2}$. Теперь высоту взрыва можно найти из закона сохранения энергии: $v_0^2 = 2gh + u^2$, откуда $h = 7v_0^2/16g$.

Ответ: $7v_0^2/16g$.

1.84. Рассмотрим сначала следующую ситуацию: имеется неподвижный шар массы M , на который со скоростью v налетает шар массы m . Анализируя ее стандартным методом с использованием законов сохранения импульса и энергии, нетрудно найти, что скорость шара массы M после удара будет $V = 2v/(1 + M/m)$. Вернемся теперь к исходной задаче. После удара внешнего шарика об оболочку она получит скорость V . Итак, относительная скорость внутреннего шарика и оболочки равна V . Заметим, что при ударах внутреннего шарика и оболочки их относительная скорость измениться не может. Действительно, рассмотрим упругое центральное соударение двух тел в системе центра масс. Поскольку суммар-

ный импульс в такой системе до и после удара равен нулю, то оба тела при ударе меняют скорости на противоположные. Соответственно, относительная скорость по величине не меняется. Но тогда ясно, что период движения внутреннего шарика есть $T = 4R/V = 2R(1 + M/m)/v \approx 4,5$ мс.

Ответ: 4,5 мс.

1.85. Пусть для достижения равновесия большое колесо повернется на угол α против часовой стрелки, а малое — на угол β по часовой (см. рис. 6.22). Так как проскальзывания нет, то $\beta = 2\alpha$. В точке контакта колеса касательные компоненты их сил реакции равны F_1 и F_2 ($F_1 = F_2$). Условия равенства суммарного момента сил, действующих на колеса, относительно их центров масс имеют вид (нормальные компоненты сил реакции, очевидно, дают нулевой момент):

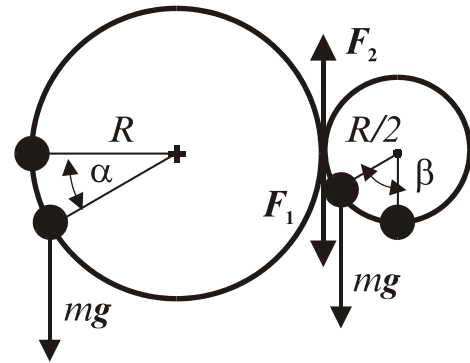


Рис. 6.22

$$F_1 R = mg \cos \alpha \cdot R,$$

$$F_2 \frac{R}{2} = mg \sin(2\alpha) \frac{R}{2}.$$

Отсюда получаем: $\cos \alpha = \sin 2\alpha$, или $\cos \alpha(1 - 2\sin \alpha) = 0$. Корни этого уравнения: $\alpha_1 = \pi/2$, $\alpha_2 = \pi/6$ и $\alpha_3 = 5\pi/6$. Первый корень соответствует обращению касательных компонент сил реакции в ноль, поэтому соответствующее положение равновесия будет неустойчивым: при малом отклонении $\delta\alpha$ угла от $\pi/2$ момент силы тяжести будет расти как $\delta\alpha$, а момент силы реакции — как $\delta\alpha^2$, поскольку она пропорциональна $\cos \alpha$. Два других корня соответствуют двум симметричным устойчивым положениям равновесия.

Ответ: на 30° или 150° против часовой стрелки.

1.86. Т.к. шары свинцовые, то все удары можно считать неупругими, и после последнего удара все пять шаров движутся как одно целое. Тогда по законам сохранения импульса их общая скорость равна $v_0/5$.

1.87. Рассмотрев стандартным образом упругое соударение шаров массы M и $M/3$, можно получить, что скорость второго шара после удара составляет $3v_0/2$. Очевидно, что искомая скорость 17-го шара равна $(3/2)^{16}v_0 \approx 657v_0$.

Интересно, что именно наличие «промежуточных» шаров позволяет достичь очень большой скорости последнего шара. Если бы происходило только столкновение первого шара с 17-м, то его скорость была бы чуть меньше $2v_0$. Заметим, что подобный механизм «работает», например, при «щелчке» пастушьим кнутом, приводя к увеличению скорости его кончика пастушьего кнута до сверхзвуковых значений.

Ответ: $657v_0$.

1.88. Пусть v_0 и V_0 — начальные скорости левого и правого шаров. Так как масса левого шара намного меньше, чем правого, то его скорость при каждом соударении с правым уменьшается примерно на $2V_0$, и после n ударов левый шар будет иметь скорость примерно $v_0 - 2nV_0$. Дальнейшие соударения станут невозможны, если эта скорость меньше скорости правого шара (которая меняется слабо), т. е. $|v_0 - 2nV_0| \leq V_0$. Т. к. $n \gg 1$, то $v_0 \approx 2nV_0$, т. е. v_0 примерно в 20 раз больше V_0 . Закон сохранения энергии имеет вид: $mv_0^2 + MV_0^2 = m(v_0 - 2nV_0)^2 + M(V_0 - \Delta V)^2$. После преобразований получаем $-4mnv_0V_0 + 4mn^2V_0^2 + M\Delta V^2 = 2MV_0\Delta V$, или, после подстановки $v_0 \approx 2nV_0$: $-4mn^2V_0^2 + M\Delta V^2 = 2MV_0\Delta V$. Подставляя числовые значения $n = 10$ и $M/m = 2000$, имеем $\Delta V^2 - 2V_0\Delta V - 0,2V_0^2 = 0$, откуда $\Delta V \approx -0,1V_0$ (знак «минус» означает, что скорость уменьшилась).

Ответ: уменьшилась на 10 %.

1.89. Перед ударом о неподвижную ракетку скорость шарика, упавшего с высоты h , равна $v = \sqrt{2gh}$. Из условия следует, что после удара о ракетку шарик имеет скорость $0,8v$. Пусть теперь ракетка движется со скоростью V . В системе отсчета, связанной с ракеткой, шарик налетает со скоростью $v + V$, поэтому после удара его скорость в этой системе отсчета станет равна $0,8(v + V)$, а в исходной — $0,8(v + V) + V$. Поскольку после удара шарик поднимается на ту же высоту, то должно выполняться условие $0,8(v + V) + V = v$. Отсюда находим $V = v/9 = \sqrt{2gh}/9 \approx 0,47$ м/с.

Ответ: 0,47 м/с.

1.90. После удара металлические оболочки изменяют свои скорости на противоположные, а резина сохранит начальную скорость. Это связано с тем, что за время удара, имеющее порядок R/c_1 , деформируется лишь

узкий слой резины толщиной порядка Rc_2/c_1 ; где R — радиус шара, c_1 и c_2 — скорости звука в металле и резине соответственно. После этого импульс каждого шара равен $P = Mv_0 - mv_0 = 3Mv_0/4$. Через достаточно большое время относительное движение оболочки и заполнения прекратится, и энергия перейдет в тепло. Тогда скорость каждого шара v определится из соотношения $P = (M + m)v = 5Mv/4$, откуда находим $v = 3v_0/5$.

Ответ: $3v_0/5$.

1.91. Легко понять, что шар налетает по линии АО. В силу симметрии траекторий разлета проекции импульса на направление, перпендикулярное к ОА, должны быть одинаковы, поэтому одинаковы и скорости шаров после удара. Величину этих скоростей находим из условия сохранения компоненты импульса вдоль оси ОА: $v = v_0/2 \cos \alpha$. Выделившееся тепло Q находим из баланса энергии $mv_0^2/2 = 2mv^2/2 + Q$. Для $\alpha = 30^\circ$ получаем $Q = mv_0^2/6$.

Ответ: $Q = mv_0^2/6$.

1.92. Для реализации описанного сценария нужно, чтобы после удара седьмого и первого шаров скорость седьмого была направлена вдоль следующей стороны шестиугольника, т. е. образовывала с начальной скоростью угол 60° . Пусть скорости налетающего и первого шаров после удара равны v_1 и u и образуют углы $\alpha = 60^\circ$ и β со скоростью налетающего шара до удара v соответственно. Тогда из законов сохранения импульса и энергии можно записать:

$$\begin{aligned}v_1 \sin \alpha &= u \sin \beta, \\v_1 \cos \alpha + u \cos \beta &= v, \\v_1^2 + u^2 &= v^2.\end{aligned}$$

Из этой системы несложно получить $\beta = 30^\circ$ (т. е. скорости шаров после удара перпендикулярны друг другу) и $v_1 = v/2$, т. е. скорость налетающего шара в результате уменьшится в 2 раза. Тогда после всех 6-ти столкновений она уменьшится в $2^6 = 64$ раза.

Ответ: $v/64$.

1.93. Если остановился первый кубик, то должен остановиться и второй. При этом суммарная скатывающая сила не должна превышать максимальной силы трения, т. е. $(m + M)g \sin \alpha < \mu Mg \cos \alpha$. Первый ку-

бик будет опускаться неограниченно далеко при выполнении противоположного условия: $m > M(\mu \operatorname{ctg} \alpha - 1)$.

Ответ: при $m > M(\mu \operatorname{ctg} \alpha - 1)$.

1.94. Горизонтальная компонента скорости шарика при всех ударах не изменяется, а вертикальная падает в $\sqrt{2}$ раз. Поскольку между ударами о плоскость шарик находится в воздухе время $t = 2v_y/g$, то полное время движения шарика представляет собой сумму $t = 2v_{0y}[1 + (1/\sqrt{2}) + (1/\sqrt{2})^2 + \dots]/g = 2v_{0y}/g(1 - 1/\sqrt{2})$. (Мы применили здесь выражение для суммы геометрической прогрессии.) Дальность полета S определяется как $S = v_x t$. При броске под углом 45° $v_x = v_{0y} = v_0/\sqrt{2}$, тогда окончательно $S = v_0^2/g(1 - 1/\sqrt{2}) \approx 0,35$ м.

Ответ: 0,35 м.

1.95. В точке A шарик будет иметь скорость $v_0 = \sqrt{2hg}$, направленную (после удара) горизонтально. Чтобы реализовалась описанная ситуация, после удара о вторую плоскость шарик должен полететь точно по той же траектории, что и до удара. Это возможно только при нормальном падении на вторую плоскость, следовательно, в точке удара о вторую плоскость горизонтальная и вертикальная составляющие скорости равны $v_0 = \sqrt{2hg}$. Пусть точка удара о вторую плоскость находится на высоте x от вершины угла, тогда для движения в обратную сторону имеем

$$l + x = v_0 \tau,$$

$$l - x = v_0 \tau - g\tau^2/2,$$

$$v_0 = g\tau.$$

Из записанной системы находим $(4/3)lg = v_0^2 = 2hg$, откуда $h = 2l/3 = 6$ см.

Ответ: 6 см.

1.96. После неупругого удара о ступеньку шарик теряет свою вертикальную компоненту скорости, а горизонтальная остается неизменной, поэтому при «вылете» с очередной ступеньки он всегда имеет нулевую вертикальную скорость. Из условия задачи следует, что высоту одной ступеньки шарик пролетает за 0,3 с, следовательно, в течение еще 0,1 с шарик катится по первой ступеньке. В первом опыте шарик тратит

на весь цикл 0,4 с, причем из них 0,3 с — на падение. Поскольку горизонтальная скорость постоянна, длина горизонтального полета с высоты одной ступеньки в первом опыте $L = 3h/4$, где h — высота ступеньки. Используем далее известное соотношение для дальности полета L тела, брошенного горизонтально с высоты H со скоростью v : $L = v\sqrt{2h/g}$. В первом опыте, очевидно, получаем $3h/4 = v\sqrt{2h/g}$.

Во втором опыте имеем:

а) $H = h$, $L_1 = 2v\sqrt{2h/g} = 3h/2 > h$, шарик не ударится о первую ступеньку;

б) $H = 2h$, $L_2 = 2v\sqrt{4h/g} = 3\sqrt{2}h/2 \approx 2,1h > 2h$, шарик не ударится о вторую ступеньку;

в) $H = 3h$, $L_3 = 2v\sqrt{6h/g} = 3\sqrt{3}h/2 \approx 2,5h < 3h$, шарик ударится о третью ступеньку. Т. к. при старте с третьей ступеньки начальные условия точно такие же, как и с первой, шарик будет ударяться о каждую третью ступеньку, поэтому он ударится о тридцать девятую и сорок вторую, а сороковую — нет.

Ответ: нет.

1.97. Время движения гантельки до столкновения ее верхнего шарика с плоскостью АВ $t_1 = L/v$. После удара скорость верхнего шарика меняется на противоположную и движение гантельки является вращением относительно центра масс с угловой скоростью $2v/l$. Время поворота гантельки против часовой стрелки на угол $\pi/2$ до столкновения другого ее шарика с верхней стенкой тоннеля $t_2 = (\pi/2)/\omega = \pi l/4v$. Затем гантелька опять движется поступательно и достигает плоскости симметрии за время $t_3 = l/2v$. Далее симметрично повторяются три перечисленные фазы движения. Поэтому общее время движения гантельки $T = 2(t_1 + t_2 + t_3)$.

Ответ: $\frac{2L}{v} + \frac{\pi l}{2v} + \frac{l}{v}$.

1.98. На систему, состоящую из трех одинаковых шариков, во время ее движения действуют только силы тяжести и сила реакции опоры, которые направлены вертикально. В горизонтальном направлении силы не действуют, поэтому горизонтальная координата центра масс гантельки

(который совпадает с ее средним шариком) постоянна, а его горизонтальная скорость равна нулю. В совокупности с условием нерастяжимости соединяющего шарик стержня из этого следует, что в момент удара верхнего шарика о плоскость скорости всех шариков направлены вертикально. При этом очевидно, что скорость «нижнего» шарика в этот момент равна нулю, поскольку при движении он только скользит вдоль плоскости.

Если скорости центрального и верхнего шариков в момент удара равны v_1 и v_2 соответственно, то по закону сохранения механической энергии можно записать $mgl + mg \frac{l}{2} = \frac{m \cdot v_1^2}{2} + \frac{m \cdot v_2^2}{2}$.

Перейдем в систему отсчета, связанную с центром масс (т. е. с центральным шариком). Понятно, что в момент удара о плоскость эта система движется со скоростью v_1 , а нижний и верхний шарик имеют в ней скорости $-v_1$ (т.е. направленную вверх) и $v_2 - v_1$ соответственно. С другой стороны, движение гантельки в этой системе отсчета есть вращение относительно центра масс, поэтому скорости верхнего и нижнего шариков должны быть равны по величине и противоположны по направлению, т. е. $v_1 = v_2 - v_1$, откуда имеем $v_1 = v_2/2$. Тогда из закона сохранения энергии находим $v_2 = \sqrt{\frac{12gl}{5}} = 2\sqrt{\frac{3gl}{5}}$.

Ответ: $2\sqrt{\frac{3gl}{5}}$.

1.99. При столкновении кольца со стенкой возможна реализация двух случаев: а) в течение всего времени удара кольцо проскальзывает; б) в некоторый момент времени кольцо начинает катиться. Рассмотрим случай а). В этом случае за время удара кольцо не набирает достаточной угловой скорости, чтобы началось чистое качение, и в течение всего времени

удара на него вдоль оси X действует сила трения скольжения $F_{тр} = \mu N$, где N — сила нормального давления кольца на стенку (рис. 6.23). Тогда

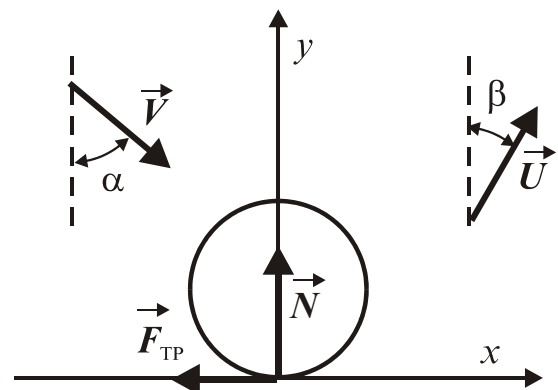


Рис. 6.23

для изменения компонент импульса вдоль осей X и Y и изменения угловой скорости $\Delta\omega$ можно записать

$$\text{ось } Y: N\Delta t = m\Delta V_y,$$

$$\text{ось } X: -\mu N\Delta t = m\Delta V_x,$$

$$\text{вращение: } \mu N\Delta t = mR^2\Delta\omega.$$

Если считать, что сила давления зависит только от взаимного положения стенки и кольца (удар упругий), то за время удара Y -компонента скорости изменит знак. Поэтому

$$V \cos \alpha = U \cos \beta \Rightarrow \Delta V_y = U \cos \beta - (-V \cos \alpha) = 2V \cos \alpha.$$

Тогда из первого и третьего уравнений получаем $\Delta\omega = \frac{2\mu V \cos \alpha}{R}$,

а из второго и третьего уравнения имеем $\Delta V_x = -\Delta\omega R = -2\mu V \cos \alpha$.

Скорость центра кольца после отскока будет равна

$$U_x = V_x + \Delta V_x = V \sin \alpha - 2\mu V \cos \alpha.$$

Условием того, что в момент отрыва кольца будет продолжаться скольжение, является неравенство

$$U_x > \Delta\omega R \Rightarrow V \sin \alpha - 2\mu V \cos \alpha > 2\mu V \cos \alpha \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha > 4\mu.$$

Определим теперь угол, под которым отскочит кольцо:

$$\left. \begin{array}{l} U \cos \beta = V \cos \alpha \\ U \sin \beta = V \sin \alpha - 2\mu V \cos \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha - 2\mu$$

Рассмотрим теперь случай б), когда в некоторый момент времени в процессе удара кольцо перешло в чистое качение. Это происходит при выполнении условия $V_x = \Delta\omega R$. В этом случае точка кольца, касающаяся стенки, имеет нулевую скорость. При этом сила трения скольжения перестает действовать и дальнейшее увеличение угловой скорости и уменьшение скорости центра кольца по оси X прекращается. При этом скорость по оси Y по прежнему изменяет только направление. Поэтому можем записать два уравнения изменения импульса и момента импульса по оси X :

$$m\Delta V_x = -\mu F_{\text{тр}}\Delta t,$$

$$mR^2\Delta\omega = \mu R F_{\text{тр}}\Delta t$$

где в данном случае $F_{\text{тр}}\Delta t$ — импульс силы трения скольжения за время

удара. Из этих уравнений получаем $\Delta\omega = -\frac{\Delta V_x}{R}$.

Кроме того, после удара должно выполняться условие $V_x = \Delta\omega R$, то есть

$$V \sin \alpha - \Delta\omega R = \Delta\omega R \Rightarrow \Delta\omega = \frac{V \sin \alpha}{2R}.$$

Подставляя числовые значения, получаем, что угол 30° соответствует случаю б), соответственно $\omega = 2,5$ рад/с, а угол 45° — случаю а), и $\omega = 2,82$ рад/с.

Ответ: 2,5 рад/с при 60° и 2,82 рад/с при 45° .

1.100. Как следует из закона всемирного тяготения, у планет с одинаковой средней плотностью ускорение свободного падения на поверхности пропорционально радиусу планеты: $g_3/R_3 = g_a/R_a$. (Здесь и далее индекс «з» относится к Земле, а индекс «а» — к астероиду). Давление в толще пород у подножия горы на Земле и на астероиде должно быть одинаково по порядку величины: $\rho g_3 h_3 \approx \rho g_a h_a$. Астероид можно считать шарообразным, если отношение высоты гор к радиусу астероида мало, т. е. $h_a/R_a \ll 1$. Используя предыдущие соотношения, легко получаем: $h_a/R_a \approx h_3 R_3 / R_a^2 \ll 1$. Подставляя $h_3 \approx 10$ км и $R_3 \approx 6400$ км, находим $R_a \gg \sqrt{h_3 R_3} \approx 250$ км. Заметим, что относительная высота гор убывает с ростом радиуса планеты обратно пропорционально квадрату ее радиуса. Проведенная оценка согласуется с результатами фотографирования спутников Юпитера и Сатурна с космических аппаратов.

Ответ: радиус не менее 250 км.

1.101. Мысленно рассечем баллон плоскостью, проходящей через его центр. Раскладывая силы давления газа на составляющие, параллельные и перпендикулярные этой плоскости, получим, что с учетом симметрии баллона результирующая сила внутреннего давления будет перпендикулярна выбранной плоскости и может быть вычислена перемножением величины давления газа на площадь проекции внутренней поверхности газа на секущую плоскость. Эта результирующая сила уравновешивается силой упругих напряжений в материале стенки баллона: $2\pi p r^2 = \pi \sigma (R^2 - r^2)$. Отсюда $p = [(R/r)^2 - 1] \cdot \sigma / 2$. Эту же величину выражаем из уравнения Менделеева–Клапейрона $p = RTm / \mu V$. Здесь $V = 4\pi r^3 / 3$, μ — молярная масса газа. По условию задачи $m = M/N$, где

$M = \rho 4\pi(R^3 - r^3)/3$ — масса баллона. С учетом этого $p = RT\rho[(R/r)^3 - 1]/\mu N$. Обозначая искомое отношение радиусов баллона R/r через x и приравнивая правые части выражений давления, получим уравнение относительно x : $RT\rho(x^3 - 1)/\mu N = \sigma(x^2 - 1)/2$. После сокращения на $(x - 1)$ получим уравнение: $x^2 + x + 1 = \frac{\mu N \sigma}{2RT\rho}(x + 1)$, кото-

рое является квадратным уравнением $x^2 - \beta x - \beta = 0$. (Здесь применено обозначение: $\beta = ((\mu N \sigma / 2RT\rho) - 1)$.) Корень этого уравнения, отвечающий физическому смыслу задачи ($x > 1$), выражается формулой: $x = \beta/2 + \sqrt{\beta^2/4 + \beta}$. Это решение имеет смысл при $\beta > 0,5$, что и накладывает ограничения на значения параметров условия задачи.

Ответ: $x = \beta/2 + \sqrt{\beta^2/4 + \beta}$, где $\beta = ((\mu N \sigma / 2RT\rho) - 1)$, решение есть при $\beta > 0,5$.

1.102. Повторяя рассуждения, аналогичные приведенным в решении задачи 1.100, находим напряжение, разрывающее первый баллон: $F_{\text{раз.1}} = F_{\text{внутр.1}} - F_{\text{атм.1}} = 4p_0 2h 8h - p_0 4h 10h = 24p_0 h^2$. Эта сила вызовет в месте склейки напряжение σ , причем $F_{\text{раз.1}} = \sigma h 24h = \sigma 24h^2$. Отсюда находим $\sigma = p_0$. Такое же напряжение будет действовать в месте склейки и при разрыве второго баллона. Для него имеем: $F_{\text{раз.2}} = F_{\text{внутр.2}} - F_{\text{атм.2}} = p_x \pi h^2 - p_0 4\pi h^2 = \sigma \pi (4h^2 - h^2) = \sigma \pi 3h^2$. Подставляя известное значение σ , получаем: $p_x - 4p_0 = 3p_0$. Поэтому $p_x = 7p_0$.

Ответ: $7p_0$.

1.103. Пусть жесткость лианы k , масса обезьянки m , отталкиваясь от ветки, обезьянка имеет скорость v_0 , удлинение лианы в нижней точке траектории ΔL .

Тогда можно приравнять полные энергии системы «обезьянка-лиана» в верхней и нижней точках траектории:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} - mg(L + \Delta L) + \frac{k(\Delta L)^2}{2}$$

Кроме того, в нижней точке траектории обезьянка имеет центростремительное ускорение $\frac{v^2}{L + \Delta L}$, которое создается силой упругости лианы

ны $k\Delta L$ и силой тяжести mg , откуда получаем $\frac{mv^2}{2} = \frac{k\Delta L(L + \Delta L)}{2} - \frac{mg(L + \Delta L)}{2}$. После этой подстановки закон сохранения энергии принимает вид

$$\frac{mv_0^2}{2} = k(\Delta L)^2 + \frac{kL(\Delta L)}{2} - \frac{3}{2}mg(L + \Delta L)$$

Теперь запишем его для двух конкретных случаев:

а) обезьянка не имеет начальной скорости, а $\Delta L = \alpha L$ ($\alpha = 1/9$):

$$0 = kL^2\alpha^2 + \frac{kL^2\alpha}{2} - \frac{3}{2}mgL(1 + \alpha), \text{ откуда получаем}$$

$$\frac{k}{m} = 3\frac{g}{L} \frac{1 + \alpha}{\alpha(2\alpha + 1)} \quad (1)$$

б) обезьянка имеет максимальную начальную скорость, т.е. касается поверхности воды в нижней точке, тогда $\Delta L = n\alpha L$ ($n=3$):

$$\frac{mv_0^2}{2} = kL^2n^2\alpha^2 + \frac{kL^2n\alpha}{2} - \frac{3}{2}mgL(+n\alpha), \text{ или}$$

$$v_0^2 = 2\frac{k}{m}L^2n^2\alpha^2 + \frac{k}{m}L^2n\alpha - 3gL(+n\alpha)$$

Подставляя сюда (1) и проводя очевидные, но довольно громоздкие преобразования, имеем $v_0 = \sqrt{\frac{18}{11}gL} \approx 1,28\sqrt{gL}$

Ответ: $1,28\sqrt{gL}$.

Тепловые и молекулярные явления

2.1. Количество теплоты равно кинетической энергии движущегося состава. Считая, что в составе 50 вагонов, масса каждого вагона 50 т и скорость движения порядка 60 км/ч, получим: $Q \approx 3 \cdot 10^8$ Дж. Этого количества тепла достаточно, чтобы нагреть до кипения 1 т воды.

Ответ: $3 \cdot 10^8$ Дж.

2.2. Интересно, что задачу можно решить, практически не записывая формул.

1 способ. Т.к. ковшик нагревается на 90°C за 9 минут, то за три минуты (до прихода Пятачка) вода нагреется на $90^\circ\text{C}/3 = 30^\circ\text{C}$, т. е. до 40°C . Т.к. Кролик влил еще один ковшик воды, то можно считать, что следующие 3 минуты энергия нагревателя идет только на нагрев новой порции воды, и она опять нагреется до 40°C . Таким образом, после прихода Винни-Пуха нужно будет два ковшика воды нагреть на 60°C , а один (который долили с его приходом), на 90°C . Т.к. нагрев одного ковшика на 30°C требует 3 минут, то всего придется ждать $(2 \cdot 2 + 1 \cdot 3) \cdot 3 = 21$ минуту.

2 способ. Фактически нужно нагреть 3 ковшика воды, на что при постоянной мощности нагревателя уйдет $3 \cdot 9 = 27$ минут (независимо от того, в каком порядке эти ковшики заливают). Из них 6 минут прошло до прихода Винни-Пуха, поэтому ему придется ждать $27 - 6 = 21$ минуту.

Ответ: 21 минуту.

2.3. Очевидно, что могут реализовываться следующие состояния:

1) в сосуде останется только лед. Соответствующее условие имеет вид $c_v MT + \lambda M < c_d mt$;

2) в сосуде останется только вода. Условие имеет вид $c_v MT > c_d mt + \lambda M$;

3) промежуточная ситуация: есть одновременно и лед, и вода при нулевой температуре.

Поделив эти неравенства на M , заметим, что задача имеет три физических параметра: T , t и $\alpha = m/M$.

Соответствующие области на плоскости параметров (T, t) изображены на рис. 6.24, при этом прямые, являющиеся границами областей, параллельны, а их угловой коэффициент равен α .

Ответ: рис. 6.24.

2.4. Сила натяжения нити станет равной нулю, когда часть льда растает и уменьшится выталкивающая сила. Из условия равновесия системы

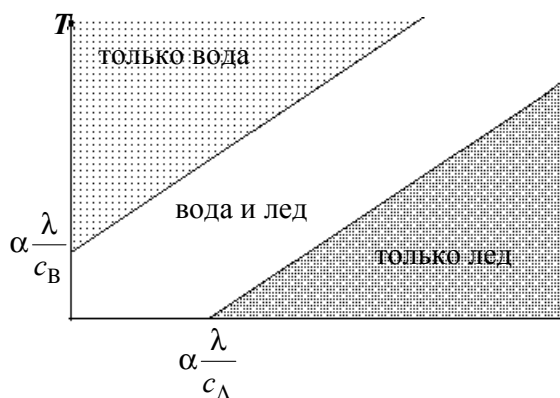


Рис. 6.24

в исходном состоянии находим массу m шарика:

$$T + (M_0 + m)g - \left(\frac{M_0}{\rho_1} + \frac{m}{\rho_2} \right) \rho g = 0,$$

$$m = \frac{M_0 \left(\frac{\rho}{\rho_1} - 1 \right) - \frac{T}{g}}{\left(1 - \frac{\rho}{\rho_2} \right)} = 4,9 \text{ г.}$$

Сила натяжения нити $T = \rho \left(\frac{M_0}{\rho_1} + \frac{m}{\rho_2} \right) g - (M_0 + m)g$ обратится

в ноль, если масса льда уменьшится до некоторого значения M_1 , удовле-

творяющего условию: $(M_1 + m) = \rho \left(\frac{M_1}{\rho_1} + \frac{m}{\rho_2} \right)$, откуда

$$M_1 = \frac{m \left(1 - \frac{\rho}{\rho_2} \right)}{\left(\frac{\rho}{\rho_1} - 1 \right)} = 0,0278 \text{ кг.}$$

Значит, для исчезновения натяжения силы натяжения должно быть расплавлено $\Delta M = M_0 - M_1 = 0,1 - 0,0278 = 0,072$ кг льда. Так как он уже находится при температуре плавления, для этого необходимо $Q_1 = \Delta M \lambda = 0,238 \cdot 10^5$ Дж. Эта энергия будет получена за счет охлаждения воды. В итоге в системе установится тепловое равновесие при температуре t_2 , определяемой из уравнения теплового баланса $cm_0(t_0 - t_2) = Q_1 + c(M_0 - M_1)(t_2 - 0^\circ\text{C})$. Отсюда находим $t_2 = \frac{cm_0 t_0 - Q_1}{c[m_0 + \Delta M]} \cong 7,6^\circ\text{C}$.

Ответ: $7,6^\circ\text{C}$.

2.5. Сначала, в течение времени $\tau_1 = 50$ минут, происходит таяние льда за счет притока энергии от теплого воздуха в комнате. Если P — тепловая мощность, поступающая от воздуха к смеси, то можно записать баланс энергии $P \cdot \tau_1 = m_2 \cdot \lambda$, где m_2 — масса льда.

Далее в течение $\tau_2 = 10$ минут происходит нагрев всей воды, оказавшейся в ведре: $P \cdot \tau_2 = c(m_1 + m_2)(t_1 - t_0)$, где m_1 — масса воды, первоначально содержащейся в ведре.

Поделив эти уравнения друг на друга, находим искомое отношение масс:

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{\lambda}{c(t_1 - t_0)} \Rightarrow \frac{m_2}{m_1 + m_2} = \frac{\tau_1}{\tau_2} \cdot \frac{c(t_1 - t_0)}{\lambda}, \quad \frac{m_2}{m_1 + m_2} = 12,7\%.$$

Отметим, что поступающую из комнаты тепловую мощность можно считать постоянной, т. к. изменение разности температур содержимого ведра и воздуха в комнате мало по сравнению с самой разностью.

Ответ: Первоначально в смеси находилось 12,7 % льда

2.6. Пусть интервал времени, через который производится измерение температуры, равен T , тогда, в соответствии с записями в журнале, температура стала равной $t_1 = -0,5^\circ\text{C}$ через $9T$, а $t_2 = -4^\circ\text{C}$ — через $10T$. В течение первого интервала времени вся имевшаяся в мокром снеге вода замерзла. Тогда, считая мощность отъема тепла в морозильной камере постоянной, запишем уравнения теплового баланса:

$$\text{От начала эксперимента до 10-го измерения: } 9TP = \varphi m \lambda + cm|t_1|;$$

$$\text{от 10-го до 11-го измерения: } TP = cm(|t_2| - |t_1|);$$

где P — мощность отъема тепла, m — масса снега, φ — массовая доля воды в мокром снеге. Из полученных уравнений несложно найти $\varphi = c(9|t_2| - 10|t_1|)/\lambda$. Подставляя численные значения, получаем $\varphi \approx 0,19$.

Ответ: 19 %.

2.7. Теплообмен чайника со средой определяется температурой поверхности чайника. В первом случае при температуре 100°C кипения не происходит, поскольку вся мощность чайника уходит на потери в окружающую среду, поэтому мощность тепловых потерь равна P . После увеличения напряжения мощность потерь, очевидно, не изменилась, тогда с очевидностью $4Pt = Pt + LM/2$, откуда $t = LM/6P$.

Ответ: $LM/6P$.

2.8. Для первой минуты нагревания имеем $cm\Delta t_1 = P\tau - \alpha(t_1 - t_0)\tau$, где c — удельная теплоемкость воды, m — ее масса, P — мощность нагревателя, $\tau = 1$ мин., Δt_1 — изменение температуры воды за 1 минуту, t_1 и t_0 — температуры воды и окружающей среды, $\alpha(t_1 - t_0)$ — мощность тепловых потерь в окружающую среду.

При достижении температуры $t_2 = 80^\circ\text{C}$ вся мощность нагревателя рассеивается в окружающую среду: $P = \alpha(t_2 - t_0)$, поэтому в первую ми-

нута после выключения нагревателя $cm\Delta t_2 = \alpha(t_2 - t_0)\tau$. Комбинируя записанные соотношения, получаем:

$$cm = \frac{P\tau}{\Delta t_2} \quad \text{и} \quad \frac{P\tau}{\Delta t_2} \Delta t_1 = P\tau - \alpha(t_1 - t_0)\tau,$$

откуда

$$\alpha(t_1 - t_0) = P \left(1 - \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} \right) \quad \text{и} \quad t_0 = t_2 - \frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} (t_2 - t_1).$$

После подстановки исходных данных, получаем $t_0 = 0$ °С.

Ответ: 0 °С.

2.9. Если не учитывать потери тепла в окружающую среду, то несложно найти время второго эксперимента: $P\tau_1 = Lm$, $P\tau_2 = (\lambda + c \cdot 100^\circ\text{C} + L)m$, $\tau_2 = \tau_1 \cdot (\lambda + c \cdot 100^\circ\text{C} + L)/L = 2375$ с, где введены очевидные обозначения: P — мощность нагревателя, m — масса воды, λ , c и L — удельные теплота плавления, теплоемкость и теплота кипения воды.

Однако в задаче описывается реальный эксперимент, в котором потери обязательно присутствуют, поэтому реальный результат будет отличаться от полученного нами. Хорошо известно, что мощность потерь растет с увеличением температуры. В первом случае мощность потерь все время эксперимента была постоянна, обозначим ее P_1 , тогда $(P - P_1)\tau_1 = Lm$. Во втором случае мощность потерь менялась, поэтому обозначим P_2 ее *среднее значение*, такое, что $P_2\tau_2$ равно всей энергии, потерянной за время второго эксперимента. (Заметим, что найти P_2 в рамках школьного курса физики нельзя, однако в данной задаче этого и не требуется.) Тогда уравнение баланса для второго эксперимента примет вид $(P - P_2)\tau_2 = (\lambda + c \cdot 100^\circ\text{C} + L)m$, и получим $\tau_2 = 2375 \text{ с} \cdot (P - P_2)/(P - P_1)$. Поскольку во время второго эксперимента температура всегда была не выше 100°C , то и мощность потерь во время второго эксперимента никогда не превышала P_1 . В то же время определенно были интервалы времени (пока чайник не нагрелся до кипения), когда мощность потерь была меньше P_1 . Отсюда следует, что среднее значение мощности потерь во втором эксперименте P_2 меньше, чем P_1 . (Обратим внимание, что энергия, потерянная за время второго эксперимента, напротив, больше,

чем за время первого.) Тогда τ_2 должно быть *меньше* рассчитанного значения, т. е. в журнале стоит цифра «0».

Ответ: цифра «0».

2.10. Считая, что потери тепла прямо пропорциональны разности температур тела и среды, уравнение теплового баланса за *малое* время Δt можно записать в виде $P\Delta t = cm\Delta T + \alpha(T - T_0)\Delta t$, где ΔT — изменение температуры воды за время Δt , T — текущая температура воды, T_0 — температура среды. Точное решение этого уравнения в рамках школьной программы невозможно, однако при анализе достаточно малых интервалов времени получаемые значения будут весьма близки к истинным (чем меньше интервалы, тем лучше). Поэтому задача сводится к определению (по данному графику) коэффициентов уравнения теплового баланса и последующему приближенному расчету зависимости температуры от времени.

Разделим уравнение теплового баланса на cm , таким образом мы сократим число неизвестных коэффициентов до двух: $A\Delta t = \Delta T + B(T - T_0)\Delta t$, где $A = P/cm$ нормированная мощность нагревателя, $B = \alpha/cm$ — нормированный коэффициент теплообмена.

Поскольку в начальный момент времени температуры воды равна комнатной, то потерь нет и вся мощность нагревателя идет только на нагрев воды. Поэтому коэффициент A несложно определить как угловой коэффициент касательной, проведенной к указанному графику в начальной точке. Проведав построение (рис. 6.25), получим $A \approx 40$ °С/мин.

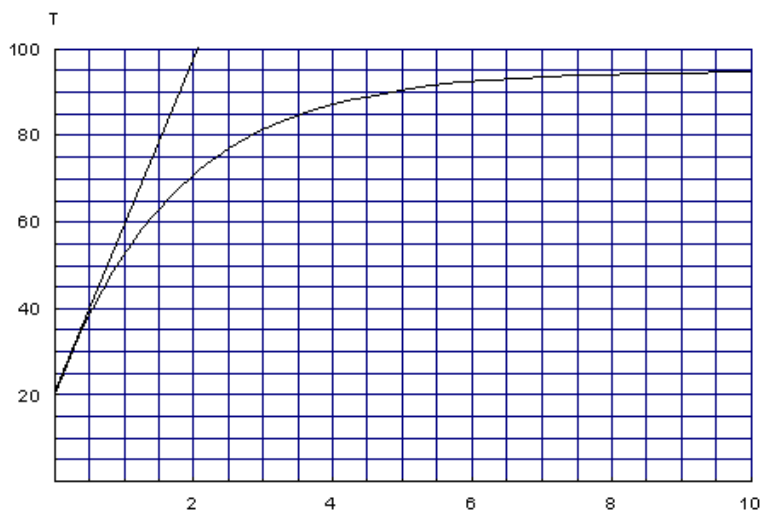


Рис. 6.25.

Коэффициент потерь B проще всего определить, заметив, что температура достигает значения 95°C и далее практически не меняется. Это означает, что мощность нагревателя совпадает с мощностью потерь, откуда находим $B = A/(T - T_0) \approx 0,53 \text{ мин}^{-1}$.

При уменьшении мощности нагревателя в два раза коэффициент A , очевидно, тоже уменьшится в два раза. Тогда проводя вычисления для малых (например, 0,5 мин) интервалов времени, несложно получить следующую таблицу.

t , мин	T , $^\circ\text{C}$	$A - B(T - T_0)$, $^\circ\text{C}/\text{мин}$	ΔT , $^\circ\text{C}$	t , мин	T , $^\circ\text{C}$	$A - B(T - T_0)$, $^\circ\text{C}/\text{мин}$	ΔT , $^\circ\text{C}$
0,25	20	20	5	1,75	41,7	8,5	2,1
0,5	25	17,35	4,3	2,0	43,8	7,4	1,8
0,75	29,3	15,07	3,8	2,25	45,6	6,4	1,6
1,0	33,1	13,06	3,3	2,5	47,2	5,6	1,4
1,25	36,4	11,3	2,8	2,75	48,6	4,8	1,2
1,5	39,2	9,8	2,5	3,0	49,8	4,2	1,1

Таким образом, температура 50°C будет достигнута за 3 минуты. Рекомендуем читателю самостоятельно (возможно, с использованием компьютера) исследовать, как зависит полученный результат от величины выбираемых интервалов времени.

Ответ: за 3 минуты.

2.11. Обозначим через q величину плотности теплового потока (количество тепла, проходящее через единицу площади в единицу времени) от воздуха к поверхности сосульки. По условию задачи за все время таяния метеоусловия не меняются, поэтому можно предположить, что величина q будет оставаться постоянной, т.к. она в первом приближении пропорциональна разности температуры воздуха и льда.

Теперь для малой сосульки можно составить такое уравнение теплового баланса:

$$q \cdot S \cdot \tau = \rho \cdot V \cdot \lambda,$$

где S — площадь поверхности сосульки, V — ее объем, ρ — плотность льда, λ — удельная теплота плавления льда, τ — время таяния.

Аналогичное уравнение будет выполняться и для большой сосульки:

$$q \cdot S_1 \cdot \tau_1 = \rho \cdot V_1 \cdot \lambda.$$

Разделив второе уравнение на первое получим:

$$\frac{S_1}{S} \cdot \frac{\tau_1}{\tau} = \frac{V_1}{V},$$

Откуда найдем время τ_1 :

$$\tau_1 = \tau \frac{V_1}{V} \cdot \frac{S}{S_1}.$$

Осталось сравнить объемы и поверхности сосулек. Из геометрии известно, что объем любого тела пропорционален третьей степени его характерного размера, площадь поверхности — квадрату характерного размера. Поэтому:

$$V = k_V l^3, \quad V_1 = k_V L^3, \quad S = k_S l^2, \quad S_1 = k_S L^2.$$

где k_V и k_S — коэффициенты пропорциональности, зависящие от геометрической формы тела, но неизменные для всех геометрически подобных фигур одного типа (в данном случае для конусов). Тогда

$$\tau_1 = \tau \frac{k_V L^3}{k_V l^3} \cdot \frac{k_S l^2}{k_S L^2} = \tau \frac{L}{l} = 6 \text{ часов.}$$

Ответ: 6 часов.

2.12. В процессе остывания внутренняя энергия супа передается в окружающую среду. Согласно условию задачи отданное тепло $Q = \alpha \Delta T_{\text{cp}} S t$. Объем тарелки пропорционален кубу ее характерного размера, а площадь поверхности — квадрату этого размера: $V = a l^3$, $S = b l^2$. Внутренняя энергия супа при одинаковой температуре пропорциональна его массе $Q = c m T$, а, следовательно, объему. Поэтому для остывания большой тарелки выполняется уравнение:

$$c \rho V T = \alpha \Delta T_{\text{cp}} S t.$$

Аналогично для малой тарелки

$$c \rho V_1 T = \alpha \Delta T_{\text{cp}} S_1 t_1$$

Поделив эти уравнения друг на друга, получим:

$$\frac{S_1 t_1}{S t} = \frac{V_1}{V} = n, \quad \Rightarrow t_1 = t \frac{S}{S_1 n}.$$

Так как тарелки геометрически подобны, коэффициенты пропорциональности a и b одинаковы как для большой, так и для малых тарелок. Отсюда находим соотношение размеров тарелок:

$$n = \frac{V}{V_1} = \frac{al^3}{al_1^3} = \left(\frac{l}{l_1}\right)^3, \quad \Rightarrow \frac{l}{l_1} = \sqrt[3]{n} = 2.$$

Поэтому $\frac{S}{S_1} = \frac{bl^2}{bl_1^2} = \frac{l^2}{l_1^2}$ и $t_1 = \frac{t}{n} \cdot \left(\frac{l}{l_1}\right)^2 = \frac{20 \cdot 4}{8} = 10$ минут.

Ответ: 10 минут.

2.13. Поскольку температура воды в трехлитровой банке не поднимается выше $T_3 = 80^\circ\text{C}$ несмотря на работающий кипятильник, то вся его мощность уходит на потери в окружающую среду. Будем считать, что потери происходят через теплообмен с воздухом (крышка закрыта, потерями на излучение можно пренебречь). Мощность потока тепла через некоторую поверхность пропорциональна ее площади и разности температур поверхности и окружающей среды, поэтому можно записать

$$P_0 = kS_3(T_3 - T_0), \quad (1)$$

где k — некоторый постоянный коэффициент, S_3 — площадь поверхности трехлитровой банки, P_0 — мощность кипятильника.

Аналогичные (1) уравнения можно записать для двухлитровой и литровой банок. Учитывая, что объем пропорционален кубу линейных размеров, а площадь поверхности — квадрату, несложно сообразить, что площадь поверхности двухлитровой банки в $(3/2)^{2/3} \approx 1,3104$ раза меньше площади поверхности трехлитровой банки, а литровой — в $3^{2/3} \approx 2,0803$ раза. Тогда, сравнивая соответствующие уравнения с (1), получим, что температура, при которой наступает динамическое равновесие, составляет $T_2 \approx 98,6^\circ\text{C}$ для двухлитровой банки и $T_1 \approx 114,8^\circ\text{C}$. Поэтому двухлитровую банку нагреть до кипения не удастся, а литровая банка вскипит.

Чтобы оценить время, за которое литровая банка закипит, рассмотрим более подробно процесс нагрева: в любой момент времени поступающее от кипятильника тепло идет на нагрев воды и теплообмен с окружающей средой:

$$P_0 dt = cmdT + kS(T - T_0). \quad (2)$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим выражение для времени нагрева

$$t = \frac{cm}{kS} \ln \frac{P_0}{P_0 - kS(100^\circ\text{C} - T_0)}$$

Выражая величину kS из (1) и учитывая найденный ранее коэффициент $3^{2/3}$, получим $t \approx 1790 \text{ с} \approx 30 \text{ мин}$.

Ответ: двухлитровая нагреется до 99°C , литровая закипит через 30 мин.

2.14. Нужно учесть два обстоятельства. Во-первых, потери тепла через дверь определяются только разностью температур по обе стороны двери. Во-вторых, поскольку тепло уходит только через двери, то поток тепла через двери одинаков, причем в обеих описанных в условии ситуациях. Отсюда получаем $T - T_0 = T_1 - T_0 = T_2 - T_1$, где T и T_0 — температуры внутри дома и на улице в первом случае, T_1 и T_2 — искомые температуры в комнате и в прихожей. Из этого соотношения находим $T_1 = T = 8^\circ\text{C}$, $T_2 = 26^\circ\text{C}$.

Ответ: в прихожей 8°C , в комнате 26°C .

2.15. Закон теплопроводности можно записать в виде $P = \frac{\alpha \Delta T S}{h}$,

где S — площадь стенок избушки, h — их толщина, ΔT — разность температур внутри и снаружи, α — коэффициент теплопроводности.

Если бы толщина стенок избушки не изменилась, то при увеличении мощности в 2 раза разность температур воздуха увеличилась бы вдвое, т. е. температура внутри избушки составила бы $-30 + 20 \cdot 2 = 10^\circ\text{C}$. Однако при этом лед, из которого сделаны стены, начнет плавиться, причем этот процесс будет продолжаться до тех пор, пока температура внутри избушки не понизится до 0°C , и, соответственно, разность температур воздуха внутри и снаружи станет $\Delta T_1 = 30^\circ\text{C}$.

Тогда несложно видеть, что $\frac{\Delta T}{h} \cdot \frac{h_1}{\Delta T_1} = \frac{1}{2}$, или $h_1 = h \frac{\Delta T_1}{\Delta T} \cdot \frac{1}{2} = 22,5 \text{ см}$.

Ответ: 22,5 см.

2.16. Теплообмен нити с окружающей средой будет определяться только ее температурой. Так как амплитуда импульсов напряжения одинакова, то до момента окончания второго импульса температура нараста-

ет по тому же закону, что и для первого (при построении нужно учесть, что начальная температура в этом случае несколько выше, чем в первом). Графически находим, что максимальная температура $T_{max} = 1650$ К. Уменьшение температуры также происходит по тому же закону, но начиная с температуры $T_{max.}$, соответствующий график вместе со вспомогательными построениями приведен на рис. 6.26.

Ответ: рис. 6.26.

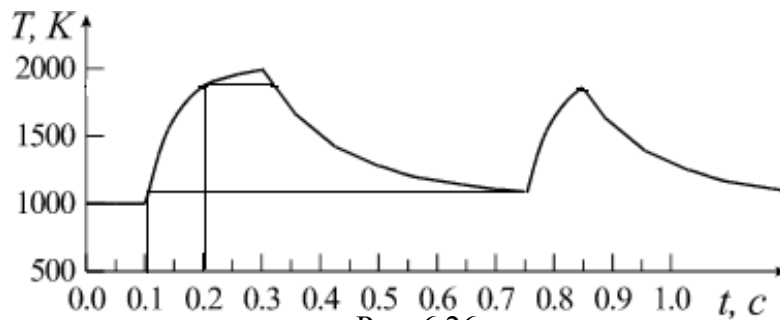


Рис. 6.26

2.17. Так как максимум температуры воздуха достигается в 15 часов, то легко найти $\varphi = -5\pi/4$. Пруд нагревается, когда температура воздуха больше температуры воды, и остывает, когда температура воздуха меньше температуры воды. Поэтому при их равенстве и реализуется максимальная температура воды. Решая уравнение $25 = 20 + 10 \cos(2\pi t/24 + \varphi)$, легко находим, что $t = 19$ часов.

Ответ: в 19 часов.

2.18. Массу гелия можно найти из уравнения Менделеева–Клапейрона: $m = \frac{pV\mu}{RT}$, где V — внутренний объем шара. Объем же резиновой оболочки шарика V_0 определяется как произведение его площади поверхности на толщину оболочки δ , т. к. последняя мала. Тогда $V_0 = 4\pi R_0^2 \delta = \frac{m_0}{\rho_0}$, где m_0 и ρ_0 — масса и плотность оболочки. Тогда ради-

ус шарика $R_0 = \sqrt{\frac{m_0}{4\pi\rho_0\delta}}$ и $m = \frac{p\mu}{RT} \frac{4}{3} \pi R_0^3$. Проведя очевидные преобразо-

вания, получаем $m = \frac{p\mu}{RT} \frac{m_0}{6\rho_0\delta} \sqrt{\frac{m_0}{\pi\rho_0\delta}} = 0,47$ г.

Ответ: 0,47 г.

2.19. Масса углекислоты в одном баллончике $m = 1$ г. Пусть βm — масса растворенной в воде углекислоты, μ — ее молярная масса. Тогда, согласно уравнению Менделеева–Клапейрона $pV = (1 - \beta)\frac{m}{\mu}RT$. Отсюда

$$\beta = 1 - \frac{pV\mu}{mRT}. \text{ Подставляя сюда } \mu = 44 \text{ г/моль, получим } \beta \cong 0,29.$$

Ответ: 29 %.

2.20. Можно записать очевидные условия равновесия

$$(P_1 - P_0)S = mg,$$

$$(P_4 - P_0)S = 4mg,$$

добавив к ним вытекающее из закона Бойля-Мариотта соотношение

$$P_1 : P_4 = 1 : 3,$$

где P_0 — атмосферное давление, m — масса поршня, P_k — давление в сосуде под k поршнями. Отсюда находим $P_0S = mg/2$. Аналогично после добавления еще n поршней имеем

$$(P_{n+4} - P_0)S = (n + 4)mg,$$

$$P_4 : P_{n+4} = 1 : 3.$$

Отсюда получаем $n = 9$.

Ответ: 9 поршней.

2.21. Поскольку сосуд металлический и процесс совершается достаточно медленно, то можно использовать закон Бойля – Мариотта. После того, как в сосуд опустили первый поршень, давление под ним станет равным $2p_0$. После опускания всех поршней давление газа между первым и вторым поршнями равно $10p_0$. Для этой массы газа имеем $10p_0H = p_0h/2$, откуда $H = h/20$.

Ответ: $h/20$.

2.22. Отметим, что в если первом положении в верхней части левого сосуда находилась некоторая масса газа m , то в нижней — масса $2m$, а в правом сосуде — $4m$. После того, как верхний кран открыли, а нижний закрыли, образовалось два объема газа с массами $5m$ и $2m$ соответственно. Запишем для них уравнение состояния:

$$p_1 = 5RTm/MV_1 = 5RTm/MS(2H - x),$$

$$p_2 = 2RTm/MV_2 = 2RTm/MSx.$$

Мы учли, что $V_1 = S(2H - x)$ и $V_2 = Sx$, где S — площадь поршня, а x — новое расстояние от поршня до дна сосуда.

Разность давлений p_2 и p_1 определяется массой поршня. Известно, что первоначально давление над поршнем p_0 в два раза меньше, чем под поршнем. Поэтому можно записать, что

$$p_2 - p_1 = p_0.$$

Давление p_0 создавалось массой газа m , занимавшей половину левого сосуда. Поэтому

$$p_0 = 2RTm/MSH.$$

Из полученных четырех уравнений имеем:

$$2/x - 5/(2H - x) = 2/H.$$

Это соотношение приводится к квадратному уравнению

$$2x^2 - 11Hx + 4H^2 = 0,$$

решая которое, получим: $x = (11 - \sqrt{89})H/4 \approx 0,39H$.

Ответ: на расстоянии $0,39H$ от дна сосуда.

2.23. Поршни a и b схлопнутся, поскольку газа C максимальное количество. Положение поршня c будет определяться только газами A и B , т. к. для газа C он проницаем. Следовательно, отношение объемов равно отношению количеств газов A и B , т. е. $1 : 2$, и угол между поршнями равен 120° .

Ответ: угол между поршнями A и B равен нулю, между поршнями A и C — 120° .

2.24. После отпускания верхнего поршня он остановится на некоторой высоте x , меньшей высоты большого цилиндра, а нижний поршень опустится до высоты y . Условие равновесия нижнего поршня в начальном состоянии $(5p/4 - p)S_1 = mg$. Условие равновесия малого поршня в конечном состоянии $(p_2 - p_3)S_1 = mg$. По закону Бойля – Мариотта для газа в нижнем цилиндре $p_1 S_1 h/2 = p_2 S_1 y$, где $p_1 = 5p/4$, а для газа в большом цилиндре $pV_0 = p_3 V_3$, где: $V_0 = Sh - S_1 h/2$, $V_3 = Sx - S_1 y$. Условие равновесия большого поршня в конечном состоянии $mg = (p_3 - p)S$. Учитывая, что диаметры поршней отличаются вдвое, имеем: $S = 4S_1$. Объединяя приведенные уравнения в систему и решая ее, можно получить:

$$y = \frac{20}{21} \cdot \frac{h}{2} \approx 0,48h, \quad x = \frac{673}{357} \cdot \frac{h}{2} \approx 0,94h.$$

Ответ: малый поршень на расстоянии $0,48h$, большой — $0,94 h$ от дна.

2.25. Прежде всего отметим, что для идеального одноатомного газа изменение внутренней энергии дается формулой $\Delta U = 3/2\Delta(pV)$. В нашем случае конечное и начальное состояние газа характеризуется одинаковым объемом V , поэтому $\Delta U = 3/2V\Delta p$. (То, что газ разделен на две части, которые могут иметь разные температуры, на вычисление внутренней энергии в рассматриваемом случае не влияет, т. к. температура не входит в приведенные соотношения.) Вычислим теперь изменение внутренней энергии газа. Начнем двигать первый поршень и перейдем в систему отсчета, связанную с ним. В ней в начальный момент времени газ и второй поршень движутся со скоростью v и, следовательно, имеют кинетическую энергию $(m + M)v^2/2$. Через достаточно большое время они остановятся, поэтому эта энергия перейдет в тепло. Вернемся в исходную систему отсчета, в которой теперь газ и оба поршня вращаются со скоростью v . Остановим, как этого требует условие, один из поршней. Мы приходим к только что рассмотренной ситуации, а значит в тепло перейдет еще такое же количество энергии $(m + M)v^2/2$. Таким образом, полное приращение внутренней энергии газа равно $\Delta U = (m + M)v^2$. Теперь легко находим, что $\Delta p = 2(m + M)v^2/3V$.

Ответ: $2(m + M)v^2/3V$.

2.26. Из уравнения состояния идеального газа $pV = \nu RT$, записанного для каждой части газа, следует, что слева от перегородки к окончанию процесса будет температура $4T_0$, а справа — $6T_0$. После того, как перегородку уберут, суммарная внутренняя энергия газа W останется постоянной, т. к. сосуд теплоизолирован. Для ν молей одноатомного газа $W = 3\nu RT/2$, тогда можно записать: $3R \cdot 4T_0/2 + 3R \cdot 6T_0/2 = 2 \cdot 3RT/2$, откуда следует $T = 5T_0$. Как видно из рисунков, конечный суммарный объем газа $4V_0$. Тогда для суммарного количества газа в 2 моля из уравнения состояния $pV = \nu RT$ получаем $p = 5p_0/2$.

Ответ: $5p_0/2$.

2.27. Ясно, что в сосуде содержится $3/4$ общей массы газа, а в оболочке — $1/4$ ее часть. Запишем уравнения состояния газа в сосуде и в оболочке в случае, когда нагрет газ внутри оболочки: $pV/2 = 3\nu RT_0/4$,

$(p+\Delta p)V/2 = \nu RT_1/4$. Здесь p — давление газа в сосуде, а Δp — избыточное давление, которое создает натянутая резина оболочки. Аналогичные соотношения можно записать и для ситуации, когда газ в сосуде охлажден до некоторой температуры T_x : $p_1V/2 = 3\nu RT_x/4$, $(p_1 + \Delta p)V/2 = \nu RT_0/4$. Здесь p_1 — новое значение давления газа в сосуде, а величина Δp не изменилась, так как оболочка растянута на ту же величину. Вычтем из первого из полученных уравнений второе, а из третьего — четвертое: $\Delta pV/2 = \nu R(3T_0/4 - T_1/4)$ и $\Delta pV/2 = \nu R(3T_x/4 - T_0/4)$. Приравнявая правые части этих уравнений, получим для искомой температуры: $T_x = (4T_0 - T_1)/3$.

Ответ: $(4T_0 - T_1)/3$.

2.28. Обратим внимание, что после открытия клапана в левом и правом отсеках каждый раз оказываются одинаковые количества вещества, поскольку они имеют одинаковую температуру (по условию), давление (т. к. клапан открыт) и объем. Это позволяет рассчитывать температуру после открытия клапана как среднее арифметическое температур отсеков. Кроме того, при каждом следующем нагреве давление в левом отсеке увеличивается на p , что, в соответствии с уравнением состояния, соответствует увеличению температуры на T .

Перед первым открытием клапана давление в первом отсеке $2p$, температура $2T$. При открытом клапане температура выравнивается до величины $T_2 = (2T + T)/2 = 3T/2$. Перед вторым открытием клапана давление в первом отсеке $5p/2$, температура $5T/2$. После установления теплового равновесия температура становится равной $2T$. Перед третьим открытием клапана давление равно $3p$, температура $3T$. После третьего закрытия клапана температура составляет $5T/2$. Перед четвертым открытием клапана температура в первом отсеке $7T/2$, а после того, как клапан закроется в четвертый раз температура будет равной $3T$.

Ответ: $3T$.

2.29. Предположим сначала, что колонна вся заполнена идеальным газом из N молекул и вычислим в этом случае число молекул в верхнем и нижнем отсеках. Запишем уравнение состояния газа в верхнем отсеке: $p_1Sh = kTN_1$, здесь S — площадь колонны, p_1 — давление в верхнем отсеке, N_1 — число молекул в нем. Аналогичное соотношение можно записать и для нижнего отсека: $p_2Sh = kTN_2$. Разница давлений в верхнем

и нижнем отсеках удерживает столб молекул в среднем отсеке. Отсюда получаем $(p_1 - p_2)S = m(N - N_1 - N_2)g = mNg$, поскольку $N \gg N_{1,2}$ (это видно, например, из проводимого молекулой в этих отсеках времени). Соберем результаты вместе: $T = mghN/k(N_1 - N_2)$. А теперь вернемся к исходной задаче. Поскольку идеальный газ сильно разрежен, то можно пренебречь столкновением между молекулами, поэтому доля времени, проводимая отдельной молекулой в соответствующем отсеке, совпадает с отношением $N_{1,2}/N$. Теперь легко найти, что $T = 380$ К.

Ответ: 380 К.

2.30. Работа газа при постоянном давлении $A = p(V_2 - V_1)$. Согласно уравнению Менделеева – Клапейрона (при постоянной температуре):

$$pV_2 = \frac{m_2}{M}RT, \quad pV_1 = \frac{m_1}{M}RT, \quad \text{поэтому} \quad A = \frac{m_2 - m_1}{M}RT.$$

Отсюда находим изменение массы газа $\Delta m = MA/RT = 4,4$ кг.

Ответ: 4,4 кг.

2.31. Для одноатомного газа $U = \frac{3}{2}vRT$. Из уравнения Менделеева-Клапейрона $vRT = pV$. По условию задачи $U = bV^2$, следовательно, в исследуемом процессе $p = \frac{2b}{3}V$. Работа в этом процессе определяется как площадь под графиком зависимости p от V , являющемся в этом процессе прямой линией: $A = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)(V_2 - V_1) = \frac{b}{3}(V_2^2 - V_1^2)$. Т.к. в этом процессе $\frac{3}{2}vRT = bV^2$, то $A = \frac{1}{2}vR\Delta T = \frac{1}{3}\Delta U$. Из первого начала термодинамики $Q = \Delta U + A$, откуда $A = Q/4$.

Ответ: $Q/4$.

2.32. Т.к. охлаждение газа проводится медленно, то движение поршня вниз происходит квазистатически и сумма сил, действующих на него, равна нулю. Это условие запишется в виде $p_1S = p_0S + Mg - F$ (при охлаждении поршень движется вниз, поэтому сила трения направлена вверх). Здесь p_1 — давление газа под поршнем. Очевидно, что давление p_1 будет под поршнем и в момент начала нагревания.

Для того, чтобы поршень двигался вверх, необходимо, чтобы давление под ним удовлетворяло соотношению $p_2S = p_0S + Mg + F$ (т.к. те-

перь сила трения будет направлена вниз). Таким образом, процесс нагревания состоит из двух частей: изохорного нагревания, при котором давление увеличивается от p_1 до p_2 , и изобарного нагревания, при котором объем увеличивается в два раза.

Пусть температура газа перед началом нагревания T_1 . Тогда по закону Гей-Люссака изменение температуры в изохорном процессе составит

$$\Delta T_1 = T_1((p_0S + Mg + F)/(p_0S + Mg - F) - 1) = 2FT_1/(p_0S + Mg - F),$$

а газ получит количество теплоты $Q_1 = C_V \Delta T_1$.

Т. к. в изобарном процессе объем газа увеличился вдвое, то и температура также увеличилась вдвое, поэтому изменение температуры в изобарном процессе

$$\Delta T_2 = T_1 + \Delta T_1 = T_1((p_0S + Mg + F)/(p_0S + Mg - F)),$$

а газ получил количество теплоты $Q_2 = C_p \Delta T_2$.

По определению, средняя теплоемкость газа в процессе нагревания равна $C = (Q_1 + Q_2)/(\Delta T_1 + \Delta T_2)$. Подставив найденные значения и проведя необходимые преобразования, а также учтя соотношение Майера, получим

$$C = \frac{(3C_V + R) \frac{F}{p_0S + Mg} + C_V + R}{3 \frac{F}{p_0S + Mg} + 1}$$

Учитывая, что для идеального одноатомного газа $C_V = 3R/2$, это соотношение можно упростить, придя к окончательному ответу:

$$C = \frac{\frac{11F}{p_0S + Mg} + 5}{\frac{6F}{p_0S + Mg} + 2} R.$$

Обратим внимание, что в предельном случае $F \rightarrow 0$ теплоемкость стремится к c_p , как это и должно быть: в отсутствие силы трения процесс нагревания является изобарным.

Ответ: $C = \frac{\frac{11F}{p_0S + Mg} + 5}{\frac{6F}{p_0S + Mg} + 2} R.$

2.33. Если нарисовать на pV -диаграмме несколько изотерм, то становится ясно, что максимум температуры достигается в верхней точке касания изотермы с окружностью, которая одновременно является точкой пересечения окружности и биссектрисы координатного угла. Координаты этой точки равны $p = (3 + 1/\sqrt{2})p_0/2$, $V = (3 + 1/\sqrt{2})V_0/2$, откуда легко найти искомую температуру $T = (3 + 1/\sqrt{2})^2 p_0 V_0 / 4R \approx 3,44 p_0 V_0 / R$.

Из условия минимальности соответствующих величин вытекает, что процесс можно считать в случае а) — изобарным, в случае б) — изотермическим и в случае в) изохорным, поскольку производная в точке экстремума равна нулю. Как видно из рисунка, правило обхода цикла таково, что в случаях а) и б) газ отдает тепло, а в случае в) — получает.

Ответ: $3,44 p_0 V_0 / R$; а, б) — отдает, в) — получает.

2.34. Ясно, что минимальная температура достигается в точке (p_0, V_0) . В соответствии с уравнениями состояния газа $p_0 V_0 = \nu R T_{min}$ и $pV = \nu R 2 T_{min}$ получим: $2p_0 V_0 = pV$. Подобных точек на графике две. Одна из них — это точка $(p_0, 2V_0)$. Вторая лежит на прямой линии $p = p_0 V / V_0$, и для нее легко находим $V = \sqrt{2} V_0$. Таким образом, задача имеет два ответа: $2V_0$ и $\sqrt{2} V_0$.

Ответ: $2V_0$ и $\sqrt{2} V_0$.

2.35. Из уравнений адиабат 2–3 и 4–1: $p_2 V_2^\gamma = p_3 V_3^\gamma, p_4 V_4^\gamma = p_1 V_1^\gamma$, получаем $\frac{p_3}{p_4} = \frac{p_2}{p_1}$. Согласно уравнению Клапейрона для изохорных участ-

ков 1–2 и 3–4 имеем: $\frac{p_2}{T_2} = \frac{p_1}{T_1} \Rightarrow \frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1}, \frac{p_3}{T_3} = \frac{p_4}{T_4} \Rightarrow \frac{p_3}{p_4} = \frac{T_3}{T_4}$. Комбинируя эти выражения, найдем температуру T_3 : $T_3 = T_4 \frac{T_2}{T_1} = 450 \text{ К}$.

Для определения к. п. д. двигателя нужно вычислить работу A , совершаемую газом за цикл, и количество теплоты Q_1 , получаемое газом от нагревателя:

$$\begin{aligned} A &= A_{23} + A_{41} = -(\Delta U_{23} + \Delta U_{41}) = -\frac{3}{2} \nu R [(T_3 - T_2) + (T_1 - T_4)] = \\ &= \frac{3}{2} \nu R [(T_2 - T_3) + (T_4 - T_1)]. \end{aligned}$$

Газ нагревается, получая энергию от нагревателя на участке 1–2. Поэтому

$$Q_1 = \Delta U_{12} = \frac{3}{2} \nu R (T_2 - T_1).$$

К.п.д. двигателя

$$\eta = \frac{\frac{3}{2} \nu R [(T_2 - T_3) + (T_4 - T_1)]}{\frac{3}{2} \nu R (T_2 - T_1)} = \frac{(T_2 - T_1) - (T_3 - T_4)}{(T_2 - T_1)} = 1 - \frac{T_3 - T_4}{T_2 - T_1} \approx 43 \%$$

Ответ: 450 К, 43 %.

2.36. Исходный цикл разбивается на два: 1–2–3–4–5–1 и 1–2–6–5–1. Работа в первом равна $2p_0V_0$, а во втором — нулю. Поэтому суммарная работа есть $2p_0V_0$.

Ответ: $2p_0V_0$.

2.37. Тепло $Q = IU\tau$ выделяется в разрядной трубке практически мгновенно. Поэтому газ в трубке нагревается изохорно и $T_1/T_0 = p_1/p_0$, где p_1 — давление, T_1 — температура газа после завершения изохорного процесса. Неизвестное давление p_1 найдем из первого начала термодинамики с учетом равенства нулю работы газа в изохорическом процессе: $Q = 3mR(T_1 - T_0)/2M = 3(p_1 - p_0)V/2$. Затем газ, адиабатически расширяясь, начинает поступать в балластный объем до тех пор, пока его давление не станет равным p_0 . (Давление в балластном объеме практически не меняется.) Тогда $T_1^5/p_1^2 = T_2^5/p_0^2$. Итак, $T_1 = T_0(1 + 2IU\tau/3p_0V)$, $T_2 = T_0(1 + 2IU\tau/3p_0V)^{3/5}$.

Ответ: $T_0(1 + 2IU\tau/3p_0V)^{3/5}$.

2.38. Работа машины за сутки равна $A = Pt$, где P — мощность, а $t = 24$ ч. С другой стороны, $A = Q\eta$, где $Q = cm\Delta T$ — тепло, запасенное в резервуаре, c — теплоемкость воды, m — ее масса, $\eta = \Delta T/T$ — максимальное (в соответствии с теоремой Карно) значение КПД машины. Отсюда находим $m \approx TPt/c(\Delta T)^2$. Полагая $T \approx 300$ К, $\Delta T \approx 10$ К, получим $m \approx 500$ т. Эта оценка занижена, причем значительно, так как КПД реальных циклов заметно меньше КПД цикла Карно.

Ответ: не менее 500 т.

2.39. Считаем, что процесс происходит квазистатически и температура воды со временем не меняется. Тогда масса воды dm , испарившаяся

за очень малый промежуток времени dt , при постоянных температуре и влажности воздуха и отсутствии ветра (аквариум стоит в комнате) зависит только от площади поверхности воды: $dm = \alpha S dt$, где α — некоторый коэффициент. Изменение уровня воды dh связано с dm очевидным соотношением $dm = \rho S dh$, где ρ — плотность жидкости. Поэтому $dh = (\alpha/\rho) dt$.

Поскольку условия испарения постоянны, то изменение уровня воды линейно зависит от времени и не зависит от других параметров, в частности, от формы сосуда. Тогда если за двое суток уровень понизился на 1 см, то вся вода испарится за $15 \cdot 2$ суток = 30 суток

Ответ: 30 суток.

2.40. По закону Дальтона давление в сосуде складывается из давления воздуха и давления водяного пара. При нагревании давление воздуха зависит от температуры по закону Шарля, а давление водяного пара изменяется более сложным образом. Пока в сосуде присутствует вода, водяной пар (при медленном нагреве) всегда будет насыщенным, и зависимость давления в сосуде от температуры выражается формулой:

$$p(t) = p_{\text{н.п.}}(t) + p_0(t + 273)/273, \quad (1)$$

где p_0 — атмосферное давление (т.к. вначале сосуд был открыт, то при 0°C давление воздуха равно атмосферному). Соотношение (1) будет справедливо вплоть до некоторой температуры t_1 (которую и нужно определить), при которой вся вода испарится. После этого водяной пар перестанет быть насыщенным и с достаточно хорошей точностью будет описываться законами идеального газа. Поэтому далее процесс будет чисто изохорным и давление будет зависеть от температуры как

$$p(t) = p(t_1)((t + 273)/(t_1 + 273)). \quad (2)$$

Зависимость давления насыщенного пара от температуры нелинейна, а соотношение (2) линейно. Соответственно, момент перехода наблюдаемой зависимости от нелинейной к линейной и определит искомую температуру. Подсчитаем среднюю скорость увеличения температуры на различных участках графика:

$t, ^\circ\text{C}$	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80	80–90	90–95	95–100
$p, 10^5 \text{Па}$	1,005	1,050	1,097	1,152	1,221	1,309	1,422	1,574	1,776	1,928	1,954
$\Delta p/\Delta t, 10^3 \text{Па}/^\circ\text{C}$	0,45	0,47	0,61	0,69	0,88	1,12	1,52	2,02	1,52	0,52	0,52

Видно, что вплоть до 80°C средняя скорость нарастает, а на двух последних интервалах она постоянна (и существенно меньше, чем почти на всех предыдущих). Это заставляет предположить, что температура t_1 заключена между 80 и 90°C .

Для более точного определения необходимо найти, хотя бы приближенно, точку пересечения зависимостей (1) и (2). Наиболее простой способ состоит в интерполяции зависимости (1) на участок $80^\circ\text{C} - 90^\circ\text{C}$ линейной зависимостью со скоростью роста давления $2,02 \cdot 10^3 \text{ Па}/^\circ\text{C}$. Тогда точка пересечения оценивается как $86,7^\circ\text{C}$ (в действительности при численном моделировании использовалась точка 85°C). Все другие способы, реализация которых возможна в условиях олимпиады (например, графическая оценка), вряд ли дадут более точный результат.

Относительная влажность воздуха, как известно, может быть определена как отношение давления паров воды к давлению насыщенных паров воды при постоянной температуре. Давление насыщенных паров воды при 100°C равно атмосферному (т. е. 10^5 Па). Давление же паров воды в сосуде при 100°C равно $p_1 \cdot 373/(t_1 + 273)$, где p_1 — давление паров воды при температуре $t_1 = 86,7^\circ\text{C}$. Его можно определить из соотношения:

$$p(t_1) = p_0 \cdot (t_1 + 273)/273 + p_1,$$

где $p(t_1)$ — давление в сосуде при температуре t_1 (здесь учтено, что в начале эксперимента давление воздуха было равно атмосферному). Для определения $p(t_1)$ можно опять воспользоваться линейной аппроксимацией зависимости давления от температуры на участке $80-90^\circ\text{C}$. Тогда получим $p(t_1) = 1,911 \cdot 10^5 \text{ Па}$ (отметим, что по более точной интерполяционной формуле получается значение $p(t_1) = 1,901 \cdot 10^5 \text{ Па}$, т. е. мы допустили погрешность порядка $0,5\%$).

Тогда давление водяного пара при 100°C составит $0,617 \cdot 10^5 \text{ Па}$, т. е. относительная влажность примерно 60% .

Примечание: использованная зависимость давления насыщенного пара от температуры, полученная интерполяцией данных справочника Н. И. Кошкина и М. Г. Ширкевича (М.: Физматлит, 1972), приведена на рис.6.27, а интерполяция данных таблицы приведена на рис.6.28.

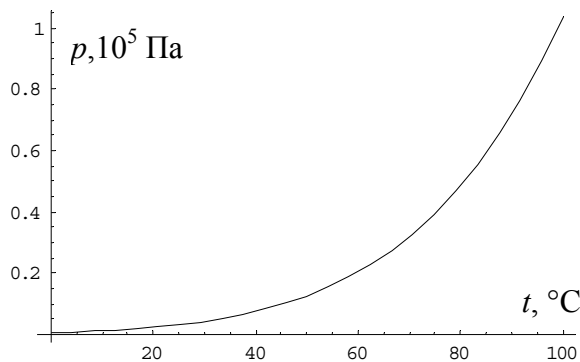


Рис. 6.27

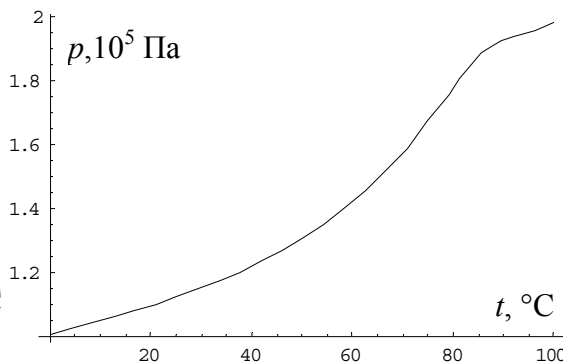


Рис. 6.28

Ответ: примерно 87°C, 60%.

2.41. Из условия задачи следует, что в первом и втором состояниях давление под поршнем складывается из давления сухого воздуха и давления насыщенного водяного пара p_0 :

$$p_1 = p_0 + p_{в1}, \quad p_2 = p_0 + p_{в2}. \quad (1)$$

Процесс изотермический, поэтому $p_{в1} \cdot V_1 = p_{в2} \cdot V_2$, и $p_{в2} V_2 = (p_{в1} \cdot V_1) / V_2 = p_{в1} / 2$. Тогда из (1) находим давление насыщенного пара: $p_0 = 2p_2 - p_1 = 1$ атм. Отсюда следует, что температура $T = 100^\circ\text{C} = 373$ К, а $p_{в1} = 2$ атм.

Теперь мы можем определить все оставшиеся неизвестные величины. Из уравнения Менделеева – Клапейрона с учетом закона Дальтона находим массу воздуха: $p_{в1} \cdot V_1 = m_{в} \cdot RT / \mu_{в}$, $m_{в} = p_{в1} \cdot V_1 \cdot \mu_{в} / RT \approx 42 \cdot 10^{-3}$ кг = 42 г.; массу насыщенного водяного пара в первом состоянии: $p_0 \cdot V_1 = m_{п} \cdot RT / \mu_{п}$, $m_{п} = p_0 \cdot V_1 \cdot \mu_{п} / RT \approx 13 \cdot 10^{-3}$ кг = 13 г.; массу воды в цилиндре: $p_0 \cdot V_2 = m_0 \cdot RT / \mu_{п}$, $m_0 = p_0 \cdot V_2 \cdot \mu_{п} / RT \approx 26 \cdot 10^{-3}$ кг = 26 г и давление p_3 : $p_3 \cdot V_3 = (m_0 / \mu_{п} + m_{в} / \mu_{в}) RT$, $p_3 = (m_0 / \mu_{п} + m_{в} / \mu_{в}) RT / V_3 = 100$ кПа.

Ответ: масса воздуха 42 г, воды 26 г, в жидком состоянии находилась половина воды.

Электромагнитные явления

3.1. Очевидно, что ток, идущий между двумя горизонтальными пластинами, нагревает воду. Рассмотрим небольшой объем воды размерами $a \times d \times dl$. В этом объеме выделяется тепловая мощность

$$P = \frac{U^2}{R} = \frac{U^2 a \cdot dl}{\gamma d}.$$

Пренебрегая теплопроводностью воды, можно найти энергию, полученную этим объемом за все время его нахождения в нагревателе:

$$Q = \frac{U^2 a \cdot dl}{\gamma d} \cdot \frac{L}{v}.$$

Тогда температура этого объема увеличилась на

$$\Delta T = \frac{U^2 L}{\gamma r d^2 v},$$

где v — скорость течения воды, связанная с ее объемным

расходом $k = \Delta V / \Delta t$ очевидным соотношением $k = dav$. Необходимое

напряжение выразится формулой $U = \sqrt{\frac{k \rho \gamma c d \Delta T}{La}}$, подстановка в которую

численных значений дает $U \approx 132$ В.

Ответ: 132 В.

3.2. Для электронагревателя, работающего без зеркала, тепловая мощность, уходящая вправо, составляет половину потребляемой от сети,

т. е. (с учетом закона Джоуля – Ленца): $P_0 = \frac{1}{2} \frac{U_0^2}{R}$, где $U_0 = 220$ В. После

установки зеркала вправо будет уходить вся потребляемая мощ-

ность: $P_0 = \frac{U_x^2}{R}$, где U_x — новое рабочее напряжение. Разделив второе

уравнение на первое, получим: $U_x = \frac{U_0}{\sqrt{2}} = 156$ В.

Ответ: 156 В.

3.3. Очевидно, что $U_0 = 4$ В — напряжение на источнике. Пусть R — сопротивление резистора, R_V — сопротивление вольтметра. Тогда при подключении вольтметра к одному резистору общее сопротивление цепи

$2R + \frac{RR_V}{R + R_V} = \frac{2R^2 + 3RR_V}{R + R_V}$, и показания вольтметра определяются как

$$U_1 = U_0 \frac{1}{2\frac{R}{R_V} + 3}, \text{ откуда находим } \frac{R}{R_V} = \frac{1}{2}. \text{ Тогда при подключении}$$

вольтметра параллельно двум сопротивлениям он покажет

$$U_2 = U_0 \frac{2}{2\frac{R}{R_V} + 3} = 2 \text{ В.}$$

Ответ: 2 В.

3.4. Если U напряжение на зажимах источника, то при подключении одного вольтметра по цепи идет ток $I_1 = \frac{U}{R + R_V}$. Тогда показания первого

вольтметра составят $U_1 = I_1 R_V = \frac{UR_V}{R + R_V}$. При параллельном подклю-

чении двух одинаковых вольтметров $R_{V_{\text{экв}}} = \frac{R_V}{2}$, и их показания

$U_2 = \frac{UR_V/2}{R + R_V/2} = \frac{UR_V}{2R + R_V}$. Представим полученные уравнения в виде:

$$\frac{U}{U_1} = 1 + \frac{R}{R_V},$$

$$\frac{U}{U_2} = 1 + 2\frac{R}{R_V}.$$

Исключив отношение неизвестных сопротивлений R/R_V , найдем напряжение источника: $U = \frac{U_1 \cdot U_2}{2U_2 - U_1} = \frac{40}{3} \approx 13,3 \text{ В.}$

Ответ: 13,3 В.

3.5. Обозначим через A и B искомые точки окружности. Пусть R_1 — сопротивление дуги окружности между ними, R_2 — сопротивление смежной дуги. По формуле параллельного соединения $R_{AB} = R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$. Очевидно, что $R_2 = R - R_1$, где $R = 5 \text{ Ом}$. Отсюда получаем уравнение: $R_1^2 - 5R = 5$. Его корни: $R_{1,2} = (5 \pm \sqrt{5})/2$, т. е. $R_1 = 3,62 \text{ Ом}$, $R_2 = 1,38 \text{ Ом}$.

Следовательно, искомые точки должны делить окружность в отношении приблизительно $1 : 2,62$, что соответствует центральному углу 137° .

Ответ: в отношении $1 : 2,62$.

3.6. В силу симметрии схемы токи, текущие в ребрах AC и BC (рис. 6.29а), равны. (При смене полярности токи должны только поменять направления. С другой стороны, в силу симметрии схемы смена полярности эк-

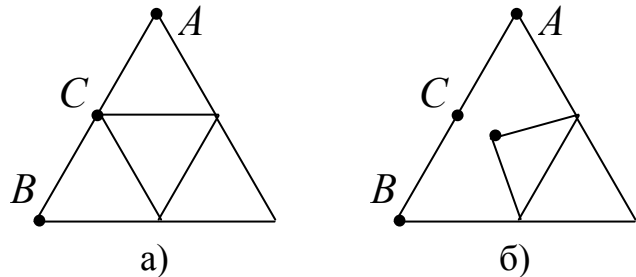


Рис. 6.29

вивалентна отражению относительно высоты к стороне AB.) А это значит, что узел C можно разделить на два, как показано на рис. 6.29б, при этом распределение токов в схеме не изменится.

Сопротивление получившейся схемы рассчитывается тривиально:

$$r = \frac{2R(2R + \frac{R}{2})}{2R + 2R + \frac{R}{2}} = \frac{10}{9}R.$$

Ответ: $10R/9$.

3.7. Так как сопротивление амперметров мало, точки, к которым они подключены, можно соединить в один узел. При этом получим эквивалентную схему, показанную на рис. 6.30. Ток через первый амперметр равен J_1 , через второй — J_2 , а ток через третий амперметр может быть вычислен как $J_3 = J_1 - J_4$. Ток J_2 вычисляется по закону Ома: $J_2 = U/R = 0,1$ А. Эквивалентное сопротивление четырех резисторов, размещенных в правой части схемы, составляет $5R/3$. С учетом этого $J_5 = 3U/5R = 0,06$ А. По правилу Кирхгофа $J_1 = J_2 + J_5$. Далее, $J_4 = (J_5 2R/3)/2R = U/5R = 0,02$ А. Наконец, $J_3 = J_1 - J_4 = 0,14$ А. Итак, первый амперметр показывает 0,16 А, второй 0,1 А и третий 0,14 А.

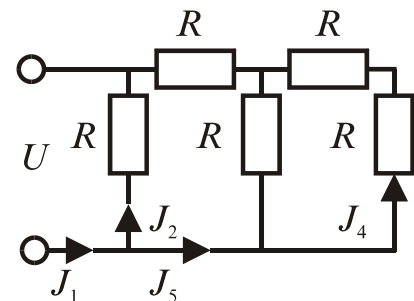


Рис. 6.30

Ответ: 0,16 А, 0,1 А, 0,14 А.

3.8. Применим известный подход к анализу бесконечных цепочек: поскольку цепочка бесконечная, то ее характеристики (в т. ч. ЭДС и сопротивление) не изменятся при добавлении еще одного звена. Тогда,

обозначая через ε_x и R_x ЭДС и сопротивление бесконечной цепочки, приходим к представленной на рис. 6.31 схеме. Из нее несложно составить уравнения для искомых величин и получить ответ:

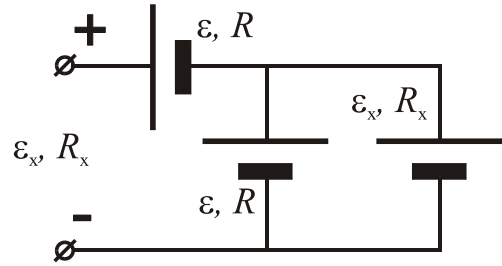
$$\varepsilon_x = (5 + \sqrt{5})\varepsilon/2, R_x = (5 + \sqrt{5})R/2.$$


Рис. 6.31

Ответ: $(5 + \sqrt{5})\varepsilon/2, (5 + \sqrt{5})R/2$.

3.9. Бесконечная цепочка эквивалентна (см. решение предыдущей задачи) схеме, показанной на рис. 6.32. Легко найти сопротивление цепочки: $R_x = (1 + \sqrt{5})R/2$ и вычислить напряжение между т. А и нижней клеммой:

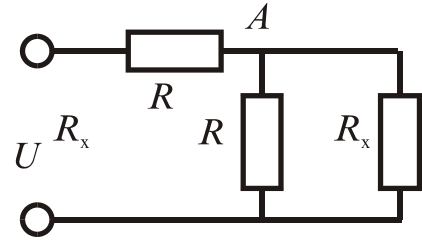


Рис. 6.32

$U_A = [(\sqrt{5} - 1)/(\sqrt{5} + 1)]U$. Отбросим теперь первое звено. Тогда мы придём к такой же бесконечной цепочке, на вход которой подано напряжение U_A . Соответственно напряжение на первом «вертикальном» сопротивлении новой цепочки (и на втором исходной) равно: $U_B = [(\sqrt{5} - 1)/(\sqrt{5} + 1)] U_A$. Прделав эту процедуру пять раз, получим значение напряжения на заштрихованном сопротивлении $U_x = [(\sqrt{5} - 1)/(\sqrt{5} + 1)]^5 U$, тогда ток через него равен $I = U/R = 0,0813$ А.

Ответ: 0,0813 А

3.10. Обратим внимание, что при подключении схемы за точки В и D по «вертикальным» проволочкам (за исключением первой и последней) ток не идет. Поэтому $R_{BD} = (N + 1)r/2$, где r — сопротивление стороны ячейки, N — число звеньев. Рассмотрим теперь случай, когда измерительный прибор подключен к точкам А и С. Обозначим через R_N сопротивление рамки, составленной из N звеньев. Нетрудно получить, что рамка, составленная всего из одного звена, имеет сопротивление $R_1 = 0,75r$, рамка, составленная из 2 звеньев — $R_2 = 11r/15 = 0,733r$, а также рекурсивную формулу для сопротивления рамки, составленной из $N + 1$ звеньев: $R_{N+1} = (2r + R_N)r/(3r + R_N)$.

Из этого соотношения легко определяется сопротивление рамки, содержащей бесконечное число элементов. Для этого следует подставить

в него $R_{N+1} = R_N = R_\infty$. Решая квадратное уравнение, несложно получить, что $R_\infty = (\sqrt{3} - 1)r = 0,732r$. Таким образом, при довольно большом числе звеньев сопротивление рамки между точками A и C практически не зависит от него и составляет $R_{AC} = R_\infty = 0,732r$. Используя численные значения, приведенные в задаче, получаем $r = 5 \text{ Ом}$. Но тогда из $R_{BD} = (N + 1)r/2$ следует, что $N = 9$. Полученное число звеньев является достаточно большим для того, чтобы можно было принять $R_{AC} = R_\infty$. (Можно провести расчет по полученной рекуррентной формуле и убедиться, что уже R_4 отличается от R_∞ менее, чем на 0,1 %.)

Ответ: 9 звеньев.

3.11. Непосредственно по графику несложно определить, что при подключении к источнику напряжением 5 В через элемент течет ток 6 мА, поэтому выделяющаяся на нем тепловая мощность определится по закону Джоуля–Ленца: $P_1 = U_1 I_1 = 30 \text{ мВт}$. Ответить на второй вопрос задачи немного сложнее.

Поскольку подключаемые последовательно элементы одинаковы, то и падение напряжения на них будет одинаково, так что на каждом из элементов будет падать напряжение 2,5 В. В соответствии с ВАХ этому напряжению соответствует ток в 1 мА, который и будет течь через оба элемента. Тогда выделяющаяся на нем мощность равна $1 \text{ мА} \cdot 2,5 \text{ В} = 2,5 \text{ мВт}$, что в 12 раз меньше мощности, выделяющейся в первом случае.

Заметим, что если бы элемент был линейным, то мощность уменьшилась бы всего в 4 раза.

Ответ: 30 мВт, уменьшится в 12 раз.

3.12. Сразу после подключения источника питания в цепи течет ток зарядки конденсатора, лампа не горит и ее сопротивление равно бесконечности. При достижении напряжением на конденсаторе значения U_1 лампа загорается, ее сопротивление резко падает и через нее начинает разряжаться конденсатор. Так как $R \ll R_0$, то процесс разрядки происходит намного быстрее процесса заряда конденсатора от источника питания, и зарядом, пришедшим от источника за это время, можно пренебречь. Когда напряжение на конденсаторе падает до значения U_2 , лампа гаснет и опять начинается процесс зарядки конденсатора. Таким образом, в схе-

ме происходит периодический процесс, поэтому достаточно определить величину среднеквадратичного значения тока за время горения лампы на одном периоде процесса. Определим эту величину из энергетических соображений. Перед началом разрядки конденсатора в нем была запасена энергия $W_1 = \frac{CU_1^2}{2}$, после окончания процесса разрядки энергия конденсатора стала равна $W_2 = \frac{CU_2^2}{2}$. Разность этих энергий выделилась в виде

тепла при протекании тока через лампу, поэтому $\bar{P}\tau = W_1 - W_2$, где \bar{P} — средняя мощность, выделяющаяся на лампе. По аналогии с выражением для мгновенной мощности можно записать выражение для средней мощности $\bar{P} = \bar{I}^2 R$, где \bar{I}^2 — среднее значение квадрата тока через лампу. Тогда $\bar{I}^2 R\tau = \frac{CU_1^2}{2} - \frac{CU_2^2}{2}$, откуда $I_{ср.кв.} = \sqrt{\bar{I}^2} = \sqrt{\frac{C}{2R\tau}(U_1 - U_2)}$.

Ответ: $\sqrt{\frac{C}{2R\tau}(U_1 - U_2)}$.

3.13. Видно, что к каждому из диодов приложено (в прямом направлении) напряжение $U - U_n$, где U_n — напряжение n -го источника, $U_n = n$ В. Соответственно, при $U < U_n$ (в т. ч. при всех отрицательных U) n -й диод включен в обратном направлении и ток через него равен нулю. Если же $U > U_n$, то n -й диод включен в прямом направлении и через него течет ток $(U - U_n)/1$ Ом, а общий ток равен сумме токов через все открытые диоды. Тогда несложно сообразить, что ВАХ цепочки имеет следующий вид (напряжение в вольтах, ток в амперах):

$$I = \begin{cases} 0, & U < 1 \\ U - 1, & 1 \leq U < 2 \\ 2U - 3, & 2 \leq U < 3 \\ 3U - 6, & 3 \leq U < 4 \\ 4U - 10, & 4 \leq U < 5 \\ 5U - 15, & U \geq 5 \end{cases}$$

Построение графика полученной ВАХ тривиально.

$$\text{Ответ: } I = \begin{cases} 0, & U < 1 \\ U - 1, & 1 \leq U < 2 \\ 2U - 3, & 2 \leq U < 3 \\ 3U - 6, & 3 \leq U < 4 \\ 4U - 10, & 4 \leq U < 5 \\ 5U - 15, & U \geq 5 \end{cases}$$

3.14. Так как в системе существует не сухое, а вязкое трение, то частица будет останавливаться только в точках, в которых напряженность электрического поля равна нулю. В рассматриваемой системе существуют такие точки двух типов, для одного (*a*) силовые линии поля входят в нее, а для другого (*б*) — выходят. Поэтому при анализе остановки бусинки необходимо установить, устойчивым или неустойчивым будет равновесие в точке остановки.

Для бусинки с зарядом $q > 0$ устойчивым будет положение в точках типа *a*, так при таком знаке заряда сила Кулона сонаправлена с напряженностью поля, поэтому при отклонении бусинки от точки будет возвращать ее обратно. Для бусинки с зарядом $q < 0$ устойчивым, напротив, будет положение в точках типа *б*.

Точкам типа *a* соответствуют точки, в которых функция $\sin x$ меняет знак с «+» на «-», следовательно $x_0 = 2\pi(n + \frac{1}{2})$. Точкам типа *б* соответствуют положения $x_0 = 2\pi n$, где n — целое число.

Ответ: Бусинка может остановиться в точках: $x_0 = 2\pi(n + \frac{1}{2})$ при $q > 0$, $x_0 = 2\pi n$ при $q < 0$.

3.15. Поскольку $h \ll a$, заряды распределятся равномерно по обращенным друг к другу граням кубиков, электрическое поле в зазоре между кубиками однородно и равно $E = \sigma/\epsilon_0 = q/a^2\epsilon_0$. Тогда на каждый кубик будет действовать сила $f = qE$, поэтому ускорение кубиков постоянно и равно f/m , причем до столкновения каждый кубик должен пройти с этим ускорением путь $h/2$. Собирая все результаты вместе, получим:

$$t = \sqrt{\rho \epsilon_0 a^5 h / q^2}.$$

Ответ: $\sqrt{\rho \epsilon_0 a^5 h / q^2}$.

3.16. Из соображений симметрии ясно, что система зарядов по мере своей эволюции будет сохранять форму правильного шестиугольника. Рассмотрим две такие геометрически подобные конфигурации системы. Из соображений размерности очевидно, что электростатическая энергия системы W зависит от геометрического размера l по закону $W = C/l$, где C — постоянный для данной конфигурации зарядов коэффициент. Используя этот результат, запишем закон сохранения энергии для всех трех состояний: $W + mv_0^2/2 = 2W + m(v_0/2)^2 = \alpha W$, где коэффициент α и нужно определить. Решая ее, получим: $\alpha = 7/3$. Поскольку $W = C/l$, а первоначальное расстояние между частицами $l = 1$ м, то отсюда следует, что частицы сблизятся до расстояния $3/7 \approx 0,43$ м.

Ответ: 0,43 м.

3.17. Для того, чтобы электрон мог пролететь сквозь данную систему зарядов, его кинетическая энергия в момент прохождения потенциально-го максимума (т. е. в средней точке между С и D) должна быть отличной от нуля. Поскольку начальная кинетическая энергия электрона равна нулю, то из закона сохранения энергии следует, что его потенциальная энергия в данной точке должна быть меньше, чем на бесконечности, т. е. отрицательной. С учетом знака заряда электрона это означает, что потенциал этой точки должен быть положительным. Потенциал несложно найти, используя принцип суперпозиции: $\varphi = \varphi_+ + \varphi_- = \frac{4Q}{4\pi\epsilon_0 a\sqrt{5}} -$

$$-\frac{4q}{4\pi\epsilon_0 a} \geq 0. \text{ Следовательно, } Q/q \geq \sqrt{5}.$$

Ответ: $Q/q \geq \sqrt{5}$.

3.18. Суммарное поле является суперпозицией полей, создаваемых каждой плоскостью. Оно однородно, направлено под углом 45° к горизонтали (и перпендикулярно к линии АВ) и равно по величине $E = \sigma\epsilon_0/\sqrt{2}$. В этом поле заряд движется с ускорением $a = qE/m$, точно так же, как тело, брошенное под углом 45° к горизонту. Поэтому заряд пересечет линию АВ в точке, отстоящей от точки старта на расстоянии $l = v^2/a = \sqrt{2} mv^2/\epsilon_0 q\sigma$.

Ответ: $\sqrt{2} mv^2/\epsilon_0 q\sigma$.

3.19. Из условия равновесия протона в молекуле (см. рис. 6.33) получаем: $F_p = 2F_e \cos \alpha$, где

$F_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{(2x)^2}$ — сила взаимодействия протонов друг с другом,

$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{(r^2 + x^2)}$ — сила взаимодействия протона с электроном,

$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{r^2 + x^2}}$. Собирая все вместе, найдем $x = r/\sqrt{3}$. Отсюда несложно

получить расстояние между протонами $l = 2x \approx 7,39 \cdot 10^{-11}$ м.

Ответ: $7,39 \cdot 10^{-11}$ м.

3.20. Электростатическое поле потенциально, поэтому работа по перемещению зарядов определяется только их начальным и конечным положениями и не зависит от траектории движения. Поскольку положение зарядов относительно друг друга не изменилось, то и потенциальная энергия их взаимодействия друг с другом также не изменилась, следовательно, вся работа пошла на изменение потенциальной энергии зарядов во внешнем однородном поле. В этом поле каждый из зарядов переместился на расстояние l , поэтому совершенная при этом работа равна $2Elq$.

Ответ: $2Elq$.

3.21. Как видно из условия, первая точка расположена очень близко к диску, а вторая — очень далеко от него. Поэтому в первом случае поле E вычисляется по формуле для заряженной плоскости $E_1 = \sigma/2\epsilon_0$. При вычислении поля вдали от диска можно считать диск точечным зарядом, так что $E_2 = \sigma r^2/4\epsilon_0 x^2$, где $x = 100r$. Таким образом, получаем: $E_1/E_2 = 2 \cdot 10^4$. Заметим, что это довольно хорошо совпадает с точным результатом ($1,98 \cdot 10^4$, рекомендуем получить его самостоятельно).

Ответ: $2 \cdot 10^4$.

3.22. Дополним полусферу до сферы. Тогда потенциал в точке А равен $2kq/3R = \phi_1 - \phi_2$, где ϕ_1 — искомый потенциал, создаваемый левой полусферой, ϕ_2 — потенциал, создаваемый правой полусферой, q — заряд сферы. Из таблицы находим, что $\phi_2 = \phi(3R/2) = 46,5$ В. Заметим так-

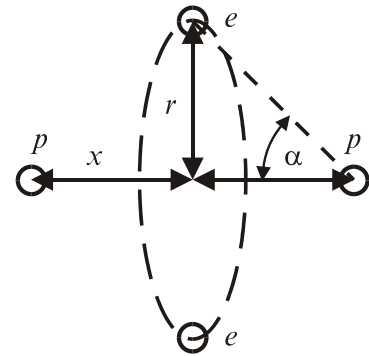


Рис. 6.33

же, что $\varphi(0) = kq/2R$ — потенциал в центре полусферы, равный, согласно таблице, 100 В. Таким образом, $\varphi_1 = 4\varphi(0)/3 - \varphi(3R/2) = 86,8$ В.

Ответ: 86,8 В.

3.23. В законе распределения поля вдоль оси x можно выделить три характерных участка. На первом из них, резко спадающем с увеличением x (до 0,25 см) наиболее значительный вклад в поле вносит только один точечный заряд, находящийся в начале координат. Тогда его величину можно оценить как $q = 4\pi\epsilon_0 E_1 x_1^2 \approx 0,112 \cdot 10^{-13}$ Кл, где индекс «1» у переменной x относится к номеру столбца таблицы. На промежуточном участке поле можно вычислить в приближении бесконечной заряженной плоскости $E_0 = \sigma/2\epsilon_0$, где $\sigma = q/a^2$. Этот промежуточный участок хорошо просматривается в виде характерной «полочки» на графике зависимости величины напряженности поля E от координаты x , где поле E почти постоянно (интервал от 1 до 2 см). Отсюда получаем выражение для шага решетки $a = x_1 \sqrt{2\pi E_1/E_0} \approx 1,045$ см. Третий участок — большие расстояния, на которых решетка выглядит как единый точечный заряд величины qN^2 : $E_7 = qN^2/4\pi\epsilon_0 x_7^2$. Отсюда можно получить $N = x_7/x_1 \sqrt{E_7/E_1} \approx 34,79$, а округляя до целых, 35. Приведем также истинные значения, использованные при компьютерном моделировании: $q = 0,111 \cdot 10^{-13}$ Кл, $a = 1$ см, $N = 35$.

Ответ: $q = 0,111 \cdot 10^{-13}$ Кл, $a = 1$ см, $N = 35$ с точностью до 5 %.

3.24. Разобьем дугу в три четверти окружности на три малых дуги, каждая по одной четверти. Нетрудно вычислить поле в точке С, создаваемое каждой из этих трех дуг. Действительно, для каждой из них мы имеем ситуацию, изображенную на рис. 3.17а, но развернутую на 90° . (При этом надо учесть, что заряд каждой дуги в три раза меньше q .) Суммарное поле находим, используя принцип суперпозиции:

$$E_x^C = \left(-2E_y^B + E_y^A \right) / 3 = 6,26 \text{ В/м}; \quad E_y^C = E_x^A / 3 = 1,47 \text{ В/м}.$$

Ответ: $E_x = 6,26$ В/м, $E_y = 1,47$ В/м.

3.25. Если шар не заряжен, то частица и шар притягиваются из-за наличия на поверхности шара индуцированного заряда. Пусть величина этой силы $F_{\text{инд}}$. Если теперь сообщить шару заряд q , $2q$, $3q$, то возникнет

еще сила отталкивания. Она пропорциональна сообщенному заряду, потому что он распределится равномерно по поверхности шара. Введем для сил отталкивания обозначения F , $2F$, $3F$, соответственно. По принципу суперпозиции $F_1 = F_{\text{инд}} - F$, $F_2 = F_{\text{инд}} - 2F$, $F_3 = F_{\text{инд}} - 3F$. Отсюда находим: $F_3 = 2F_2 - F_1$. Отметим, что сила F_3 может быть как силой притяжения, так и силой отталкивания.

Ответ: $2F_2 - F_1$.

3.26. Используя принцип суперпозиции, заключаем, что сфера с отверстием эквивалентна сфере без отверстия и отрицательному заряду величины $q_0 = Qr^2/4R^2$, расположенному на месте отверстия. Суммарная сила, действующая на заряд q со стороны равномерно заряженной сферы, равна нулю. Поскольку размер отверстия мал, то силу, действующую со стороны заряда q_0 , можно найти по закону Кулона: $f = qQr^2/16\pi\epsilon_0R^2$. Она направлена по прямой, соединяющей центр сферы с отверстием.

Ответ: $qQr^2/16\pi\epsilon_0R^2$.

3.27. Рассмотрим два элемента ΔV_1 и ΔV_2 первой планеты, расположенные на расстоянии r друг от друга. Они притягиваются с силой $f_1 = \gamma \cdot \Delta V_1 \Delta V_2 / r^2$. Для второй планеты сила взаимодействия складывается из силы гравитационного притяжения и электростатического отталкивания: $f_2 = \gamma \Delta V_1 \Delta V_2 / r^2 - \rho_{\text{эл}} \Delta V_1 \Delta V_2 / 4\pi \cdot \epsilon_0 r^2$, где $\rho_{\text{эл}} = Q/V = Q\rho/M$ — объемная плотность электрического заряда (Q и ρ — заряд и плотность планеты, M — ее масса). Нетрудно заметить, что для обеих планет закон взаимодействия любых двух элементов одинаков и отличается лишь численным коэффициентом. Поэтому для отношения давлений в центре планет получаем: $P_2/P_1 = f_2/f_1 = 1 - Q^2/4\pi\epsilon_0\gamma M^2 \approx 1 - 0,37 \cdot 10^{-21}$. Как видно, даже при довольно большом заряде «электростатическая» поправка пренебрежимо мала.

Ответ: $1 - 0,37 \cdot 10^{-21}$.

3.28. При появлении поля гантелька обязательно ориентируется вдоль его силовых линий, т. к. любое другое ее положение является неустойчивым. Тогда сила растяжения стержня $F_0 = Eq - q^2/4\pi\epsilon_0 l^2$, откуда находим минимальное значение напряженности поля $E = F_0/q + q/4\pi\epsilon_0 \cdot l^2$.

Ответ: $F_0/q + q/4\pi\epsilon_0 \cdot l^2$.

3.29. При минимальной скорости малого кольца его скорость относительно большого в момент пролета через него должна быть равна нулю. Тогда можно записать законы сохранения импульса и энергии:

$$\begin{aligned} v_0 &= 2v_1, \\ mv_0^2 &= 2mv_1^2 + 2W, \end{aligned}$$

где v_1 — общая скорость колец в момент прохождения друг против друга, W — энергия их электростатического взаимодействия в этот момент. Из этой системы находим $W = mv_0^2/4$.

Поскольку W не зависит от начальной скорости кольца, для второго случая можно записать законы сохранения в виде:

$$\begin{aligned} 2v_0 &= u + v, \\ 4mv_0^2 &= mu^2 + mv^2 + 2W, \end{aligned}$$

где u и v — скорости колец в момент их прохождения друг через друга, которые и нужно определить. Решая систему, находим $v, u = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2} v_0$.

Ответ: $\frac{2 \pm \sqrt{3}}{2} v_0$.

3.30. Заряд воздушного конденсатора до соединения $q = CU_0$, где C — его емкость. При параллельном соединении емкости конденсаторов складываются, а суммарный заряд сохраняется. Поэтому $q = (C + \alpha UC)U$. Отсюда получаем уравнение для определения коэффициента пропорциональности α : $CU_0 = (C + \alpha UC)U$, откуда $\alpha = \frac{U_0/U - 1}{U} = 0,05 \text{ В}^{-1}$.

Ответ: $0,05 \text{ В}^{-1}$.

3.31. Колебания шарика между пластинками объясняются тем, что при ударе о пластины он периодически меняет знак заряда, причем величина заряда пропорциональна напряжению: $q = \alpha U$. Сила, действующая на шарик со стороны электрического поля, вычисляется следующим образом: $f = qE = \alpha U^2/h$. Ускорение шарика при движении вниз $g_+ = g + a$, а при движении вверх $g_- = g - a$, где $a = f/m$. На пороге колебаний имеем $mg_+h/2 = mg_-h$, где учтено двукратное уменьшение энергии при ударе шарика о нижнюю пластину. Следовательно, $a = gU^2/3U_0^2$. При $U = \sqrt{3} U_0$ имеем $a = g$, $g_+ = 2g$, $g_- = 0$. Время падения шарика вниз $t_1 = \sqrt{2hg_+} = \sqrt{h/g}$. Скорость перед ударом о нижнюю пластину равна

$\sqrt{2hg_+} = 2\sqrt{gh}$, а после отскока $\sqrt{2hg}$. Время полета с этой постоянной скоростью до верхней пластины $t_2 = h/\sqrt{2gh}$, а период колебаний $t_1 + t_2 = \sqrt{h/g}(1 + 1/\sqrt{2})$.

Ответ: $\sqrt{h/g}(1 + 1/\sqrt{2})$.

3.32. За одно «включение-выключение» стержень получает энергию qEl , соответственно, за девять — $9qEl$. Это позволяет найти из закона сохранения энергии скорость вращения к моменту девятого выключения напряжения: $mv^2 = 9qEl$. До десятого включения стержень вращается с этой скоростью, поворачиваясь на угол $\pi/2$. Окончательно

$$\tau = \frac{1}{4}\pi\sqrt{\frac{ldm}{qU_0}}.$$

Ответ: $\frac{1}{4}\pi\sqrt{\frac{ldm}{qU_0}}$.

3.33. Уединенный лист создает электрическое поле $E = \sigma/2\varepsilon_0$. Поля, действующие на каждый лист, можно найти по принципу суперпозиции: $E_1 = 5\sigma/2\varepsilon_0$, $E_2 = \sigma/\varepsilon_0$, $E = 3\sigma/2\varepsilon_0$. Теперь вычисляем ускорение каждого листа как $a_n = \sigma_n E_n/\rho$: $a_1 = 5\sigma^2/2\varepsilon_0\rho$, $a_2 = \sigma^2/2\varepsilon_0\rho$, $a_3 = 9\sigma^2/2\varepsilon_0\rho$.

Ответ: $a_1 = 5\sigma^2/2\varepsilon_0\rho$, $a_2 = \sigma^2/2\varepsilon_0\rho$, $a_3 = 9\sigma^2/2\varepsilon_0\rho$.

3.34. Пусть x — расстояние между пластинами конденсатора. Уравнение состояния газа между ними

$$PxS = RT \quad (1)$$

Сила, действующая на поршень в направлении x

$$F = (P - P_0)S - EQ, \quad (2)$$

где E — напряженность электрического поля

$$E = U/x, \quad (3)$$

Q — заряд конденсатора, который можно считать плоским:

$$Q = UC = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{x}U. \quad (4)$$

С учетом (1), (3) и (4) сила из (2) явно выражается через x :

$$F(x) = \frac{RT}{x} - P_0S - \varepsilon\varepsilon_0 S \left(\frac{U}{x}\right)^2. \quad (5)$$

Качественный характер зависимости (5) и отдельных ее составляющих дан на рис. 6.34. Условием равновесия пластин является равенство нулю приложенной к ним силы; оно сводится к квадратному уравнению

$$x^2 - \frac{RT}{P_0 S} x + \frac{\epsilon \epsilon_0 U^2}{P_0} = 0. \quad (6)$$

Для воздуха относительная диэлектрическая проницаемость равна единице, поэтому корни уравнения (6) можно записать в виде

$$x_{1,2} = \frac{RT}{2P_0 S} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\epsilon_0 U^2 P_0 S^2}{R^2 T^2}} \right). \quad (7)$$

Из графика зависимости силы от расстояния между пластинами (рис. 6.34) видно, что меньшее значение отвечает неустойчивому положению равновесия, а большее — устойчивому. Тогда

$$x = \frac{RT}{2P_0 S} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4\epsilon_0 U^2 P_0 S^2}{R^2 T^2}} \right). \quad (8)$$

Проведем теперь анализ полученного выражения.

При комнатной температуре и площади пластин $S = 1 \text{ м}^2$ выражение под корнем отличается от единицы на

$$\alpha = \frac{4\epsilon_0 U^2 P_0 S^2}{R^2 T^2} = \frac{4 \cdot 0,885 \cdot 10^{-11} \cdot U^2 \cdot 1,013 \cdot 10^5 \cdot 1}{(8,314 \cdot 300)^2} \approx 0,576 \cdot 10^{-12} U^2.$$

Для того, чтобы соответствующая поправка оказалась заметной, это выражение было порядка единицы, то есть $U \sim 10^6 \text{ В}$. Такие напряжения нереальны ввиду электрического пробоя воздуха. Увеличение площади пластин не имеет смысла, т. к. за счет множителя перед скобкой при этом уменьшается смещение, а значительное (на несколько порядков) увеличение давления связано со значительными техническими сложностями.

Таким образом, величина α много меньше единицы при всех разумных параметрах и тогда ей можно пренебречь по сравнению с единицей, а значит и действием электрических сил по сравнению с силами давления

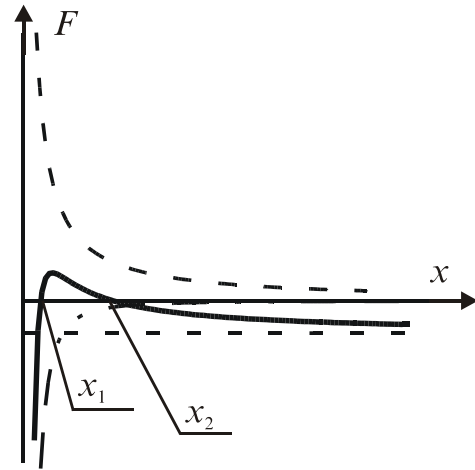


Рис. 6.34

газа. В этом случае из (8) получаем $x \cong \frac{RT}{P_0 S}$, откуда следует, что при изменении температуры на один градус изменение расстояния между пластинами составляет $\Delta x = 82$ мкм. Измерять такие малые расстояния значительно хуже, чем пользоваться обычным ртутным или спиртовым термометром, кроме того, цена деления такого «термометра» существенно зависит от величины атмосферного давления.

Ответ:
$$x = \frac{RT}{2P_0 S} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4\epsilon_0 U^2 P_0 S^2}{R^2 T^2}} \right).$$

3.35. Рассмотрим два электрона, первый из которых влетает в зазор в момент времени, когда напряжение максимально ($\sin \omega t = 1$), а второй — когда оно минимально ($\sin \omega t = -1$). Первый электрон после прохождения зазора получит скорость $v_1 = v_0 \sqrt{1 - 2eU_0/mv_0^2} \approx v_0 (1 - eU_0/mv_0^2)$, где мы использовали условие $eU_0/mv_0^2 \ll 1$. Вторым электрон будет иметь скорость $v_2 \approx v_0 (1 + eU_0/mv_0^2)$. До зазора расстояние между этими электронами равно $l = v_0 T/2 = v_0 \pi/\omega$. Вторым электрон вылетел позже и имеет скорость бóльшую, чем первый. Через время $t \approx l/(v_2 - v_1)$ он догонит его. Это произойдет на расстоянии $L \approx v_0 t$. Все электроны, заключенные между этими двумя, соберутся в компактный сгусток. Собирая приведенные соотношения вместе, получим: $L \approx \pi m v_0^3 / 2e\omega U_0$.

Ответ: $\pi m v_0^3 / 2e\omega U_0$.

3.36. Электродвижущая сила элемента определяется электрохимическими свойствами его материалов и не зависит от геометрических размеров. Внутреннее сопротивление прямо пропорционально расстоянию между электродами и обратно пропорционально их площади:

$$r_2 = \rho \frac{l_2}{S_2} = \rho \frac{2l_1}{4S_1} = \frac{1}{2} r_1. \text{ Эффективное время работы элемента на постоянную нагрузку зависит от количества активных веществ, которое пропорционально объему элемента, откуда } T_2 = kl_2^3 = k(2l_1)^3 = 8kl_1^3 = 8T_1.$$

Ответ: одинаковы, отличаются в 2 раза, отличаются в 8 раз.

3.37. При приложении к пластине разности потенциалов в ней возникает электростатическое поле, и электрический ток течет вдоль его силовых линий. Сила Ампера, действующая со стороны магнитного поля на любой «элементарный ток», прямо пропорциональна его силе и направлена перпендикулярно пластине. Поэтому суммарная сила, действующая на пластину, будет определяться только суммарным током: $F = IBl$, $I = \varepsilon/R$. Вычисляя массу пластинки, находим искомое ускорение $a = 2B\varepsilon/\sqrt{3}\rho l d R_0$.

Ответ: $2B\varepsilon/\sqrt{3}\rho l d R_0$.

3.38. Поскольку магнитное поле работы не совершает, перед соударением в точке В обе частицы имеют одинаковые по модулю скорости $v_1 = v_2 = \sqrt{2gh}$. Так как после соударения первая частица летит по горизонтали, то для ее скорости v'_1 в этот момент выполняется условие баланса силы тяжести и силы Лоренца: $Mg = QBv'_1 \Rightarrow v'_1 = \frac{Mg}{QB}$. Из закона сохранения импульса частиц при соударении в проекциях на горизонтальное и вертикальное направления получаем:

$$\begin{aligned} Mv_1 &= Mv'_1 + mu_x, \\ mv_2 &= mu_y, \end{aligned}$$

где u_x и u_y — горизонтальная и вертикальная компоненты скорости второй частицы после удара. Из этих уравнений находим, что $u_y = v_2$

и $m = \frac{M(v_1 - v'_1)}{u_x}$. Вторая частица движется в однородном поле силы тя-

жести, поэтому для полного времени ее движения от С до Е можно записать: $t_{CE} = t_{CB} + t_{BE}$. Отсюда для времени движения от В до Е получаем

$$t_{BE} = t_{CE} - t_{CB}, \quad \text{где} \quad l = u_x \cdot t_{BE}, \quad t_{CE} = \sqrt{\frac{2H}{g}}, \quad t_{CB} = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \quad \text{Следовательно,}$$

$u_x = \frac{l\sqrt{g}}{\sqrt{2H} - \sqrt{2h}}$ и для массы второй частицы получаем:

$$m = M \frac{\left(\sqrt{2gh} + \frac{Mg}{QB} \right) (\sqrt{2H} - \sqrt{2h})}{l\sqrt{g}}.$$

$$\text{Ответ: } M \frac{\left(\sqrt{2gh} + \frac{Mg}{QB} \right) (\sqrt{2H} - \sqrt{2h})}{l\sqrt{g}}.$$

3.39. Так как собственная частота колебательного контура $f = 1/\sqrt{LC}$, то отношение частот колебаний контуров $n = f_1/f_2 = \sqrt{C_1/C_2} = \sqrt{d_1/d_2}$, где $d_1 = d + x$ и $d_2 = d - x$ — новые расстояния от подвижной пластины до неподвижных, x — смещение подвижной пластины. Очевидно, что $\Delta x = Ma/k$, где M — масса подвижной пластины, k — жесткость пружин. Собирая все результаты вместе, нетрудно получить, что $a = kd(n^2 - 1)/(n^2 + 1)M \approx 2,43 \text{ м/с}^2$.

Ответ: $2,43 \text{ м/с}^2$.

3.40. Для электрической цепи электромотора автомобиля имеем: $E = E_{ind} + JR$. Отсюда $EJ = E_{ind}J + J^2R$. Здесь $E_{ind}J = W$ — «полезная» мощность, которая выражается через скорость движения и силу сопротивления: $W = vF_c$. По условию задачи $F_c = \alpha v$ и $kE_{ind} = v/r$. Поэтому $vJ/r = k\alpha v^2$, и сила тока выразится формулой $J = k\alpha vr$. Подставив силу тока вместе с E_{ind} в первую формулу, получим $E = v/kr + kR\alpha vr$, откуда найдем искомую установившуюся скорость движения автомобиля: $v = E/(1/kr + k\alpha rR)$.

Ответ: $E/(1/kr + k\alpha rR)$.

Геометрическая оптика

4.1. Так как спортсмен движется, то за время срабатывания затвора фотоаппарата он успевает сместиться, и каждая точка тела спортсмена отображается на фотопленке и, соответственно, отпечатке снимка в виде пятна. Если снимок рассматривать с расстояния наилучшего зрения 25 см, то для того, чтобы снимок казался резким, размер пятна должен быть меньше, чем $25 \text{ см} \cdot 1/60/57 \text{ рад} \approx 0,07 \text{ мм}$. Т. к. коэффициент увеличения при печати фотоснимка с негатива составляет $10 \text{ см}/24 \text{ мм} \approx 4,16$,

то на фотопленке размер пятна не должен превышать $\Delta = 0,07/4,16 \approx 0,017$ мм. Заметим, что это больше размера зерна фотопленки $1/120$ мм, так что получить снимок требуемого качества возможно. Построив ход лучей в фотообъективе, несложно убедиться, что если L — расстояние от объекта до фотообъектива, а d — от объектива до фотопленки, то при скорости спортсмена v и выдержке τ размер пятна определяется по формуле $\Delta/d = v\tau/L$. Подставляя найденные ранее и данные значения и учитывая, что скорость бегуна на 100 метров составляет примерно 10 м/с, получаем $\tau = (0,017 \text{ мм} \cdot 10 \text{ м}) / (30 \text{ мм} \cdot 10 \text{ м/с}) \approx 6 \cdot 10^{-4} \text{ с} \approx 1/2000 \text{ с}$.

Ответ: 1/2000 с.

4.2. Введем следующие обозначения (см. рис. 6.35): ABCD — трюмо, S — положение Знайки, O — точка пересечения продолжений сторон трюмо AB и CD, F — основание перпендикуляра, опущенного из точки S на AB, E — середина BC. Несложно видеть, что изображения Знайки в зеркалах AB и CD существуют всегда (они обозначены S_1 и S_2 соответственно). Поскольку $\angle OFS = \angle OFS_1$, то оба изображения S_1 и S_2 находятся на прямой, проведенной через т. O параллельно BC, и $S_1O = S_2O = SO$.

В то же время увидеть изображение можно не всегда, а лишь когда отраженные от зеркала лучи попадут в точку, в которой находится наблюдатель. Так, свое изображение в зеркалах AB и CD Знайка сможет увидеть, только если точка F лежит на отрезке AB (а не на его продолжении). Это возможно, если он находится между точками K и N, перпендикуляры, опущенные из которых на AB, попадают в точки B и A соответственно. Несложно получить: $EK = l\sqrt{2}/2 \approx 0,71l$, $EN = l(\sqrt{2} - 1/2) \approx 0,91l$.

Кроме этих изображений, может образоваться изображение мнимого предмета S_1 в зеркале CD и, наоборот, мнимого предмета S_2 в зеркале AB. Физически это соответствует тому, что после отражения от зеркала AB луч сначала попадет на зеркало CD, а затем уйдет из системы. (Заметим, что более чем двукратных отражений в данной системе возникнуть не может.) Оба полученных таким образом изображения располагаются в т. S_{12} ($OS = OS_{12}$), причем их ориентация также совпадает, поэтому фактически изображение одно.

Это изображение может образоваться, если луч, «исходящий» из т. S_1 и прошедший через отрезок AB, попадет на отрезок CD, т. е. если

прямая BD пересечет прямую S_1S_2 на отрезке OS_1 . Соответствующее условие проще всего записать в виде $OM > OS_1$. Несложно переписать это условие в виде $ES > (l/2)\text{ctg}\angle CBD$. $\angle CBD = 22,5^\circ$, поэтому окончательно условие запишется в виде:

$$ES > \frac{l}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}} \approx 1,21l.$$

Даже если это изображение существует, Знайка не сможет его увидеть. Это можно пояснить следующим рассуждением: все лучи света, образующие это изображение, должны казаться выходящими из точки S_{12} . В то же время они обязательно должны выходить из одного из боковых зеркал трюмо AB или CD , поскольку после отражения от них луч больше нигде не изменяет своего направления. Поэтому область, из которой видно изображение S_{12} , ограничена лучами $S_{12}A$ и $S_{12}B$ и лучами $S_{12}C$ и $S_{12}D$ (на рис. 6.35 эти области окрашены серым). Видно, что никакая точка оси симметрии зеркала не принадлежит этим областям. (Если же сойти с центральной оси, то это изображение действительно можно увидеть. Рекомендуется проделать соответствующий эксперимент.)

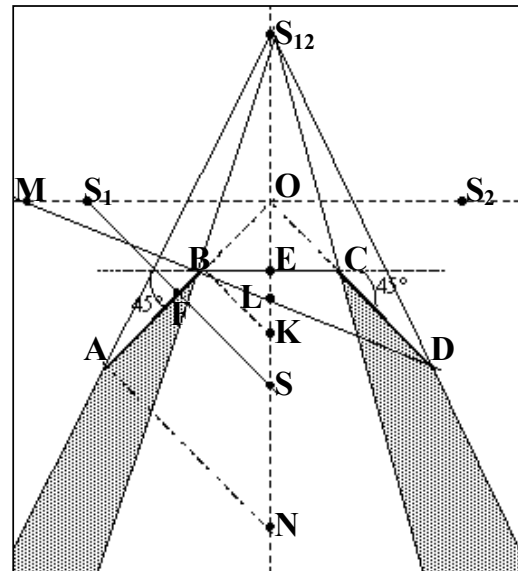


Рис. 6.35

Ответ: при $a > 0,21l$ существует три изображения, в противном случае — 2, все они мнимые, при $0,71l < a < 0,91l$ Знайка видит 2 изображения, в противном случае — ни одного.

4.3. Если источник находится в фокусе линзы, то после прохождения линзы мы имеем параллельный оси пучок лучей. Через заслонку пройдут только те из них, которые попадут прямо в отверстие, т. е. в рамках используемых приближений — один луч, идущий по главной оптической оси, который и даст на экране точечное пятно в центре. Отметим, что этот луч присутствует при любом положении источника, поэтому точечное пятно в центре будет всегда.

Если немного увеличить расстояние от линзы до источника, то вместо параллельного получится слабосходящийся пучок лучей, который дал бы изображение справа от трубы (рис. 6.36а). Из рисунка хорошо видно, что через отверстие пройдет только луч, идущий по оси, и картина на экране не претерпит изменений.

Качественные изменения произойдут, когда источник будет находиться на расстоянии $\frac{4}{3}F$ от линзы, при этом изображение получается на расстоянии $4F$ от линзы, т. е. непосредственно в отверстии (рис. 6.36б). В этом случае на экране будет светлое пятно, радиус которого равен радиусу трубы R .

При незначительном увеличении расстояния до источника изображение окажется внутри трубы, однако при этом по-прежнему через отверстие будет проходить только центральный луч, т. е. на экране опять будет точечное пятно в центре (рис. 6.36в).

Таким образом, если изображение находится не точно в отверстии, то непосредственно в отверстие попадает только центральный луч. Однако возможна ситуация, когда в отверстие пройдет луч после одного отражения от стенки (рис. 6.36г). Она наступит, если изображение находится на расстоянии $\frac{4}{3}F$ от линзы (при этом источник будет находиться на $4F$ от линзы). В этом случае на экране, помимо центральной точки, будет видно светлое кольцо радиуса $3R$. Понятно, что при меньших расстояниях от линзы до изображения в отверстие будет проходить не «крайний», а более близкий к оси луч, а радиус светлого кольца в этом

случае будет определяться по формуле $r = 4F \frac{2R}{4F - x} = 8R \frac{L - F}{3L - 4F}$, в част-

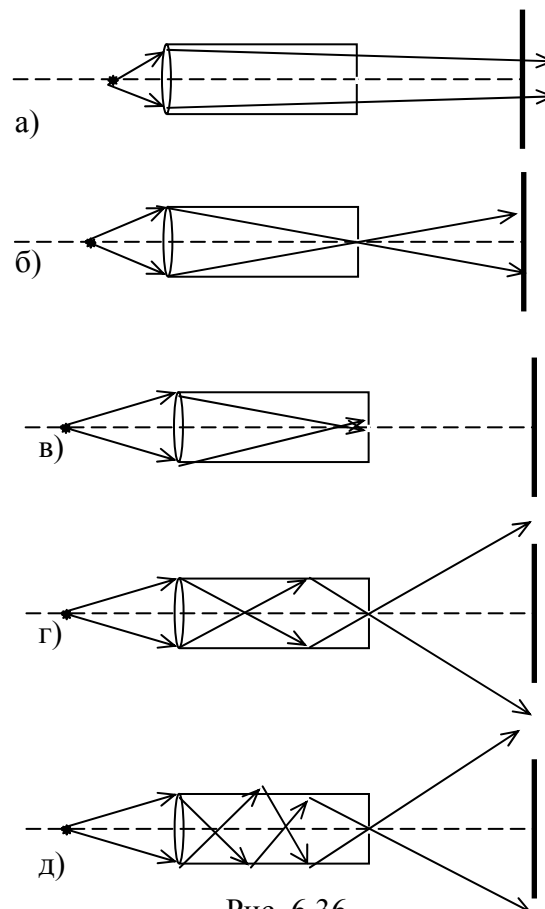


Рис. 6.36

ности, для бесконечно удаленного источника радиус кольца будет равен $\frac{8}{3}R$.

Несложно видеть, что при произвольных геометрических параметрах системы возможны ситуации, когда луч попадает в отверстие после 2-х (рис. 6.36д), 3-х и т.д. отражений. Однако в рассматриваемой системе такие случаи реализовать не удастся, поскольку для случая n отражений необходимо, чтобы изображение находилось не дальше, чем $\frac{4}{2n+1}F$.

Уже при $n = 2$ это расстояние меньше фокусного.

Видно, что получившаяся зависимость является разрывной. Это следствие идеализации, а именно, пренебрежения размерами отверстия. Если рассмотреть отверстие конечных размеров, то при приближении изображения из «бесконечности» к трубе радиус светлого пятна на экране не будет меняться (имея равный нулю минимум в том случае, когда изображение образуется на экране), а кольца будут иметь конечную толщину, также изменяющуюся при движении источника.

Ответ: при $L < \frac{4}{3}F$ и $\frac{4}{3}F < L < 4F$ на экране только точечное пятно в центре; при $L = \frac{4}{3}F$ на экране светлый круг радиуса R , при $L > 4F$ на экране точечное пятно и тонкое кольцо радиуса $8R \frac{L-F}{3L-4F}$.

4.4. После отражения луча от образующей конуса он пойдет так, что упадет на противоположную сторону образующей перпендикулярно, следовательно, отразится и пойдет в противоположном направлении. Поэтому через линзу пройдут либо лучи, вообще не отразившиеся от конуса, которые образуют светлое точечное пятно по центру экрана, либо лучи, которые после первого отображения не попадут на образующую (см. рис. 6.37). Такие лучи образуют в фокальной плоскости светлое кольцо.

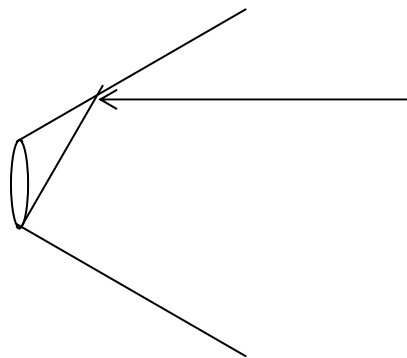


Рис. 6.37

Ответ: будет яркая точка на пересечении с осью симметрии и яркое узкое кольцо с центром в этой точке.

4.5. В соответствии с законом преломления:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta_1} = n_1, \frac{\sin \alpha}{\sin \beta_2} = n_2, \frac{\sin \beta_1}{\sin \gamma_1} = \frac{n_3}{n_1}, \frac{\sin \beta_2}{\sin \gamma_2} = \frac{n_3}{n_2}$$

(см. рис. 6.38). Тогда $\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma_1} = n_3 = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma_2}$,

т. е. $\gamma_1 = \gamma_2$.

Ответ: лучи останутся параллельными.

4.6. Как правило, очки, чуть более слабы, чем требуется, поэтому у близорукого человека изображение получается до сетчатки, а у дальнорядкого — за сетчаткой. Если же линзу чуть сдвинуть, то сдвигается в ту же сторону и изображение предмета. Наклон очков — единственный способ приблизить линзу к глазу (см. также задачу 4.12).

4.7. Построим изображение квадрата по правилам построения изображений в тонкой линзе (рис. 6.39): оно является трапецией. Обратите внимание, что ближе к линзе расположено изображение дальней от линзы стороны квадрата и наоборот.

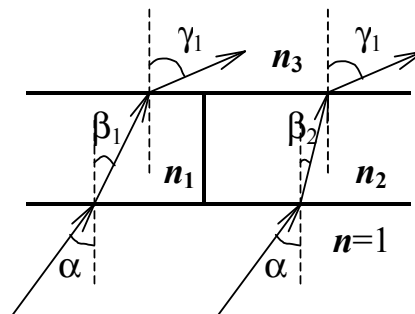


Рис. 6.38

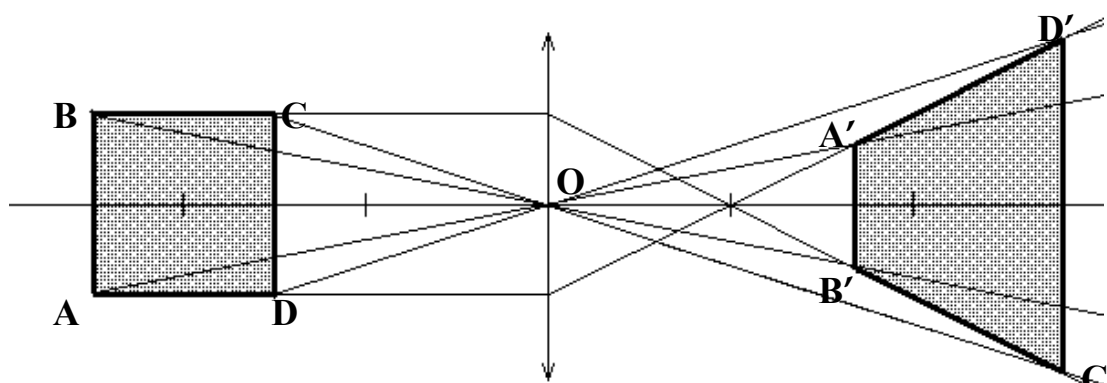


Рис. 6.39

Пусть x и y — расстояния от линзы до изображений сторон CD и AB квадрата соответственно. Тогда по формуле тонкой линзы

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{\frac{3}{2}F} = \frac{1}{F}, \quad x = 3F \quad \text{и} \quad \frac{1}{y} + \frac{1}{\frac{5}{2}F} = \frac{1}{F}, \quad y = \frac{5}{3}F.$$

Из подобия треугольников

CDO и C'D'O находим $C'D' = 2F$. Аналогично находим $A'B' = 2F/3$. Тогда площадь изображения квадрата $S' = \frac{1}{2}(3F - \frac{5}{3}F)(2F + \frac{2}{3}F) = \frac{16}{9}F^2$, что больше площади квадрата в $16/9 \approx 1,8$ раза.

Ответ: в 1,8 раза.

4.8. Ход лучей в рассматриваемой системе приведен на рис. 6.40, области тени отмечены серым цветом. Тень от оправы линзы на экране имеет форму кольца, внешний диаметр которого определяется из простых геометрических соображений:

$D_T = \frac{l+F}{l}D$. Внутренний диаметр теневого кольца определяется аналогичным образом

$d_T = \frac{L-F}{L}d = (1 - \frac{F}{L})d$, где L — расстояние от линзы до действительного изображения источника,

которое определяется по формуле тонкой линзы: $\frac{1}{l} + \frac{1}{L} = \frac{1}{F} \Rightarrow L = \frac{Fl}{l-F}$.

Тогда внутренний диаметр тени $d_T = \frac{F}{l}d$ и ее площадь

$$S = \frac{\pi}{4}(D_T^2 - d_T^2) = \frac{\pi}{4} \left(\frac{(l+F)^2}{l^2} D^2 - \frac{F^2}{l^2} d^2 \right).$$

График этой зависимости приведен на рис. 6.41. Заметим, что при увеличении расстояния l до бесконечности площадь тени стремится к значению $\pi D^2/4$, т. к. в этом случае изображение источника находится на экране и имеет нулевую площадь.

Ответ: рис. 6.41.

4.9. Двояковыпуклая стеклянная линза в воздухе является собирающей. Поскольку предмет находится в фокусе линзы, то в пустом аквариуме его изображение будет находиться на бесконечности. Однако при заполне-

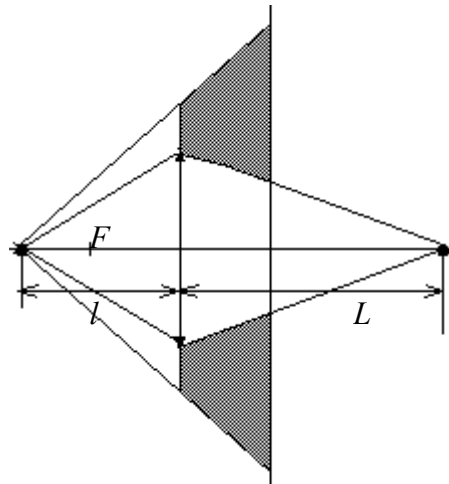


Рис. 6.40

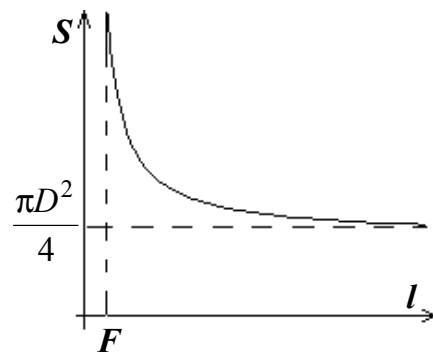


Рис. 6.41

нии аквариума водой оптическая сила линзы изменяется, т. к. преломление света на границе раздела «вода – стекло» происходит иначе, чем на границе раздела «воздух-стекло». Поскольку показатель преломления стекла больше, чем воды, то линза останется собирающей, но ее фокусное расстояние увеличится. (Это несложно понять с помощью следующего качественного рассуждения: если бы показатели преломления линзы и воды были одинаковыми, то преломления бы не было вообще, оптическая сила такой линзы была бы нулевой, а фокусное расстояние — бесконечно большим. Поэтому при уменьшении разности показателей преломления среды и линзы ее фокусное расстояние увеличивается.)

Таким образом, в аквариуме с водой предмет оказывается между собирающей линзой и ее фокусом и дает прямое увеличенное мнимое изображение, получаемое по обычным правилам (см. рис. 6.42).

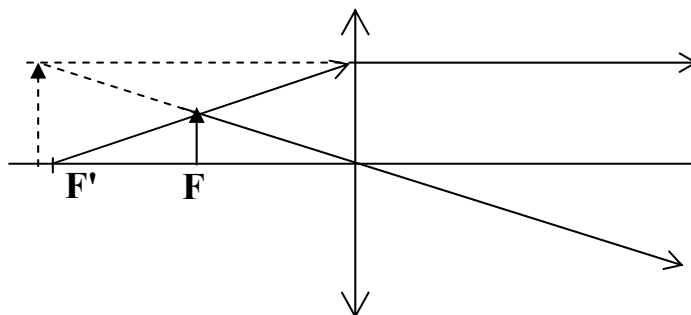


Рис. 6.42

Ответ: рис. 6.42.

4.10. Каждая линза дает изображение всего предмета, поэтому в данной системе возникнет два изображения, каждое из которых строится по обычным правилам. Результат приведен на рис. 6.43, где сплошными линиями показаны лучи, преломившиеся в линзе с бóльшим фокусным расстоянием, а пунктиром — в линзе с меньшим фокусным расстоянием.

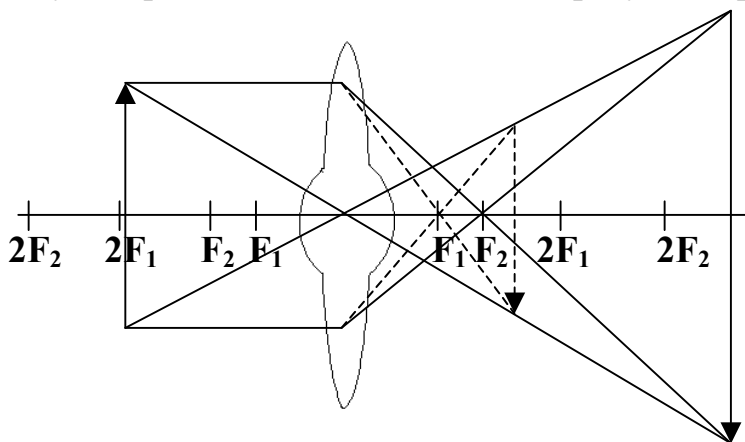


Рис. 6.43

Ответ: рис. 6.43.

4.11. Очевидно, фокусное расстояние линзы, сложенной из двух, равно F . Поскольку оптические силы линз складываются, а линзы одинаковы, то фокусное расстояние каждой из половинок будет $2F$. Соответственно, первая половинка создает изображение на расстоянии $2F$. Это изображение является мнимым предметом для второй линзы (т. е. на нее падает уже сходящийся пучок лучей). В этом случае расстояние от предмета до линзы (например, при расчете по формуле тонкой линзы) следует считать отрицательным: $-\frac{1}{F} + \frac{1}{x} = \frac{1}{2F}$, откуда имеем $x = \frac{2}{3}F$. Построение лучей приведено на рис. 6.44 (сплошными линиями показан истинный ход лучей, пунктиром — ход лучей после преломления только в первой «полулинзе», штрихпунктиром — после преломления в исходной линзе).

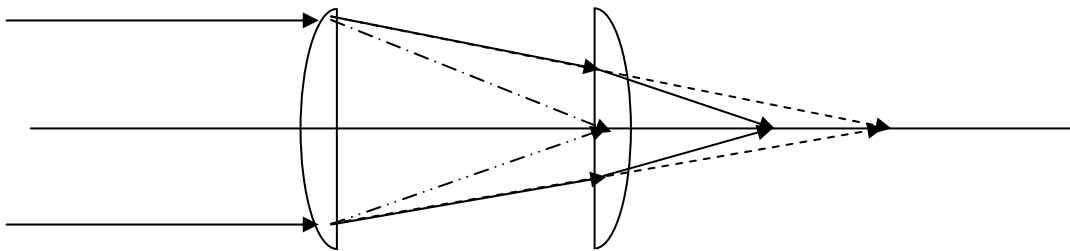


Рис. 6.44

Ответ: на расстоянии $2F/3$.

4.12. Очевидно, что в исходном положении изображение находится в заднем фокусе второй линзы.

Условимся называть главной осью системы главную оптическую ось линз в первоначальном состоянии. Поскольку оптические центры линз не смещаются, то идущий вдоль главной оси системы луч преломляться не будет, и изображение останется на ней при любых поворотах линз.

а) После поворота второй линзы формируемый первой параллельный пучок падает на нее наклонно, и изображение будет находиться не в главном, а в том побочном фокусе, который находится в точке пересечения фокальной плоскости с главной

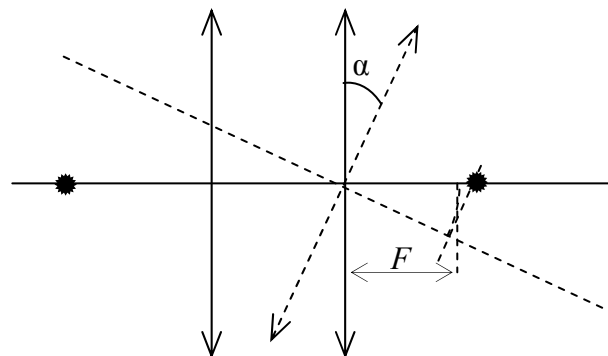


Рис. 6.45

осью системы (см. рис. 6.45). Оно по-прежнему находится на расстоянии F от линзы, однако расстояние от центра линзы до изображения теперь, очевидно, равно $F/\cos \alpha$, т. е. изображение сместится вправо на $F(1/\cos \alpha - 1)$.

б) После поворота первой линзы источник оказался ближе к ней (рис. 6.46), поэтому первая линза будет формировать мнимое изображение, находящееся на главной оси системы слева от нее на расстоянии $b = F \cos \alpha / (1 - \cos \alpha)$ от первой линзы (вычисляем по формуле тонкой линзы либо из подобия треугольников) и $a = b/\cos \alpha + F$ от второй линзы. Тогда вторая линза формирует действительное изображение, находящееся на расстоянии $F(2 - \cos \alpha)$ справа от нее (вычисляется также по формуле тонкой линзы). Поэтому изображение сместится также вправо на расстояние $F(1 - \cos \alpha)$.

Заметим, что при очень малых углах (если $\cos \alpha \approx 1$) изображение не смещается.

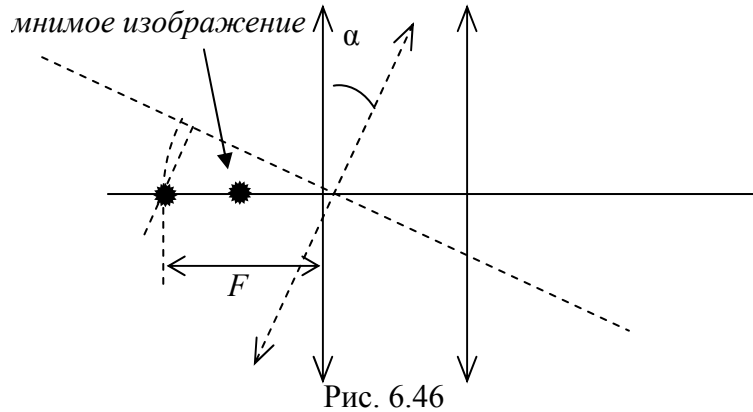


Рис. 6.46

Ответ: а) вправо на $F(1/\cos \alpha - 1)$, б) вправо на $F(1 - \cos \alpha)$.

4.13. Построим ход «крайнего» луча, упавшего на «верхнюю» полулинзу (рис. 6.47). Каждая из половинок представляет собой линзу с тем же фокусным расстоянием и оптическим центром, что и исходная. Однако главная оптическая ось верхней половинки теперь повернулась на угол α (ОВ на рис. 6.47), соответственно ее фокальной плоскостью теперь является плоскость BD ($BD \perp OB$ и $OB = F$). Падающий параллельный пучок должен собраться в фокальной плоскости, и т. к. идущий через оптический центр луч не преломляется, то пучок соберется в точке его пересечения с фокальной плоскостью, т. е. в т. D. Тогда на линейке будет освещена область KC (выделено жирным) от верхней половинки и симметричная ей область — от нижней. Длину отрезка KC несложно найти из геометрических соображений: $OD = F/\cos \alpha$; $CD = F/\cos \alpha - F$; $EA = (D/2) \cos \alpha$.

5.2. Поскольку угол α мал, можно считать, что вблизи максимального отклонения шарик движется по вертикали без начальной скорости. Тогда времена t_1 и t_2 отличаются фактически на удвоенное время падения шарика с высоты $h \approx l\alpha$, т. е. $t_1 - t_2 = 2\sqrt{2l\alpha/g}$, откуда несложно найти $\alpha = g(t_1 - t_2)^2/8l$.

Ответ: $g(t_1 - t_2)^2/8l$.

5.3. Пусть длина нити l , масса шарика m . Тогда потенциальная энергия шарика при максимальном отклонении влево составляет $U_{\text{лев.}} = 2mgl\sin^2(\beta/2)$, а вправо $U_{\text{прав.}} = 2mgl\sin^2(\alpha/2)$, или, учитывая малость углов α и β , $U_{\text{лев.}} = mg\beta^2/2$, $U_{\text{пр.}} = mg\alpha^2/2$. Тогда после первого удара о стенку шарик будет иметь энергию $U_1 = kmgl(\beta^2 - \alpha^2)/2$ и после этого шарик отклонится влево на такой угол β_1 , что $mg\beta_1^2/2 = U_1$, т. е. $\beta_1^2 = k\beta_0^2 + (1 - k)\alpha^2$.

Проводя аналогичные рассуждения для второго, третьего и последующих ударов, несложно получить общую формулу: $\beta_n = \sqrt{k^n\beta_0^2 + (1 - k^n)\alpha^2}$. Видно, что $\beta_n \rightarrow \alpha$ при $n \rightarrow \infty$ за исключением случая абсолютно упругого удара ($k = 1$), при котором $\beta_n = \alpha$ при всех n .

Ответ: $\beta_n = \sqrt{k^n\beta_0^2 + (1 - k^n)\alpha^2}$.

5.4. Если скорость грузика меньше порогового значения $v_0 = l\sqrt{k/m}$, то период колебаний не зависит от начальной скорости и равен $T_0 = 2\pi\sqrt{m/k}$. Если же $v_0 > u = l\sqrt{k/m}$, то грузик будет периодически ударяться о стенку. До удара он движется по закону $x = (v_0/\omega) \sin \omega t$. Отсюда находим время, которое затрачивает грузик на движение из положения равновесия до стенки $t = (1/\omega) \arcsin(\omega l/v_0)$. Поскольку удар о стенку упругий, то точно за такое время грузик возвращается в положение равновесия. Учтем еще половину периода, за которую грузик движется слева от положения равновесия.

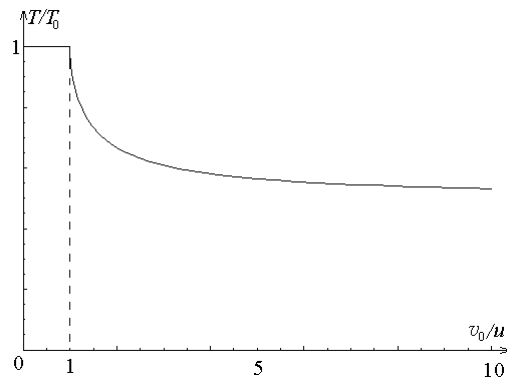


Рис. 6.48

Окончательно получим $T = T_0[1/2 + (1/\pi) \cdot \arcsin(2\pi l/v_0 T_0)]$. Отметим, что при $v_0 \rightarrow \infty$ $T \rightarrow T_0/2$. Соответствующий график приведен на рис. 6.48.

Ответ: рис. 6.48.

5.5. Поскольку период собственных колебаний шарика, равный 0,5 с, значительно больше времени действия внешней силы, то смещением шарика за время действия этой силы можно пренебречь. По закону изменения импульса после удара шарик приобретает скорость $v = F\Delta t/m$. Тогда амплитуда колебаний A определяется из условия $kA^2/2 = mv^2/2$. Окончательно $A = F\Delta t/m\omega \approx 5$ см, где $\omega = \sqrt{k/m}$.

Ответ: 5 см.

5.6. Воспользуемся законом сохранения механической энергии при гармонических колебаниях. Пусть в некоторый момент времени масса m смещена из своего первоначального положения к центру квадрата на $x = OH$ (см. рис. 6.49) и имеет скорость \dot{x} . При этом две смежные с H вершины смещены на расстояния Δy , которые находим из теоремы Пифагора:

$$a^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{2}} + \Delta y\right)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{2}} - x\right)^2.$$

Проводя тождественные преобразования и пренебрегая величиной $(\Delta y)^2$ как бесконечно малой второго порядка, получим $\Delta y = x$. Следовательно, в этот момент времени пружина деформирована на величину $\Delta l = 2\Delta y = 2x$. Полная механическая энергия системы складывается из кинетической энергии точки m и потенциальной энергии упругой деформации пружины:

$$W = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{k(2x)^2}{2} = \frac{m\dot{x}^2}{2} + 2kx^2 = \text{const}$$

Беря производную от W , получим: $\frac{m2\dot{x}\ddot{x}}{2} + 4kx\dot{x} = 0$, или, после очевид-

ных преобразований: $\ddot{x} + \frac{4k}{m}x = 0$.

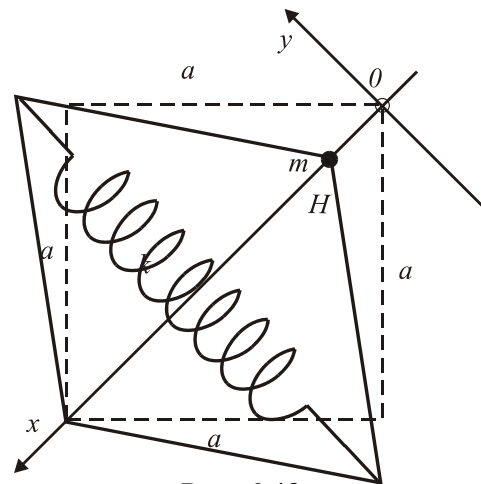


Рис. 6.49

Это уравнение гармонических колебаний, круговая частота которых удовлетворяет условию $\omega_0^2 = \frac{4k}{m}$. Поэтому искомый период определится

$$\text{как } T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{4k}} = \pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Ответ: $\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

5.7. В процессе колебаний центр масс системы останется неподвижным. При смещении любого поршня на Δx возникает возвращающая сила $F_x = -2k\Delta x - (p_2 - p_1)S$, где p_1 — давление в центральном отсеке, p_2 — давление в отсеке с другой стороны поршня. По закону Бойля — Мариотта $p_0 S l/3 = p_1 S((l/3) + 2\Delta x) = p_2 S((l/3) - \Delta x)$. Отсюда получаем, что

$$p_2 - p_1 = p_0 \left(\frac{1}{1 - 3\Delta x/l} - \frac{1}{1 + 6\Delta x/l} \right) \approx p_0 \left(1 + \frac{3\Delta x}{l} - 1 + \frac{6\Delta x}{l} \right) = \frac{p_0 9\Delta x}{l}.$$

(Здесь было применено известное приближение: $1/(1 \pm \alpha) \approx 1 \mp \alpha$.) Итак, результирующая сила, возникающая при смещении поршня, оказывается пропорциональной величине этого смещения (квазиупругая сила): $F_x = -(2k + 9p_0 S/l)\Delta x$.

Составляя уравнение движения поршня по второму закону Ньютона: $M a_x = -(2k + 9p_0 S/l)\Delta x$ и сравнивая его с уравнением гармонического осциллятора $a_x = -\omega^2 \Delta x$, выражаем круговую частоту собственных колебаний поршня: $\omega = \sqrt{(2k + 9p_0 S/l)/M}$.

Ответ: $\sqrt{(2k + 9p_0 S/l)/M}$.

5.8. а) Давление насыщенного пара, в отличие от давления идеального газа, зависит только от температуры. Поэтому при смещении перегородки давление в меньшей части останется неизменным («лишний» пар сконденсируется в воду), а в большей части пар перестанет быть насыщенным (в этом случае его можно рассматривать как идеальный газ).

Пусть длина сосуда $2l$, а перегородка сместилась на малое расстояние x влево. Тогда слева от перегородки давление газа равно первона-

чальному $p_{\text{лев}} = p_0$, а давление справа определится по закону Бойля – Мариотта: $p_{\text{пр}}(l + x) = p_0 l$. Тогда действующая на перегородку сила $F = (p_{\text{лев}} - p_{\text{пр}})S = p_0 x / (x + l) \approx p_0 S x / l$, где S — площадь поперечного сечения сосуда. Записывая уравнение движения и применяя уравнение состояния идеального газа, получим период малых колебаний $T = 2\pi\sqrt{ml^2 / RT_0}$.

б) Если сосуд охладить, то давление пара станет больше давления насыщенного пара, и часть пара сконденсируется. Оставшийся пар по-прежнему является насыщенным, однако теперь в сосуде присутствует также вода. Поэтому при смещении перегородки слева «лишний» пар сконденсируется, а справа при уменьшении давления часть воды испарится, поэтому давление как слева, так и справа останется равным давлению насыщенного пара при данной температуре (по крайней мере при настолько малых колебаниях, что воды справа хватит для компенсации падения давления). Поэтому при понижении температуры колебаний вообще не будет.

При увеличении температуры пар перестанет быть насыщенным, и к нему можно применять законы идеального газа (при столь малых колебаниях, что пар не становится насыщенным вследствие сжатия). Тогда аналогичными п. а) рассуждениями можно получить $T = 2\pi\sqrt{ml^2 / 2RT_0}$.

в) Если в обеих частях сосуда находится, кроме пара, вода, то, проводя аналогичные предыдущему пункту рассуждения, можно убедиться, что колебаний не будет.

Если в обеих частях сосуда находятся равные количества воздуха и пара, то при смещении перегородки влево $p_{\text{пара лев.}} = p_{\text{пара 0}}$, $p_{\text{возд. лев.}}(l - x) = p_{\text{возд. 0}}l$, $p_{\text{прав.}}(l + x) = p_0 l$ (здесь $p_{\text{прав.}}$ — суммарное давление пара и воздуха). Тогда, учитывая закон Дальтона, $F = (p_{\text{лев.}} - p_{\text{прав.}})S = 1,5p_0 S x / l$. Тогда период колебаний $T = 2\pi\sqrt{2ml^2 / 3RT_0}$.

Ответ: а) $2\pi\sqrt{ml^2 / RT_0}$; б) при охлаждении колебаний не будет, при нагреве период уменьшится до $2\pi\sqrt{ml^2 / 2RT_0}$; в) для воды и пара колебаний не будет, для пара и воздуха $2\pi\sqrt{2ml^2 / 3RT_0}$.

5.9. При нахождении шарика в центре трубы ее заряд симметричен относительно него, поэтому суммарная сила равна нулю. При смещении шарика на некоторое расстояние x симметрия нарушается, и заряд, находящийся на дальнем от шарика конце трубы на отрезке длиной $2x$, не имеет симметричного относительно шарика заряда. При малом смещении этот заряд можно считать точечным, так что сила притяжения дается соотношением $f = 2x\pi d\sigma q/4\pi\epsilon_0(l/2)^2$. Таким образом, сила представляется в виде $f = kx$, где $k = 2d\sigma q/\epsilon_0 l^2$. Тогда $T = 2\pi \sqrt{m/k}$.

Ответ: $2\pi \sqrt{\frac{m\epsilon_0 l^2}{2d\sigma q}}$.

5.10. При малом отклонении от положения равновесия на маятник действуют силы тяжести, сила реакции опоры со стороны стержня и силы упругости со стороны пружин. Поскольку отклонения малы, то можно считать, что пружины остаются горизонтальными.

Равнодействующую сил тяжести и реакции стержня несложно найти аналогично стандартной задаче о математическом маятнике: $T_1 = mgx/L$, (см. рис. 6.50); обратите внимание на отсутствие знака «-» перед смещением x .

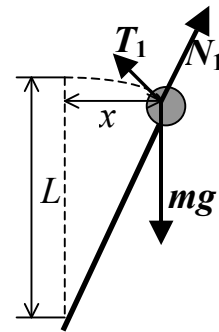


Рис. 6.50
(вид сбоку)

Определим равнодействующую сил упругости со стороны пружин (см. рис. 6.51). Удлинение каждой из пружин $\Delta l = \sqrt{l^2 + x^2} - l \approx \frac{x^2}{2l}$. Тогда из очевидных геометрических соображений с учетом малости отклонения имеем $T_2 = -\frac{kx^3}{l^2}$.

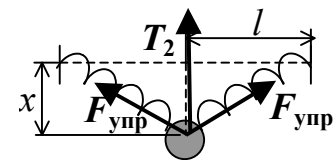


Рис. 6.51
(вид сверху)

лости отклонения имеем $T_2 = -\frac{kx^3}{l^2}$.

Считая, что силы T_1 и T_2 действуют вдоль одной прямой, запишем выражение для силы, возникающей при малом отклонении от положения равновесия: $F(x) = mg \frac{x}{L} - k \frac{x^3}{l^2}$.

При очень малых значениях x преобладает первое слагаемое и сила стремится увеличить отклонение, поэтому центральное положение $x = 0$ является *неустойчивым*. При дальнейшем увеличении отклонения второе

слагаемое возрастает быстрее, чем первое, и при $x_0 = l\sqrt{\frac{mg}{kL}}$ сила становится равной нулю. Это

еще одно положение равновесия маятника, причем оно *устойчиво*. Это становится очевидным из графика зависимости потенциальной энергии

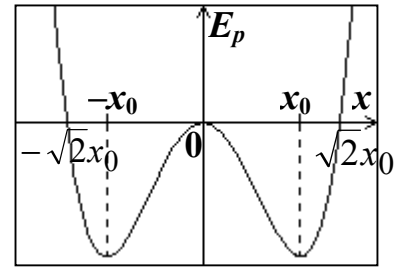


Рис. 6.52

маятника от отклонения (рис. 6.52), аналитический вид которого не сложно получить интегрированием выражения для силы (константу интегрирования, равную значению потенциальной энергии при $x = 0$, положим равной нулю):

$$E_p = -mg \frac{x^2}{2L} + k \frac{x^4}{4l^2}$$

Поскольку система консервативна, маятник пройдет положение равновесия и продолжит отклоняться до тех пор, пока его потенциальная энергия не достигнет первоначального значения. Несложно видеть, что это произойдет при $x = \sqrt{2}x_0$. Затем процесс повторится в обратном порядке.

Ответ: $l\sqrt{\frac{2mg}{kL}}$

5.11. Пусть шарик отклонился вправо от положения равновесия так, что угол между прямой, соединяющей его центр O с центром сферы O_1 , и вертикалью ($\angle AO_1B$ на рис. 6.53) равен φ , $\varphi \ll 1$. Очевидно, что положение равновесия будет устойчивым, если

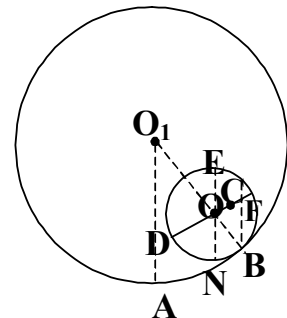


Рис. 6.53

вертикаль, проведенная из центра тяжести шарика C , пройдет левее точки касания шарика со сферой B , и неустойчивым в противном случае.

Пусть D — точка поверхности шарика, касавшаяся сферы в состоянии равновесия. Поскольку шарик катится по сфере без проскальзывания, дуги AB и DB равны, поэтому $R\varphi = r\varphi'$ (где φ' — величина $\angle DOB$). Подсчитаем расстояние от центра шара до т. F — точки пересечения прямой OC и вертикали, проведенной через т. B .

Несложно видеть, что $\angle OFB = \angle EOC = \angle DOB - \angle DON = \varphi' - \varphi = \varphi(R/r - 1)$. Из треугольника OFB по Т. синусов $r/OF = [\sin \varphi(R/r - 1)]/\sin \varphi$. Учитывая, что при малых углах $\sin \varphi \approx \varphi$, условие устойчивости равновесия $OF > h$ можно переписать в виде $r/h > R/r - 1$. На плоско-

сти $(h/r, R/r)$ это условие задает область, ограниченную координатными осями и гиперболой $R/r = 1/(h/r + 1)$, при этом необходимо учесть естественные условия $h/r \leq 1$, $R/r \geq 1$ (см. рис. 6.54).

Ответ: рис. 6.54.

5.12. Т.к. сфера легкая, а груз тяжелый, то можно считать, что вся масса модели сосредоточена в точке размещения груза C , являющейся ее центром тяжести.

Пусть модель отклонилась от положения равновесия так, что соединяющая центры модели и полусферы прямая образует малый угол φ с вертикалью (угол OO_1E на рис. 6.57). Введем следующие обозначения: O — центр модели, O_1 — центр полусферы, A — точка касания модели и полусферы, B — точка поверхности модели, касающаяся полусферы в положении равновесия; величину угла AOC обозначим φ' .

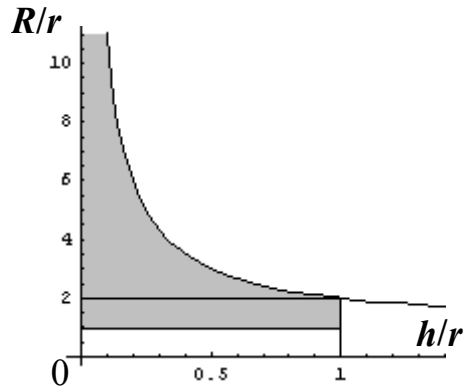


Рис. 6.54

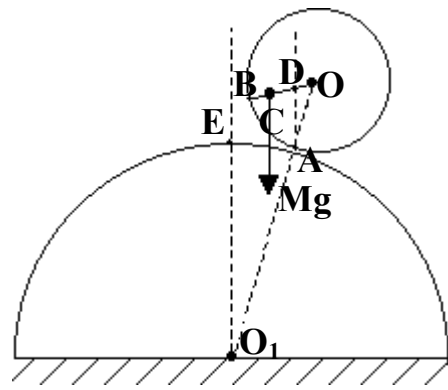


Рис. 6.57

В данном положении на модель действуют силы тяжести и реакции опоры со стороны полусферы. В любой момент времени движение модели можно представить как вращение вокруг мгновенной оси, проходящей через точку опоры A перпендикулярно плоскости рисунка. Поскольку сила реакции опоры приложена в этой точке, ее момент равен нулю и при отклонении от положения равновесия на модель действует только момент силы тяжести относительно т. A (точнее, оси, проходящей через т. A перпендикулярно плоскости рисунка). В зависимости от геометрии системы (а именно, проходит ли проведенная из т. C вертикаль слева или справа от т. A) он либо возвращает систему в первоначальное положение, либо уводит еще дальше от него. Очевидно, что колебания возможны только в первом случае.

Поскольку при движении модели ось, проходящая через т. A перпендикулярно плоскости рисунка, движется поступательно и остается

параллельной оси, проходящей через центр масс, то уравнение движения относительно нее можно записывать в обычном виде: $M = I \frac{d^2\varphi}{dt^2}$.

Пусть D — точка пересечения проведенной из т. А вертикали с радиусом OB. Тогда момент силы тяжести относительно рассматриваемой оси $M = mg \cdot CD \cdot \sin \angle ADO = mg \cdot CD \cdot \sin(\varphi + \varphi')$.

В силу отсутствия проскальзывания при движении модели длина дуги EA равна длине дуги BA, т. е. $R\varphi = r\varphi'$. С учетом этого соотношения, малости угла φ и теоремы синусов для треугольника ODA $\frac{OD}{\sin \varphi} = \frac{OA}{\sin(\varphi + \varphi')}$ можно найти $OD = \frac{r^2}{r + R}$. Тогда выражение для момента силы тяжести примет вид $M = mg\varphi(h(1 + \frac{R}{r}) - r)$.

Момент инерции модели относительно той же оси определится как $I = mCA^2 = m(r^2 + h^2 - 2rh \cos \varphi') \approx m(r - h)^2$, (здесь учтено, что косинус малого угла равен 1 с точностью до второго порядка малости), и окончательно уравнение движения модели примет вид:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{h(1 + \frac{R}{r}) - r}{(r - h)^2} g\varphi = 0.$$

Несложно видеть, что полученное уравнение описывает гармонические колебания с периодом $T = 2\pi \sqrt{\frac{(r - h)^2}{h(r + R) - r^2} \frac{r}{g}}$.

Обратим внимание, что знаменатель полученной формулы обращается в ноль при $h = r^2/(r + R)$ и становится меньше нуля при меньших значениях h . Несложно сообразить, что такая ситуация соответствует потере рассматриваемым положением равновесия устойчивости.

Ответ: $\sqrt{\frac{(r - h)^2}{h(r + R) - r^2} \frac{r}{g}}$.

5.13. При теновом методе светлые пятна наблюдаются на месте разрежений, а темные — на месте сгущений, поэтому расстояние между двумя соседними белыми полосами (равное 10 см) соответствует длине волны.

Кроме того, видно, что за время $\Delta t = 0,001$ с полосы смещаются на нечетное число полуволн. Тогда $v = l/\Delta t$, где $l = (n + 1) \cdot \lambda/2$, n — неотрицательное целое число. Подставляя числовые значения, получаем $v = (n + 1) \cdot 50$ м/с. Значению скорости звука в воздухе при нормальных условиях наиболее близко 350 м/с.

Ответ: 350 м/с.

Учебное издание

*Кузнецов Александр Петрович
Кузнецов Сергей Петрович
Мельников Леонид Аркадьевич
Савин Алексей Владимирович
Шевцов Владимир Николаевич*

ЗАДАЧИ ФИЗИЧЕСКИХ ОЛИМПИАД

Авторская редакция

Дизайнер А. А. Гурьянова

Подписано в печать 26.11.2015. Формат 60×84 ¹/₁₆.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 9,77. Уч.-изд. л. 8,23.
Гарнитура Таймс. Бумага офсетная № 1. Заказ № 15-101.

АНО «Ижевский институт компьютерных исследований»
426034, г. Ижевск, ул. Кооперативная, д. 5
E-mail: mail@gcd.ru Тел./факс: +7 (3412) 50-02-95
