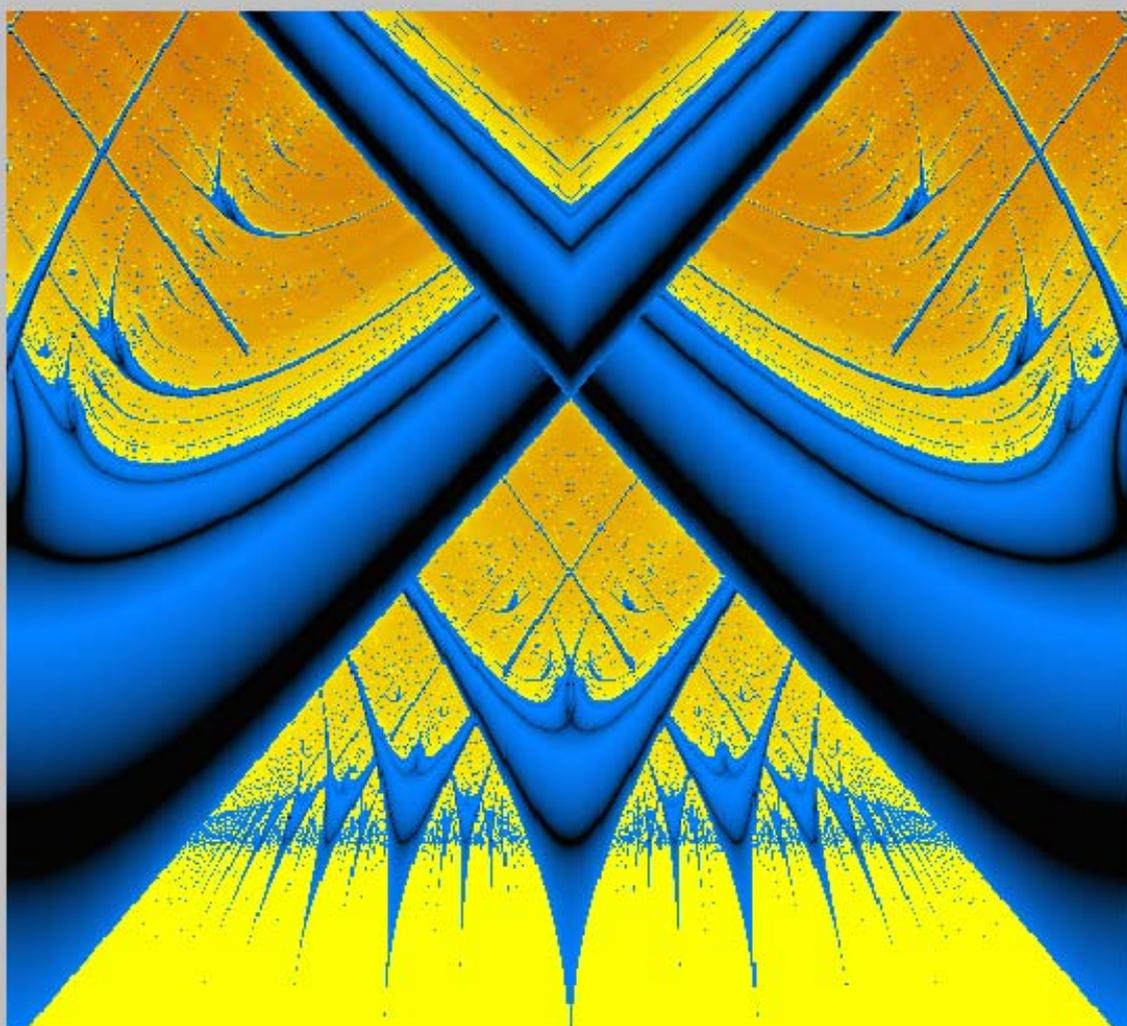


А.П.Кузнецов Ю.П.Емельянова
И.Р.Сатаев Л.В.Тюрюкина

СИНХРОНИЗАЦИЯ В ЗАДАЧАХ



**А.П.Кузнецов, Ю.П.Емельянова,
И.Р.Сатаев, Л.В.Тюрюкина**

СИНХРОНИЗАЦИЯ В ЗАДАЧАХ

ООО Издательский центр «Наука»

Саратов

2010

УДК 517.9

Кузнецов А.П., Емельянова Ю.П., Сатаев И.Р., Тюрюкина Л.В.

СИНХРОНИЗАЦИЯ В ЗАДАЧАХ – Саратов: ООО Издательский центр «Наука», 2010, 256 с.

Учебно-научное издание

Теория синхронизации излагается в форме задач. Такая форма представления материала нацелена на активное и творческое знакомство с предметом, а также на стимулирование самостоятельных исследований. Излагаются как традиционные аспекты теории синхронизации регулярных колебаний, так и определенные методически интересные моменты. Представлены также такие вопросы, как синхронизация неидентичных автоколебательных систем и разнотипных осцилляторов, автономные квазипериодические колебания, а также комплекс вопросов по синхронизации многочастотных и квазипериодических движений. Изложение ориентировано на студентов, но содержит и задачи «аспирантского уровня». Решение задач предполагает создание пакета компьютерных программ по построению карт динамических режимов, карт ляпуновских показателей и др., которые могут использоваться в исследовательской работе, как полезное дополнение к традиционным методам.

Использованы результаты научных исследований по проектам РФФИ 09-02-00426 и 09-02-00707 и программе «Развитие научного потенциала высшей школы» № 2.1.1/1738.

ISBN 978-5-9999-0340-2

Рекомендуют к печати:

базовая кафедра динамических систем Саратовского государственного университета

д.ф.-м.н., профессор Рыскин Н.М,

д.ф.-м.н., профессор Кузнецов С.П.

Оригинал-макет подготовлен авторами

© А.П. Кузнецов, Ю.П. Емельянова, И.Р. Сатаев, Л.В. Тюрюкина 2010

ISBN 978-5-9999-0340-2

...Слово «синхронный» часто встречается как в обыденной, так и научной речи.

***А. Пиковский, М. Розенблюм, Ю. Куртц
«Синхронизация. Фундаментальное
нелинейное явление»***

...Самостоятельное решение такого рода задач дает студенту тренировку в научном мышлении.

П.Л. Капица. «Физические задачи»

ПРЕДИСЛОВИЕ

Синхронизация – явление, широко распространенное в науке, природе и технике. Примерами синхронного поведения являются синхронные суточные ритмы живых организмов, синхронные ритмы взмахов крыла летящей утки и частоты ее дыхания, пение сверчков и т.д. Синхронные ритмы можно встретить в физике, электронике, химии, биологии и других областях науки. Несмотря на видимую простоту, явление синхронизации не столь тривиально для описания и понимания. Синхронизация – это довольно тонкое явление, связанное с возможностью приписать системам фазы и возможностью подстройки этих фаз в процессе взаимодействия.

Синхронизации посвящена обширная как научная, так и учебная литература. Изучая новую область, бывает полезно не просто познакомиться с литературой, пролистывая учебники, а активным и творческим образом проработать соответствующий материал. Неоценимым инструментом такого активного усвоения служат задачи. Решая задачи, студент (аспирант) получает совершенно иной уровень понимания материала, а главное, становится способным к самостоятельным исследованиям. Наконец, решать задачи интереснее, чем просто читать книжку. Поэтому мы и сочли важным подготовить книгу, которая предполагала бы знакомство с явлением синхронизации в форме задач и была бы нацелена на перспективу исследовательской работы.

В настоящую книгу входят материалы следующего характера. Во-первых, это вопросы, традиционно излагающиеся в учебниках по теории колебаний и нелинейной динамике и посвященные синхронизации, которые сформулированы в виде ряда отдельных задач, которые можно решать поэтапно. Далее, это задачи, связанные с некоторыми моментами теории синхронизации, которые допускают определенные методические дополнения,

причем форма задач наиболее оптимальна в этом плане. Наконец, это задачи аспирантского уровня. При их подготовке использовался опыт работы с аспирантами базовой кафедры динамических систем Факультета нелинейных процессов Саратовского государственного университета. Стоит отметить, что задачи аспирантского уровня очень редко появляются в литературе не только по теории колебаний или нелинейной динамике, но и по физике вообще. Заметим, что ряд представленных задач носит характер оригинальных исследований, причем некоторые публикуются здесь впервые.

При работе с книгой можно рекомендовать сначала попробовать самостоятельно решить задачу, а потом, если что-то не получается, обратиться к решению, причем воспроизвести представленный в решении материал, будь то аналитические выкладки или компьютерные иллюстрации. Использование компьютера важно и существенно, так как позволит самостоятельно, своими руками написать пакет программ, который можно использовать в дальнейшей работе. Среди такого компьютерного инструментария отметим построение карт динамических режимов, карт ляпуновских показателей, карт сигнатуры спектра таких показателей, карт резонансных двухчастотных торов в многочастотных режимах и т.д. Эти программы могут использоваться в исследовательской работе как полезное дополнение к таким традиционным методам, как, например, численный бифуркационный анализ. С другой стороны, предлагаемые задачи опираются на большой объем аналитических подходов и методов. При этом используются разные «уровни» анализа, включая и метод оценок тех или иных параметров. Существенным и универсальным инструментом является метод медленно меняющихся амплитуд, причем нас он интересует в физическом аспекте, как метод разделения быстрых и медленных движений. При этом вопросы его эффективности решаются на уровне сопоставления с результатами компьютерного исследования.

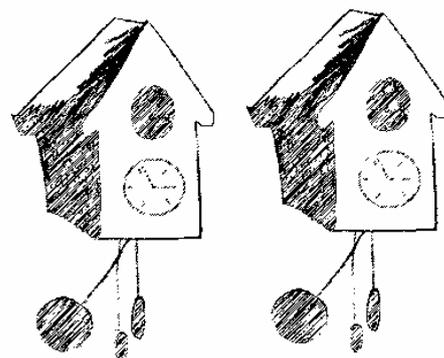
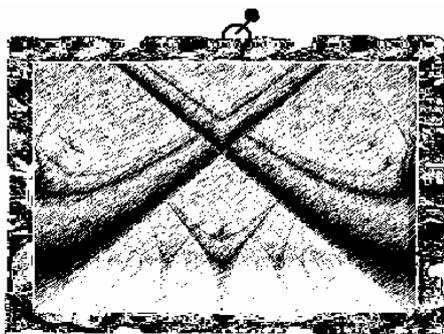
Отметим, что необходимы определенные знания по теории динамических систем и бифуркаций, хотя, по возможности, материал такого характера излагается по ходу решения некоторых задач. Целесообразно познакомиться с методом сечений Пуанкаре и методами расчета ляпуновских показателей.

Книга организована следующим образом. В первой части рассматриваются различные автоколебательные осцилляторы, причем одна из целей – познакомить читателя с бифуркациями, которые играют важную роль в картине синхронизации. Вторая часть посвящена различным аспектам вынужденной синхронизации. Третья – взаимной синхронизации. При этом последовательно обсуждаются случаи диссипативной и реактивной связи, а также эффекты,

которые возникают в случаях неидентичных по управляющим параметрам подсистем и разнотипных осцилляторов. В четвертой части рассматривается комплекс вопросов синхронизации многочастотных и квазипериодических движений¹. Интересным также может быть материал, касающийся автономных квазипериодических колебаний.

Авторы хотели бы отметить, что настоящее издание стало возможным не только благодаря усилиям коллектива кафедры динамических систем и ее аспирантов, но и возможности общения с представителями Саратовской научной школы в области нелинейной динамики, коллективов, возглавляемых член-корр. РАН Д.И. Трубецковым, проф. В.С. Анищенко, проф. Б.П. Безручко. Авторы благодарны проф. С.П. Кузнецову, поскольку многие результаты были получены в возглавляемой им лаборатории теоретической нелинейной динамики СФИРЭ им. В.А. Котельникова РАН. Мы благодарны также представителям Нижегородской школы по нелинейной динамике за возможность представлять и обсуждать различные вопросы, в первую очередь, на традиционных весенних школах. Мы благодарны проф. В.Д.Шалфееву за многолетнее внимание и поддержку. Особую благодарность авторы хотели бы выразить проф. А. Пиковскому за возможность визитов в университет Потсдама и возможность обсуждать различные аспекты теории синхронизации.

Авторы



¹ Как ни парадоксально, соответствующая проблематика менее проработана, чем, например, синхронизация хаотических колебаний, на что было обращено внимание в недавней серии работ В.С. Анищенко с соавторами.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Часть I. Автоколебания и бифуркации	
1.1. Осциллятор Ван-дер-Поля и укороченное уравнение	12
1.2. Нормировка в уравнении Ван-дер-Поля	16
1.3. Осциллятор Ван-дер-Поля-Дуффинга	16
1.4. Осциллятор Богданова	18
1.5. Автоколебательный осциллятор общего вида	21
1.6. Осциллятор с катастрофой сборки	23
1.7. Осциллятор с катастрофой сборки и система Фитц Хью-Нагумо	28
1.8. Осциллятор с катастрофой сборки и точки Арнольда-Тakensа	29
1.9. Осциллятор с несимметричной диссипативной функцией	34
1.10. Брюсселятор	35
Часть II. Вынужденная синхронизация	
2.1. Синхронизация и квазипериодические режимы в неавтономном осцилляторе Ван-дер-Поля	40
2.2. Аттракторы неавтономных систем	41
2.3. Нормировка в неавтономном уравнении Ван-дер-Поля	44
2.4. Укороченное уравнение для осциллятора Ван-дер-Поля с гармоническим внешним воздействием	45
2.5. Укороченное уравнение для амплитуды и фазы. Координата и скорость осциллятора	47
2.6. Уравнение Адлера	48
2.7. Уравнение Адлера и потенциал. Язык Арнольда	49
2.8. Бифуркации в уравнении Адлера	51
2.9. Фазовые соотношения синхронного режима	52
2.10. Решение уравнения Адлера в режиме захвата фазы	53
2.11. Решение уравнения Адлера в режиме дрейфа фазы	55
2.12. Динамика фазы в режиме квазипериодических колебаний	56
2.13. Сценарий разрушения синхронного режима в области малых амплитуд	58
2.14. Бифуркации в укороченных уравнениях	58
2.15. Устройство плоскости параметров укороченной системы уравнений	62
2.16. Сценарий рождения квазипериодического режима в области больших амплитуд	66
2.17. Резонанс на гармонике типа 3:1	69
2.18. Резонанс на субгармонике типа 1:3	71
2.19. Общая картина резонансов на гармониках и субгармониках	75

2.20. Бифуркации в неавтономной системе Ван-дер-Поля	78
2.21. Карты динамических режимов неавтономной системы Ван-дер-Поля	83
2.22. Неавтономное уравнение Ван-дер-Поля с несимметричной диссипативной функцией	86
2.23. Субгармонический резонанс 1:2	86
2.24. Карта режимов неавтономного обобщенного осциллятора Ван-дер-Поля.	89
2.25. Ряд Фарея	90
2.26. Резонанс 1:2 для обобщенного неавтономного осциллятора Ван-дер-Поля-Дуффинга	92
2.27. Качественная картина основных резонансов	95
2.28. Укороченное уравнение для неавтономного осциллятора Ван-дер-Поля-Дуффинга	97
2.29. Карта динамических режимов неавтономного осциллятора Ван-дер-Поля-Дуффинга	102
2.30. Синхронизация брюсселятора	103
2.31. Синхронизация в брюсселяторе с изменяющимися параметрами	104
2.32. Синхронизация осциллятора Богданова	105

Часть III. Взаимная синхронизация

Диссипативно связанные осцилляторы

3.1. Укороченные уравнения диссипативно связанных автоколебательных осцилляторов	108
3.2. Уравнения для амплитуд и фаз осцилляторов	109
3.3. Динамика диссипативно связанных осцилляторов вблизи устойчивых невозмущенных орбит	110
3.4. Уравнение Адлера для связанных осцилляторов	111
3.5. Частота захвата связанных осцилляторов	112
3.6. Эффект «гибели колебаний»	113
3.7. Симметричные решения укороченных уравнений	116
3.8. Несимметричные решения укороченных уравнений	119
3.9. Устройство плоскости параметров частотная расстройка – величина связи	120
3.10. Укороченные уравнения и нормировка частотных расстроек	121
3.11. Карта динамических режимов, система связанных осцилляторов Ван-дер-Поля (3.1)	122
3.12. Карта динамических режимов, система связанных осцилляторов Ван-дер-Поля (3.49)	123
3.13. Эффект исчезновения областей «гибели колебаний»	125
3.14. Активная связь. Синфазная и противофазная синхронизация	125

3.15. Фазовое уравнение для связанных осцилляторов Ван-дер-Поля-Дуффинга	127
3.16. Карта режимов связанных осцилляторов Ван-дер-Поля-Дуффинга	128
3.17. Числа вращения	129
3.18. Карта ляпуновских показателей связанных осцилляторов Ван-дер-Поля-Дуффинга	130
3.19. Тор-аттракторы и их разрушение	131
Динамика неидентичных осцилляторов	
3.20. Укороченные уравнения для неидентичных связанных осцилляторов	132
3.21. Область синхронизации в случае неидентичных связанных осцилляторов	134
3.22. Частота захвата неидентичных осцилляторов	135
3.23. Гашение колебаний неидентичных осцилляторов. Эффект широкополосной синхронизации	136
3.24. Карта динамических режимов неидентичных осцилляторов	138
3.25. Осцилляторы, неидентичные по параметрам нелинейной диссипации	140
3.26. Эффект смены доминирующего осциллятора	142
3.27. Карты динамических режимов для осцилляторов, неидентичных по управляющим параметрам и величине нелинейной диссипации	144
3.28. Бифуркационный анализ системы неидентичных связанных осцилляторов Ван-дер-Поля	145
Реактивно связанные осцилляторы	
3.29. Укороченные уравнения реактивно связанных автоколебательных осцилляторов	147
3.30. Динамика реактивно связанных осцилляторов вблизи устойчивых невозмущенных орбит	148
3.31. Фазовое уравнение реактивно связанных осцилляторов	149
3.32. Область синхронизации и фазовая бистабильность реактивно связанных осцилляторов	149
3.33. Частоты взаимного захвата реактивно связанных осцилляторов	151
3.34. Карта динамических режимов осцилляторов с реактивной связью	153
3.35. Фазовое уравнение для связанных осцилляторов с комбинированной связью	155
3.36. Область синхронизации для связанных осцилляторов с комбинированной связью	156
3.37. Осцилляторы Ван-дер-Поля-Дуффинга с реактивной связью. Фазовое приближение	158

3.38. Язык синхронизации в системе с реактивной связью и неизохронностью	160
3.39. Осцилляторы Ван-дер-Поля-Дуффинга с реактивной связью. Карта динамических режимов	161
3.40. Обобщенное уравнение Адлера	162
3.41. Симметрии обобщенного уравнения Адлера	163
3.42. Влияние неизохронности на неидентичную систему с реактивной связью	165

Связанные автоколебательные осцилляторы разной природы

3.43. Связанные автоколебательные осцилляторы Ван-дер-Поля и брюсселятор. Характер связи	167
3.44. Карта режимов связанных брюсселятора и осциллятора Ван-дер-Поля	168
3.45. Связанные автоколебательные осцилляторы с существенно разными временными масштабами	170

Часть IV. Синхронизация многочастотных колебаний

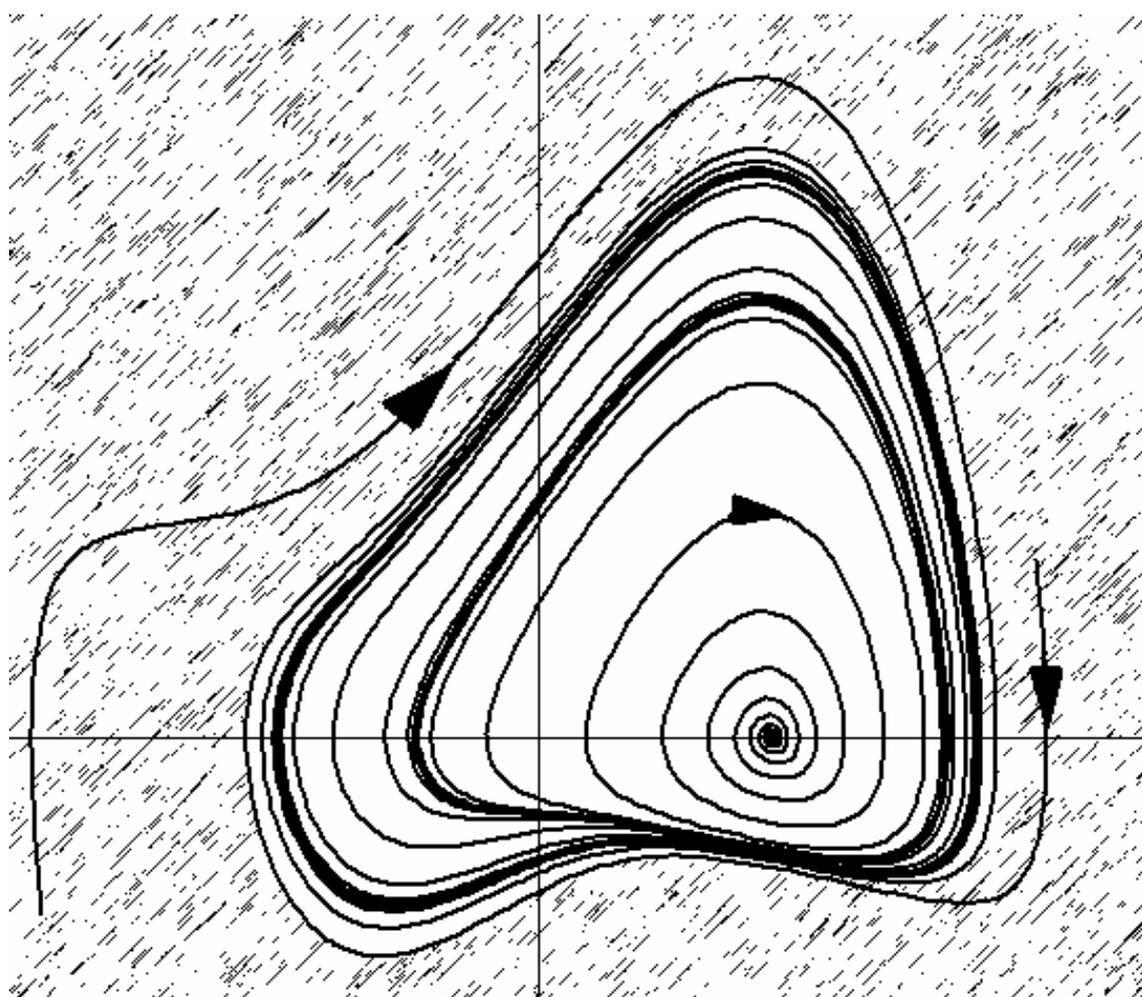
Взаимная синхронизация многочастотных колебаний

4.1. Укороченные и фазовые уравнения трех диссипативно связанных автоколебательных осцилляторов	174
4.2. Предельные переходы в фазовых уравнениях трех связанных осцилляторов	176
4.3. Частота захвата трех автоколебательных осцилляторов	177
4.4. Типы колебаний трех связанных фазовых осцилляторов	178
4.5. Классификация квазипериодических режимов	180
4.6. Условия полного захвата трех фазовых осцилляторов	182
4.7. Резонансные условия в цепочке трех фазовых осцилляторов	186
4.8. Устройство плоскости партеров частотная расстройка – величина связи трех осцилляторов. Карты ляпуновских показателей	186
4.9. Карта торов системы трех связанных фазовых осцилляторов	189
4.10. Бифуркации, ответственные за возникновение квазипериодических колебаний	191
4.11. Фазовые уравнения четырех диссипативно связанных осцилляторов	192
4.12. Режим полной синхронизации четырех связанных осцилляторов	193
4.13. Частота захвата четырех осцилляторов	195
4.14. Резонансные условия в цепочке четырех фазовых осцилляторов	195
4.15. Карта ляпуновских показателей четырех связанных осцилляторов	196
4.16. Карта торов для четырех связанных осцилляторов	198
4.17. Бифуркационная ситуация коразмерности три в системе четырех связанных осцилляторов	200

4.18. Обобщение на случай большего числа осцилляторов	203
Вынужденная синхронизация многочастотных колебаний	
4.19. Фазовые уравнения возбуждаемой системы двух диссипативно связанных автоколебательных осцилляторов	205
4.20. Полная синхронизация двух осцилляторов внешней силой	207
4.21. Два возбуждаемых внешней силой осцилляторов. Режим захвата автономных осцилляторов	209
4.22. Точка перехода от режима захвата к режиму биений в автономной системе	213
4.23. Режим биений автономных осцилляторов	213
4.24. Карта торов двух возбуждаемых осцилляторов внешней силой	215
4.25. Плоскость частота – амплитуда воздействия исходной системы двух возбуждаемых осцилляторов Ван-дер-Поля	218
4.26. Фазовые уравнения возбуждаемой системы трех диссипативно связанных осцилляторов Ван-дер-Поля	223
4.27. Режим полной синхронизации трех осцилляторов внешней силой	224
4.28. Карты ляпуновских показателей трех возбуждаемых фазовых осцилляторов	226
4.29. Карты торов трех возбуждаемых фазовых осцилляторов	229
4.30. Точки коразмерности два в системе трех возбуждаемых осцилляторов	231
4.31. Возбуждение двух автоколебательных осцилляторов с реактивной связью	232
4.32. Условия седло-узловых бифуркаций неподвижных точек для возбуждаемых реактивно связанных осцилляторов	234
4.33. Устройство области полной синхронизации возбуждаемых реактивно связанных осцилляторов в режиме биений	236
4.34. Карта ляпуновских показателей возбуждаемых реактивно связанных осцилляторов в режиме биений	238
4.35. Устройство области полной синхронизации возбуждаемых реактивно связанных осцилляторов в режиме захвата	239
Автономная квазипериодическая динамика	
4.36. Автономный генератор квазипериодических колебаний	243
4.37. Внутренняя синхронизация в автогенераторе квазипериодических колебаний	246
Библиографические комментарии	250
Литература	252

Часть I

АВТОКОЛЕБАНИЯ И БИФУРКАЦИИ



1.1. Осциллятор Ван-дер-Поля и укороченное уравнение. Для автоколебательного осциллятора Ван-дер-Поля

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = 0 \quad (1.1)$$

с помощью метода медленно меняющихся амплитуд получите укороченные уравнения для амплитуды и фазы. Решите эти уравнения и обсудите характер зависимости решений от времени. Укажите возникающее стационарное состояние системы. Постройте фазовые портреты для разных значений управляющего параметра λ и сравните с результатами анализа укороченных уравнений.

Решение. Пусть система (1.1) находится недалеко от порога возникновения автоколебаний, так что параметр λ мал по сравнению с единицей. В этом случае колебания являются квазигармоническими, т.е. на быстрые осцилляции с собственной частотой осциллятора $\omega_0 = 1$ наложены медленные изменения амплитуды. Тогда для приближенного решения уравнения (1.1) можно воспользоваться методом медленно меняющихся амплитуд. С этой целью будем искать решение в виде

$$x(t) = \frac{1}{2}a(t)e^{it} + \text{к.с.} \quad (1.2)$$

Здесь $a(t)$ – медленно меняющаяся по сравнению с e^{it} комплексная амплитуда. Для скорости изменения переменной x , дифференцируя (1.2), легко находим:

$$\dot{x} = \frac{1}{2}(\dot{a}e^{it} + iae^{it} + \text{к.с.}). \quad (1.3)$$

Поскольку вместо одной переменной x мы ввели фактически две (a – комплексное), то можно наложить одно дополнительное условие. Это удобно сделать следующим образом:

$$\dot{a}e^{it} + \text{к.с.} = 0. \quad (1.4)$$

Тогда для скорости изменения переменной из (1.3) получаем простое выражение

$$\dot{x} = \frac{1}{2}(iae^{it} + \text{к.с.}). \quad (1.5)$$

Вычислим теперь вторую производную:

$$\ddot{x} = \frac{1}{2}(i\dot{a}e^{it} - ae^{it} + \text{к.с.}). \quad (1.6)$$

С учетом дополнительного условия (1.4) можно получить, что

$$\frac{1}{2}(i\dot{a}e^{it} + \text{к.с.}) = \frac{1}{2}(i\dot{a}e^{it} - i\dot{a}^*e^{-it}) = i\dot{a}e^{it}. \quad (1.7)$$

Тогда имеем

$$\ddot{x} = i\dot{a}e^{i\omega t} - x. \quad (1.8)$$

Подставим теперь все полученные выражения для x , \dot{x} и \ddot{x} в исходное соотношение (1.1). Следуя логике метода медленно меняющихся амплитуд, сохраним только члены, содержащие экспоненциальный множитель вида e^{it} . Остальные на этом фоне являются быстро осциллирующими и исчезают при усреднении за период воздействия:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + x &= i\dot{a}e^{it}, \\ \dot{x} &= \frac{i}{2}ae^{it} + \dots, \\ x^2\dot{x} &= \frac{1}{8}[a^2e^{2it} + 2|a|^2 + (a^*)^2e^{-2it}](iae^{it} - i\omega a^*e^{-it}) = \frac{i}{8}|a|^2ae^{it} + \dots \end{aligned} \quad (1.9)$$

Подставляя соотношения (1.9) в (1.1), получим:

$$\dot{a} = \frac{\lambda}{2}a - \frac{1}{8}|a|^2a. \quad (1.10)$$

Это и есть искомое укороченное уравнение для комплексной амплитуды.

Введем теперь действительные амплитуду $R(t)$ и фазу осциллятора $\varphi(t)$ в соответствии с соотношением

$$a(t) = R(t)e^{i\varphi(t)}. \quad (1.11)$$

Подставим (1.11) в (1.10), умножим на $e^{-i\varphi}$ и отделим в полученном выражении действительную и мнимую части. Тогда получим уравнения для амплитуды и фазы:

$$\begin{aligned} \dot{R} &= \frac{\lambda}{2}R - \frac{1}{8}R^3, \\ \dot{\varphi} &= 0. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Можно видеть, что фаза не меняется в процессе колебаний, и $\varphi(t) = \varphi(0)$. Таким образом, рассматриваемая система обладает свойством *изохронности*: угловая скорость вращения изображающей точки по своей орбите не зависит от радиуса этой орбиты, т.е. от амплитуды колебаний осциллятора, и, соответственно, от величины управляющего параметра λ .

Амплитудное уравнение (1.12) может быть решено аналитически. Действительно, разделяя переменные, получаем:

$$\int \frac{dR}{\frac{\lambda}{2}R - \frac{1}{8}R^3} = t + C. \quad (1.13)$$

Здесь C – постоянная интегрирования, которая определяется начальным значением амплитуды $R(0)$. Интеграл легко вычисляется, так что получаем:

$$R(t) = \frac{R(0)e^{\lambda t/2}}{\sqrt{1 + R(0)^2 \frac{e^{\lambda t} - 1}{4\lambda}}}. \quad (1.14)$$

Если осциллятор диссипативен и $\lambda < 0$, то (1.14) дает затухающее решение, так что $R(t) \rightarrow 0$. При $\lambda > 0$ (отрицательное трение в осцилляторе) с течением времени экспоненциальные множители в (1.14) нарастают, так что решение асимптотически стремится к стационарному значению

$$R_0 = 2\sqrt{\lambda}. \quad (1.15)$$

Оно не зависит от начальной амплитуды $R(0)$. Заметим, что решение (1.15) можно получить и непосредственно из амплитудного уравнения (1.12), полагая $\dot{R} = 0$. В соответствии с (1.14), характерный временной масштаб изменения амплитуды оценивается как $t \approx \frac{1}{\lambda}$, так что при малых λ этот масштаб очень большой. Таким образом, условие медленности изменения амплитуды, действительно, выполняется.

Можно дать оценку значения управляющего параметра, для которого используется приближение эффективно. Для этого за время порядка собственного периода осциллятора $T=2\pi$ амплитуда не должна сильно измениться. В соответствии с (1.14), для этого должно быть $\frac{\lambda T}{2} \leq 1$. Отсюда находим:

$$\lambda \leq \frac{2}{T} = \frac{1}{\pi} \approx 0.32. \quad (1.16)$$

Выпишем теперь с использованием (1.2) и (1.3) выражение для координаты и скорости осциллятора:

$$x(t) = R(t) \cos[t + \varphi(0)], \quad \dot{x}(t) = -R(t) \sin[t + \varphi(0)]. \quad (1.17)$$

Полученному решению на фазовой плоскости (x, \dot{x}) отвечает притягивающий объект – предельный цикл, имеющий форму окружности радиуса $R_0 = 2\sqrt{\lambda}$. Он рождается при значении параметра $\lambda = 0$, которое отвечает, таким образом, порогу *бифуркации Андронова-Хопфа*. Размер предельного цикла растет при увеличении параметра λ как корень квадратный из надкритичности.

Фазовые портреты системы (1.1) и вид реализаций $x(t)$ при увеличении параметра λ показан на рис. 1.1. Можно видеть, что при $\lambda = 0.1$ форма предельного цикла, действительно, близка к окружности. При этом оценка по формуле (1.15) дает $R_0 \approx 0.63$, что очень хорошо согласуется с рис. 1.1, а.

Можно видеть также медленный характер установления стационарных колебаний и «локально» синусоидальный характер последних.

С ростом λ размер предельного цикла растет. При $\lambda \approx 1$ форма предельного цикла искажается (рис. 1.1, б). В то же время оценка $R_0 = 2\sqrt{\lambda}$ все еще позволяет хорошо определять амплитуду колебаний переменной и скорости осциллятора. Из сравнения рис. 1.1, б и рис. 1.1, а хорошо видно, что существенно возрастает скорость изменения амплитуды колебаний, частота которых, однако, практически не изменилась.

При больших λ колебания становятся релаксационными, и предельный цикл искажается очень сильно. (Сравните масштабы по осям координат на рис. 1.1, в.) При этом система теряет свойство неизохронности: период колебаний растет, что хорошо видно из сравнения реализаций на рис. 1.1, б и рис. 1.1, в.

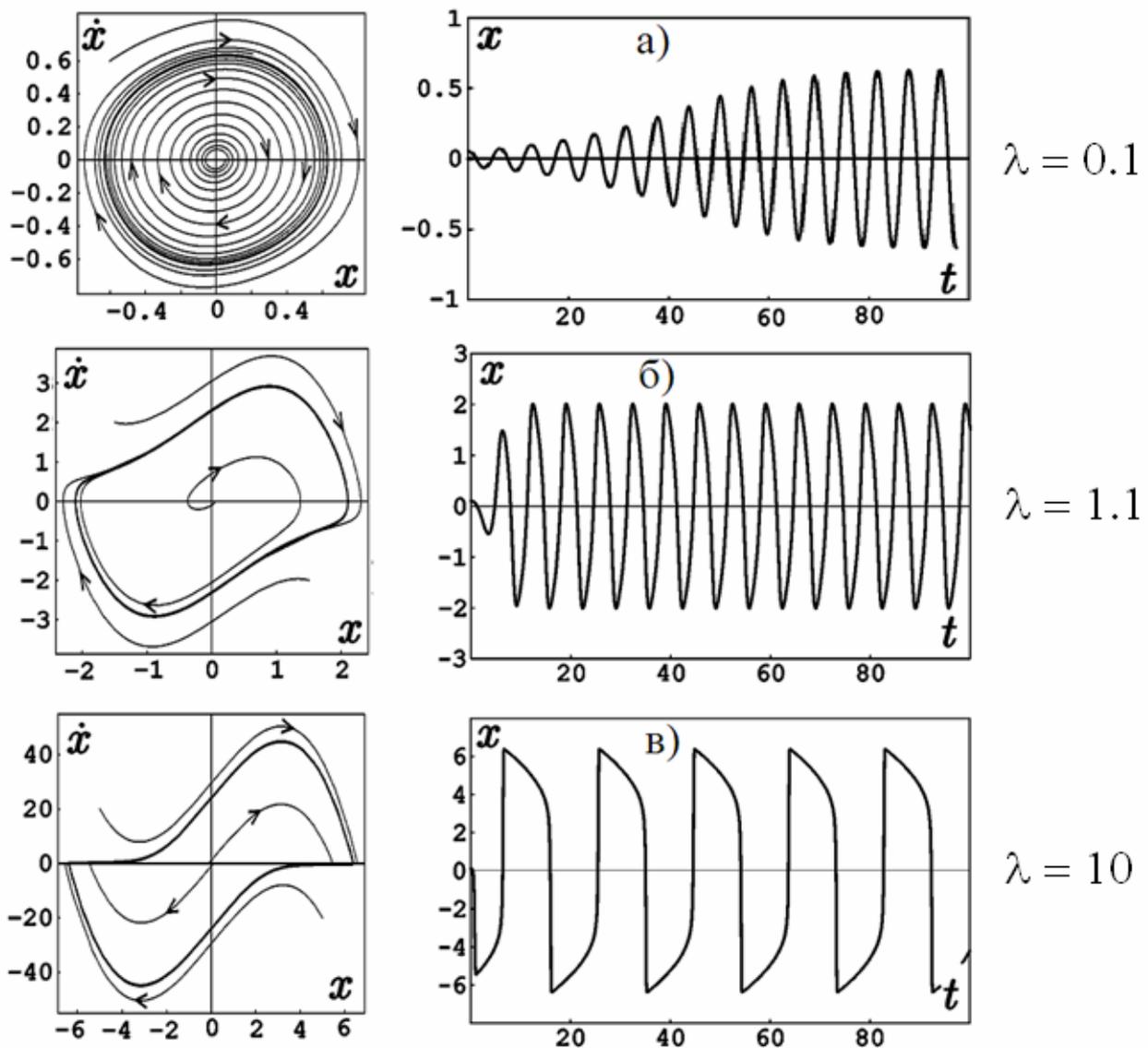


Рис. 1.1. Фазовые портреты (слева) и временные реализации колебаний (справа) осциллятора Ван-дер-Поля; $\lambda = 0.1$ (а), $\lambda = 1.1$ (б); $\lambda = 10$ (в).

1.2. Нормировка в уравнении Ван-дер-Поля. Обсудите, чем отличаются уравнения Ван-дер-Поля в форме (1.1) и в виде

$$\ddot{x} - \lambda(1 - x^2)\dot{x} + x = 0. \quad (1.18)$$

Решение. Формально система (1.18) переходит в (1.1), если выполнить замену переменной $x \rightarrow \frac{x}{\sqrt{\lambda}}$, причем значения параметра λ пересчитывать не надо. С другой стороны, уравнение (1.18) приводит к укороченному уравнению для амплитуды

$$\dot{R} = \frac{\lambda}{2} \left(R - \frac{1}{4} R^3 \right). \quad (1.19)$$

Ему отвечает стационарное решение в виде предельного цикла радиуса $R = 2$. Таким образом, в квазигармоническом приближении размер предельного цикла не зависит от параметра λ . Это означает, что в случае (1.18), фактически, отсутствует бифуркация Андронова-Хопфа рождения предельного цикла из теряющей устойчивость неподвижной точки. Поэтому с физической точки зрения система (1.1) предпочтительнее, хотя бывают ситуации, когда удобно использовать систему (1.18).

1.3. Осциллятор Ван-дер-Поля-Дуффинга. Для осциллятора Ван-дер-Поля-Дуффинга

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \beta x^3 = 0 \quad (1.20)$$

с помощью метода медленно меняющихся амплитуд получите укороченные уравнения для амплитуды и фазы. Получите и обсудите их решения. Укажите, к каким отличиям по сравнению с осциллятором Ван-дер-Поля приводит введение дополнительной нелинейности по типу осциллятора Дуффинга.

Решение. Действуем аналогично задаче 1.1. В рассматриваемом случае соотношения (1.9) следует дополнить выражением, связанным с введением дополнительной нелинейности βx^3 :

$$x^3 = \frac{a^3}{8} e^{3it} + \frac{3|a|^2 a}{8} e^{it} + \frac{3|a|^2 a^*}{8} e^{-it} + \frac{(a^*)^3}{8} e^{-3it} = \frac{3|a|^2 a}{8} e^{it} + \dots \quad (1.21)$$

Действуя в остальном аналогично задаче 1.1, получаем уравнение для комплексной амплитуды

$$\dot{a} = \frac{\lambda}{2} a - \frac{1}{8} |a|^2 a + \frac{3}{8} i\beta |a|^2 a. \quad (1.22)$$

Для действительных амплитуды и фазы из (1.22) получаем:

$$\begin{aligned}\dot{R} &= \frac{\lambda}{2}R - \frac{1}{8}R^3, \\ \dot{\phi} &= \frac{3}{8}\beta R^2.\end{aligned}\tag{1.23}$$

Таким образом, динамика амплитуды не зависит от динамики фазы и описывается тем же самым уравнением, что и в случае осциллятора Ван-дер-Поля. Поэтому в системе также имеет место бифуркация Андронова-Хопфа рождения предельного цикла, размер которого $R_0 = 2\sqrt{\lambda}$.

С другой стороны, теперь фаза не постоянна и ее динамика описывается вторым уравнением (1.23). В этом случае система оказывается *неизохронной*. Действительно, в соответствии с (1.23), скорость изменения фазы зависит от радиуса орбиты осциллятора, и, соответственно, от параметра λ .

Используя решение для амплитуды (1.14), можно проинтегрировать уравнение для фазы, что приводит к следующему закону ее изменения во времени:

$$\phi(t) = \phi(0) + \frac{3}{2}\beta \ln \left| \frac{R(0)^2}{4\lambda} (e^{\lambda t} - 1) + 1 \right|.\tag{1.24}$$

После выхода амплитуды на стационарный уровень, когда $e^{\lambda t} \gg 1$, фаза меняется по асимптотическому закону

$$\phi(t) \approx \phi(0) + \frac{3}{2}\beta \ln \left| \frac{R(0)^2}{4\lambda} e^{\lambda t} \right| = \frac{3}{2}\beta \lambda t + \dots\tag{1.25}$$

В свою очередь, в соответствии с (1.2) координата осциллятора изменяется по закону

$$x(t) = R(t) \cos \left(t + \frac{3}{2}\beta \lambda t \right).\tag{1.26}$$

Таким образом, частота колебаний увеличивается (при $\beta > 0$, при $\beta < 0$ уменьшается) на фактор $\frac{3}{2}\beta\lambda$:

$$\omega = 1 + \frac{3}{2}\beta\lambda.\tag{1.27}$$

Следовательно, основное изменение в динамике системы при введении дополнительной нелинейности по типу осциллятора Дуффинга – это появление неизохронности малых колебаний, частота которых теперь зависит от управляющего параметра. Эта зависимость характеризуется также параметром дополнительной нелинейности β , который, таким образом, можно называть параметром фазовой нелинейности или *параметром неизохронности*.

Следует сказать, что в свете представленного обсуждения система Ван-дер-Поля является в определенном смысле вырожденной: случаю *общего положения* более отвечает осциллятор Ван-дер-Поля-Дуффинга. При этом соотношения (1.23) представляют собой *нормальную форму*² для бифуркации Андронова-Хопфа.

1.4. Осциллятор Богданова. Для осциллятора Богданова

$$\ddot{x} - (\mu - x)\dot{x} + a - x^2 = 0, \quad (1.28)$$

найдите неподвижные точки и получите условия бифуркаций седло-узел, Андронова-Хопфа и Богданова-Такенса. Укажите линии и точки бифуркаций на плоскости параметров и характерные фазовые портреты. Обсудите возможность нелокальной бифуркации.

Решение. Осциллятор Богданова (1.28) – это каноническая модель, демонстрирующая *бифуркацию Богданова-Такенса*. К идее этой бифуркации можно придти с помощью следующего рассуждения. Пусть в нелинейной системе возможны автоколебания и имеется параметр, ответственный за их возникновение в результате бифуркации Андронова-Хопфа. Пусть в системе есть еще один параметр, который может приводить к исчезновению устойчивого равновесия в результате седло-узловой бифуркации. Ясно, что в типичном случае каждой из этих двух бифуркаций отвечает некоторая линия на плоскости параметров указанной гипотетической системы. Можно ожидать, что эти линии могут пересечься в некоторой общей точке. Такая точка и представляет собой точку бифуркации Богданова-Такенса.

Осциллятор Богданова (1.28) можно представить в форме

$$\ddot{x} - (\mu - x)\dot{x} + \frac{\partial U(x)}{\partial x} = 0, \quad (1.29)$$

где потенциальная функция $U(x)$ задана кубическим полиномом:

$$U(x) = ax - \frac{x^3}{3}. \quad (1.30)$$

Потенциал (1.30) при $a < 0$ не имеет состояний равновесия, а при $a > 0$ характеризуется наличием максимума и минимума (рис. 1.2). Таким образом, в системе возможны устойчивая и неустойчивая неподвижные точки x_0 , которым отвечает равенство нулю производной от потенциала: $\frac{dU(x)}{dx} = a - x^2 = 0$.

Поэтому для неподвижных точек получаем:

² Нормальная форма – математически обоснованное простейшее уравнение для данной бифуркации, содержащее минимально необходимое число существенных параметров.

$$x_0 = \pm\sqrt{a}. \quad (1.31)$$

Из вида потенциальной функции на рис. 1.2 очевидно, что верхний знак в (1.31) соответствует максимуму потенциала и неустойчивой точке, а нижний – минимуму и устойчивой точке. Таким образом, параметр a управляет взаимным положением экстремумов и отвечает за бифуркацию седло-узел слияния неподвижных точек, которая имеет место при условии

$$a = 0. \quad (1.32)$$

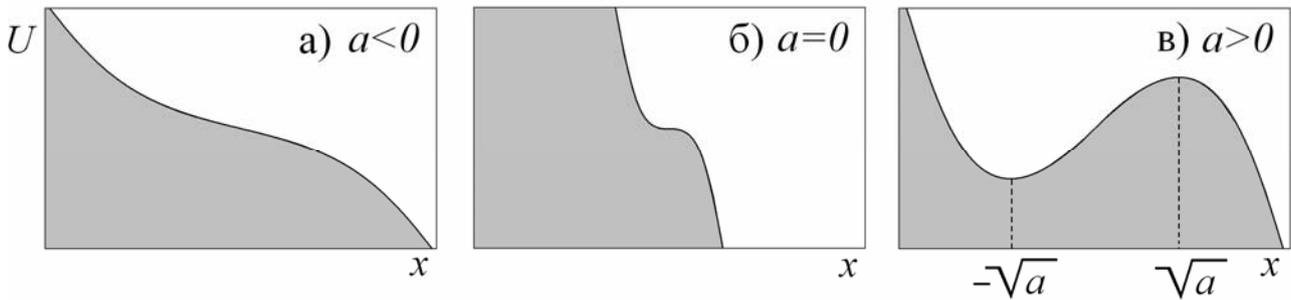


Рис. 1.2. Потенциальная функция осциллятора Богданова в зависимости от параметра a .

Член $(\mu - x)\dot{x}$ в (1.28) может характеризовать как положительную, так и отрицательную диссипацию. При этом параметр μ отвечает за возможность возникновения автоколебаний, а значит – за бифуркацию Андронова-Хопфа. Ее условие легко найти из физических соображений. Действительно, диссипация меняет знак с положительного на отрицательный при условии $\mu - x_0 = 0$, где для устойчивой неподвижной точки $x_0 = -\sqrt{a}$. Следовательно, бифуркация Андронова-Хопфа имеет место при

$$\mu = -\sqrt{a}. \quad (1.33)$$

Таким образом, осциллятор (1.28) имеет все «предпосылки» для реализации точки бифуркации Богданова-Такенса при вариации двух существенных параметров, один из которых, a , отвечает за бифуркацию седло-узел, а второй, μ , за бифуркацию Андронова-Хопфа.

Полезно получить условия этих бифуркаций и формальным образом. Для этого представим уравнение (1.28) в стандартном для динамической системы второго порядка виде:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x, y) = y, \\ \dot{y} &= G(x, y) = (\mu - x)y - a + x^2. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Устойчивая неподвижная точка этой системы $(x_0 = -\sqrt{a}, y_0 = 0)$, а линеаризованная в ее окрестности матрица возмущений:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -y_0 + 2x_0 & \mu - x_0 \end{pmatrix}. \quad (1.35)$$

С учетом выражения для устойчивой неподвижной точки, получаем

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2\sqrt{a} & \sqrt{a} + \mu \end{pmatrix}. \quad (1.36)$$

Находим далее след и якобиан этой матрицы:

$$S = \sqrt{a} + \mu, \quad J = 2\sqrt{a}. \quad (1.37)$$

Условием бифуркации седло-узел является обращение в ноль якобиана матрицы возмущений $J = 0$, а Андронова-Хопфа – ее следа $S = 0$. Таким образом, приходим к условиям (1.32) и (1.33).

Общая точка двух линий (1.32) и (1.33), отвечающая бифуркации Богданова-Такенса, на плоскости параметров имеет координаты $\mu = a = 0$. В этой точке обращаются в ноль одновременно и след, и якобиан матрицы возмущений $J = S = 0$, что может служить удобным приемом при определении точек Богданова-Такенса.

Бифуркация Богданова-Такенса становится типичной при двухпараметрическом анализе, поэтому о ней говорят как о бифуркации *коразмерности два*. Соответственно, однопараметрические бифуркации Андронова-Хопфа и седло-узел являются бифуркациями *коразмерности один*.

На рис. 1.3 показаны линии основных бифуркаций коразмерности один в окрестности точки бифуркации Богданова-Такенса и фазовые портреты системы (1.28) в избранных точках плоскости параметров (μ, a) . Точка Богданова-Такенса находится в начале координат. Можно видеть характерные метаморфозы фазового портрета системы. В точке 1 в системе есть устойчивый фокус и седло. При переходе через линию бифуркации Андронова-Хопфа фокус теряет устойчивость и от него отделяется устойчивый предельный цикл, который увеличивается в размере, точка 2. Затем наблюдается еще одна бифуркация – бифуркация влипания предельного цикла в петлю сепаратрисы седла, в результате которой предельный цикл исчезает, точка 3. Появление такой *нелокальной бифуркации* также понятно из качественных соображений. Действительно, в системе (1.28) имеется седло, так что при увеличении предельного цикла в размере он сближается с седлом и, в конечном итоге, должен «столкнуться» с ним. Линия влипания предельного цикла в петлю сепаратрисы не может быть найдена аналитически: ее приходится искать

численно. Линия влипания предельного цикла в петлю сепаратрисы также подходит к точке Богданова-Такенса.

Отметим также, что важность модели (1.28) не только в том, что она дает пример системы с бифуркацией Богданова-Такенса, но в том, что она представляет ее *нормальную форму*, если использована форма записи (1.34).

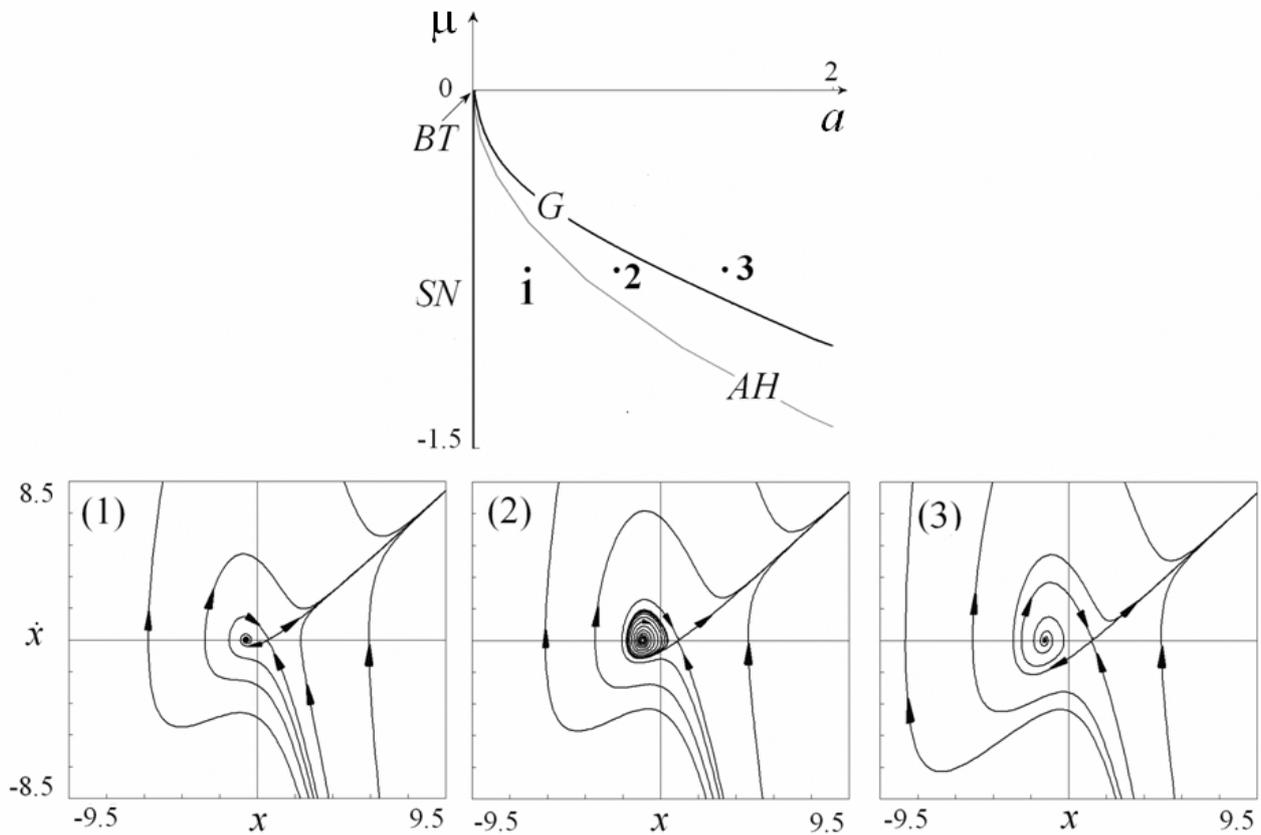


Рис. 1.3. Бифуркационные линии осциллятора (1.28) в окрестности точки Богданова-Такенса BT на плоскости параметров (a, μ) и фазовые портреты в характерных точках. AN – линия бифуркации Андронова-Хопфа, SN – линия бифуркации седло-узел, G – линия влипания предельного цикла в петлю сепаратрисы.

1.5. Автоколебательный осциллятор общего вида. Найдите условия основных бифуркаций автоколебательного осциллятора с произвольными диссипативной и потенциальной функциями

$$\ddot{x} - g(x)\dot{x} + f(x) = 0. \quad (1.38)$$

Здесь $f(x) = \frac{dU(x)}{dx}$, где $U(x)$ – потенциал, а $g(x)$ – нелинейная функция, задающая отрицательное трение осциллятора.

Решение. Представим осциллятор (1.38) в стандартной для динамических систем второго порядка форме:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= g(x)y - f(x). \end{aligned} \quad (1.39)$$

Приравнивая нулю левые части, находим неподвижные точки

$$\begin{aligned} y &= 0, \\ f(x) &= 0. \end{aligned} \tag{1.40}$$

Соотношения (1.40) имеют простой физический смысл: поскольку $f(x) = \frac{dU(x)}{dx}$, то неподвижные точки отвечают экстремумам потенциала $U(x)$.

Найдем теперь матрицу линеаризации системы (1.39). Дифференцируя правые части (1.39), и вычисляя соответствующие частные производные, приходим к следующему выражению

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ f'(x) & g(x) \end{pmatrix}. \tag{1.41}$$

Теперь находим след и якобиан этой матрицы:

$$S = g(x), \quad J = f'(x). \tag{1.42}$$

Здесь координата x определена в неподвижной точке (1.40). Используя полученные выражения для следа S и якобиана J , получим основные бифуркации исследуемых моделей.

Для бифуркаций коразмерности один.

Бифуркация седло-узел. Этой бифуркации отвечает равенство нулю якобиана $J = 0$ в неподвижных точках, так что получаем

$$f(x) = 0, \quad f'(x) = 0. \tag{1.43}$$

Бифуркация Андронова-Хопфа. Для этой бифуркации след $S = 0$ при дополнительном условии $J > 0$, так что

$$f(x) = 0, \quad g(x) = 0, \quad f'(x) > 0. \tag{1.44}$$

Для бифуркаций коразмерности два.

Бифуркация Богданова-Тakensа. Эта бифуркация представляет собой общую точку бифуркаций седло-узел и Андронова-Хопфа, так что одновременно $S = 0$, $J = 0$. Тогда получаем

$$f(x) = 0, \quad g(x) = 0, \quad f'(x) = 0. \tag{1.45}$$

Бифуркация трехкратное равновесие (точка сборки). Эта бифуркация отвечает слиянию двух ветвей седло-узловой бифуркации, так что для нее

$$f(x) = 0, \quad f'(x) = 0, \quad f''(x) = 0. \tag{1.46}$$

Отметим, что осциллятор Богданова (1.28) принадлежит к рассматриваемому в этой задаче классу, для него $g(x) = \mu - x$ и $f(x) = a - x^2$. Поэтому условия бифуркаций для такого осциллятора могут быть найдены с помощью соотношений (1.43)-(1.45).

1.6. Осциллятор с катастрофой сборки. Рассмотрите автоколебательный осциллятор с кубическим потенциалом

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x^3 + ax + b = 0, \quad (1.47)$$

управляемым двумя параметрами a и b . Обсудите вид соответствующей потенциальной функции. Найдите условия локальных бифуркаций коразмерности один и два и укажите их на плоскости параметров (b, a) . Постройте примеры фазовых портретов и укажите на возможность нелокальных бифуркаций.

Решение. Осциллятор (1.47) может быть представлен в форме

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + \frac{dU(x)}{dx} = 0, \quad (1.48)$$

где потенциал задан полиномом

$$U(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}ax^2 + bx + c. \quad (1.49)$$

Формула (1.49) описывает все типичные конфигурации и метаморфозы потенциальной функции, характерные для двухпараметрической системы. Этот факт подробно обсуждается и обосновывается с помощью замены переменной и представлением функции в ряд Тейлора в *теории катастроф*. При этом потенциал (1.49) отвечает одной из катастроф из списка Р. Тома³ – катастрофе сборки. Поэтому систему (1.47) можно назвать *автоколебательным осциллятором с катастрофой сборки*.

Качественные изменения потенциала (1.49) происходят при слиянии экстремумов, что приводит к условиям

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dx} &= x^3 + ax + b = 0, \\ \frac{d^2U}{dx^2} &= 3x^2 + a = 0. \end{aligned} \quad (1.50)$$

Отсюда находим уравнения соответствующих линий

$$b = \pm 2 \left(-\frac{a}{3} \right)^{3/2}. \quad (1.51)$$

Эти линии показаны на рис. 1.4. В терминах теории катастроф они являются линиями *складок*, которые сходятся в особой точке $a = b = 0$ – сборке. На рис. 1.4 хорошо виден характерный «атрибут» сборки – острие в виде

³ Точнее, второй. Первая катастрофа отвечает потенциалу (1.30), использованному в осцилляторе Богданова, и носит название *складка*. Складка отвечает однопараметрической ситуации, сборка – двухпараметрической. Следующей в списке стоит трехпараметрическая катастрофа *ласточкин хвост* и т.д.

полукубической параболы. Рис. 1.4 иллюстрирует, как трансформируется вид потенциала (1.49) при вариации параметров, отвечающих обходу точки сборки. Внутри показанной темно-серым цветом области на плоскости параметров система характеризуется «двухямным» потенциалом. При переходе через линии складок один из минимумов сливается с максимумом, и потенциал становится одноямным.

Вдоль линии $b = 0$ потенциальная функция симметрична. В частном случае $b = 0, a > 0$ система (1.47) превращается в осциллятор Ван-дер-Поля-Дуффинга (с точностью до нормировки).

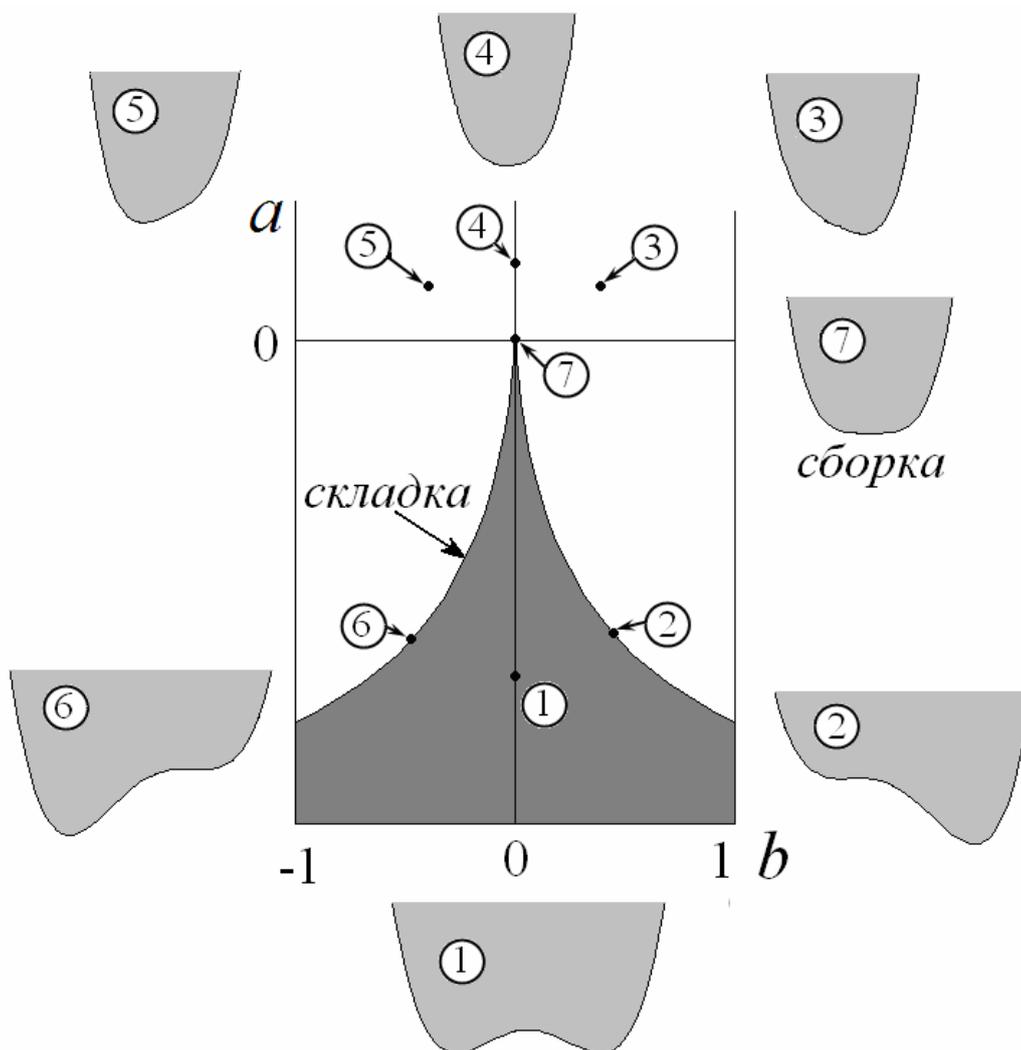


Рис. 1.4. Трансформации потенциала для осциллятора с катастрофой сборки.

Укажем основные локальные бифуркации автоколебательного осциллятора с катастрофой сборки (1.47), для чего можно использовать результаты предыдущей задачи. В этом случае

$$f(x) = x^3 + ax + b, \quad g(x) = \lambda - x^2. \quad (1.52)$$

Тогда условие бифуркации седло-узел (1.43) дает

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + ax + b = 0, \\ f'(x) &= 3x^2 + a = 0. \end{aligned} \tag{1.53}$$

Исключая из этих уравнений x , получаем уравнение линии седло-узловой бифуркации $b = \pm 2\left(-\frac{a}{3}\right)^{3/2}$, которое совпадает, естественно, с (1.51). Таким образом, линии складок (в терминах теории катастроф) соответствуют линиям седло-узловых бифуркаций (в терминах теории бифуркаций)⁴.

Условия бифуркации Андронова-Хопфа $S = 0$, $J > 0$ (1.44) в этом случае приводят к следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + ax + b = 0, \\ g(x) &= \lambda - x^2 = 0, \\ f'(x) &= 3x^2 + a > 0. \end{aligned} \tag{1.54}$$

Из второго уравнения следует, что $x = \pm\sqrt{\lambda}$. Подставляя этот результат в остальные уравнения, получаем для бифуркации Андронова-Хопфа

$$\begin{cases} b = \pm\sqrt{\lambda}(\lambda + a), \\ a > -3\lambda. \end{cases} \tag{1.55}$$

Эти уравнения задают две прямые линии на плоскости (a, b) .

Точки Богданова-Такенса представляют собой общие точки бифуркации Андронова-Хопфа и бифуркации седло-узел. Их находим из условий (1.45):

$$a = -3\lambda, \quad b = \mp 2\lambda^{3/2}. \tag{1.56}$$

Общая картина локальных бифуркаций представлена на рис. 1.5. На него нанесены линии седло-узловой бифуркации SN (*saddle-node*), точка сборки CP (*casp*), линии бифуркаций Андронова-Хопфа AH , и точки Богданова-Такенса BT .

Пример метаморфоз фазового портрета с уменьшением параметра a при фиксированном $b = -5.5$ дан на рис. 1.6. При этом пересекаем линию бифуркации Андронова-Хопфа на рис. 1.5 сверху вниз достаточно далеко от точки сборки. Вначале сосуществуют устойчивый предельный цикл и неустойчивый фокус. На линии бифуркации Андронова-Хопфа рождается неустойчивый предельный цикл, а неподвижная точка обретает устойчивость. Дальнейшее уменьшение параметра a приводит к тому, что устойчивый и неустойчивый циклы сталкиваются и исчезают: происходит нелокальная *fold*-бифуркация предельного цикла. Эта бифуркация аналогична той, которая наблюдается в автогенераторе с жестким возбуждением. Соответствующая

⁴ Таким образом, можно использовать и тот, и другой термин, в зависимости от ситуации.

линия лежит ниже линии бифуркации Андронова-Хопфа и заканчивается в точке контакта с последней: в точке вырожденной бифуркации Андронова-Хопфа GH .

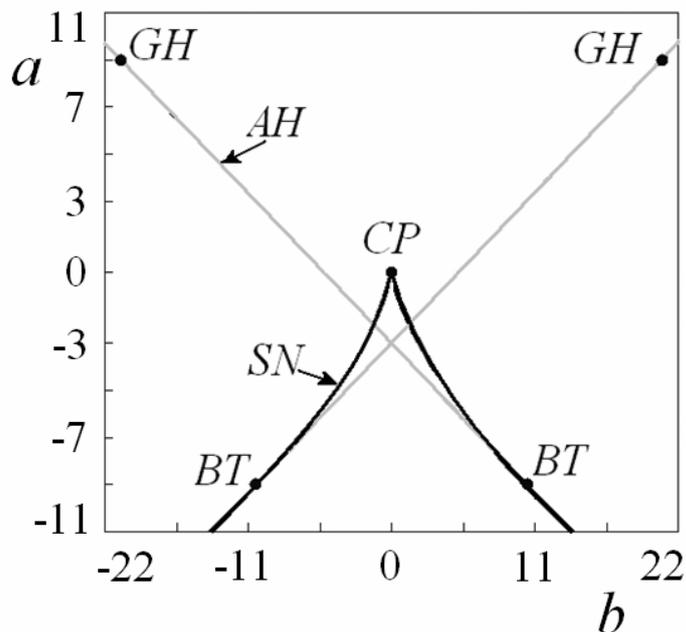


Рис. 1.5. Картина локальных бифуркаций автоколебательного осциллятора с катастрофой сборки для $\lambda = 3$. SN – линии седло-узловых бифуркаций, AH – линии бифуркаций Андронова-Хопфа, CP – точка сборки, BT – точка Богданова-Такенса, GH – точка вырожденной бифуркации Андронова-Хопфа.

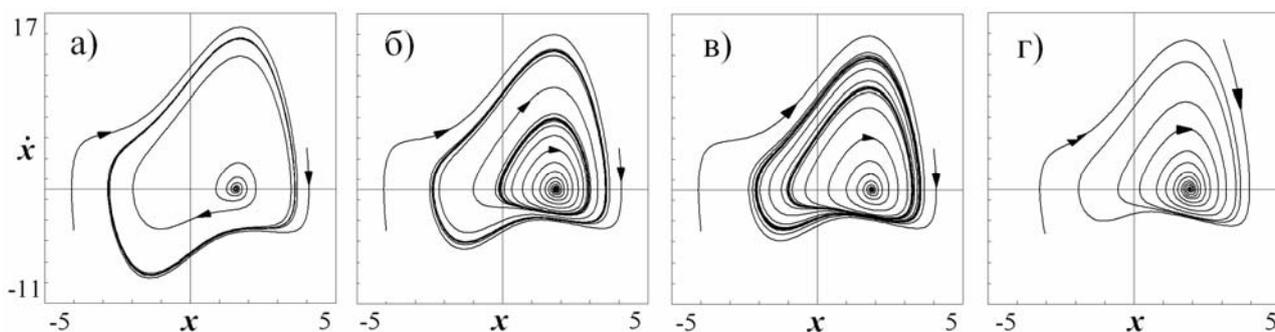


Рис. 1.6. Фазовые портреты осциллятора с катастрофой сборки, построенные вдоль маршрута $b = -5.5$. Значения второго параметра: $a = 1$ (а), $a = -0.4$ (б), $a = -0.6$ (в), $a = -0.8$ (г).

Выберем теперь значение $b = -3$ и пересечем линию седло-узловых бифуркаций, а затем линию бифуркации Андронова-Хопфа в окрестности точки Богданова-Такенса (правее нее). Фазовые портреты показаны на рис. 1.7. Сначала рождается пара седло и неустойчивый узел, который затем превращается в неустойчивый фокус (рис. 1.7, а). Затем происходит бифуркация Андронова-Хопфа и рождается неустойчивый предельный цикл, а фокус становится устойчивым (рис. 1.7, б). При дальнейшем уменьшении a происходит нелокальная бифуркация: предельный цикл влипает в сепаратрису

седла и исчезает (рис. 1.7, в). В результате, остаются два устойчивых фокуса и седло (рис. 1.7, г).

Полный анализ нелокальных бифуркаций можно провести, например, при помощи пакета программ MATCONT⁵. Это позволяет нанести на плоскость параметров (a, b) линию влипания предельного цикла в петлю сепаратрисы, которая заканчивается в точках Богданова-Такенса. Кроме того, можно построить линию *fold*-бифуркации предельного цикла, которая опирается на точки обобщенной бифуркации Андронова-Хопфа *GH*. Отметим, что хотя это все возможные нелокальные бифуркации в системе, но при приближении к точке сборки их конфигурация усложняется.

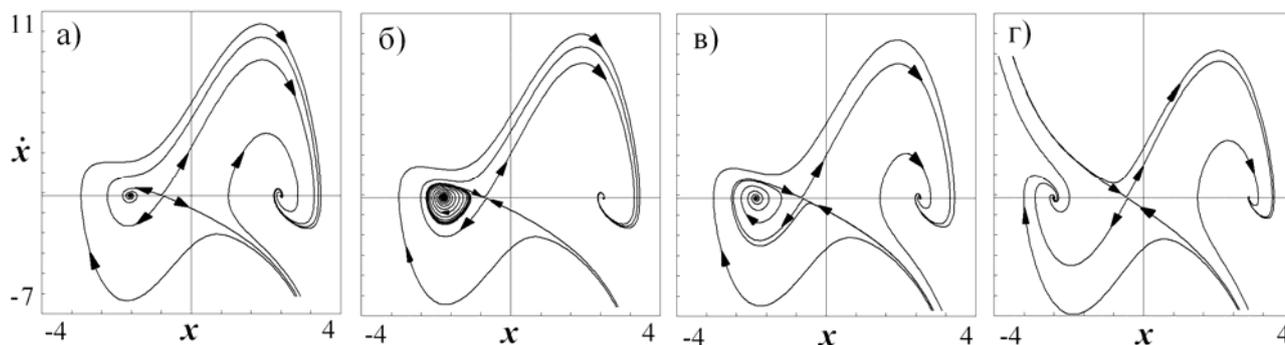


Рис. 1.7. Фазовые портреты осциллятора с катастрофой сборки, построенные вдоль маршрута $b = -3$. Значения второго параметра: $a = -4.5$ (а), $a = -4.9$ (б), $a = -5.1$ (в), $a = -7$ (г).

Мы рассмотрели осциллятор с катастрофой сборки в случае, когда потенциал имеет конфигурации, показанные на рис. 1.4. Возможна ситуация, когда потенциал задается полиномом четвертой степени, но может иметь не два минимума и максимум, а два максимума и минимум между ними. Она возникает при смене знака перед старшим членом в (1.49), так что

$$U(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}ax^2 + bx + c. \quad (1.57)$$

В теории катастроф в этом случае используют термин *двойственная сборка*. Для такого потенциала уравнение автоколебательного осциллятора имеет вид

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} - x^3 + ax + b = 0. \quad (1.58)$$

Оно может быть исследовано по аналогии с приведенным выше рассмотрением.

⁵ Пакет MATCONT доступен в сети Интернет по адресу: <http://www.matcont.ugent.be> и включает в себя много полезных возможностей для исследования бифуркаций режимов динамики нелинейных систем, а именно, нахождение точек бифуркаций, определение их принадлежности к какому-либо известному классу, способность наблюдать за динамикой бифуркационных точек при вариации параметров.

1.7. Осциллятор с катастрофой сборки и система Фитц Хью-Нагумо.

Покажите, что осциллятор (1.47) заменами переменных и параметров может быть приведен к уравнению Фитц Хью-Нагумо.

Решение. Уравнение (1.47) может быть сведено к одной из известных автоколебательных моделей: системе Фитц Хью-Нагумо (или, в другой терминологии – Бонхоффера-Ван-дер-Поля), представляющей собой простейшую модель нейрона и описывающую колебания на мембране клетки с учетом рефрактерности. Уравнение Фитц Хью-Нагумо является двумерным упрощением модели Ходжкина-Хакли генерации спайков. Оно может быть записано следующим образом:

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{x} &= x - \frac{x^3}{3} - y, \\ \dot{y} &= x + A - By.\end{aligned}\tag{1.59}$$

В рамках биофизической интерпретации x – напряжение на мембране, y – величина рефрактерности, a – радиус мембраны, b – удельное сопротивление жидкости внутри мембраны.

Если первое из уравнений Фитц Хью-Нагумо (1.59) продифференцировать по времени, то получим

$$\varepsilon \ddot{x} = \dot{x} - x^2 \dot{x} - \dot{y}.\tag{1.60}$$

Подставляем в это соотношение второе уравнение (1.59), в которое, в свою очередь, подставляем вытекающее из первого уравнения (1.59) соотношение

$y = x - \frac{x^3}{3} - \varepsilon \dot{x}$. После некоторых преобразований, получаем

$$\varepsilon \ddot{x} - [(1 - B\varepsilon) - x^2] \dot{x} + \frac{Bx^3}{3} + (1 - B)x + A = 0.\tag{1.61}$$

Если теперь произвести замену переменных

$$t \rightarrow t/\alpha, \quad x \rightarrow x/\alpha,\tag{1.62}$$

и параметров

$$\lambda = 3 \frac{1 - B\varepsilon}{B\varepsilon}, \quad a = 9 \frac{1 - B}{B^2\varepsilon}, \quad b = \frac{9\sqrt{3}}{B^2\varepsilon\sqrt{B\varepsilon}} A,\tag{1.63}$$

то получим уравнение автоколебательного осциллятора с катастрофой сборки (1.47).

Таким образом, модель Фитц Хью-Нагумо имеет не только биофизический смысл, но может интерпретироваться как одна из эталонных моделей теории колебаний, отвечающая автоколебательному осциллятору с катастрофой сборки. Она получается в рамках классификационной схемы теории катастроф.

Отметим, однако, что в рамках биофизической интерпретации обычно рассматриваются очень малые значения параметра ε ($\varepsilon \ll 1$), что отвечает сильно релаксационным режимам автоколебательного осциллятора.

1.8. Осциллятор с катастрофой сборки и точки Арнольда-Такенса.

Покажите, что осциллятор с катастрофой сборки (1.47) и (1.58) в случае $b = 0$ дает нормальную форму для бифуркации коразмерности два – точки Арнольда-Такенса. Опираясь на модель в форме осциллятора, обсудите возможные режимы и бифуркации в такой системе.

Решение. Осциллятор с катастрофой сборки (1.47) и (1.58) при $b = 0$ принимает вид

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} \pm x^3 + ax = 0. \quad (1.64)$$

При этом потенциал описывается выражением

$$U(x) = \pm \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}ax^2 \quad (1.65)$$

и является симметричным относительно нулевого положения равновесия. Введем переменную y , так что $y = \dot{x}$. Тогда получаем

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= \lambda y - ax \pm x^3 - x^2 y. \end{aligned} \quad (1.66)$$

Это соотношение и дает нормальную форму для точки *бифуркации Арнольда-Такенса*⁶, причем возможны два варианта этой нормальной формы, которые в соответствии со знаками в (1.66) обозначим AT^+ и AT^- .

Таким образом, «физическая природа» точек Арнольда-Такенса – это автоколебательные явления в системе с симметричным двухгорбым (двугорбым) потенциалом. Для систем с такой симметрией точки Арнольда-Такенса имеют коразмерность два и, тем самым, оказываются типичными на плоскости параметров. Несмотря на требование симметрии, точки такого типа оказываются существенными, например, для описания картины синхронизации в резонансном случае с соотношением частот 1:2 (см. задачу 2.26).

Обсудим сначала ситуацию, отвечающую симметричному двугорбому потенциалу. Перестройка такого потенциала при вариации параметра a иллюстрирует рис. 1.8. С ростом a локальный квадратичный максимум превращается при $a = 0$ в максимум четвертой степени, от которого отделяются симметричным образом два новых максимума, а положение равновесия в начале координат становится устойчивым. Соответствующую бифуркацию

⁶ Это одно из возможных названий, в литературе по теории бифуркаций используются и другие варианты. Например, в математической литературе можно встретить несколько громоздкий вариант: «два нулевых собственных значения с симметрией порядка два» [15].

положений равновесия для диссипативной системы называют *бифуркацией вилка* (pitch fork).

Бифуркационные линии и фазовые портреты системы (1.66) в окрестности точки AT^+ представлены на рис. 1.9.

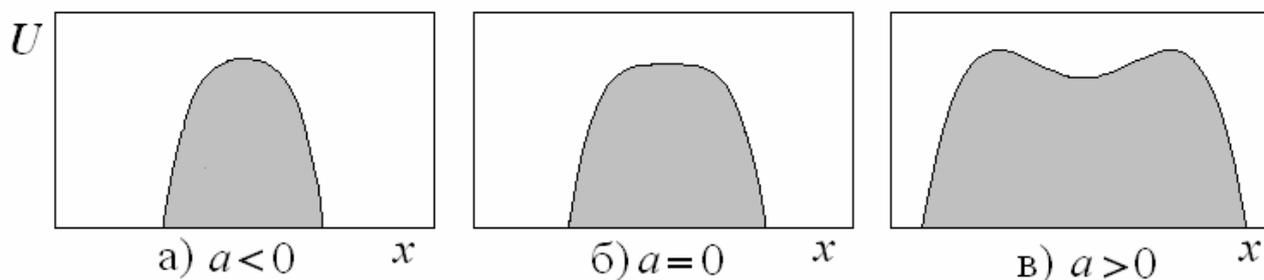


Рис. 1.8. Метаморфозы «двугорбого» потенциала, отвечающего за бифуркацию вилка.

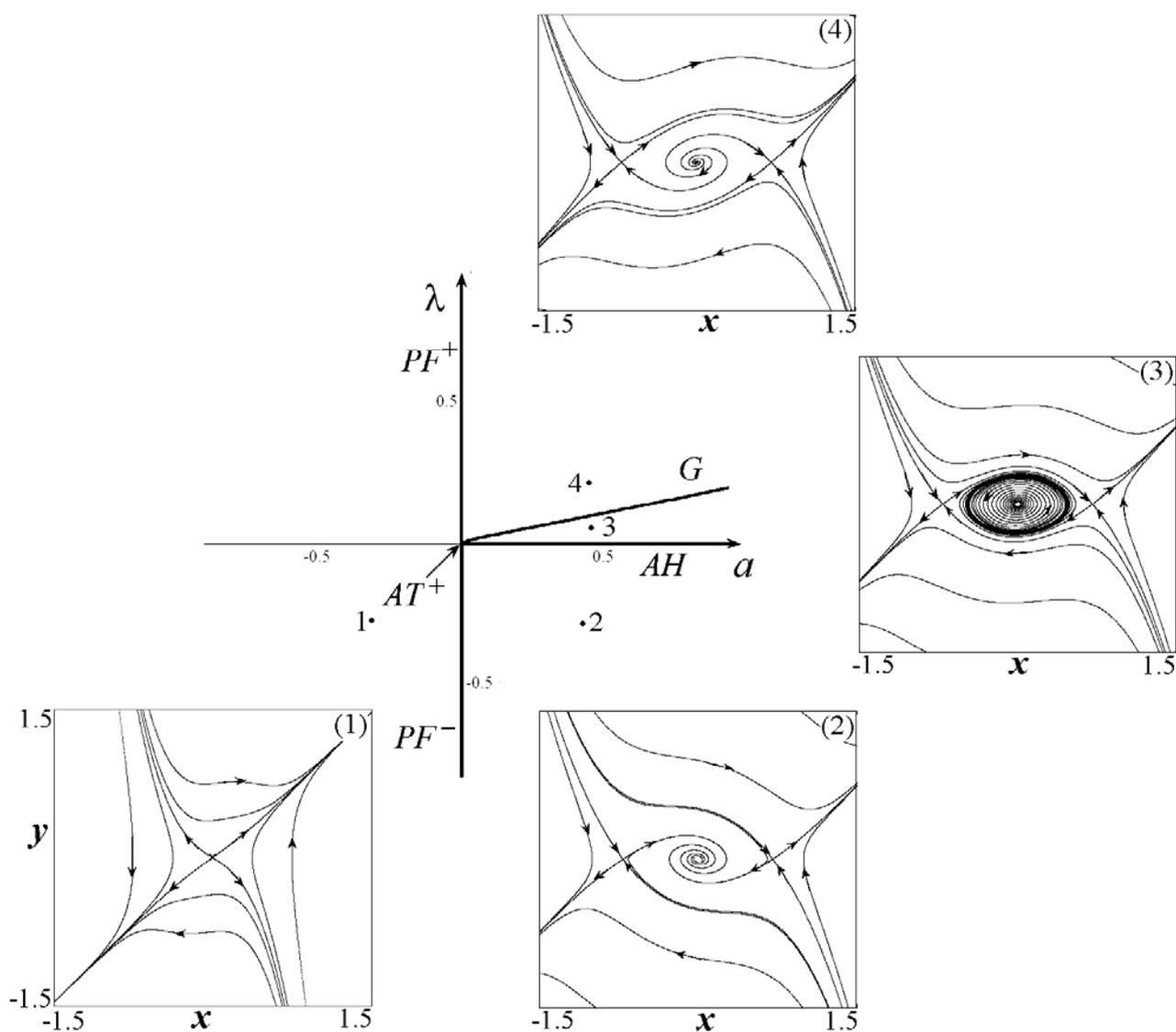


Рис. 1.9. Бифуркационные линии и характерные фазовые портреты в окрестности точки Арнольда-Тakensа AT^+ . AH – линии бифуркаций Андронова-Хопфа, PF – линия бифуркации вилка, G – нелокальная бифуркация столкновения предельного цикла с сепаратрисами седла.

Характерные режимы и бифуркации этой системы можно понять из физических соображений для осциллятора в форме (1.64), опираясь на условие возникновения автоколебаний $\lambda > 0$ и вид потенциала. Если $a < 0$, то при любых λ в силу вида потенциала на рис. 1.8, a , возможно одно неустойчивое равновесие – седло в начале координат. Если $a > 0$ и $\lambda < 0$, то осциллятор оказывается диссипативным, и в результате бифуркации вилка седло становится устойчивым узлом (затем фокусом), от которого отделяются два новых седла. Наиболее интересен случай $\lambda > 0$ и $a > 0$. При малых λ возникают автоколебания, так что фокус в начале координат становится неустойчивым и от него отделяется устойчивый предельный цикл. С ростом λ предельный цикл растет в размере, так что неизбежно наступит момент, когда он сталкивается с сепаратрисами симметрично расположенных седел и исчезнет в результате соответствующей нелокальной бифуркации.

После нелокальной бифуркации остается неустойчивый фокус и два седла. Если теперь вновь уменьшать параметр a , то фокус станет неустойчивым узлом, и на линии $a = 0$ в результате бифуркации вилка он сольется с двумя седлами. В результате, приходим к начальной ситуации, когда существует одно седло.

Таким образом, характерный «признак» точки Арнольда-Тakensа AT^+ состоит в том, что на плоскости параметров сходятся линии бифуркации Андронова-Хопфа и бифуркации вилка. В эту же точку приходит линия нелокальной бифуркации.

Обсудим теперь ситуацию, отвечающую симметричному двухямному потенциалу. Перестройку такого потенциала при вариации параметра a иллюстрирует рис. 1.10.

Бифуркационные линии системы (1.64) и характерные фазовые портреты в этом случае показаны на рис. 1.11.

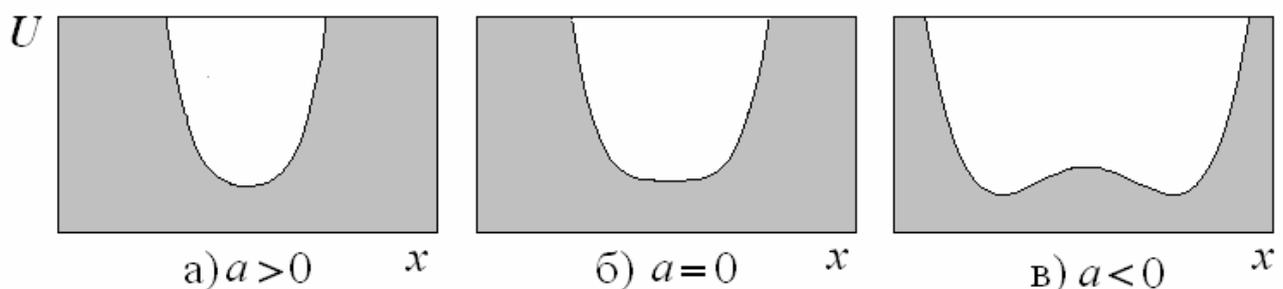


Рис. 1.10. Метаморфозы симметричного двухямного потенциала, отвечающего за бифуркацию вилка.

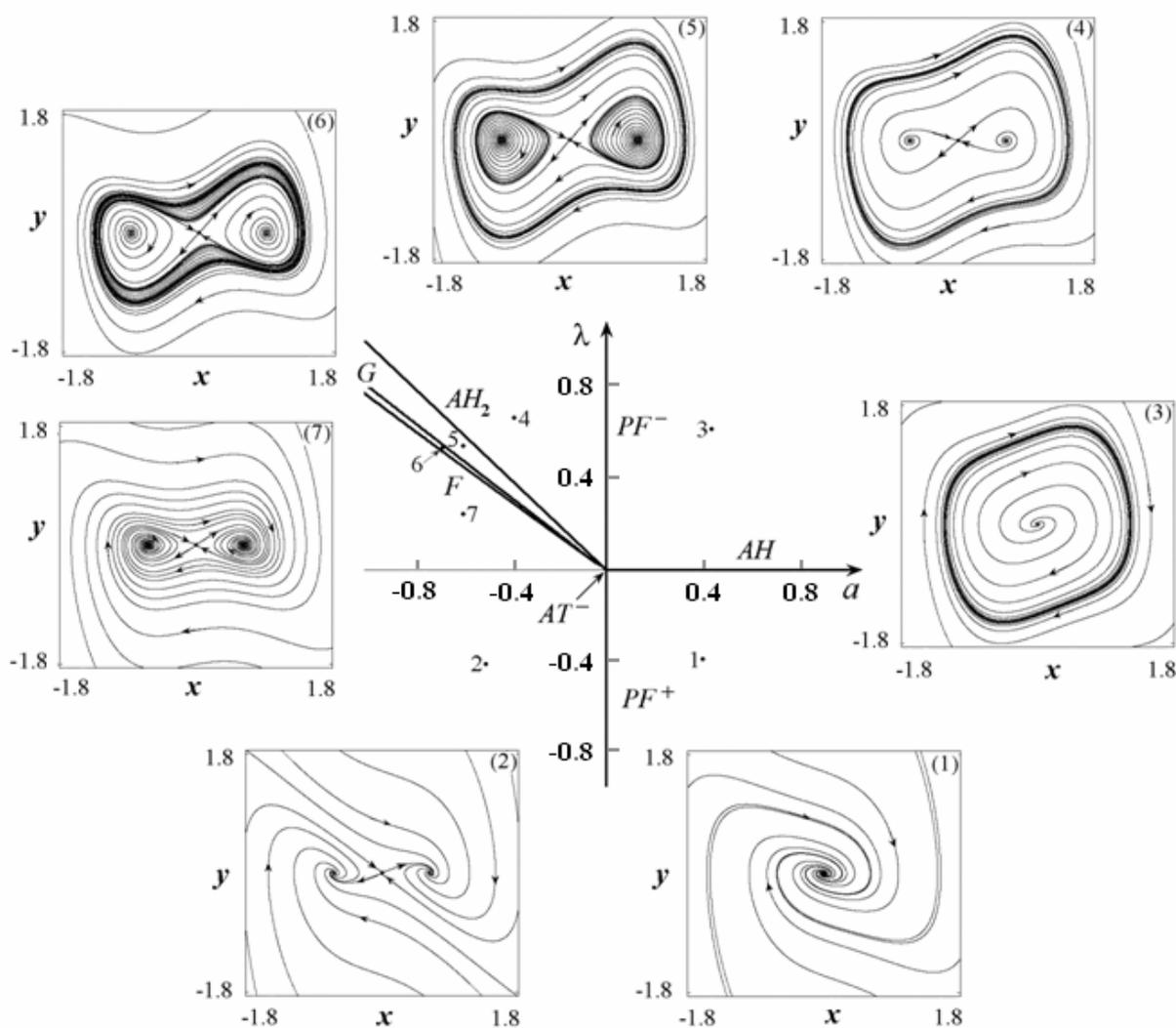


Рис. 1.11. Бифуркационные линии и характерные фазовые портреты в окрестности точки Арнольда-Тakensа AT^- . AH – линии бифуркаций Андронова-Хопфа, PF^+ – суперкритическая бифуркация вилка, PF^- – субкритическая бифуркация вилка, AH_2 – «симметричная» бифуркация Андронова-Хопфа, F – fold-бифуркация предельных циклов, G – нелокальная бифуркация.

Бифуркации в этом случае также могут быть описаны с привлечением физических соображений. В области $\lambda < 0$ система представляет собой диссипативный осциллятор, и характер динамики целиком определяется перестройкой потенциала. При $a > 0$ в соответствии с рис. 1.10, a это дает устойчивую точку в начале координат $x_1 = 0$. Если уменьшать параметр a , то при $a = 0$ устройство потенциальной ямы изменится, точка в начале координат x_1 станет неустойчивой (седлом) и от нее отделятся два новых устойчивых равновесия. Им отвечает минимум потенциала (1.65), так что координаты равновесий $x_{2,3} = \pm\sqrt{-a}$. Это тоже бифуркация вилка, но чтобы

отличать ее от описанной выше, эту бифуркацию называют *суперкритической*, а альтернативную ситуацию – *субкритической* бифуркацией вилки.

Пусть теперь в системе возможны автоколебания и $\lambda > 0$. Если конфигурация потенциала отвечает рис. 1.10, *a*, то в системе имеет место классическая для автоколебаний ситуация – устойчивый предельный цикл охватывает неустойчивый фокус в начале координат. Если теперь уменьшать параметр *a*, то переход к двухямному потенциалу приведет к бифуркации вилка этого равновесия. Поскольку оно неустойчиво, то будет наблюдаться субкритическая бифуркация рождения двух неустойчивых равновесий $x_{2,3} = \pm\sqrt{-a}$.

Эти равновесия могут претерпевать бифуркацию Андронова-Хопфа рождения неустойчивого предельного цикла. Покажем это. Запишем матрицу линеаризации системы (1.64) в случае знака «минус»:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a - 3x^2 - 2xy & \lambda - x^2 \end{pmatrix}, \quad (1.67)$$

так что для неподвижных точек $x_{2,3} = \pm\sqrt{-a}$ получаем

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2a & \lambda + a \end{pmatrix}. \quad (1.68)$$

Условие бифуркации рождения предельного цикла – обращение в ноль следа матрицы $S = \lambda + a$, так что

$$\lambda = -a. \quad (1.69)$$

Якобиан $J = -2a$ и положителен при $a < 0$, как и необходимо для бифуркации Андронова-Хопфа. При этом предельные циклы рождаются одновременно из обеих точек $x_{2,3}$. Это определенное вырождение, связанное с симметрией системы.

С уменьшением управляющего параметра λ неустойчивые циклы сталкиваются с ветвями сепаратрисы седла, но не исчезают, а «проходят» сквозь них, объединяясь, так что в результате этой нелокальной бифуркации возникает один неустойчивый предельный цикл, охватывающий три равновесия – седло в начале координат и две точки $x_{2,3}$, которые стали устойчивыми в результате произошедшей ранее бифуркации Андронова-Хопфа.

Если и далее увеличивать параметр *a* или уменьшать λ , то неустойчивый и устойчивый предельные циклы сближаются, сливаются и исчезают в результате

fold-бифуркации. Возникает случай общего положения – два устойчивых и одно неустойчивое равновесия, – уже обсуждавшийся выше.

Таким образом, «признак» бифуркации Арнольда-Тakensa AT^- – наличие общей точки бифуркации Андронова-Хопфа и бифуркации вилки, которая состоит в этом случае из двух ветвей, субкритической и суперкритической. В эту же точку приходит линия бифуркации Андронова-Хопфа рождения пары неустойчивых предельных циклов и линия нелокальной бифуркации.

1.9. Осциллятор с несимметричной диссипативной функцией.

Обсудите характер нелинейности в автоколебательном осцилляторе с катастрофой сборки с несимметричной диссипативной функцией

$$\ddot{x} - (\lambda + \mu x - x^2)\dot{x} + x^3 + ax + b = 0. \quad (1.70)$$

Найдите локальные бифуркации в таком осцилляторе.

Решение. Классический осциллятор Ван-дер-Поля (1.1) благодаря члену $x^2\dot{x}$ является нелинейной системой с *кубической нелинейностью*, а осциллятор (1.70) благодаря члену $x\dot{x}$ характеризуется дополнительной *квадратичной нелинейностью*. Такая нелинейность возникает для обобщенного осциллятора (1.38) $\ddot{x} - g(x)\dot{x} + f(x) = 0$, если разложить функцию $g(x)$ в ряд Тейлора до квадратичного члена. Отметим, что характер нелинейности осциллятора проявляется в случае внешнего воздействия в виде различных типов резонансов на гармониках и субгармониках внешнего сигнала (см. часть 2).

Вместо (1.70) удобно использовать эквивалентное ему представление

$$\ddot{x} - \left[\lambda - (\varepsilon - x)^2 \right] \dot{x} + x^3 + ax + b = 0. \quad (1.71)$$

Эквивалентность уравнений (1.70) и (1.71) следует из равенства

$$\lambda - \mu x - x^2 = \lambda + \frac{\mu^2}{4} - \left(\frac{\mu}{2} - x \right)^2, \quad (1.72)$$

так что они переходят друг в друга при замене $\frac{\mu}{2} \rightarrow \varepsilon$ и $\lambda + \frac{\mu^2}{4} \rightarrow \lambda$.

Для осциллятора с квадратичной нелинейностью (1.71) число существенных параметров возрастает до трех, так что теперь картина бифуркаций вложена в трехмерное пространство параметров. В этом пространстве будут представлены поверхности складок, линии сборки, поверхности бифуркации Андронова-Хопфа и линии Богданова-Тakensa.

Все они могут быть найдены аналитически с использованием решения задачи 1.5. В результате чего получаем для поверхности складок

$$b = \pm \frac{2(-a)^{3/2}}{3\sqrt{3}}, \quad (1.73)$$

поверхности бифуркации Андронова-Хопфа

$$b = -(\varepsilon \pm \sqrt{\lambda})(a + (\varepsilon \pm \sqrt{\lambda})^2), \quad (1.74)$$

линий Богданова-Такенса

$$a = -3(\varepsilon \pm \sqrt{\lambda})^2, \quad b = -2(\varepsilon \pm \sqrt{\lambda})^3. \quad (1.75)$$

Линия сборки задается условием $a = b = 0$, не зависящим от параметра ε .

На рис. 1.12 показана картина указанных бифуркаций на плоскости (b, a) при разных ε . По мере приближения ε к значению $\sqrt{\lambda}$ одна из точек Богданова-Такенса оказывается вблизи точки сборки. Точно при условии $\varepsilon = \sqrt{\lambda}$ имеет место новая бифуркация – бифуркация коразмерности три, которую можно назвать «точка сборки в точке Богданова-Такенса». При $\varepsilon > \sqrt{\lambda}$ точка сборки переходит на правую ветвь линий седло-узловых бифуркаций. Отметим, что мы описали только локальные бифуркации в системе. Указанная перестройка при $\varepsilon = \sqrt{\lambda}$ сопровождается и перестройкой картины нелокальных бифуркаций.

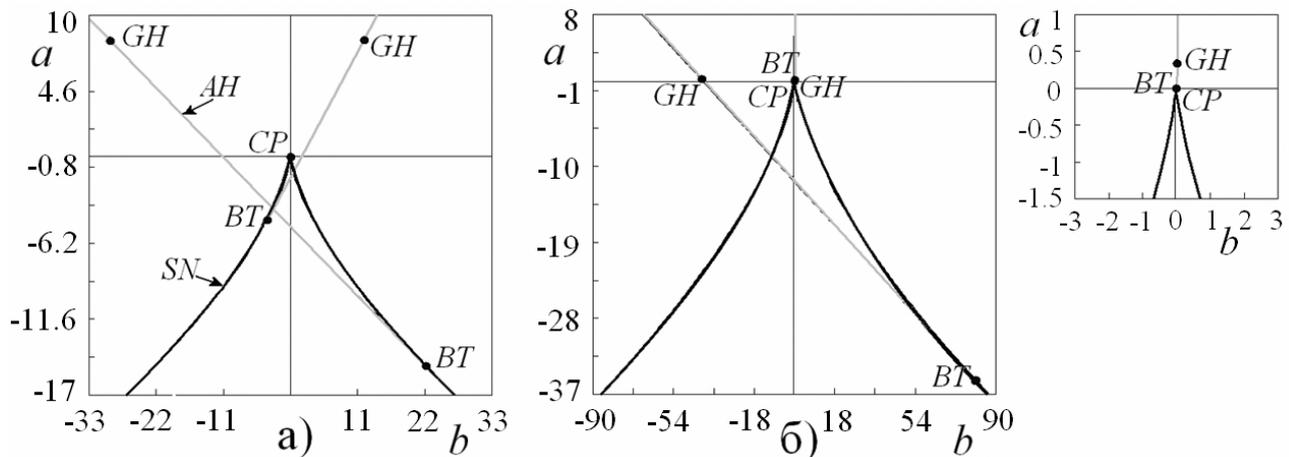


Рис. 1.12. Линии и точки локальных бифуркаций осциллятора с катастрофой сборки с несимметричной диссипативной функцией (1.71) для $\lambda = 3$. Значения параметра ε : 0.5 (а), 1.7 (б). Точка бифуркации коразмерности три $\varepsilon_0 = \sqrt{\lambda} \approx 1.73$.

1.10. Брюсселятор. Для уравнения химического автоколебательного осциллятора – брюсселятора

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a - (b+1)x + x^2y, \\ \frac{dy}{dt} &= bx - x^2y. \end{aligned} \quad (1.76)$$

найдите неподвижную точку. Получите уравнения для динамики малых возмущений в ее окрестности и с помощью полученного уравнения укажите

порог бифуркации Андронова-Хопфа. Найдите условия бифуркации Андронова-Хопфа формальным образом для исходной системы (1.68).

Решение. Приравнивая нулю производные в (1.76), находим неподвижную точку:

$$x_0 = a, \quad y_0 = \frac{b}{a}. \quad (1.77)$$

Рассмотрим динамику малых возмущений вблизи этой точки, для чего положим

$$x = a + \xi, \quad y = \frac{b}{a} + \eta, \quad (1.78)$$

где ξ и η малы. Подставим соотношения (1.78) в (1.76). Пренебрегая членами второго порядка по возмущениям, получим:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= (b-1)\xi + a^2\eta, \\ \frac{d\eta}{dt} &= -b\xi - a^2\eta. \end{aligned} \quad (1.79)$$

Продифференцируем теперь первое уравнение по времени:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} - (b-1)\frac{d\xi}{dt} - a^2\frac{d\eta}{dt} = 0. \quad (1.80)$$

Подставим сюда $\frac{d\eta}{dt}$ из второго уравнения (1.79), куда, в свою очередь, подставляем η из первого уравнения. В результате, получим:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} - (b-a^2-1)\frac{d\xi}{dt} - a^2\xi = 0. \quad (1.81)$$

Таким образом, мы получили линейный осциллятор. Как видно из (1.81), для него возможность бифуркации Андронова-Хопфа определяется фактором

$$\Lambda = b - a^2 - 1. \quad (1.82)$$

Если $\Lambda = b - a^2 - 1 > 0$, то осциллятор (1.80) характеризуется отрицательным трением, а в исходной нелинейной системе будут иметь место автоколебания. При этом частота колебаний у порога бифуркации определяется параметром a .

Полезно найти бифуркацию Андронова-Хопфа и формальным методом из исходных уравнений (1.76). С этой целью выписываем матрицу возмущений:

$$M = \begin{pmatrix} -b-1+2xy & x^2 \\ b-2xy & -x^2 \end{pmatrix}. \quad (1.83)$$

В неподвижной точке (1.77) имеем:

$$M = \begin{pmatrix} b-1 & a^2 \\ 2b & -a^2 \end{pmatrix}. \quad (1.84)$$

След этой матрицы $S = b - a^2 - 1$. Условие бифуркации Андронова-Хопфа – обращение в нуль следа матрицы $S = 0$, что приводит к $b - a^2 - 1 = 0$.

Фазовые портреты брюсселятора при $a=1$ показаны на рис. 1.13. Рис. 1.13, а относится к случаю $b = 2.1$, что в соответствии с (1.82) отвечает малому превышению над порогом бифуркации Андронова-Хопфа. Как видно из рис. 1.13, а, этому случаю отвечают квазигармонические колебания с медленным изменением амплитуды осциллятора. На этом рисунке хорошо видно, что колебания происходят в окрестности неподвижной точки (1.77). Рис. 1.13, б соответствует $b = 3$ и фактору $\Lambda = 1$. В этом случае колебания уже не квазигармонические. В случае $b = 5$ колебания становятся релаксационными (рис. 1.13, в). Полезно сравнить полученные фазовые портреты с рис. 1.1 для системы Ван-дер-Поля.

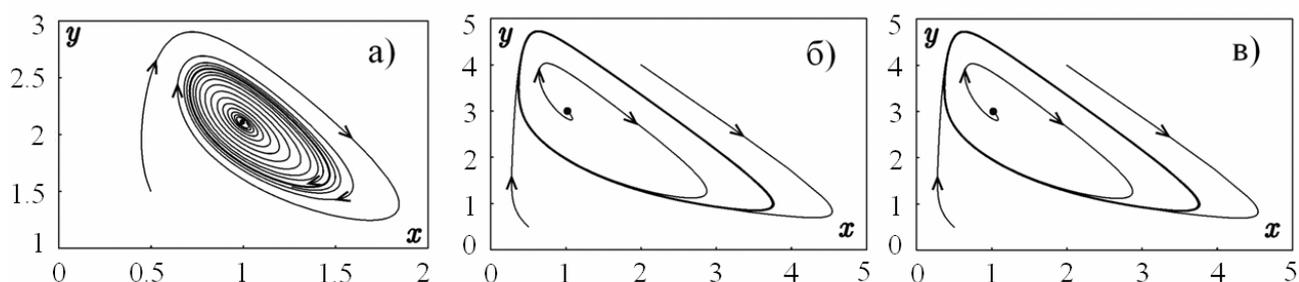
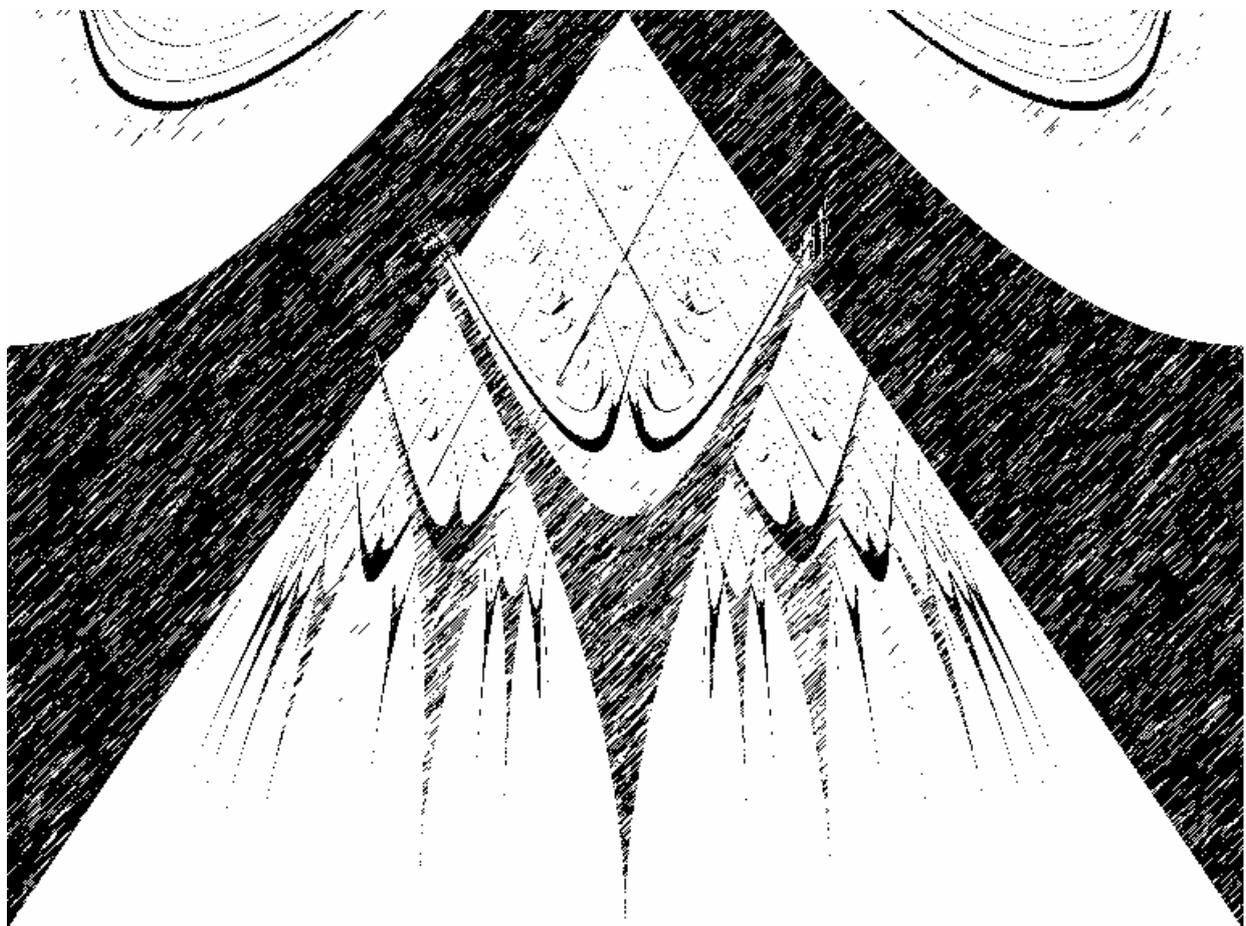


Рис. 1.13. Фазовые портреты брюсселятора при $a = 1$, $b = 2.1$ (а), $b = 3$ (б), $b = 5$ (в).

Часть II

**ВЫНУЖДЕННАЯ
СИНХРОНИЗАЦИЯ**



2.1. Синхронизация и квазипериодические режимы в неавтономном осцилляторе Ван-дер-Поля. Для осциллятора Ван-дер-Поля под внешним гармоническим воздействием

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = b \sin(\omega t) \quad (2.1)$$

Постройте зависимости переменной осциллятора от времени $x(t)$ и фазовые портреты на плоскости переменных осциллятора (x, \dot{x}) для амплитуды сигнала $b = 0.2$ и трех значений частоты: а) $\omega = 1.055$, б) $\omega = 1.075$ и в) $\omega = 1.11$. Управляющий параметр осциллятора $\lambda = 0.5$. Обсудите характер наблюдаемых режимов.

Решение. Реализации и фазовые портреты для указанных случаев приведены на рис. 2.1. В первом случае (а) наблюдается периодический режим. Частота этого режима равна частоте внешнего сигнала и отлична от собственной частоты осциллятора⁷. Это режим *синхронизации* автоколебательного осциллятора внешним сигналом.

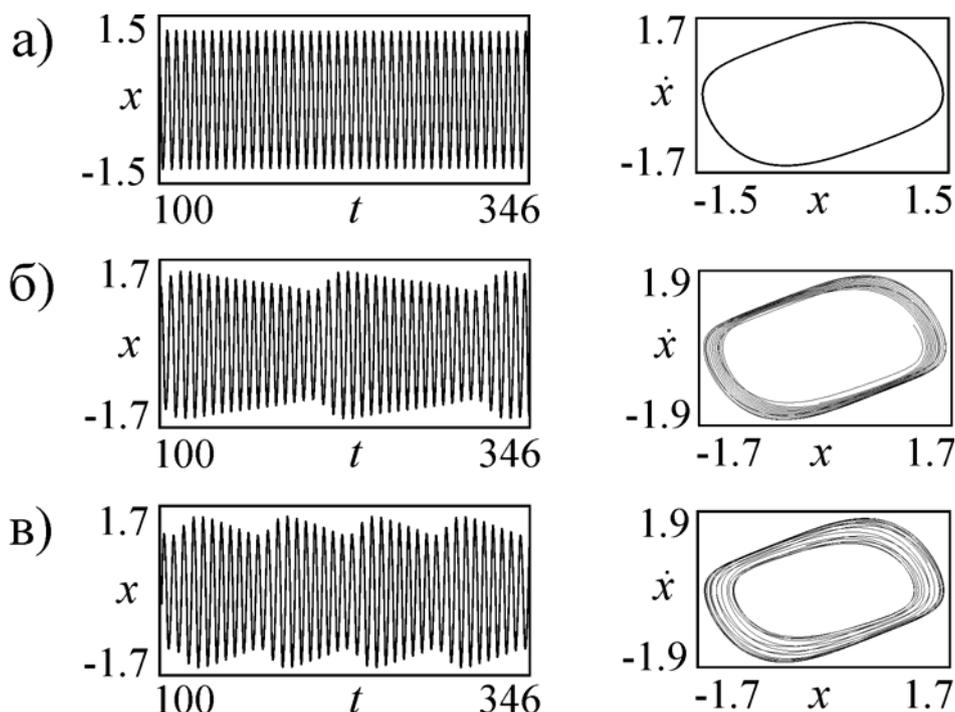


Рис. 2.1. Фазовые портреты и реализации неавтономного осциллятора Ван-дер-Поля (2.1); $\lambda = 0.5$, $b = 0.2$, $\omega = 1.055$ (а), $\omega = 1.075$ (б), $\omega = 1.11$ (в).

Второй (б) и третий случаи (в) отвечают ситуации *биений*. Это *квазипериодический* режим. Фазовый портрет на плоскости переменных

⁷ Это отличие можно зафиксировать даже с помощью реализации на рис. 2.1: собственной частоте осциллятора $\omega_0 = 1$ на интервале $t_0 < t < t_1$ ($t_0 = 100, t_1 = 346$) должно отвечать $n = \frac{t_1 - t_0}{2\pi} = 39$ максимумов, а на рисунке их 41.

осциллятора (x, \dot{x}) теперь выглядит «размазанным», что отвечает проявлению движений с несоизмеримыми частотами. Из сравнения рис. 2.1 (б) и рис. 2.1 (в) можно видеть, что с ростом частоты сигнала период биений уменьшается.

2.2. Аттракторы неавтономных систем. Представьте уравнения неавтономных автоколебательных осцилляторов в виде трехмерных динамических систем, считая время третьей независимой переменной. Обсудите вид аттракторов в таком трехмерном фазовом пространстве. Что в такой интерпретации представляют собой фазовые портреты на плоскости переменных автономного осциллятора? Изобразите на одном рисунке фазовую траекторию и систему плоскостей, проведенных через период внешнего воздействия (сечения Пуанкаре). Обсудите динамику точек пересечения траектории и таких секущих. Дайте иллюстрации, использующие свойства периодичности внешнего воздействия.

Решение. Представим уравнение неавтономного осциллятора Ван-дер-Поля (2.1) в следующем виде:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= (\lambda - x^2)y - x + b \sin \theta, \\ \dot{\theta} &= \omega.\end{aligned}\tag{2.2}$$

Это стандартный вид трехмерной автономной динамической системы. При этом фазовое пространство (x, \dot{x}, t) образовано координатой осциллятора и его скоростью, а также третьей переменной, в качестве которой выступает время.

В аналогичной форме можно представить, например, уравнение неавтономного брюсселятора

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a - (b+1)x + x^2 y + B \sin(\omega t), \\ \dot{y} &= bx - x^2 y.\end{aligned}\tag{2.3}$$

В этом случае

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a - (b+1)x + x^2 y + B \sin \theta, \\ \dot{y} &= bx - x^2 y, \\ \dot{\theta} &= \omega.\end{aligned}\tag{2.4}$$

Фазовая траектория в расширенном трехмерном пространстве (x, \dot{x}, t) показана на рис. 2.2. В рамках такой интерпретации фазовый портрет на плоскости переменных автономного осциллятора (x, \dot{x}) представляет собой *проекцию* фазовой траектории на плоскость (x, \dot{x}) .

Для неавтономной системы в качестве сечений Пуанкаре удобно выбрать плоскости $t = const$, отстоящие друг от друга на расстояние, равное периоду

воздействия T , рис. 2.2. Поэтому их обычно называют *стробоскопическими сечениями*.

Фазовая траектория пересекает секущие плоскости в некоторых точках $(x_1, \dot{x}_1, T), \dots, (x_n, \dot{x}_n, nT), \dots$. Множество точек (x_n, \dot{x}_n) на плоскости переменных осциллятора (x, \dot{x}) дает *фазовый портрет в сечении Пуанкаре*. Это траектория некоторого *дискретного отображения*. Например, показанной на рис. 2.2 траектории в расширенном фазовом пространстве в сечении Пуанкаре отвечает неподвижная точка S (цикл периода 1). В качестве аттракторов в сечении Пуанкаре могут наблюдаться не только неподвижные точки, но и 2-циклы, 3-циклы и т.д. Это образы различных синхронных режимов. Квазипериодическому режиму в сечении Пуанкаре будет отвечать замкнутая орбита – *инвариантная кривая*.

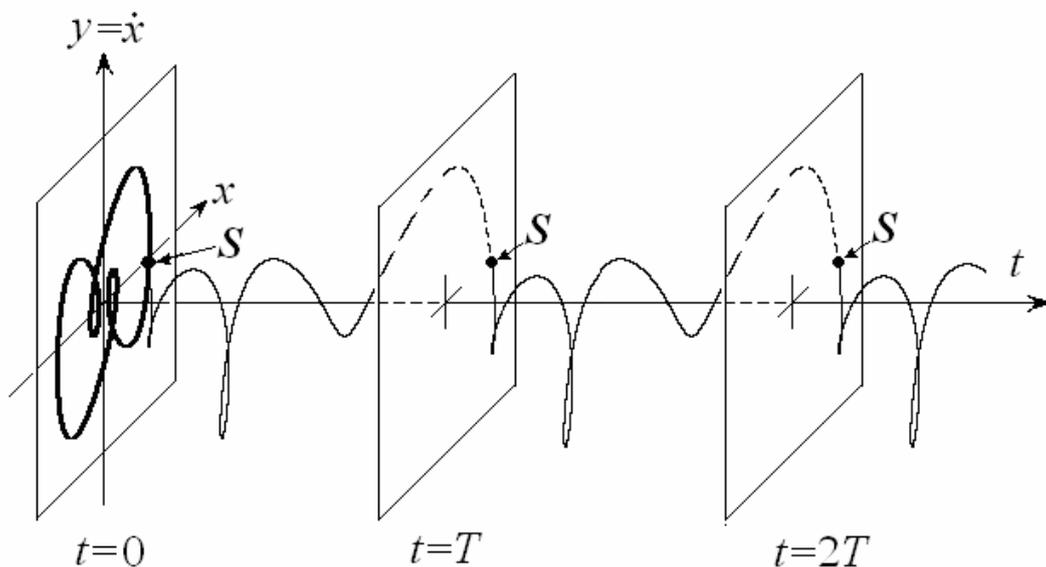


Рис. 2.2. Трехмерное фазовое пространство (x, \dot{x}, t) неавтономной системы, сечения Пуанкаре, проекция фазового портрета на плоскость переменных автономного осциллятора и неподвижная точка S в сечении Пуанкаре.

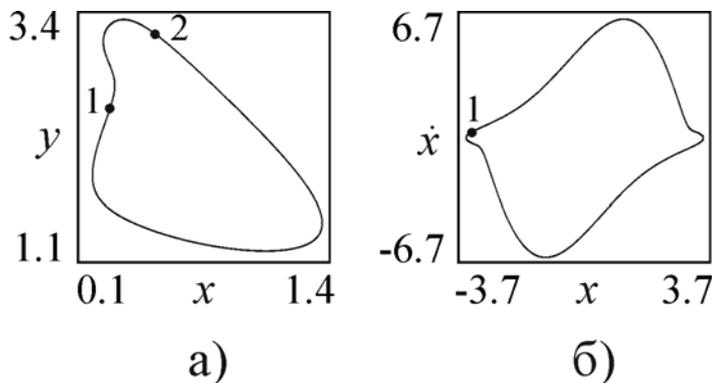


Рис. 2.3. Проекция аттракторов на фазовую плоскость автономной системы и точки сечения Пуанкаре: брюсселятор, $a = 0.4, b = 1.2, B = 0.05, \omega = 0.6$ (а); осциллятор Ван-дер-Поля, $\lambda = 0.5, b = 7.5, \omega = 0.5$ (б).

Рис. 2.3 иллюстрирует, как соотносятся проекции фазовой траектории на плоскости переменных автономного осциллятора и точки дискретного отображения – сечения Пуанкаре. При этом по виду фазовой траектории на плоскости (x, \dot{x}) не всегда можно «угадать» период цикла в сечении Пуанкаре. Например, на рис. 2.3 показаны проекции фазовых траекторий неавтономных брюсселятора и осциллятора Ван-дер-Поля, которым отвечают соответственно цикл периода 2 и неподвижная точка.

Особенность неавтономных систем в том, что фаза $\theta = \omega t$ периодична с периодом 2π . Этот факт можно учесть при построении фазового портрета. Пусть фазовая траектория пересекает первое сечение Пуанкаре в некоторой точке 1, рис. 2.4, а. Затем она движется в промежутке между сечениями и пересекает второе в некоторой точке 2. Будем считать, что точка «исчезает» на втором сечении и появляется на первом точно с такими же координатами (x, \dot{x}) , рис. 2.4, а. Затем она пересекает второе сечение в некоторой точке 3, снова появляется на первом сечении и т.д. На рис. 2.4 представлен пример такого построения для неавтономного брюсселятора, когда реализуется цикл периода 4 в сечении Пуанкаре. В соответствии с описанной процедурой аттрактор на таком рисунке выглядит как совокупность отрезков четырех линий.

Периодичность фазового пространства можно учесть, «склеивая» два сечения Пуанкаре, как показано на рис. 2.4, а стрелкой. Результат этой процедуры показан на рис. 2.4, б. Мы видим, что в результате получился классический по своему виду предельный цикл периода 4, который возникает в результате двух последовательных бифуркаций удвоения периода. При этом вид аттрактора полностью соответствует случаю автономных систем. Таким образом, описанная процедура делает понятным представление об аттракторах в неавтономных системах.

Синхронные режимы неавтономной системы в рамках описанной интерпретации выглядят как классические предельные циклы, рис. 2.5, а. Квазипериодическому режиму отвечает *тор*, как показано на рис. 2.5, б. Особенность синхронных режимов разного типа по сравнению с автономными системами состоит в том, что они возникают непосредственно на поверхности тора, поэтому их можно назвать *резонансными циклами*.

Следует отметить, что аттракторы неавтономных систем часто называют торами, даже если имеются в виду либо иллюстрации типа рис. 2.2, либо инвариантная кривая в сечении Пуанкаре.

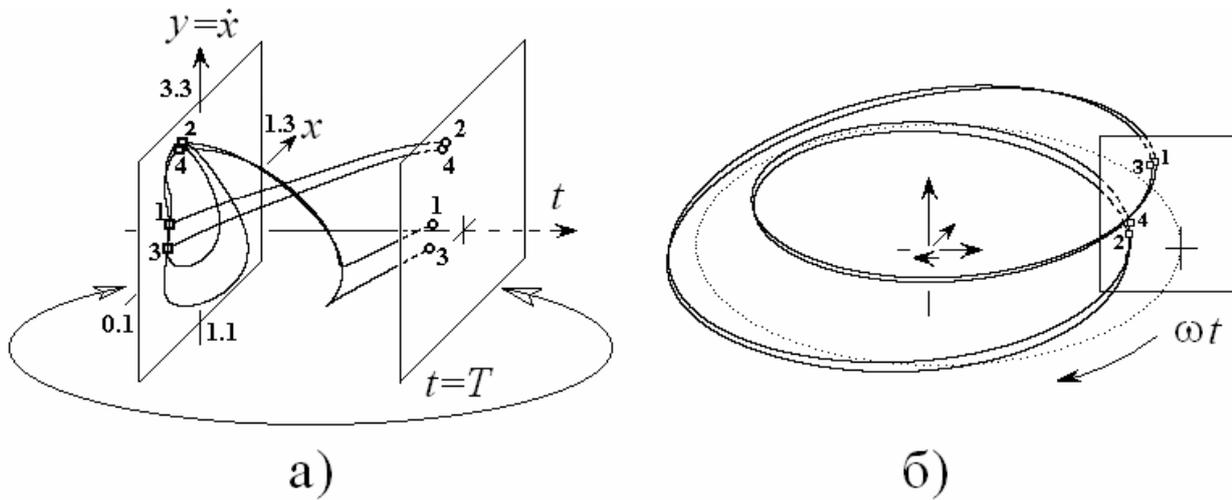
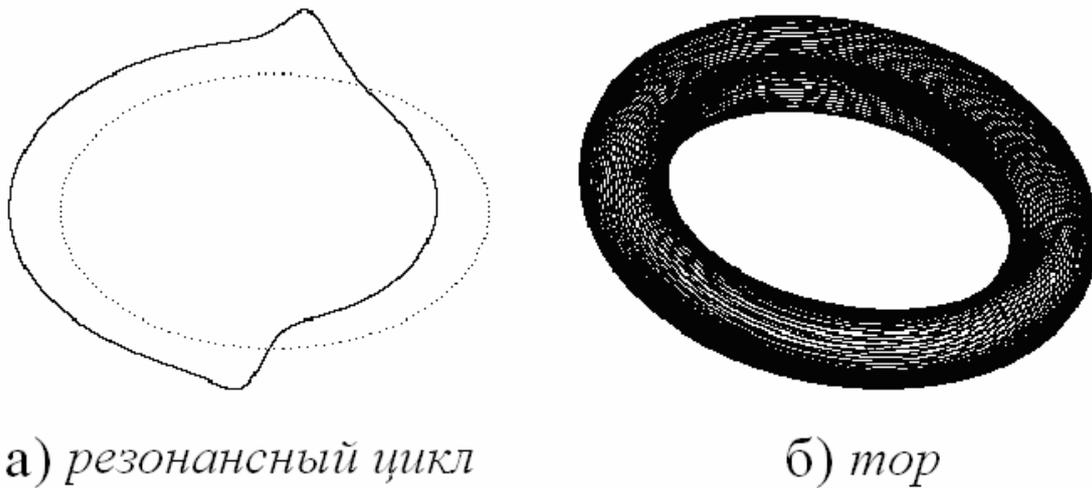


Рис. 2.4. Иллюстрация замыкания фазового пространства по переменной $\theta = \omega t$ на примере брусельатора. Значения параметров $B = 0.05$, $\omega = 0.72$, $a = 0.4$, $b = 1.2$.



а) резонансный цикл

б) тор

Рис. 2.5. Аттракторы осциллятора Ван-дер-Поля в «замкнутом» фазовом пространстве, $\lambda = 0.5$, $b = 7.5$; периодический режим – простейший резонансный цикл, $\omega = 0.5$ (а), квазипериодический режим – тор, $\omega = 5.25$ (б).

2.3. Нормировка в неавтономном уравнении Ван-дер-Поля. Обсудите, чем отличаются уравнения Ван-дер-Поля с внешним воздействием в форме (2.1) и в виде

$$\ddot{x} - \lambda(1 - x^2)\dot{x} + x = b \sin(\omega t). \quad (2.5)$$

Решение. Выполним в уравнении (2.5) следующую замену переменной и амплитуды внешнего сигнала:

$$x \rightarrow \frac{x}{\sqrt{\lambda}}, \quad b \rightarrow \frac{b}{\sqrt{\lambda}}. \quad (2.6)$$

В этом случае уравнение (2.5) переходит в (2.1). Таким образом, эти уравнения отличаются только нормировкой амплитуды сигнала и переменной. При этом

управляющие параметры в обеих формах записи одинаковы. В то же время, по своим свойствам системы (2.1) и (2.5) имеют определенные отличия. В автономной системе (2.1) при $\lambda = 0$ имеет место бифуркация Андронова-Хопфа, а в системе (2.5) она отсутствует, см. задачу 1.2.

2.4. Укороченное уравнение для осциллятора Ван-дер-Поля с гармоническим внешним воздействием. Используя метод медленно меняющихся амплитуд, получите укороченное уравнение для неавтономного осциллятора Ван-дер-Поля (2.1) в комплексной форме. Приведите его к безразмерному виду и введите существенные безразмерные параметры.

Решение. Пусть система (2.1) находится недалеко от порога возникновения автоколебаний (λ невелико), амплитуда колебаний и амплитуда воздействия малы, а частота воздействия близка к собственной частоте осциллятора. В этом случае колебания являются квазигармоническими, и можно воспользоваться методом медленно меняющихся амплитуд. При этом, в отличие от рассмотренного в задаче 1.1 автономного случая, будем искать решение не на собственной частоте осциллятора, а на частоте внешнего сигнала ω :

$$x(t) = \frac{1}{2} a(t) e^{i\omega t} + \text{к.с.} \quad (2.7)$$

Здесь $a(t)$ – медленно меняющаяся по сравнению с $e^{i\omega t}$ комплексная амплитуда. Для скорости изменения переменной x легко находим:

$$\dot{x} = \frac{1}{2} (\dot{a} e^{i\omega t} + i\omega a e^{i\omega t} + \text{к.с.}). \quad (2.8)$$

Наложим традиционное дополнительное условие

$$\dot{a} e^{i\omega t} + \text{к.с.} = 0. \quad (2.9)$$

Тогда для скорости получаем

$$\dot{x} = \frac{1}{2} (i\omega a e^{i\omega t} + \text{к.с.}) \quad (2.10)$$

Теперь необходимо подставить (2.8), (2.10) в исходное уравнение (2.1). С этой целью вычислим вторую производную

$$\ddot{x} = \frac{1}{2} (i\omega \dot{a} e^{i\omega t} - \omega^2 a e^{i\omega t} + \text{к.с.}) \quad (2.11)$$

С учетом дополнительного условия (2.9) можно получить, что

$$\frac{1}{2} (i\omega \dot{a} e^{i\omega t} + \text{к.с.}) = \frac{1}{2} (i\omega \dot{a} e^{i\omega t} - i\omega \dot{a}^* e^{-i\omega t}) = i\omega \dot{a} e^{i\omega t}. \quad (2.12)$$

Тогда имеем

$$\ddot{x} = i\omega \dot{a} e^{i\omega t} - \omega^2 x. \quad (2.13)$$

Отметим, что это выражение не связано с конкретной задачей, а характерно вообще для метода медленно меняющихся амплитуд, и его использование очень удобно.

Подставим теперь все полученные выражения для x, \dot{x}, \ddot{x} в исходное соотношение (2.1). Следуя логике метода медленно меняющихся амплитуд, сохраним только члены, содержащие экспоненциальный множитель вида $e^{i\omega t}$ (остальные на этом фоне являются быстро осциллирующими и исчезают при усреднении за период воздействия):

$$\begin{aligned}\ddot{x} + x &= i\omega \dot{a} e^{i\omega t} + (1 - \omega^2) \frac{a}{2} e^{i\omega t} + \dots, \\ \dot{x} &= \frac{1}{2} i\omega a e^{i\omega t} + \dots, \\ x^2 \dot{x} &= \frac{1}{8} [a^2 e^{2i\omega t} + 2|a|^2 + (a^*)^2 e^{-2i\omega t}] (i\omega a e^{i\omega t} - i\omega a^* e^{-i\omega t}) = \frac{1}{8} i\omega |a|^2 a e^{i\omega t} + \dots, \\ b \sin(\omega t) &= \frac{b}{2i} e^{i\omega t} + \dots\end{aligned}\tag{2.14}$$

Подставляя соотношения (2.14) в (2.1), получим:

$$\dot{a} + i \frac{\omega^2 - 1}{2\omega} a = \frac{\lambda}{2} a - \frac{1}{8} |a|^2 a - \frac{b}{2\omega}.\tag{2.15}$$

Это и есть искомое укороченное уравнение для комплексной амплитуды.

Укороченное уравнение (2.15) зависит от трех параметров. Их число можно уменьшить, приводя уравнение к безразмерному виду. С этой целью введем следующие безразмерные переменные и параметры:

$$\tau = \frac{\lambda t}{2}, \quad z = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} a, \quad \Delta = \frac{\omega^2 - 1}{\lambda\omega}, \quad \varepsilon = \frac{b}{2\omega\lambda^{3/2}}.\tag{2.16}$$

С их использованием уравнение (2.15) примет вид:

$$\dot{z} + i\Delta z = z - |z|^2 z - \varepsilon.\tag{2.17}$$

Уравнение (2.17) – это безразмерное укороченное уравнение, которое удобно для исследования. Хотя оно и является дифференциальным уравнением, как и исходная система, но его анализ может быть существенно продвинут, в первую очередь потому, что оно представляет собой двумерную систему, динамика которой протекает на фазовой плоскости.

Кроме того, в уравнение (2.17) входят всего два существенных параметра. Это безразмерная отстройка частоты сигнала от собственной частоты осциллятора Δ , причем в силу близости частот можно приближенно полагать

$$\Delta = \frac{\omega^2 - 1}{\lambda\omega} \approx 2 \frac{\omega - 1}{\lambda}.\tag{2.18}$$

Второй существенный параметр – безразмерная амплитуда внешнего сигнала

$$\varepsilon = \frac{b}{2\omega\lambda^{3/2}}. \quad (2.19)$$

Таким образом, анализ укороченной системы является двухпараметрическим, и необходимо изучить устройство плоскости параметров частота воздействия Δ – безразмерная амплитуда ε . Для исходной дифференциальной системы это не так: результат зависит от параметра λ , но, как следует ожидать из вида укороченного уравнения, для не малых его значений.

2.5. Укороченное уравнение для амплитуды и фазы. Координата и скорость осциллятора. Получите укороченные уравнения для действительных амплитуды и фазы осциллятора, а также уравнения в декартовых координатах. Получите соотношения, связывающие безразмерные действительные амплитуду и фазу с координатой и скоростью осциллятора. Обсудите связь медленных переменных и динамики отображения в сечении Пуанкаре.

Решение. Введем действительные амплитуду $R(\tau)$ и фазу осциллятора $\varphi(\tau)$ в соответствии с

$$z(\tau) = R(\tau)e^{i\varphi(\tau)}. \quad (2.20)$$

Подставим (2.20) в комплексное укороченное уравнение (2.17), умножим на $e^{-i\varphi}$ и отделим действительную и мнимую части. Тогда получаем уравнения, описывающие динамику амплитуды и фазы:

$$\begin{aligned} \dot{R} &= R - R^3 - \varepsilon \cos \varphi, \\ \dot{\varphi} &= -\Delta + \frac{\varepsilon}{R} \sin \varphi. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Перейдем теперь к декартовым координатам на фазовой плоскости укороченных уравнений, что удобно сделать, вводя координаты на комплексной плоскости $z = x + iy$. Подставляя это в (2.17) и отделяя в полученном соотношении действительную и мнимую части, получаем:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + \Delta y - x(x^2 + y^2) - \varepsilon, \\ \dot{y} &= y - \Delta x - y(x^2 + y^2). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Здесь для удобства использована пара переменных (x, y) , которые не следует путать с координатой и скоростью в исходных уравнениях.

Уравнения (2.17), (2.21), (2.22) являются разными представлениями укороченных уравнений для задачи о синхронизации осциллятора Ван-дер-Поля внешним сигналом. Подчеркнем, что это безразмерные уравнения, в частности, в них входит безразмерное время в соответствии с (2.16). В

зависимости от ситуации удобно использовать ту или иную форму укороченных уравнений.

Получим теперь в явном виде зависимости координаты и скорости осциллятора от времени через медленные амплитуду и фазу. Из (2.7) и (2.10) следует, что

$$\begin{aligned} x(t) &= 2\sqrt{\lambda}R(t)\cos[\omega t + \varphi(t)], \\ \dot{x}(t) &= -2\sqrt{\lambda}\omega R(t)\sin[\omega t + \varphi(t)]. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Множитель $2\sqrt{\lambda}$ связан с нормировкой, см. (2.16). Здесь использовано не безразмерное, а размерное время t , что достигается подстановкой в выражения $R(\tau)$ и $\varphi(\tau)$ соотношения $\tau = \frac{\lambda t}{2}$.

Отметим, что соотношения для координаты и скорости осциллятора связаны аналогично линейному случаю, хотя теперь амплитуда и фаза зависят от времени. Действительно, второе соотношение (2.23) получается из первого дифференцированием по времени, если полагать амплитуду и фазу константами. Это большое удобство метода медленно меняющихся амплитуд, которое связано с использованием дополнительного условия (2.9).

Медленные переменные позволяют понять динамику в сечении Пуанкаре. Действительно, сечения проведены в моменты времени $t_n = nT = \frac{2\pi n}{\omega}$, так что в соответствии с (2.23)

$$\begin{aligned} x_n &= 2\sqrt{\lambda}R(t_n)\cos[\varphi(t_n)], \\ \dot{x}_n &= -2\sqrt{\lambda}\omega^2 R(t_n)\sin[\varphi(t_n)]. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Медленные амплитуда и фаза, получаемые из укороченных уравнений, зависят от безразмерного времени $\tau = \frac{\lambda t}{2}$. Следовательно, сечения Пуанкаре проведены

через интервалы безразмерного времени $\tau = \frac{\lambda T}{2}$, т.е. при малых λ очень часто.

Поэтому траектория, задаваемая укороченными уравнениями на плоскости «медленных переменных», фактически, дает сечение Пуанкаре исходной системы. При этом неподвижной точке в укороченных уравнениях отвечает предельный цикл в исходной системе, а предельному циклу – тор.

2.6. Уравнение Адлера. Считая, что динамика переменной в укороченном уравнении происходит вблизи предельного цикла автономной системы, получите уравнение, описывающее динамику фазы. Укажите число существенных параметров, от которых зависит динамика фазы.

Решение. Уравнение (2.21) в случае отсутствия внешнего сигнала имеет вид $\dot{R} = R - R^3$. Ему отвечает стационарное решение $R = 1$, чему в терминах исходной системы отвечает устойчивый предельный цикл. Предположим, что амплитуда воздействия ε невелика, так что система совершает движение в окрестности этого предельного цикла. Подставим $R = 1$ во второе уравнение (2.21). (Поскольку соответствующий член содержит множитель ε , мы вправе использовать нулевой порядок аппроксимации для R .) В результате приходим к замкнутому уравнению для единственной переменной – фазы колебаний системы по отношению к внешнему воздействию:

$$\dot{\varphi} = -\Delta + \varepsilon \sin \varphi . \quad (2.25)$$

Его называют *уравнением Адлера*. Таким образом, в случае малого воздействия достаточно следить за динамикой фазы, которая и определяет качественно разные типы поведения.

В уравнении Адлера перенормировкой можно оставить всего один существенный параметр Δ/ε . Поэтому картина режимов является, фактически, однопараметрической. Однако мы сохраним в (2.25) оба параметра, поскольку это удобно для интерпретации и сравнения с полными укороченными уравнениями.

2.7. Уравнение Адлера и потенциал. Язык Арнольда. Перепишите уравнение Адлера с использованием потенциальной функции. Какие заключения о характере динамики системы можно сделать на основе анализа зависимости потенциала от фазы? Укажите области на плоскости параметров (Δ, ε) , которым отвечает разный тип динамики фазы.

Решение. Система (2.25) является примером одномерной градиентной системы, т.е. системы, допускающей описание с помощью потенциала. Введем потенциальную функцию

$$U(\varphi) = \Delta\varphi + \varepsilon \cos \varphi = \Delta \cdot \left[\varphi + \frac{\varepsilon}{\Delta} \cos \varphi \right] \quad (2.26)$$

и перепишем уравнение (2.25) в виде

$$\dot{\varphi} = -\frac{\partial U}{\partial \varphi} . \quad (2.27)$$

Метаморфозы потенциала при изменении параметра $|\varepsilon/\Delta|$ иллюстрирует рис. 2.6. При $|\varepsilon/\Delta| < 1$ потенциал монотонно зависит от φ . При $|\varepsilon/\Delta| = 1$ зависимость приобретает точки перегиба, где касательная горизонтальна, а

график локально имеет вид кубической параболы. При $|\varepsilon/\Delta| > 1$ потенциальная функция становится неоднозначной и имеет максимумы и минимумы.

Теперь динамику фазы можно наглядно представить, как скольжение частицы в вязкой жидкости по потенциальному профилю, заданному рис. 2.6. Тогда очевидно, что при $|\varepsilon/\Delta| > 1$ «частица» должна будет остановиться в одном из минимумов потенциальной функции. При этом фаза колебаний системы относительно фазы воздействия перестает меняться во времени. О таком режиме говорят как о режиме *захвата фазы*. Значение захваченной фазы осциллятора (точка остановки) определяется формально из условия минимума потенциала $U'(\varphi) = 0$, $U''(\varphi) > 0$, откуда получаем

$$\sin \varphi_0 = \Delta/\varepsilon, \quad \cos \varphi_0 < 0. \quad (2.28)$$

Отметим, что если $\cos \varphi_0 > 0$, то равновесие фазы будет неустойчивым, и ему отвечает максимум потенциальной функции.

Теперь вспомним уравнение (2.23), дающее связь фазы φ с исходной переменной x уравнения Ван-дер-Поля, причем в соответствии с нашим исходным предположением нужно положить $R = 1$:

$$x(t) = 2\sqrt{\lambda} \cos[\omega t + \varphi(t)]. \quad (2.29)$$

Из полученного соотношения видно, что режим захвата фазы $\varphi(t) = \varphi_0$ отвечает колебаниям в системе точно на частоте внешнего воздействия ω . Таким образом, это простейший пример синхронизации автоколебательного осциллятора внешним сигналом.

При $|\varepsilon/\Delta| < 1$ в системе, описываемой потенциалом на первом рис. 2.6, будет иметь место качественно другой тип поведения – однонаправленное движение, скорость которого осциллирует. (Наша гипотетическая частица будет «падать» вниз, скользя по потенциальному профилю.) Это режим *биений*, или *квазипериодический режим*, когда фаза не фиксирована, а постоянно меняется во времени. Заметим, что период осцилляций фазы стремится к бесконечности по мере приближения к критической ситуации.

На рис. 2.7 показаны области, где реализуется режимы захвата и биений плоскости параметров (Δ, ε) . Критическая ситуация имеет место на граничных линиях $\Delta = \pm\varepsilon$. Область захвата фазы имеет вид характерного языка, погруженного в область квазипериодических колебаний. Она имеет специальное название – *язык Арнольда*.

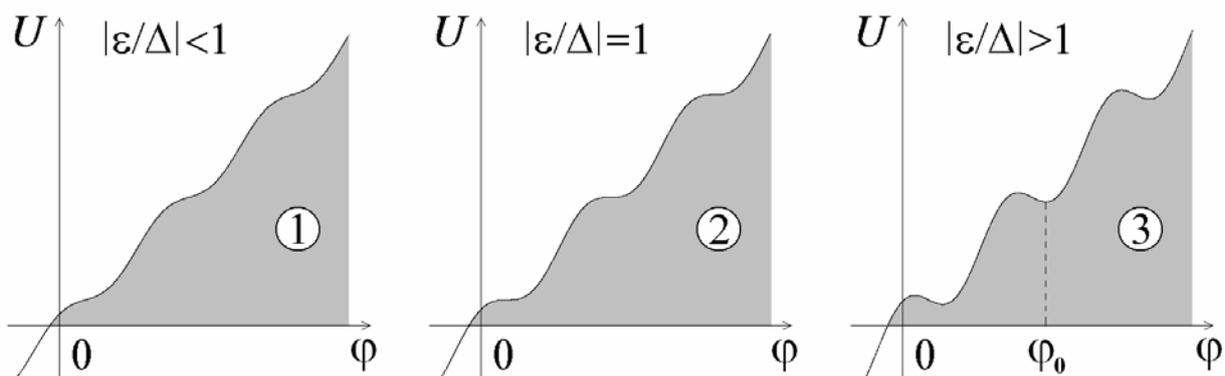


Рис. 2.6. График потенциальной функции уравнения Адлера при различных значениях $|\epsilon/\Delta|$.

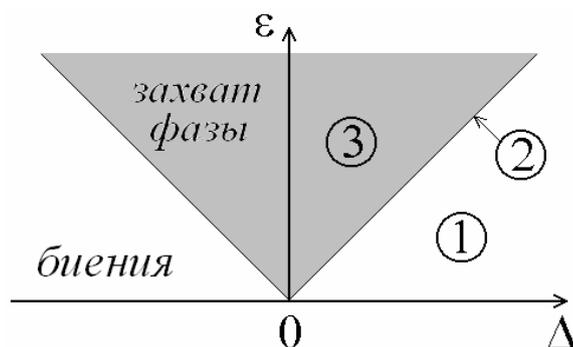


Рис. 2.7. Область синхронизации (захвата фазы) и квазипериодических режимов (биений) на плоскости расстройка частот Δ – амплитуда воздействия ϵ . Точки, отмеченные цифрами, отвечают соответствующим профилям потенциальной функции на рис. 2.6.

2.8. Бифуркации в уравнении Адлера. Дайте графическое решение уравнения Адлера и обсудите бифуркации в этом уравнении при пересечении границы языка Арнольда.

Решение. Проанализируем уравнение (2.25) графически – изобразим график функции $\sin\phi$ и проведем горизонтальную линию на уровне Δ/ϵ (рис. 2.8, а). Пусть сначала $\Delta/\epsilon < 1$. В области фаз, где синусоида поднимается выше этой прямой, правая часть уравнения положительна, т.е. $\dot{\phi} > 0$, и, следовательно, фазовая переменная ϕ нарастает во времени. В области, где она проходит ниже проведенной прямой, правая часть отрицательна, $\dot{\phi} < 0$, и фазовая переменная ϕ убывает. Точки, где прямая пересекается с синусоидой, отвечают состояниям равновесия, одно из которых устойчивое, а другое неустойчивое. При увеличении Δ/ϵ горизонтальная прямая располагается все выше, и обе точки равновесия приближаются друг к другу. В момент $\Delta/\epsilon = 1$ они сливаются и затем, при $\Delta/\epsilon > 1$, исчезают. В теории бифуркаций такую ситуацию часто называют *касательной бифуркацией* (смысл названия ясен из рис. 2.8, а).

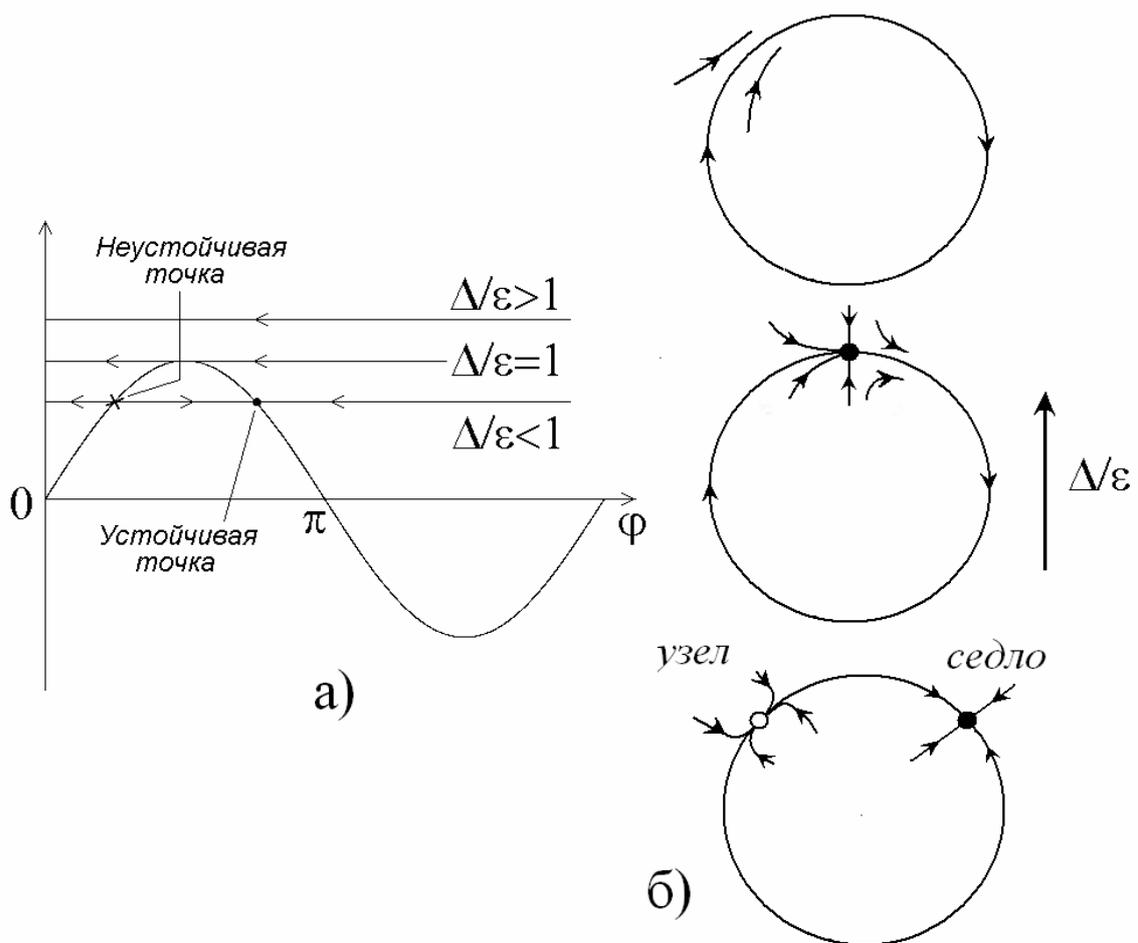


Рис. 2.8. К пояснению природы бифуркации на границе области синхронизации. Стрелки показывают направление изменения фазовой переменной во времени (а). Седло-узловая бифуркация на окружности единичного радиуса, ответственная за возникновение (разрушение) синхронизации (б).

Вспомним, что переменная φ является фазой колебаний и на плоскости переменных укороченных уравнений отвечает за положение изображающей точки на невозмущенном предельном цикле системы с $R = 1$ (см. задачу 2.6). Это позволяет дать иллюстрации описанной бифуркации, показанные на рис. 2.8, б. В этом случае устойчивая и неустойчивая точки образуют седло и узел (см. также задачу 2.14). Поэтому такую бифуркацию называют также *седло-узловой*. В результате этой бифуркации возникают (исчезают) седло и узел, что и приводит к возникновению (разрушению) синхронизации. Особенность данной задачи в том, что седло и узел лежат на общей сепаратрисе, из которой и возникает предельный цикл, отвечающий за режим биений⁸.

2.9. Фазовые соотношения синхронного режима. Какую фазу относительно внешнего сигнала имеет сигнал захваченного осциллятора?

⁸ Напомним, что в сечении Пуанкаре ему отвечает инвариантная кривая.

Решение. В исходном уравнении внешний сигнал имеет вид $b \sin(\omega t)$. В соответствии с (2.23) для колебаний осциллятора $x(t) = 2\sqrt{\lambda}R \cos[\omega t + \varphi(t)]$. Если частота сигнала больше собственной частоты осциллятора, то расстройка Δ положительна, и в соответствии с рис. 2.8 (или формулой (2.28)) на границе языка $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Это отвечает колебаниям по закону

$$x(t) = -2\sqrt{\lambda}R \sin(\omega t). \quad (2.30)$$

Внешний сигнал и осциллятор колеблются в противофазе. Можно сказать, что осциллятор опережает сигнал по фазе на π . Если частотная расстройка отсутствует и $\Delta = 0$, то фаза $\varphi = \pi$. Таким образом,

$$x(t) = -2\sqrt{\lambda}R \cos(\omega t). \quad (2.31)$$

Осциллятор опережает внешний сигнал по фазе на $\frac{\pi}{2}$. Если же частота сигнала меньше собственной и $\Delta < 0$, то на границе языка $\varphi = \frac{3\pi}{2}$, см. рис. 2.8. Тогда

$$x(t) = 2\sqrt{\lambda}R \sin(\omega t), \quad (2.32)$$

и колебания внешнего сигнала и отклик осциллятора синфазны.

2.10. Решение уравнения Адлера в режиме захвата фазы. Решите уравнение Адлера в области $|\Delta| < \varepsilon$ с начальным условием $\varphi(0) = \varphi_0$. Рассмотрите случай $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$. Обсудите характер динамики фазы в этом случае и оцените характерное время релаксации фазы к равновесному значению. Рассмотрите случай малой амплитуды сигнала.

Решение. Удобно ввести замену переменной $\phi = \frac{\pi}{2} - \varphi$, так что из (2.25) имеем:

$$\dot{\phi} = \Delta - \varepsilon \cos \phi. \quad (2.33)$$

Разделяя переменные, получим:

$$\int \frac{d\phi}{\Delta - \varepsilon \cos \phi} = \tau. \quad (2.34)$$

Интеграл является табличным, так что при $|\Delta| < \varepsilon$ и $\Delta \neq 0$

$$\ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{\phi}{2} + \nu}{\operatorname{tg} \frac{\phi}{2} - \nu} \right| = \alpha \tau + C. \quad (2.35)$$

Здесь введены обозначения

$$\alpha = \sqrt{\varepsilon^2 - \Delta^2}, \quad \nu = \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - \Delta^2}}{\varepsilon + \Delta}, \quad (2.36)$$

C – постоянная интегрирования, которая определяется начальным значением фазы ϕ_0 в соответствии с уравнением

$$\ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{\phi_0}{2} + \nu}{\operatorname{tg} \frac{\phi_0}{2} - \nu} \right| = C. \quad (2.37)$$

Воспользуемся начальным условием $\phi_0 = \frac{\pi}{2}$, так что $\phi_0 = \frac{\pi}{2} - \phi_0 = 0$ и поэтому

$C = 1$. Тогда из (2.35) получаем

$$\phi(\tau) = 2 \operatorname{arctg} \left(\nu \operatorname{th} \frac{\alpha \tau}{2} \right). \quad (2.38)$$

Поскольку мы положили $\phi = \frac{\pi}{2} - \varphi$, то теперь можно получить закон изменения во времени фазы осциллятора:

$$\varphi(\tau) = \frac{\pi}{2} - 2 \operatorname{arctg} \left(\nu \operatorname{th} \frac{\alpha \tau}{2} \right) \quad (2.39)$$

или с учетом (2.36)

$$\varphi(\tau) = \frac{\pi}{2} - 2 \operatorname{arctg} \left[\frac{\sqrt{\varepsilon^2 - \Delta^2}}{\varepsilon + \Delta} \operatorname{th} \left(\frac{\sqrt{\varepsilon^2 - \Delta^2}}{2} \tau \right) \right]. \quad (2.40)$$

Обсудим асимптотику динамики фазы при $\tau \rightarrow \infty$. В этом случае гиперболический тангенс стремится к единице, а фаза стремится к стационарному значению

$$\varphi(\tau) \rightarrow \frac{\pi}{2} - 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{\varepsilon^2 - \Delta^2}}{\varepsilon + \Delta} \right). \quad (2.41)$$

Нетрудно показать, что это значение удовлетворяет стационарному уравнению Адлера $\Delta - \varepsilon \sin \varphi = 0$.

С помощью (2.40) можно оценить характерное время релаксации фазы:

$$\tau \approx \frac{2}{\sqrt{\varepsilon^2 - \Delta^2}}. \quad (2.42)$$

Это время минимально при стремлении расстройки к нулю $\Delta \rightarrow 0$ $\tau \approx \frac{2}{\varepsilon}$ и обращается в бесконечность на границе языка синхронизации $\Delta \rightarrow \varepsilon$. Таким

образом, у границы языка (у порога бифуркации) динамика фазы происходит очень медленно.

Случай нулевой частотной расстройки следует рассматривать отдельно:

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \varepsilon \sin \varphi. \quad (2.43)$$

Это уравнение можно проинтегрировать:

$$\int \frac{d\varphi}{\sin \varphi} = \varepsilon \tau. \quad (2.44)$$

Интеграл также является табличным, так что

$$\ln \left| \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right| = \varepsilon \tau + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2} \right|. \quad (2.45)$$

Отсюда следует закон зависимости относительной фазы от времени

$$\varphi(t) = 2 \operatorname{arctg} \left(e^{\varepsilon t} \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2} \right). \quad (2.46)$$

Нетрудно видеть, что в асимптотике $\tau \rightarrow \infty$ фаза $\varphi \rightarrow \pi$, причем характерное время релаксации фазы можно оценить, как $\tau \approx \frac{1}{\varepsilon}$.

Заметим, что наши оценки времени релаксации фазы подтверждают сделанные при выводе уравнения Адлера предположения. Действительно, амплитуда в соответствии с уравнением $\dot{R} = R - R^3$ очень быстро выходит на стационарный уровень $R = 1$, а затем происходит медленная эволюция фазы.

2.11. Решение уравнения Адлера в режиме дрейфа фазы. Решите уравнение Адлера в области вне языка Арнольда $|\Delta| > \varepsilon$.

Решение. Если $|\Delta| > \varepsilon$, то интеграл (2.34) является табличным, при этом

$$\frac{1}{\alpha} \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\varepsilon} \operatorname{tg} \frac{\phi}{2} \right) = \tau - C. \quad (2.47)$$

Здесь

$$\alpha = \frac{\sqrt{\Delta^2 - \varepsilon^2}}{2}, \quad \nu = \frac{\sqrt{\Delta^2 - \varepsilon^2}}{\Delta + \varepsilon}, \quad (2.48)$$

C – постоянная интегрирования. Для нее из (2.47) получаем уравнение:

$$\operatorname{tg} \frac{\phi_0}{2} = -\nu \cdot \operatorname{tg}(\alpha C). \quad (2.49)$$

В свою очередь, из (2.47) получаем

$$\operatorname{tg} \frac{\phi(\tau)}{2} = -\nu \cdot \operatorname{tg}[\alpha(C - \tau)] = -\nu \frac{\operatorname{tg}(\alpha C) - \operatorname{tg}(\alpha \tau)}{1 + \operatorname{tg}(\alpha \tau) \cdot \operatorname{tg}(\alpha C)}. \quad (2.50)$$

Комбинируя (2.49) и (2.50), находим закон изменения переменной ϕ во времени

$$\phi(\tau) = 2 \operatorname{arctg} \frac{v \operatorname{tg} \frac{\phi_0}{2} + v^2 \operatorname{tg}(\alpha \tau)}{v - \operatorname{tg}(\alpha \tau) \cdot \operatorname{tg} \frac{\phi_0}{2}}, \quad (2.51)$$

так что получаем следующий закон изменения фазы во времени:

$$\phi(\tau) = \frac{\pi}{2} - 2 \operatorname{arctg} \frac{v \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi_0}{2} \right) + v^2 \operatorname{tg}(\alpha \tau)}{v - \operatorname{tg}(\alpha \tau) \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi_0}{2} \right)}. \quad (2.52)$$

Это решение уравнения Адлера в режиме дрейфа фазы с произвольным начальным условием. Как и при решении предыдущей задачи, удобно рассмотреть случай $\phi_0 = \frac{\pi}{2}$. Тогда с учетом (2.48)

$$\phi = \frac{\pi}{2} - 2 \operatorname{arctg} \left[\sqrt{\frac{\Delta - \varepsilon}{\Delta + \varepsilon}} \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\Delta^2 - \varepsilon^2} \tau \right) \right]. \quad (2.53)$$

2.12. Динамика фазы в режиме квазипериодических колебаний.

Обсудите характер динамики фазы в режиме квазипериодических колебаний.

Решение. Зависимость фазы от времени в режиме квазипериодических колебаний дается формулой (2.53). Если формально строить зависимость фазы от времени, следуя этой формуле, то фаза будет иметь скачки. Их можно избежать путем добавки к фазе величины $(\pm 2\pi)$, что соответствует переходу на другую ветвь многозначной функции, каковой является арктангенс. Полученные в результате зависимости $\phi(\tau)$ показаны на рис. 2.9.

В соответствии с выражением (2.53) зависимость фазы от времени имеет вид осцилляций периода $T = 2\pi / \sqrt{\Delta^2 - \varepsilon^2}$, наложенных на линейный дрейф фазы со средней скоростью

$$\langle \dot{\phi} \rangle = \begin{cases} -\sqrt{\Delta^2 - \varepsilon^2}, & \Delta > 0, \\ \sqrt{\Delta^2 - \varepsilon^2}, & \Delta < 0. \end{cases} \quad (2.54)$$

В непосредственной близости от границы языка период осцилляций стремится к бесконечности, а скорость дрейфа – к нулю. В этом случае можно наблюдать участки почти постоянной фазы, разделенные относительно короткими участками «проскальзывания» фазы (их называют *фазовыми слитами*), где она меняется на величину, близкую к 2π . Трансформация

зависимости фазы при приближении к границе зоны синхронизации состоит в увеличении участков примерно постоянной фазы.

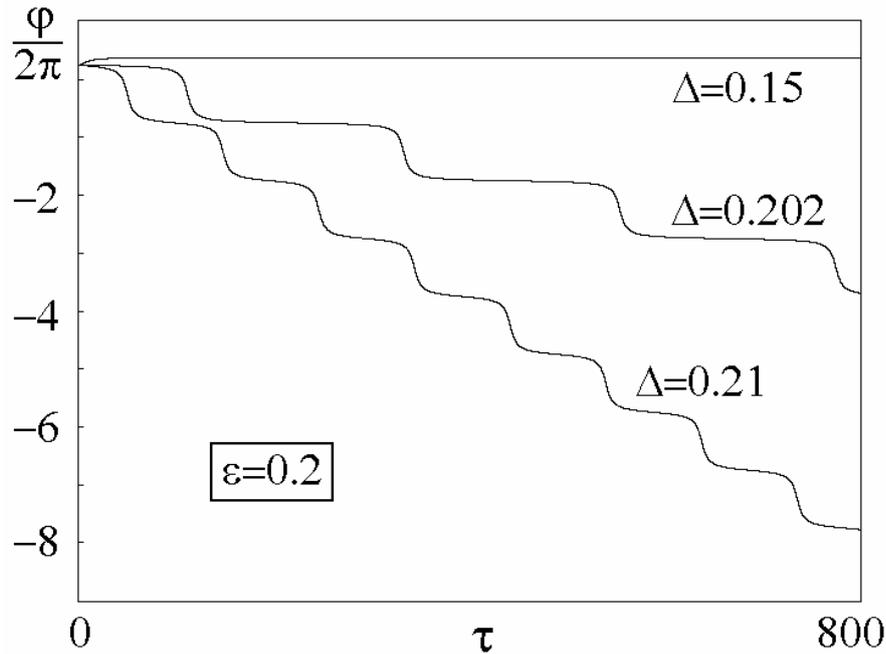


Рис. 2.9. Зависимость фазы от времени при $\varepsilon = 0.2$ внутри языка синхронизации ($\Delta = 0.15$) и вне языка в непосредственной близости от границы ($\Delta = 0.202$) и в несколько большей удаленности от нее ($\Delta = 0.21$).

Здесь снова полезно обратиться к соотношению (2.23), дающему закон изменения во времени исходной переменной x в уравнении Ван-дер-Поля. После некоторых преобразований приходим к

$$\begin{aligned}
 x &= 2\sqrt{\lambda}R(t)\cos[\omega t + \varphi(t)] = 2\sqrt{\lambda}\left[\cos\varphi\cos\left(\frac{2\omega\tau}{\lambda}\right) - \sin\varphi\sin\left(\frac{2\omega\tau}{\lambda}\right)\right] = \\
 &= 2\sqrt{\lambda}\frac{\sqrt{\Delta^2 - \varepsilon^2}\sin(\sqrt{\Delta^2 - \varepsilon^2}\tau)\cos\left(\frac{2\omega\tau}{\lambda}\right) - (\Delta\cos(\sqrt{\Delta^2 - \varepsilon^2}\tau) + \varepsilon)\sin\left(\frac{2\omega\tau}{\lambda}\right)}{\Delta + \varepsilon\cos(\sqrt{\Delta^2 - \varepsilon^2}\tau)}. \quad (2.55)
 \end{aligned}$$

Процесс, описываемый этим выражением, содержит две частоты, отвечающие быстрым и медленным колебаниям, соответственно

$$\Omega_0 = \frac{2\omega}{\lambda}, \quad \Omega_1 = \sqrt{\Delta^2 - \varepsilon^2}. \quad (2.56)$$

Здесь опять уместно, используя (2.16), выписать размерные быструю и медленные частоты

$$\omega_0 = \omega, \quad \omega_1 = \frac{\lambda\sqrt{\Delta^2 - \varepsilon^2}}{2}. \quad (2.57)$$

Эти частоты могут находиться в произвольном, в том числе иррациональном соотношении. Тогда мы и имеем дело не с периодическим, а с квазипериодическим колебательным процессом.

2.13. Сценарий разрушения синхронного режима в области малых амплитуд. На основе решения фазового уравнения опишите, как меняется вид реализации осциллятора (2.1) при выходе за пределы языка синхронизации при увеличении частоты внешнего сигнала ω . Сопоставьте качественные рассуждения с результатами численного моделирования на рис. 2.1.

Решение. Формулы (2.44) и (2.55) позволяют описать сценарий разрушения синхронного режима, который можно наблюдать, увеличивая частоту внешнего сигнала (расстройку Δ). При $|\Delta| < \varepsilon$ в системе имеет место режим захвата и реализуются периодические колебания точно на частоте сигнала. При переходе через границу языка синхронизации, т.е. при $|\Delta| > \varepsilon$, в соответствии с (2.55) возникает *модуляция* этих колебаний с периодом $T = \frac{4\pi}{\lambda\sqrt{\Delta^2 - \varepsilon^2}}$. Сначала при $|\Delta| = \varepsilon$ период модуляции стремится к бесконечности $T \rightarrow \infty$. При увеличении частоты сигнала период модуляции уменьшается. Именно такой сценарий можно наблюдать на рис. 2.1.

2.14. Бифуркации в укороченных уравнениях. Получите уравнения для неподвижных точек укороченных уравнений (2.17) и найдите условия основных бифуркаций в этой системе.

Решение. Найдем сначала неподвижные точки. Полагаем в (2.17) $\dot{z} = 0$:

$$\varepsilon = i\Delta z - z + |z|^2 z. \quad (2.58)$$

Умножим (2.58) на комплексно сопряженное выражение. В результате получим

$$\varepsilon^2 = |z|^2 (i\Delta + |z|^2 - 1) (-i\Delta + |z|^2 - 1) \quad (2.59)$$

или

$$\varepsilon^2 = |z|^2 (|z|^2 - 1)^2 + \Delta^2 |z|^2. \quad (2.60)$$

Это кубическое уравнение относительно $|z|^2 = x^2 + y^2$, таким образом, (2.17) может иметь одну или три неподвижные точки.

В системе наблюдаются бифуркации, аналогичные описанным в задачах 1.5-1.7. Их исследование удобно провести, используя уравнения (2.22) для медленных переменных в декартовых координатах

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + \Delta y - x(x^2 + y^2) - \varepsilon, \\ \dot{y} &= y - \Delta x - y(x^2 + y^2). \end{aligned} \quad (2.61)$$

Матрица линеаризации системы (2.61) имеет вид

$$M = \begin{pmatrix} 1 - 3x^2 - y^2 & \Delta - 2xy \\ -\Delta - 2xy & 1 - 3y^2 - x^2 \end{pmatrix}. \quad (2.62)$$

При бифуркационном анализе двумерных динамических систем на фазовой плоскости удобно оперировать со следом S матрицы линеаризации и ее якобианом J . Для следа матрицы, складывая диагональные члены в (2.62), находим

$$S = 2 - 4(x^2 + y^2). \quad (2.63)$$

Вычисляя определитель (2.62), находим и якобиан

$$J = (1 - 3x^2 - y^2)(1 - 3y^2 - x^2) + (\Delta - 2xy)(\Delta + 2xy), \quad (2.64)$$

откуда

$$J = 1 - 4(x^2 + y^2) + 3(x^2 + y^2)^2 + \Delta^2. \quad (2.65)$$

Бифуркация седло-узел. Условием седло-узловой бифуркации является равенство нулю якобиана J . Приравниваем его нулю и решаем полученное уравнение относительно $x^2 + y^2$:

$$|z|^2 = x^2 + y^2 = \frac{2}{3} \pm \frac{\sqrt{1 - 3\Delta^2}}{3}. \quad (2.66)$$

Подставим соотношение (2.66) в выражение для неподвижных точек (2.60) и получим для ε^2 :

$$\varepsilon^2 = \left(\frac{2}{3} \pm \frac{\sqrt{1 - 3\Delta^2}}{3} \right) \left[\left(-\frac{\sqrt{1 - 3\Delta^2}}{3} \pm \frac{1}{3} \right)^2 + \Delta^2 \right]. \quad (2.67)$$

Это условие задает на плоскости (Δ, ε) линии седло-узловых бифуркаций.

Точка сборки. Знаки « \pm » в выражении (2.67) соответствуют двум ветвям линии седло-узловой бифуркации. Можно видеть, что на плоскости параметров они сходятся в точках

$$\left(\Delta = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \varepsilon = \sqrt{\frac{8}{27}} \right), \quad (2.68)$$

которые, таким образом, отвечают бифуркациям коразмерности два – *точкам сборки*. Это название заимствовано из теории катастроф⁹.

Для того чтобы показать наглядно связь с теорией катастроф, обозначим в (2.60) $|z|^2 = \xi$:

$$\xi^3 - 2\xi^2 + (1 + \Delta^2)\xi - \varepsilon^2 = 0. \quad (2.69)$$

⁹ В теории бифуркаций используют также термин «бифуркация коразмерности два – трехкратное равновесие».

Всякий кубический полином можно привести к виду без квадратичного члена, если выполнить замену переменных типа сдвига. В нашем случае следует положить $\xi = \eta + \frac{2}{3}$. Тогда из (2.69) получаем

$$\eta^3 + \left(\Delta^2 - \frac{1}{3}\right)\eta + \frac{2}{27} + \frac{2}{3}\Delta^2 - \varepsilon^2 = 0. \quad (2.70)$$

Делая обозначения

$$a = \Delta^2 - \frac{1}{3}, \quad b = \frac{2}{27} + \frac{2}{3}\Delta^2 - \varepsilon^2, \quad (2.71)$$

приходим к канонической для катастрофы сборки форме

$$\eta^3 + a\eta + b = 0. \quad (2.72)$$

Формула (2.72) в пространстве (b, a, η) задает поверхность, показанную на рис. 2.10. Ее характерный вид и объясняет название «сборка», поскольку напоминает сборку на ткани. В проекции на плоскость (b, a) эта конфигурация дает сходящиеся в точке сборки линии, которые в теории катастроф называют складками, а в теории бифуркаций – линиями седло-узловых бифуркаций. Можно воспользоваться полученным в задаче 1.7 готовым уравнением этих линий для канонической формы катастрофы сборки (1.51) и получить

$$\varepsilon^2 = \frac{2}{27} + \frac{2}{3}\Delta^2 \pm \frac{2}{\sqrt{27}} \left(-\Delta^2 + \frac{1}{3}\right)^{3/2}, \quad (2.73)$$

что эквивалентно (2.67). На рис. 2.10 серым цветом выделена область на плоскости параметров, внутри которой уравнение (2.72) имеет три решения, а вне которой – одно.

Отметим, что вблизи точки сборки линии бифуркаций образуют характерное полукубическое острие, что совершенно очевидно из (2.73).

Бифуркация Андронова-Хопфа. Найдем теперь на плоскости параметров (Δ, ε) линию бифуркации Андронова-Хопфа. Условие бифуркации Андронова-Хопфа отвечает равенству нулю следа матрицы линеаризации $S = 0$ при дополнительном требовании $J > 0$. Из (2.63) в этом случае следует, что

$$|z|^2 = x^2 + y^2 = \frac{1}{2}. \quad (2.74)$$

Подставляем (2.74) в (2.60) и получаем

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{2} \left(\Delta^2 + \frac{1}{4}\right). \quad (2.75)$$

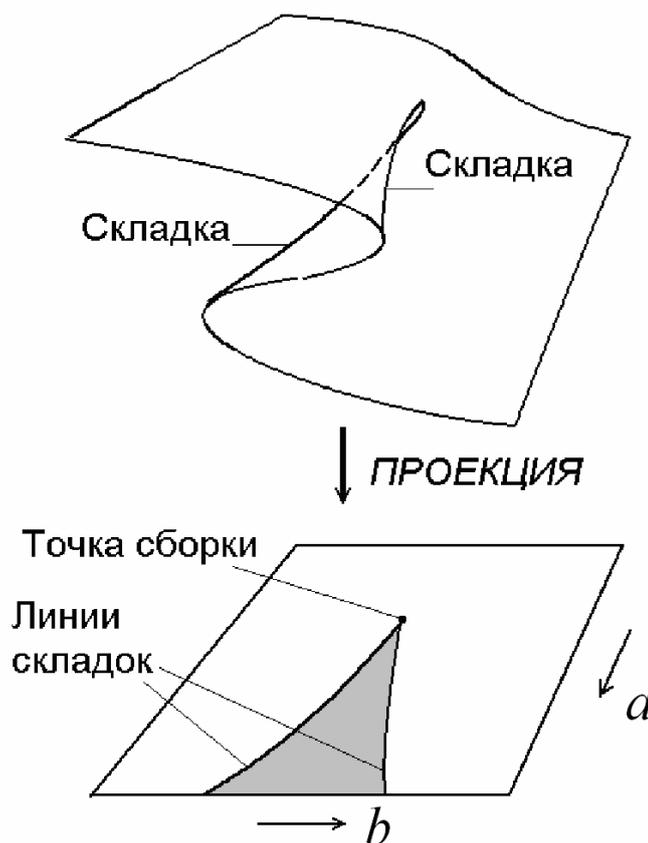


Рис. 2.10. Трехмерный график поверхности (2.72) и возникновение складок и сборки при проецировании.

Линия бифуркации Андронова-Хопфа (2.75) представляет собой гиперболу, которая при больших расстройках имеет асимптоты $\varepsilon = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \Delta$.

Отметим, что только часть этой линии, которой отвечает $J > 0$, соответствует бифуркации Андронова-Хопфа. Из (2.74) и (2.75) легко находим выражение для якобиана

$$J = \Delta^2 - \frac{1}{4}, \quad (2.76)$$

так что необходимо, чтобы $|\Delta| > \frac{1}{2}$.

Точка Богданова-Такенса. Найдем теперь общую точку бифуркаций Андронова-Хопфа и седло-узел. Условие их совместности означает, что след и якобиан одновременно обращаются в ноль. Из (2.75) и (2.76) в этом случае легко получаем

$$\Delta = \pm \frac{1}{2}, \quad \varepsilon = \frac{1}{2}. \quad (2.77)$$

Вливание предельного цикла в петлю сепаратрисы. Появление точки Богданова-Такенса «сигнализирует» о возможности еще одной классической

бифуркации – бифуркации влипания предельного цикла в петлю сепаратрисы, которая является «атрибутом» окрестности этой точки, задача 1.4. Найти ее аналитически невозможно, и мы обсудим ее при численном исследовании системы.

2.15. Устройство плоскости параметров укороченной системы уравнений. Изобразите бифуркационные линии и точки на плоскости параметров частотная расстройка Δ – амплитуда сигнала ε и постройте фазовые портреты в характерных точках. Сравните с результатами, полученными с помощью уравнения Адлера.

Решение. Бифуркационные линии и точки на плоскости параметров (Δ, ε) , найденные с помощью соотношений (2.67), (2.75) и (2.77), показаны на рис. 2.11. Следует отметить, что картина симметрична относительно оси безразмерной амплитуды ε , поэтому можно рассматривать только область положительных значений частотной расстройки Δ .

Сначала обратимся к нижней части языка синхронизации, которой отвечают малые амплитуды сигнала ε . Вне языка синхронизации можно видеть предельный цикл, охватывающий неустойчивый фокус 1 (вставка 1). Предельный цикл близок к окружности единичного радиуса, так что наблюдаемая картина аналогична той, которая получается с помощью уравнения Адлера, рис.2.8,б. Отличие состоит в появлении неподвижной точки вблизи начала координат.

Если пересечь границу языка синхронизации, оставаясь в области малых амплитуд, то на предельном цикле рождается пара новых неподвижных точек – устойчивый узел 2 и седло 3 (вставка 2), так что общее число неподвижных точек становится равным трем. Новые точки 2 и 3 лежат на общей сепаратрисе в форме замкнутой кривой, близкой к окружности единичного радиуса. Это также аналогично картине, установленной с помощью уравнения Адлера. При этом в соответствии с рис.2.8,а, седло и узел рождаются в точке, отвечающей фазе $\pi/2$.

Увеличим теперь амплитуду сигнала. В этом случае неподвижная точка 1 уходит из начала координат и превращается из неустойчивого фокуса в неустойчивый узел (вставка 3). При дальнейшем увеличении амплитуды она сближается с седлом. При переходе через верхнюю ветвь линии седло-узловой бифуркации эти две неподвижные точки сливаются и исчезают (вставка 4). В результате общая сепаратриса разрушается и остается одна устойчивая неподвижная точка – устойчивый узел. Эта картина уже не описывается уравнением Адлера.

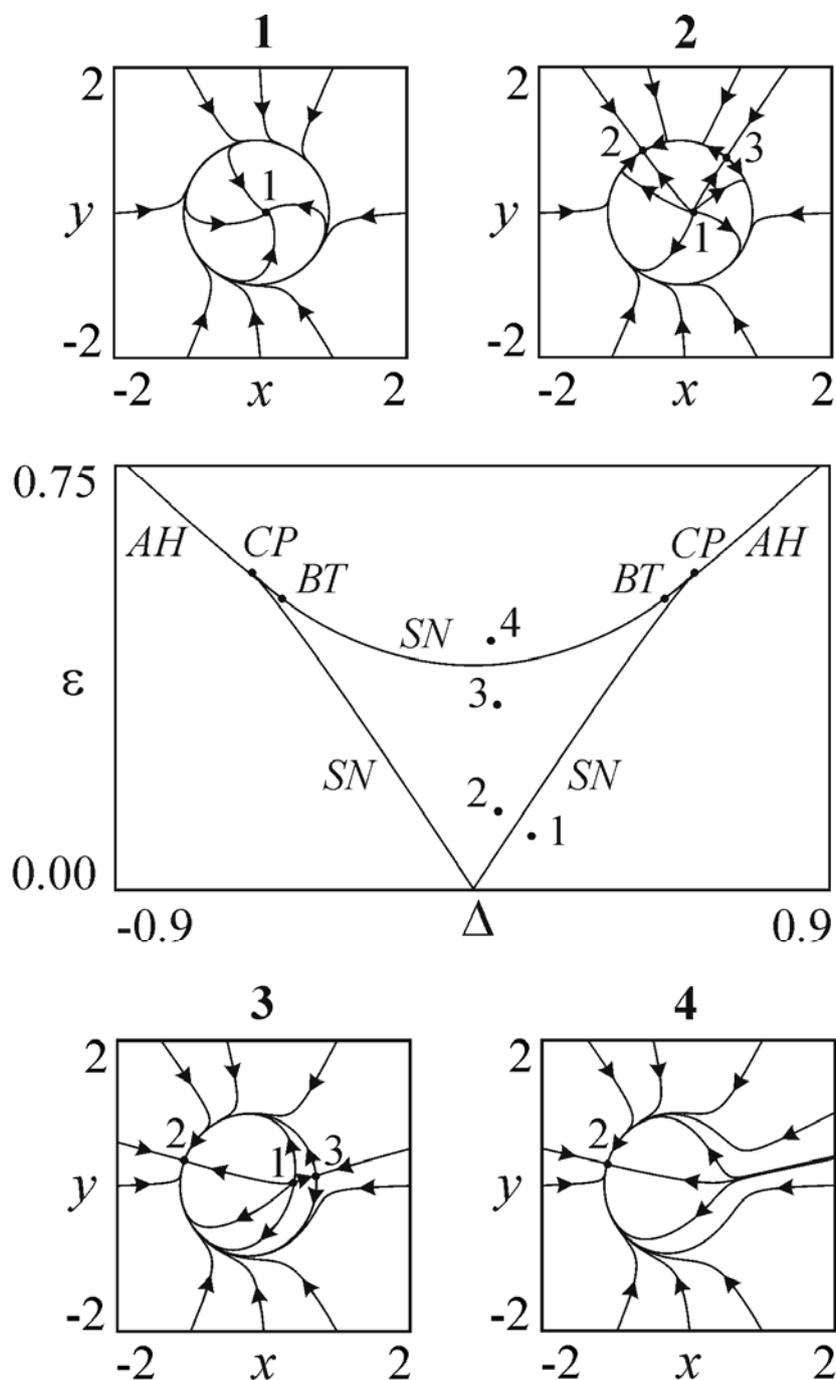


Рис. 2.11. Плоскость параметров укороченного уравнения (2.61) и характерные фазовые портреты; *SN* – линии седло-узловых бифуркаций, *AH* – линии бифуркаций Андронова-Хопфа, *CP* – точки сборки, *BT* – точки Богданова-Тakensа.

Описанная картина типична в большей части плоскости параметров, но модифицируется при приближении к точкам сборки и Богданова-Тakensа. На рис. 2.12 окрестность этих точек показана в увеличенном виде. Соответствующие перестройки происходят в очень узком диапазоне параметров, поэтому для удобства восприятия рядом показана схематическая картина бифуркаций. На рис. 2.12 можно видеть, что из точки Богданова-Тakensа выходит линия бифуркации Андронова-Хопфа, а также линия *G*

нелокальной бифуркации – влипания предельного цикла в петлю сепаратрисы. Эта картина является канонической для бифуркации Богданова-Тakensа, см. задачу 1.4. Линия G заканчивается на другой ветви линии седло-узловой бифуркации. Серым цветом на схематическом рисунке показана область сборки, внутри которой система имеет три неподвижных точки.

Выше линии седло-узловой бифуркации на рис. 2.12 в системе имеется единственная неподвижная точка – устойчивый узел 2 (вставка 1)¹⁰. Если уменьшить амплитуду сигнала, то в результате седло-узловой бифуркации в его окрестности рождается еще два равновесия – седло 3 и устойчивый узел 1, который затем превращается в устойчивый фокус (вставка 2). Появление пары новых равновесий вблизи точки 2 не случайно, так как вся картина имеет место в окрестности точки сборки, а в этой точке все три равновесия сливаются.

При дальнейшем уменьшении амплитуды пересекаем линию бифуркации Андронова-Хопфа, в результате чего устойчивый фокус 1 становится неустойчивым, и от него отделяется устойчивый предельный цикл (вставка 3). На языке динамики исходной системы это означает разрушение синхронизации. При этом возникший предельный цикл не охватывает начало координат, что приводит к определенным особенностям сценария возникновения квазипериодического режима, см. задачу 2.16.

Если еще больше уменьшить амплитуду сигнала, то пересекаем вторую ветвь седло-узловой бифуркации, так что теперь сливаются седло 3 и устойчивый узел 2 (переход от вставки 3 к вставке 4). В конечном итоге остается только устойчивый предельный цикл и неустойчивый фокус внутри него. Предельный цикл при этом увеличивается в размере и при некотором пороговом значении амплитуды охватывает начало координат. В этом случае формируется картина квазипериодического поведения, которая на качественном уровне уже отвечает уравнению Адлера.

Если при переходе от вставки 3 уменьшить одновременно амплитуду и расстройку, то пересекаем линию нелокальной бифуркации. В этом случае предельный цикл сталкивается с сепаратрисой седла и исчезает (вставка 5). Эта ситуация, однако, имеет место в очень узком диапазоне изменения параметров.

Таким образом, анализ полной картины бифуркаций укороченных уравнений обнаруживает два основных механизма возникновения квазипериодических колебаний за счет разрушения режима синхронизации:

- в области малых амплитуд – за счет седло-узловой бифуркации двух неподвижных точек, лежащих на общей сепаратрисе;

¹⁰ Мы сохраняем нумерацию точек, аналогичную рис. 2.11.

- в области больших амплитуд – за счет возникновения в результате бифуркации Андронова-Хопфа предельного цикла.

Оба этих механизма являются типичными и для других автоколебательных систем. Полезно сформулировать их в терминах динамики исходной системы.

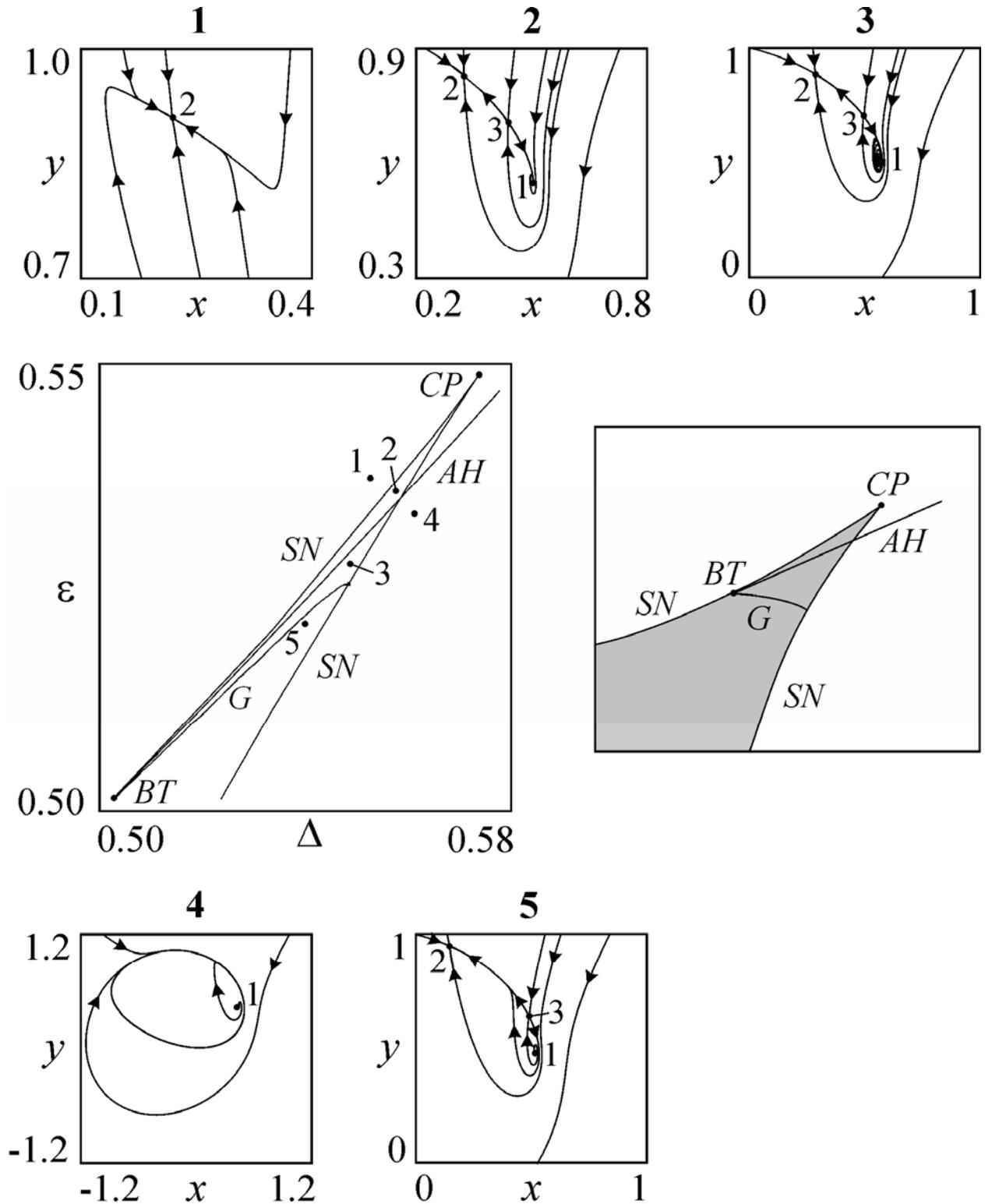


Рис. 2.12. Увеличенный фрагмент плоскости параметров укороченного уравнения (2.61) в окрестности точек сборки и Богданова-Такенса. Серым цветом на схематическом рисунке показана область, внутри которой система имеет три неподвижных точки.

В первом случае синхронный режим отвечает устойчивому и неустойчивому предельным циклам, лежащим на сепаратрисной поверхности в виде тора. Это резонансные циклы на торе. В результате седло-узловой бифуркации они сливаются и исчезают, так что остается *эргодический тор* (т.е. тор, всюду плотно покрываемый фазовыми траекториями). Второй механизм связан с возникновением тора из предельного цикла, теряющего устойчивость. Это ситуация *бифуркации Неймарка-Сакера*, которая возможна только в трехмерных потоковых динамических системах.

2.16. Сценарий рождения квазипериодического режима в области больших амплитуд. С помощью простой кинематической модели в виде изображающей точки, вращающейся с определенной частотой Ω по окружности, лежащей вдали от начала координат (рис. 2.13), дайте характеристику режима с предельным циклом, не охватывающим начало координат. Обсудите, как возникает модуляция периодического режима при превышении порога бифуркации Андронова-Хопфа в этом случае. Подтвердите рассмотрение с помощью вычисления реализаций для осциллятора Ван-дер-Поля (2.1) при значениях параметров $b = 0.2$, $\lambda = 0.5$ и частоты а) $\omega = 1.272$, б) $\omega = 1.28$, в) $\omega = 1.35$.

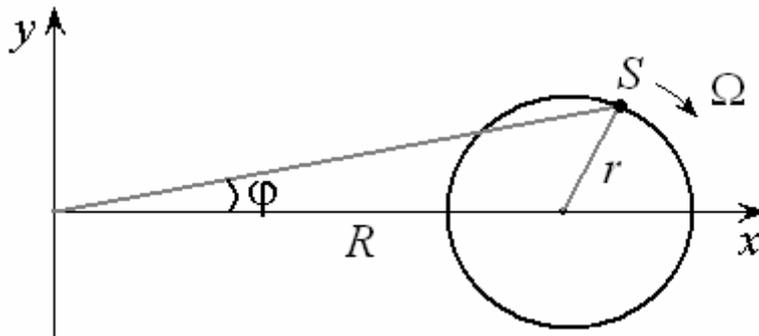


Рис. 2.13. Кинематическая модель в виде изображающей точки, вращающейся с определенной частотой Ω по окружности, лежащей вдали от начала координат.

Решение. Представленная система моделирует предельный цикл, не охватывающий начало координат на плоскости медленно меняющихся переменных. Нетрудно видеть, что соответствующая фаза изображающей точки может быть вычислена с помощью соотношения

$$\varphi(t) = \arctg \frac{r \sin(\Omega t)}{R + r \cos(\Omega t)} \approx \frac{r}{R} \sin(\Omega t), \quad (2.78)$$

где r – радиус предельного цикла, который считаем малым. Динамика переменной осциллятора связана с фазой соотношением (2.23), так что

$$\begin{aligned}
x(t) &= 2\sqrt{\lambda}R \cos[\omega t + \varphi(t)] = 2\sqrt{\lambda}R \cos\left[\omega t + \frac{r}{R} \sin(\Omega t)\right] \approx \\
&\approx 2\sqrt{\lambda}R \cos(\omega t) + 2\sqrt{\lambda}r \sin(\Omega t)\cos(\omega t).
\end{aligned} \tag{2.79}$$

У порога бифуркации Андронова-Хопфа размер предельного цикла растет как корень квадратный из надкритичности. В нашем случае $r \approx \sqrt{\varepsilon_c - \varepsilon}$. Тогда получаем

$$x(t) \propto R \cos(\omega t) + \sqrt{(\varepsilon_c - \varepsilon)} \sin(\Omega t)\cos(\omega t). \tag{2.80}$$

Таким образом, колебания на частоте внешнего сигнала ω оказываются промодулированными по амплитуде с частотой движения точки по предельному циклу. Поэтому будут происходить следующие изменения характера колебаний при переходе через порог бифуркации Андронова-Хопфа. В спектре будет присутствовать частота ω , отвечающая внешнему сигналу, причем в соответствии с (2.80) недалеко от порога она будет доминировать. На фоне колебаний с частотой воздействия ω появляются колебания на другой частоте Ω , выбираемой самой автоколебательной системой. При этом колебания оказываются промодулированными с периодом $T = \frac{2\pi}{\Omega}$, не зависящим от надкритичности. С ростом надкритичности амплитуда этой модуляции растет.

Реализации для неавтономной системы Ван-дер-Поля (2.1), иллюстрирующие описанный сценарий, показаны на рис. 2.14. Заметим, что для возникновения соответствующего сценария не важно, уменьшаем ли мы амплитуду или увеличиваем частоту внешнего сигнала, а важен сам факт перехода через порог бифуркации Андронова-Хопфа. На представленных рисунках хорошо видно, что возникает модуляция сигнала, причем с определенным периодом. При удалении от пороговой ситуации амплитуда модуляции нарастает, а период не меняется. В этом существенное отличие от картины, даваемой уравнением Адлера и представленной на рис. 2.1 (см. задачи 2.1 и 2.14). Еще один новый момент состоит в степени возмущения предельного цикла, что хорошо видно на фазовых портретах. Теперь амплитуда сигнала столь велика, что фазовые траектории на рис. 2.14 могут посещать даже окрестность начала координат.

Если теперь существенно уменьшить амплитуду внешнего сигнала, то возникнет ситуация, когда основной частотой в спектре служит частота, порождаемая самой системой. Происходит переход к картине, описываемой

уравнением Адлера. Вопрос о том, какой момент считать разрушением синхронизации не является однозначным, и, в определенной мере, является предметом договоренности. Можно, например, считать, что синхронизация разрушается непосредственно в момент рождения тора в фазовом пространстве. Это выглядит достаточно логичным с точки зрения динамики в сечении Пуанкаре, когда цикл соответствующего отображения сменяется непериодическим режимом в виде инвариантной кривой. На плоскости медленных переменных это момент рождения предельного цикла в результате бифуркации Андронова-Хопфа. С другой стороны, мы видели, что в этом случае в спектре доминирует все же частота сигнала, так что это режим, который все еще можно считать синхронным.

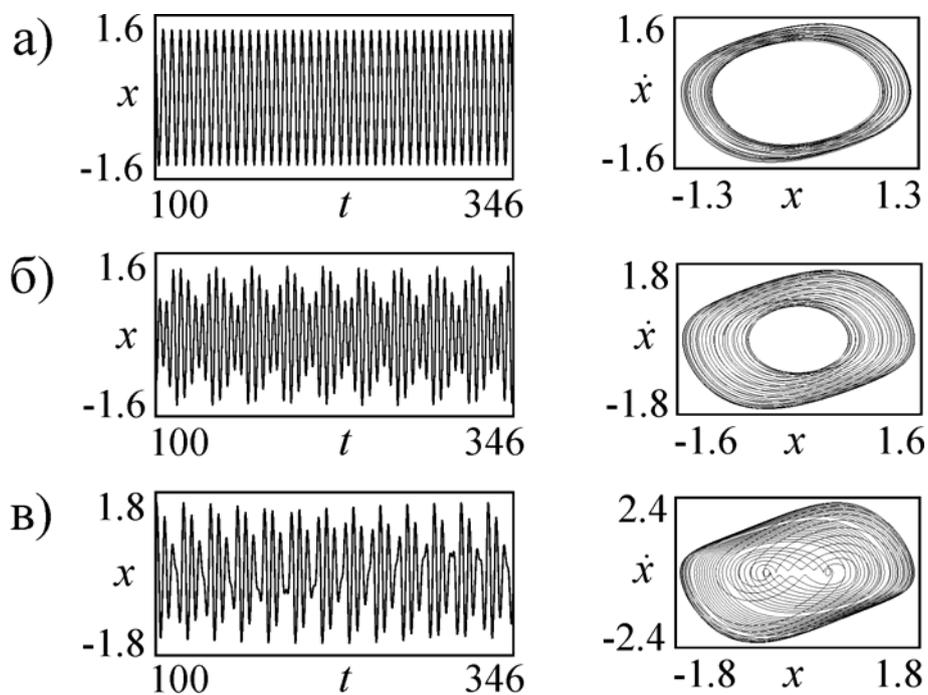


Рис. 2.14. Фазовые портреты и реализации неавтономного осциллятора Ван-дер-Поля; $b = 0.7$, $\lambda = 0.5$, $\omega = 1.272$ (а), $\omega = 1.28$ (б), $\omega = 1.35$ (в).

Еще один вариант состоит в том, чтобы по аналогии с рис. 2.6 считать, что за разрушение синхронизации ответственен момент, когда возникает неограниченный дрейф фазы. Как видно из рис. 2.13, при малом размере предельного цикла фаза осциллирует, причем такой характер ее динамики сохраняется до тех пор, пока предельный цикл не охватит начало координат на плоскости медленных переменных. В этот момент возникает неограниченный дрейф фазы. Заметим, что рождающийся предельный цикл достаточно быстро растет в размере, и линия, отвечающая проходу предельного цикла через начало координат, вообще говоря, близка к линии бифуркации Андронова-Хопфа.

2.17. Резонансы на гармонике типа 3:1. Покажите, что для случая, когда частота сигнала примерно в три раза меньше собственной частоты осциллятора, возможен его резонансный отклик на гармонике внешней силы. Для этого ищите решение в виде суммы линейного отклика осциллятора на частоте сигнала и нелинейного отклика на собственной частоте. Покажите, что для нелинейного отклика справедливо уравнение (2.1) с точностью до нормировки амплитуды.

Решение. Пусть частота сигнала примерно в три раза меньше собственной частоты осциллятора, т.е. $\omega \approx \frac{1}{3}$. Осциллятор Ван-дер-Поля является нелинейной системой, поэтому воздействие с некоторой частотой вызывает появление ее гармоник. Если частота гармоники близка к собственной частоте осциллятора, то возможен его резонансный отклик.

В «нулевом» порядке малости достаточно найти отклик осциллятора на внешнее воздействие в линейном приближении. В этом случае из (2.1) имеем

$$\ddot{x} + x = b \sin(\omega t),$$

так что $x = A \sin(\omega t)$, где $A = \frac{b}{1 - \omega^2} \approx \frac{9}{8} b$. Этот сигнал и порождает гармонику на утроенной частоте. Чтобы показать это, подставим в уравнение (2.1) $x(t) = y(t) + A \sin(\omega t)$, где $y(t)$ – искомый отклик на частоте 3ω , близкой к собственной частоте осциллятора. Нелинейность в осцилляторе Ван-дер-Поля $x^2 \dot{x}$ при такой подстановке порождает члены

$$\begin{aligned} x^2 \dot{x} = [y + A \sin(\omega t)]^2 [\dot{y} + A \omega \cos(\omega t)] = y^2 \dot{y} + 2y \dot{y} A \sin(\omega t) + \\ + A^2 \dot{y} \sin^2(\omega t) + y^2 A \omega \cos(\omega t) + y A^2 \omega \sin(2\omega t) + A^3 \omega \cos(\omega t) \sin^2(\omega t). \end{aligned} \quad (2.81)$$

В выражении (2.81) нужно оставить только резонансные слагаемые, которые меняются с частотой 3ω . Вклад в колебания на утроенной частоте вносят только три из них. Во-первых, это член с нелинейностью типа осциллятора Ван-дер-Поля $y^2 \dot{y}$. Во-вторых, слагаемое

$$A^3 \omega \cos(\omega t) \sin^2(\omega t) = \frac{1}{4} A^3 \omega [\cos(\omega t) - \cos(3\omega t)] = -\frac{1}{4} A^3 \omega \cos(3\omega t) + \dots$$

Оно имеет простую физическую интерпретацию и играет роль внешней силы на утроенной частоте.

Кроме того, вклад вносит член $\dot{y} A^2 \sin^2(\omega t)$. Нетрудно показать, что если искать отклик $y(t)$ на утроенной частоте, то при усреднении он эквивалентен

$\frac{A^2}{2}\dot{y}$. Благодаря этому члену в систему вносится дополнительная диссипация, тем большая, чем больше амплитуда внешнего сигнала.

Подставляя эти результаты в (2.1) и действуя с переменной y аналогично задаче 2.4, получаем следующее уравнение:

$$\ddot{y} - \left(\lambda - \frac{A^2}{2} - y^2\right)\dot{y} + y = \frac{1}{4}A^3\omega\cos(3\omega t). \quad (2.82)$$

Таким образом, гармоника внешней силы, возникшая на нелинейности, возбуждает отклик осциллятора вблизи его собственной частоты, причем уравнение с точностью до перенормировки амплитуды $b \rightarrow \frac{1}{4}\omega \cdot A^3$, где $A = \frac{9}{8}b$, и сдвига управляющего параметра $\lambda \rightarrow \lambda - \frac{A^2}{2}$ эквивалентно исходной системе (2.1)¹¹. Это означает, что резонанс на гармонике аналогичен основному резонансу, и на плоскости параметров системы (2.1) частота – амплитуда воздействия в окрестности точки $\omega \approx \frac{1}{3}$ будет иметь место соответствующий язык синхронизации.

Полагая $y(t) = \frac{1}{2}a(t)e^{3i\omega t} + \text{к.с.}$ и накладывая стандартное дополнительное условие, нетрудно получить соответствующее укороченное уравнение

$$\dot{a} + i\frac{9\omega^2 - 1}{6\omega}a = \left(\frac{\lambda}{2} - \frac{A^2}{4}\right)a - \frac{1}{8}|a|^2a - \frac{A^3}{8}.$$

Полезно привести уравнение в безразмерной форме. В этом случае имеет место замена, эквивалентная (2.16), при этом

$$\Delta = \frac{9\omega^2 - 1}{3\lambda\omega}, \quad \varepsilon = \frac{A}{2\lambda^{1/2}}.$$

С ее помощью получаем

$$\dot{z} + i\Delta z = (1 - 2\varepsilon^2)z - |z|^2z - \varepsilon^3. \quad (2.83)$$

Отметим, что форма языка в определенной мере все же искажена по сравнению с основным резонансом: за счет кубического по амплитуде члена, так и за счет дополнительной диссипации. Первый фактор приводит к тому, что язык у своего основания очень острый, имеет форму не угла, а кубического острия $\Delta = \pm\varepsilon^3$. Второй фактор меняет характер асимптотики линии

¹¹ При этом нужно учесть изменение начальной фазы на $\frac{\pi}{2}$.

бифуркации Андронова–Хопфа, которая при больших расстройках стремится к горизонтальной асимптоте $\varepsilon \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}$, в отличие от случая основного резонанса, имеющего границы в форме угла¹².

2.18. Резонанс на субгармонике типа 1:3. Найдите укороченные уравнения для субгармонического резонанса 1:3 – случая, когда частота внешней силы примерно в три раза больше собственной частоты осциллятора. Приведите уравнение к безразмерному виду и найдите бифуркации на плоскости безразмерных частоты и амплитуды сигнала. Постройте фазовые портреты в характерных точках.

Решение. В предыдущей задаче мы рассмотрели пример резонанса в области частот сигнала, меньших собственной, $\omega < 1$. Возможны высшие резонансы и в области $\omega > 1$. Наиболее существенный из них будет отвечать ситуации, когда частота внешнего сигнала ω примерно равна утроенной собственной частоте $\omega \approx 3$. Это связано с тем, что нелинейность в системе (2.1) является кубической, благодаря члену $x^2 \dot{x}$.

Далее будет удобнее использовать уравнение неавтономной системы в форме

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = b \cos(\omega t), \quad (2.84)$$

которое отличается от (2.1) сдвигом начальной фазы. В рассматриваемом случае внешний сигнал не приводит к появлению вынуждающей силы на собственной частоте осциллятора, как в предыдущей задаче, однако возможен резонанс параметрического типа.

Сначала находим нерезонансный отклик системы на частоте $\omega = 3$ в линейном приближении. Подставим в (2.84) $x(t) = -A \cos(\omega t)$, тогда $(\omega^2 - 1)A = b$, откуда $A = \frac{b}{8}$.

Чтобы получить укороченное уравнение, положим $x(t) = y(t) - A \cos(\omega t)$, где добавка

$$y(t) = \frac{1}{2} (a e^{i\omega t/3} + a^* e^{-i\omega t/3})$$

отвечает колебаниям на частоте $\frac{\omega}{3}$, примерно равной собственной частоте осциллятора. Тогда

¹² Указанные особенности резонанса 3:1 можно видеть на рис.2.21, см. задачу 2. 20.

$$x = \frac{1}{2} [ae^{i\omega t/3} + a^* e^{-i\omega t/3} - A \cos(\omega t)] = \frac{1}{2} (ae^{i\omega t/3} - Ae^{i\omega t} + a^* e^{-i\omega t/3} - Ae^{-i\omega t}). \quad (2.85)$$

Продифференцируем это соотношение по времени, налагая дополнительное условие, аналогичное (2.9), исключая члены с производной от комплексной амплитуды a . В результате, для скорости изменения переменной x получим

$$\dot{x} = \frac{1}{2} \left(\frac{i}{3} \omega a e^{i\omega t/3} - i\omega A e^{i\omega t} - \frac{i}{3} \omega a^* e^{-i\omega t/3} + i\omega A e^{-i\omega t} \right). \quad (2.86)$$

Обратимся к уравнению (2.84). С линейными членами поступаем аналогично случаю для основного резонанса. Отличие состоит только в нелинейном члене, для которого имеем

$$\begin{aligned} x^2 \dot{x} &= \frac{1}{8} (ae^{i\omega t/3} - Ae^{i\omega t} + a^* e^{-i\omega t/3} - Ae^{-i\omega t})^2 \times \\ &\times \left(\frac{i}{3} \omega a e^{i\omega t/3} - i\omega A e^{i\omega t} - \frac{i}{3} \omega a^* e^{-i\omega t/3} + i\omega A e^{-i\omega t} \right) = \\ &= \frac{1}{24} i\omega (a^2 a^* - (a^*)^2 A + 2aA^2) e^{i\omega t/3} + \dots \end{aligned} \quad (2.87)$$

Выделяем только резонансные члены порядка $e^{i\omega t/3}$, многоточием обозначены члены на других частотах, которые полагаем быстро осциллирующими и отбрасываем при усреднении. Собирая все соответствующие соотношения вместе, получим укороченное уравнение

$$\dot{a} = \frac{\lambda a}{2} + i \frac{1 - \left(\frac{\omega}{3}\right)^2}{2\omega} a - \frac{1}{8} [|a|^2 a - (a^*)^2 A + 2aA^2] = 0. \quad (2.88)$$

По аналогии с (2.16), приведем его к безразмерному виду, полагая

$$\Delta = \frac{\left(\frac{\omega}{3}\right)^2 - 1}{\frac{\lambda\omega}{3}}, \quad \varepsilon = \frac{A}{2\sqrt{\lambda}} = \frac{b}{16\sqrt{\lambda}}. \quad (2.89)$$

Тогда получим

$$\dot{z} + i\Delta z = (1 - 2\varepsilon^2)z - |z|^2 z + \varepsilon(z^*)^2. \quad (2.90)$$

Это и есть укороченное безразмерное уравнение в комплексной форме, описывающее субгармонический резонанс на утроенной частоте. Параметры ε и Δ представляют собой безразмерные амплитуду внешнего воздействия и отстройку внешней частоты от утроенной собственной.

Выполнив подстановку $z = Re^{i\varphi}$, приходим к уравнениям для амплитуды и фазы

$$\begin{aligned}\dot{R} &= (1 - 2\varepsilon^2)R - R^3 + \varepsilon R^2 \cos(3\varphi), \\ \dot{\varphi} &= -\Delta - \varepsilon R \sin(3\varphi).\end{aligned}\quad (2.91)$$

Рассмотрим сначала случай малых амплитуд воздействия ε . Для этого подставим во второе уравнение (2.91) решение, отвечающее невозмущенному предельному циклу $R=1$:

$$\dot{\varphi} = -\Delta - \varepsilon \sin(3\varphi).\quad (2.92)$$

Это уравнение Адлера для утроенного значения синуса фазы. Таким образом, вблизи значения частоты $\omega \approx 3$ в системе также наблюдается явление синхронизации. Отличие от основного резонанса состоит в том, что при переходе через значение $\Delta = \pm\varepsilon$ на окружности единичного радиуса симметричным образом рождается шесть положений равновесия, из которых три устойчивых узла и три седла. Как видно из уравнения Адлера (2.89), язык синхронизации упирается точно в точку $\omega = 3$ ($\Delta = 0$ в безразмерном виде), а границы языка задаются соотношением $\Delta = \pm\varepsilon$, так что вблизи своего основания язык имеет, как и область основной синхронизации, форму в виде угла

Перейдем теперь к анализу бифуркаций укороченных уравнений (2.91). В стационарном случае получаем

$$\begin{aligned}(1 - 2\varepsilon^2)R - R^3 &= -\varepsilon R^2 \cos(3\varphi), \\ \Delta &= -\varepsilon R \sin(3\varphi).\end{aligned}\quad (2.93)$$

Сокращаем первое уравнение системы (2.93) на R , возводим оба уравнения в квадрат и складываем. Тогда получим

$$(1 - 2\varepsilon^2 - R^2)^2 + \Delta^2 = \varepsilon^2 R^2.$$

Положим $\xi = R^2 + 2\varepsilon^2 - 1$, тогда $\xi^2 - \varepsilon^2 \xi + \Delta^2 + 2\varepsilon^4 - \varepsilon^2 = 0$, откуда

$$\xi_{1,2} = \frac{\varepsilon^2}{2} \pm \sqrt{\frac{\varepsilon^4}{4} - \Delta^2 - 2\varepsilon^4 + \varepsilon^2}.\quad (2.94)$$

Из последнего соотношения видно, что новые стационарные решения возникают, когда выражение под корнем становится положительным. Таким образом, седло-узловая бифуркация имеет место при условии

$$\Delta^2 = \varepsilon^2 - \frac{7}{4}\varepsilon^4.\quad (2.95)$$

Линии седло-узловых бифуркаций показаны на рис. 2.15. Можно видеть, что у своего основания язык имеет классическую форму угла, что следует из уравнения Адлера. Однако у своей вершины его форма другая: язык имеет

характерную «округлую» вершину. Высшую точку языка находим из (2.95): $\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{7}}$. Это отличительная черта языка Арнольда именно для резонанса 1:3, которая проявляется и для других автоколебательных систем.

Неподвижная точка в начале координат $x = y = 0$ может испытывать бифуркацию Андронова-Хопфа. Для ее поиска вполне достаточно линеаризованной системы (2.90), так что $\dot{z} = (1 - 2\varepsilon^2)z - i\Delta z$. Найдем линеаризованную матрицу:

$$M = \begin{pmatrix} 1 - 2\varepsilon^2 & \Delta \\ -\Delta & 1 - 2\varepsilon^2 \end{pmatrix}. \quad (2.96)$$

След матрицы $S = 2(1 - 2\varepsilon^2)$, так что условие бифуркации Андронова-Хопфа $S = 0$ дает $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Соответственно, якобиан $J = \Delta^2 > 0$ всегда положителен.

Формально условие $S = 0$ для матрицы линеаризации полной системы (2.90) выполняется и для нетривиального положения равновесия, но для него $J < 0$, и оно не отвечает бифуркации Андронова-Хопфа.

Устройство плоскости параметров (Δ, ε) укороченного уравнения в случае резонанса на утроенной частоте и фазовые портреты представлены на рис. 2.15. Характерная особенность состоит в том, что на линии седло-узловой бифуркации рождаются сразу три пары седел и узлов, что и вытекает из анализа уравнения Адлера (переход от вставки 1 к вставке 5). Это отвечает возникновению режима синхронизации на утроенной частоте.

Обратим внимание, что при $\varepsilon^2 = \frac{1}{2}$ одновременно $\Delta = 0$ и $J = \Delta^2 = 0$.

Исследование фазовых портретов показывает, что в эту точку приходят линии G влипания предельного цикла в общую сепаратрису седел и узлов. Это естественно, так как внутри языка при уменьшении ε цикл должен исчезнуть. Исчезновение предельного цикла в результате этой бифуркации можно наблюдать при переходе от фазового портрета на вставке 4 к портрету на вставке 5. Обратим внимание на характерные острые углы в картине общей сепаратрисы седел на вставке 5. Таких углов в случае основного резонанса нет.

При переходе от вставки 3 к вставке 4 наблюдается бифуркация Андронова-Хопфа, в результате которой из точки в начале координат рождается устойчивый предельный цикл.

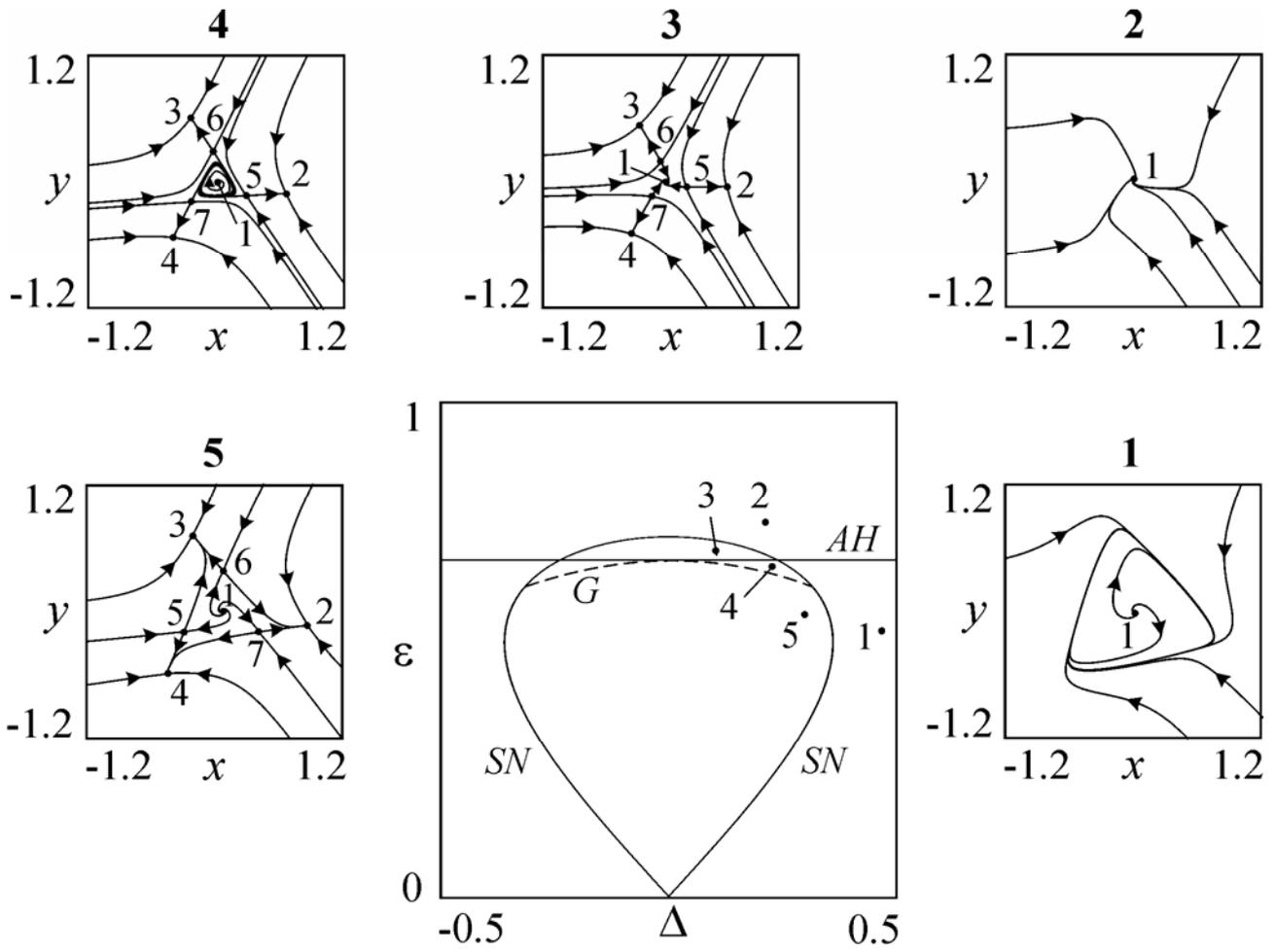


Рис. 2.15. Устройство плоскости параметров (Δ, ε) укороченного уравнения (2.90) для резонанса на утроенной частоте. На вставках – характерные фазовые портреты. SN – линии седло-узловых бифуркаций, AH – линия бифуркации Андронова-Хопфа, G – линия глобальной бифуркации.

2.19. Общая картина резонансов на гармониках и субгармониках.

Обсудите возможность других резонансов в неавтономной системе Ван-дер-Поля (2.1).

Решение. Метод медленно меняющихся амплитуд позволил изучить на плоскости частота ω – амплитуда воздействия b окрестности точек $\omega = 1$, $\omega = 3$, $\omega = \frac{1}{3}$. В эти точки упираются острия языков Арнольда, отвечающих режимам синхронизации. На самом деле, в силу нелинейности системы (2.1) на плоскости (ω, b) имеется множество языков Арнольда. (С формальной точки зрения бесконечно много, а в реальной системе – большое, но конечное число.) Из каждой точки оси частоты ω , представляемой числом вида $\omega = q\omega_0(\lambda) : p$, где q и p целые, а $\omega_0(\lambda)$ – собственная частота автоколебаний автономной

системы, – выходит свой язык синхронизации. Эти языки удобно классифицировать и различать с помощью *числа вращения* $w = p : q$.

Если управляющий параметр мал, то собственная частота $\omega_0(\lambda) \approx 1$. Поэтому в области $\omega > 1$ вершины наиболее существенных языков имеют координаты 1, 2, 3, ... и числа вращения $w = 1:1, 1:2, 1:3, \dots$. Соответствующие резонансы называют *субгармоническими*¹³. В области $\omega < 1$ выделяются языки с числами вращения $w = 1:1, 2:1, 3:1, \dots$. Соответствующие резонансы называют *резонансами на гармониках* внешнего сигнала¹⁴. Понятно, что такой ряд отвечает периодам колебаний $T = 2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots$

Поскольку резонансы на гармониках располагаются на оси частот очень часто, для их изучения удобно использовать плоскость период – амплитуда воздействия, причем период нормировать на 2π , откладывая по оси абсцисс величину $\frac{1}{\omega} = \frac{T}{2\pi}$. Рис. 2.16 иллюстрирует качественно картину основных субгармонических резонансов с числами вращения $w = 1:q$ и резонансов на гармониках с числами вращения $w = p:1$.

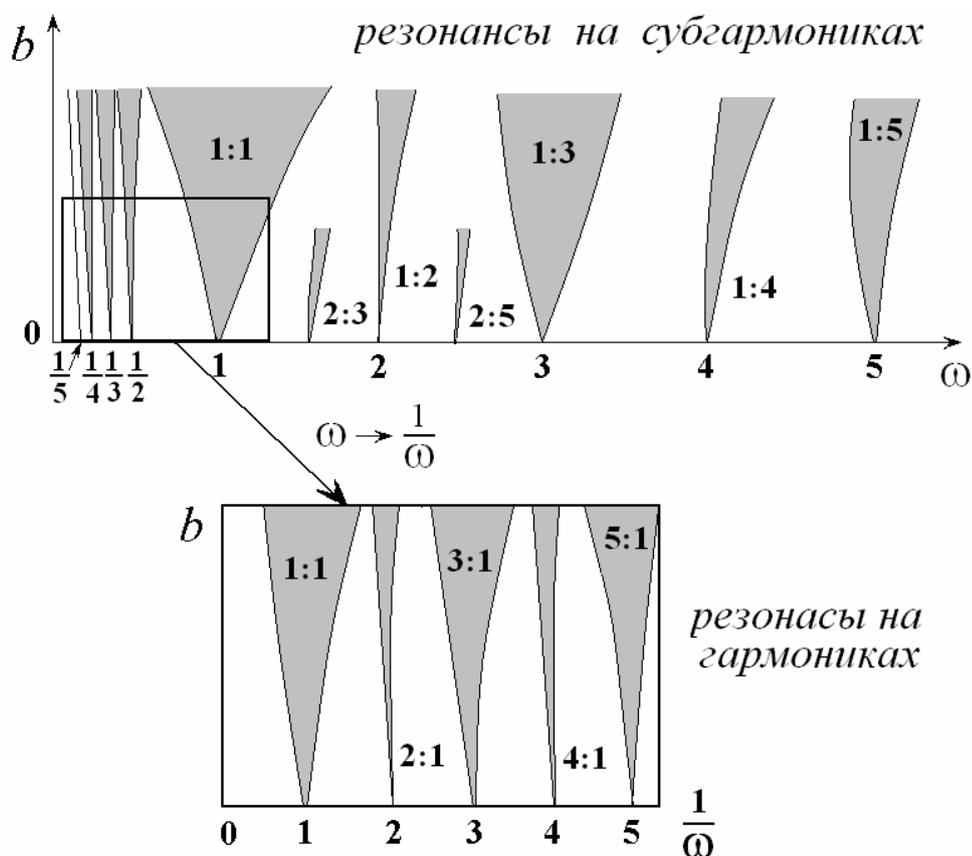


Рис. 2.16. Качественное устройство языков синхронизации на гармониках и субгармониках.

¹³ Для большей ясности в ряд дописан и основной резонанс 1:1.

¹⁴ Иногда соответствующие резонансы называют синхронизацией на «унтертонах» и «обертонках» [2

Отметим одну особенность системы (2.1). Для нее нелинейность является кубической, поэтому выраженными оказываются языки синхронизации, отвечающие резонансам с нечетными номерами, а языки с четными номерами являются очень узкими.

Между представленными на рис. 2.16 языками располагаются более узкие языки, например, с числами вращения 2:3, 2:5 и т.д. Однако их обсуждение отложим до задач 2.23 и 2.24.

Качественные иллюстрации динамики системы в фазовом пространстве при резонансах на субгармониках и гармониках представлены на рис. 2.17. Для субгармонического резонанса с числом вращения $w = 1 : q$ сечения Пуанкаре идут «чаще» по сравнению с собственным периодом системы. В этом случае отображение в сечении Пуанкаре демонстрирует цикл, причем период цикла равен q . Для случая на рис. 2.17, *а* это цикл периода 2. Для гармонического резонанса с числом вращения $w = p : 1$ период в сечении Пуанкаре всегда равен единице. В этом случае собственная динамика системы является более высокочастотной, чем внешний сигнал, и траектория успевает совершить несколько оборотов между сечениями Пуанкаре, рис. 2.17, *б*. Наконец, если число вращения $w = p : q$, то период в сечении Пуанкаре равен q . При этом, пересекая q сечений, изображающая точка совершает p полных оборотов, как показано на рис. 2.17, *в*.

Теперь становится понятен смысл числа вращения. Оно определяется как средний набег фазы или угла, под которым изображающая точка на плоскости переменных осциллятора (x, \dot{x}) видна из начала координат:

$$w = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\theta(t) - \theta_0}{2\pi n}. \quad (2.97)$$

При этом имеется в виду фаза для осциллятора (2.1), а не фаза укороченного уравнения.

Определение (2.97) можно использовать для характеристики не только синхронных, но и квазипериодических режимов, при этом число вращения оказывается иррациональным, т.е. числом, которое нельзя представить в виде отношения двух целых чисел.

Отметим, что фаза хорошо определена, лишь если форма предельного цикла не очень сложная, а амплитуда воздействия не очень велика. С другой стороны, период цикла в сечении Пуанкаре определяется всегда и является в этом смысле очень удобной характеристикой режима.

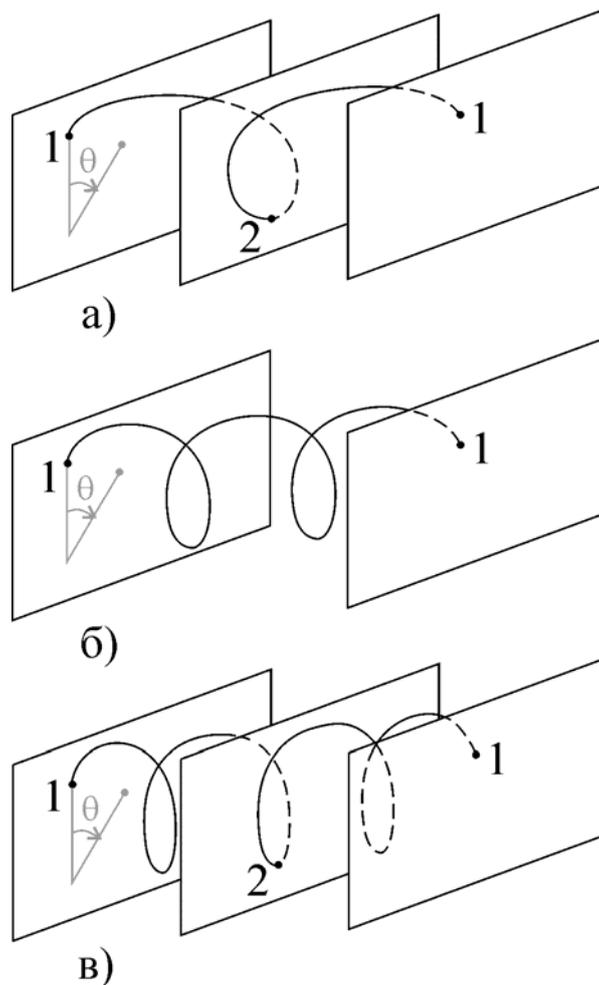


Рис. 2.17. Траектория неавтономной системы и сечения Пуанкаре в области субгармонического резонанса с числом вращения $w = 1:2$ (а), в области резонанса на гармонике с числом вращения $w = 2:1$ (б), в области резонанса с числом вращения $w = 3:2$ (в).

2.20. Бифуркации в неавтономной системе Ван-дер-Поля. Найдите основные локальные бифуркации в неавтономной системе Ван-дер-Поля (2.1) и укажите их на плоскости частота – амплитуда воздействия. Отдельно рассмотрите область резонансов на субгармониках и гармониках. Сравните результат с анализом в рамках метода медленно меняющихся амплитуд.

Решение. Для исследования общего устройства плоскости параметров неавтономного осциллятора Ван-дер-Поля следует привлекать численные методы построения бифуркационных линий с использованием какой-либо стандартной программы. При таком исследовании следует обратить внимание на ряд обстоятельств.

Во-первых, число существенных параметров увеличивается, так как картина оказывается зависящей от управляющего параметра автономной системы λ . Мы, в основном, будем использовать значение $\lambda = 1$. Оно удобно в том отношении, что квазигармоническое приближение, строго говоря, уже не

справедливо, однако, некоторые черты поведения, выявленные с его помощью, сохраняются.

Во-вторых, для анализа и интерпретации результатов можно использовать методы и терминологию теории дискретных отображений, поскольку система допускает простое построение сечений Пуанкаре.

Теперь в системе возможна *бифуркация Неймарка-Сакера*, которой в сечении Пуанкаре отвечает рождение инвариантной кривой или тора в «расширенном» фазовом пространстве. Она заменяет бифуркацию Андронова-Хопфа, имеющую место в квазигармоническом приближении.

Появляются новые бифуркации коразмерности один, не имеющие аналогов в квазигармоническом приближении, – *бифуркации потери симметрии и удвоения периода*, а также некоторые бифуркации коразмерности два.

Заметим, наконец, что учет нелокальных (глобальных) бифуркаций очень сильно усложняет картину, и мы их здесь обсуждать не будем.

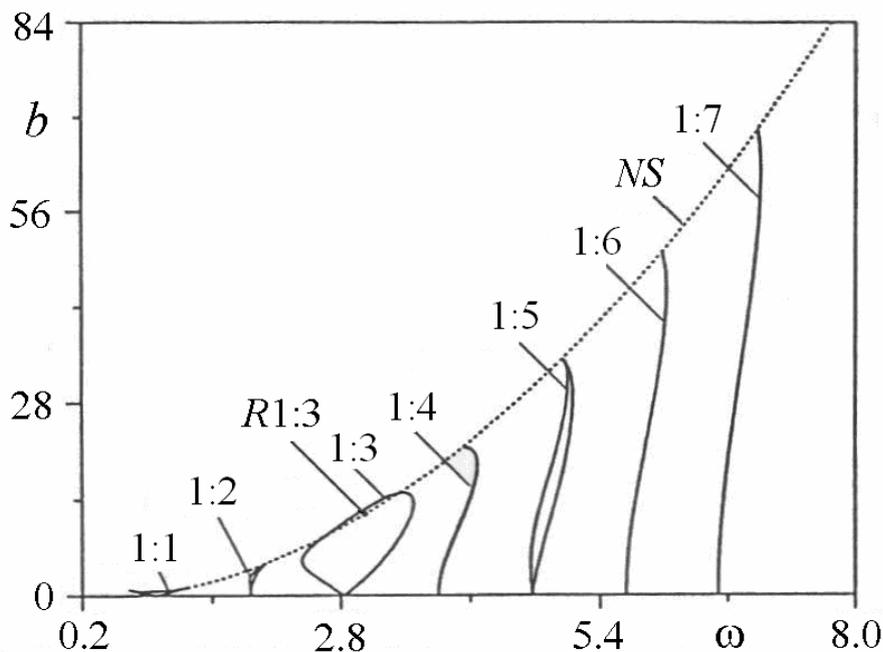


Рис. 2.18. Система языков синхронизации в области субгармонических резонансов неавтономного осциллятора Ван-дер-Поля (2.1), $\lambda = 1$; *NS* – линии бифуркаций Неймарка-Сакера, *R1:3* – точка резонанса 1:3.

Перейдем к анализу плоскости частота – амплитуда воздействия. В самом грубом виде она показана на рис. 2.18. На этом рисунке можно видеть очень небольшой (в масштабе рисунка) основной язык синхронизации 1:1. В увеличенном виде он показан на рис. 2.19. Устройство этого языка синхронизации качественно совпадает с результатами исследования методом медленно меняющихся амплитуд. Края языка образованы линиями седло-узловых бифуркаций, к которым примыкают линии бифуркаций Неймарка-

Сакера. Их общая точка – *точка резонанса 1:1*. Это бифуркация коразмерности два трехмерных потоков¹⁵. Таким образом, вместо бифуркации Андронова-Хопфа в укороченных уравнениях, в исходной системе возникает бифуркация Неймарка-Сакера, а вместо точки Богданова-Такенса – точка резонанса 1:1. На рис. 2.19 можно видеть некоторую асимметрию языка, которой не было в квазигармоническом приближении.

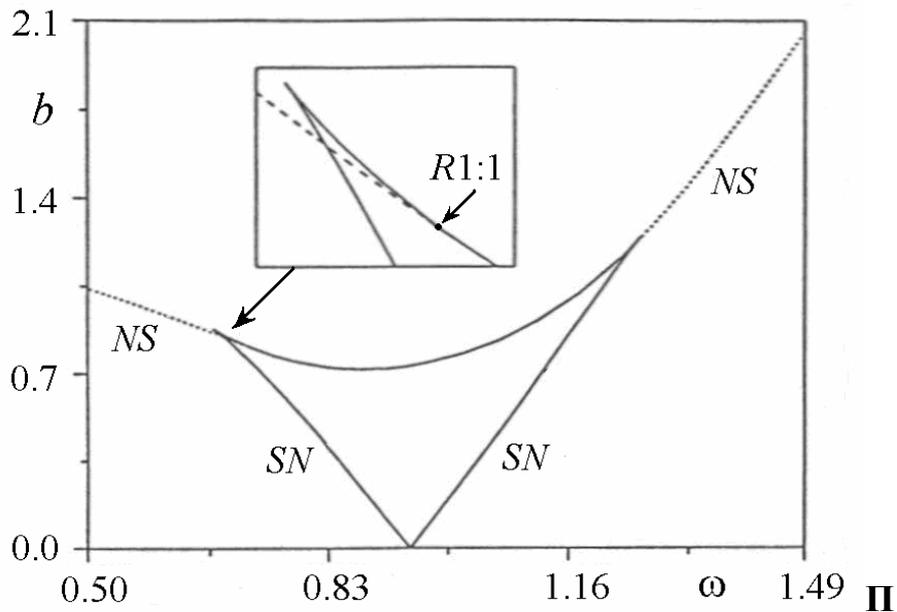


Рис. 2.19. Основной язык синхронизации неавтономного осциллятора Ван-дер-Поля (2.1), $\lambda = 1$; *SN* – линии седло-узловых бифуркаций, *NS* – линии бифуркаций Неймарка-Сакера, *R1:1* – точка резонанса 1:1.

Вернемся к рис. 2.18. Можно видеть, что реализуется множество языков синхронизации, качественное расположение которых соответствует рис. 2.16. Основания языков имеют острия на оси абсцисс в точках, примерно отвечающим значениям частоты сигнала 1, 2, 3, ... Вершины языков с $q \geq 4$ также имеют острия, которые заканчиваются на линии бифуркации Неймарка-Сакера. Язык с числом вращения 1:3 имеет характерную округлую вершину, которая частично заходит за линию бифуркации Неймарка-Сакера, что соответствует анализу в рамках метода медленно меняющихся амплитуд и рис. 2.15, на котором роль бифуркации Неймарка-Сакера играет бифуркация Андронова-Хопфа. На рис. 2.19 показана также точка коразмерности два – точка резонанса *R1:3*, которая является аналогом точки контакта линии бифуркации Андронова-Хопфа с линией нелокальной бифуркации на рис. 2.15.

¹⁵ При классификации бифуркаций трехмерных потоков используются подходы и терминология теории бифуркаций двумерных отображений, поскольку последние отвечают сечениям Пуанкаре, подробнее см. [6-8]

При выбранных масштабах в поле зрения оказываются языки, для которых $p=1$, а q отвечает натуральным числам 1, 2, 3, ... На самом деле, все пространство между языками синхронизации заполнено другими языками, для которых $w = p : q$ (на рис. 2.18 они не показаны). Каждое рациональное число «порождает» соответствующий язык. В то же время, при небольших амплитудах внешнего сигнала, все они очень узкие и между ними остается достаточно «места» для квазипериодических режимов. В определенной мере это связано с тем, что иррациональных чисел, которые отвечают числам вращения для квазипериодических режимов, существенно больше, чем рациональных, которым отвечают синхронные режимы.

С ростом управляющего параметра λ языки расширяются. Этот процесс проиллюстрирован на рис. 2.20 на примере резонанса 1:3. Хорошо видно, что при малых λ (0.01 и 0.1) язык имеет форму, которая была предсказана в задаче 2.18 на основе метода медленно меняющихся амплитуд. Язык при этом упирается в значение частоты воздействия $\omega=3$. Затем язык начинает деформироваться, теряет симметрию, сохраняя, однако, округлую вершину. При этом его острие постепенно смещается в область низких частот, что связано с неизохронностью системы при больших λ , когда квазигармоническое приближение перестает работать. Действительно, в этом случае, в соответствии с рис. 1.1, частота колебаний автономной системы уменьшается.

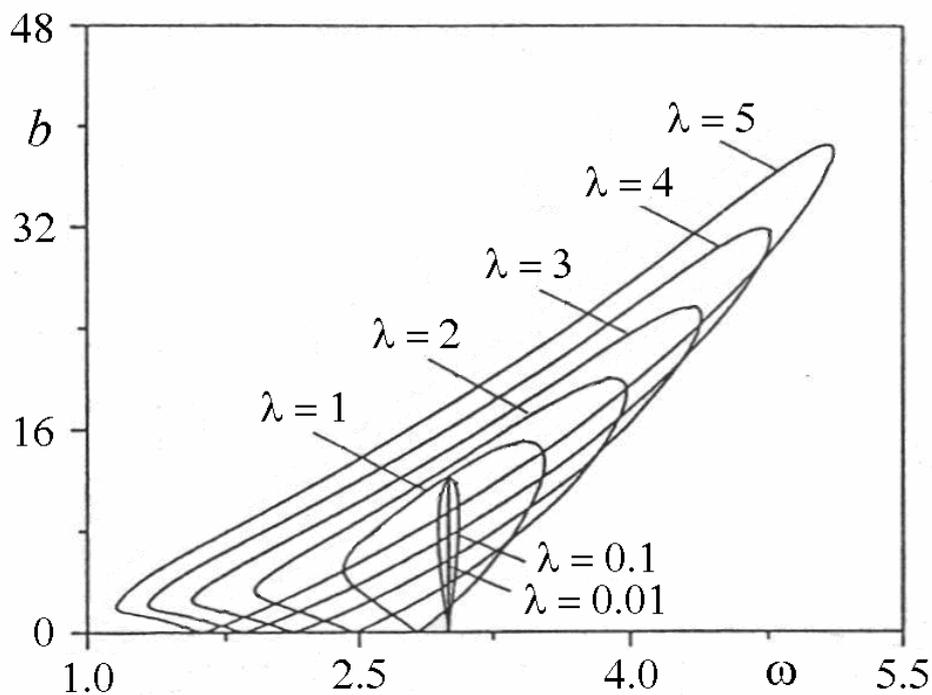


Рис. 2.20. Эволюция языка синхронизации с числом вращения 1:3 с ростом параметра λ . Использовано уравнение (2.5), которому в рамках автономного укороченного уравнения отвечает предельный цикл, размер которого не зависит от параметра λ [13].

Мы кратко обсудили систему языков, которая располагается справа от основного языка, т.е. основные субгармонические резонансы. Слева от него также имеется система языков, соответствующую резонансам на гармониках внешней силы. Для ее визуализации нужно использовать другие масштабы рисунка, а также удобно вместо частоты использовать нормированный период $\tau = \frac{1}{\omega}$. На рис. 2.21 показаны основные языки этого семейства с числами вращения $w = 1:1, 2:1, 3:1, \dots$

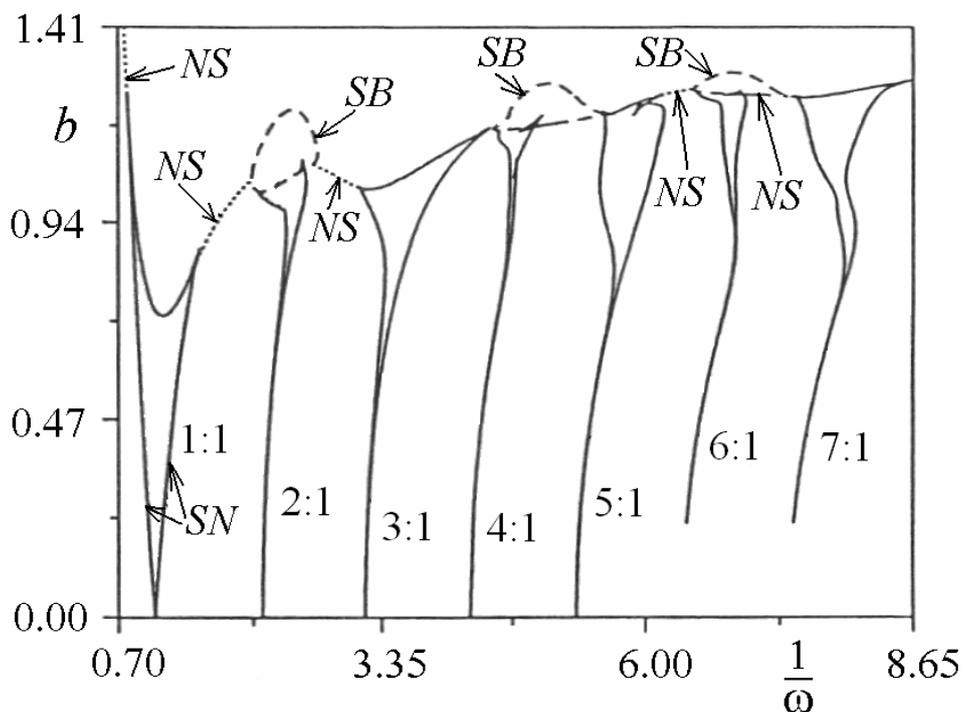


Рис. 2.21. Система языков синхронизации неавтономного осциллятора Ван-дер-Поля (2.1) в области резонансов на гармониках, $\lambda = 1$; *NS* – линии бифуркаций Неймарка-Сакера, *SN* – линии седло-узловых бифуркаций, *SB* – линии бифуркаций потери симметрии [13].

Как видно из рис. 2.21, линия бифуркации Неймарка-Сакера в этой области состоит из отдельных кусков, соединяющих языки с четными и нечетными номерами. Можно видеть характерный язык синхронизации 3:1, устройство которого отвечает описанному в задаче 2.17. Для этого языка наблюдается характерное основание, которое, как установлено в задаче 2.17, имеет кубическое острие. Другие языки с нечетными числами вращения $p:1$ устроены аналогично. Иначе устроены языки с четными номерами. Они ограничены сверху линиями новых бифуркаций – *бифуркаций потери симметрии SB*. Эта бифуркация состоит в том, что два несимметричных предельных цикла рождаются из симметричного предельного цикла, который меняет характер устойчивости¹⁶.

¹⁶ Детали можно найти в [13].

Мы обсудили лишь основные моменты бифуркационной картины, которая в целом гораздо богаче, включая ее метаморфозы с ростом управляющего параметра λ , наличие более высоких резонансов типа $p:q$, возможность удвоений периода. Мы не обсуждали также нелокальные бифуркации. Об их существовании в окрестности точек $R1:1$ «сигнализирует» приближенный анализ в рамках метода медленно меняющихся амплитуд. Заметим лишь, что в отличие от «влипания» предельного цикла в петлю сепаратрисы, аналогичная ситуация для тора (инвариантной кривой в сечении Пуанкаре) сопровождается феноменом потери гладкости.

2.21. Карты динамических режимов неавтономной системы Ван-дер-Поля. Постройте карту динамических режимов неавтономной системы Ван-дер-Поля (2.1) на плоскости частота – амплитуда сигнала. Представьте области субгармонических и гармонических резонансов, а также случай релаксационных колебаний.

Решение. Бифуркационный анализ требует достаточно кропотливого исследования. Кроме того, он «локальный», т.е. применяя его, мы изучаем бифуркации в данной области плоскости параметров, лишь постепенно продвигаясь вдоль соответствующих линий, формируя глобальную картину. Компьютер предоставляет возможность выявить основные особенности общего устройства плоскости параметров, не прибегая к формальному бифуркационному анализу. «Технология» такого двухпараметрического исследования сформировалась первоначально в теории дискретных отображений и состоит в следующем. Сначала переходят от исходной дифференциальной системы к отображению, выполняя сечение Пуанкаре через период внешнего воздействия (см. задачу 2.2). Выбираются какие-либо значения параметров, в нашем случае частоты и амплитуды воздействия. Затем выполняется достаточное количество итераций отображения Пуанкаре для того, чтобы система вышла на аттрактор, а после большое число итераций уже непосредственно на аттракторе. По мере итераций на аттракторе производится сравнение начального значения со всеми последующими. Если они совпадают с высокой, наперед заданной точностью, то число итераций принимается за период движения. На плоскости параметров (на экране дисплея) точка отмечается некоторым цветом, причем цветовая палитра выбрана заранее, так что движениям с определенными периодами отвечают определенные цвета. После этого процедура повторяется при слегка измененных значениях параметров, так что в конечном итоге выполняется полное «сканирование» плоскости параметров. В результате плоскость оказывается окрашенной в

разные цвета в соответствии с периодом движения на аттракторе. Непериодические режимы (области квазипериодической динамики и хаоса) также обозначаются специальным образом. По аналогии с географией такую «раскрашенную» плоскость называют картой динамических режимов. Этот

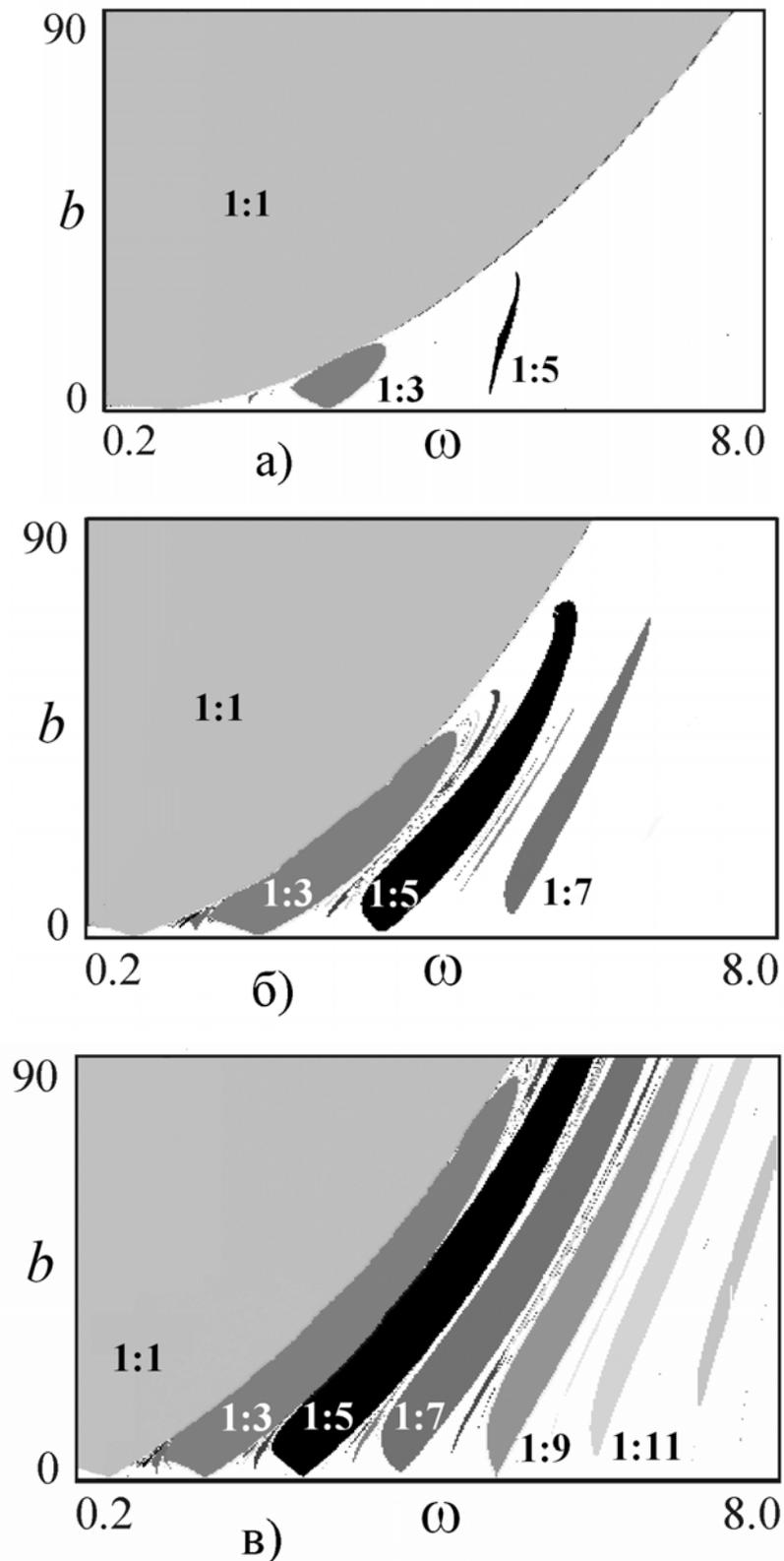


Рис. 2.22. Карты динамических режимов неавтономной системы Ван-дер-Поля (2.1) на плоскости частота – амплитуда воздействия; $\lambda = 1$ (а), $\lambda = 3$ (б), $\lambda = 5$ (в).

метод позволяет легко изучать метаморфозы системы языков синхронизации при вариации управляющего параметра.

На рис. 2.22 показана найденная таким образом карта динамических режимов системы Ван-дер-Поля (2.1) на плоскости частота – амплитуда воздействия для значений параметра $\lambda = 1, 3$ и 5 . На карте подписаны числа вращения основных языков $1:q$, при этом q представляет собой период в сечении Пуанкаре, в соответствии с которым определен цвет на карте. Мы видим, что общая картина языков синхронизации, действительно, оказывается выявленной.

На рис. 2.23 показана карта режимов, относящаяся к области резонансов на гармониках. Отметим, что если сечения Пуанкаре выполнять через период внешнего воздействия, то все языки, показанные на рис. 2.21, на карте будут фиксироваться как области периода 1 (см. рис. 2.17, б). Чтобы этого избежать, можно строить сечение Пуанкаре поверхностью, отвечающей колебаниям осциллятора, $\dot{x} = 0$. В этом случае языки оказываются окрашенными в соответствии с числом вращения $w = p : 1$ и фактором p . На полученной таким образом карте на рис. 2.23 хорошо фиксируются также и характерные вершины языков с четными номерами. При этом, однако, область периода 1, лежащая выше всех языков в верхней части карты, оказывается окрашенной в разные цвета, хотя никаких бифуркаций в этой области нет, см. рис. 2.21. В этом случае метод карт динамических режимов фиксирует появление дополнительных петель у портрета аттрактора на фазовой плоскости (x, \dot{x}) .

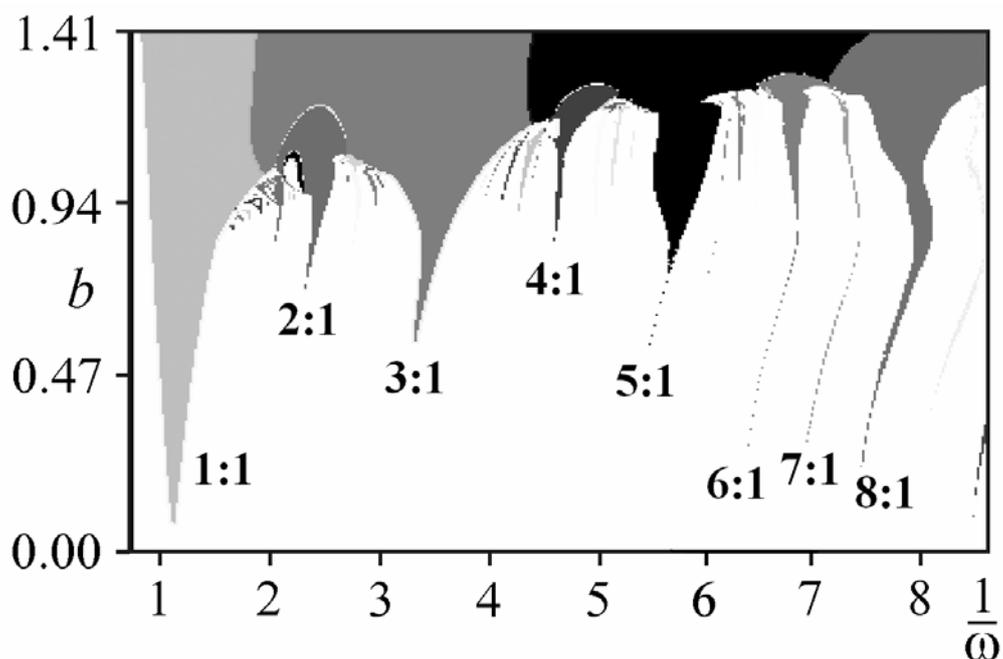


Рис. 2.23. Карта динамических режимов неавтономной системы Ван-дер-Поля (2.1) на плоскости нормированный период $T/2\pi$ – амплитуда воздействия b ; $\lambda = 1$.

2.22. Неавтономное уравнение Ван-дер-Поля с несимметричной диссипативной функцией. Покажите, что система Ван-дер-Поля с несимметричной диссипативной функцией

$$\ddot{x} - (\lambda + cx - x^2)\dot{x} + x = b \sin(\omega t) \quad (2.98)$$

эквивалентна системе с гармоническим воздействием, к которому добавлен сигнал некоторого постоянного уровня. Каков характер нелинейности в такой системе?

Решение. Преобразуем $\lambda + cx - x^2 = \lambda + \frac{c^2}{4} - \left(x - \frac{c}{2}\right)^2$. После этого выполним в уравнении (2.98) замену переменной и управляющего параметра

$$x \rightarrow x + \frac{c}{2}, \quad \lambda \rightarrow \lambda - \frac{c^2}{4}. \quad (2.99)$$

В результате, получим

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = a + b \sin(\omega t), \quad (2.100)$$

где $a = -\frac{c}{2}$. Таким образом, учет линейных членов в диссипативной функции эквивалентен добавлению постоянной составляющей во внешний сигнал.

В системе (2.98) наряду с кубической нелинейностью, характерной для традиционного уравнения Ван-дер-Поля, присутствует квадратичная нелинейность вида $x\dot{x}$. Поэтому ее можно называть обобщенной системой Ван-дер-Поля.

2.23. Субгармонический резонанс 1:2. Получите укороченное уравнение для неавтономной обобщенной системы Ван-дер-Поля (2.98) для резонанса с числом вращения 2:1.

Решение. В системе (2.98) присутствует квадратичная нелинейность, поэтому для нее будет существенным и резонанс 1:2. Действуем по аналогии с задачей 2.18. В «нулевом» порядке малости ищем отклик осциллятора на внешнее воздействие в линейном приближении на частоте $\omega \approx 2$. Тогда $x = -A \sin(\omega t)$ и $A = \frac{b}{\omega^2 - 1} \approx \frac{b}{3}$. Далее подставляем $x = -A \sin(\omega t) + y$ в исходное уравнение (2.98). Нелинейность $x^2\dot{x}$ при такой подстановке порождает члены, даваемые формулой

$$\begin{aligned} x^2\dot{x} = & y^2\dot{y} - 2y\dot{y}A \sin(\omega t) + A^2\dot{y} \sin^2(\omega t) - y^2 A \omega \cos(\omega t) - \\ & - y A^2 \omega \sin(2\omega t) - A^3 \omega \cos(\omega t) \sin^2(\omega t). \end{aligned} \quad (2.101)$$

Переменная $y(t)$ колеблется с частотой $\frac{\omega}{2}$. Вклад в колебания на частоте $\frac{\omega}{2}$ в (2.101) вносят только два слагаемых $y^2 \dot{y}$ и $A^2 \dot{y} \sin^2(\omega t)$, так что

$$x^2 \dot{x} = y^2 \dot{y} + A^2 \dot{y} \sin^2(\omega t) + \dots$$

Подставляем сюда

$$y = \frac{1}{2}(ae^{i\omega t/2} + a^* e^{-i\omega t/2}) \text{ и } \dot{y} = \frac{1}{2}\left(\frac{i\omega}{2}ae^{i\omega t/2} - \frac{i\omega}{2}a^* e^{-i\omega t/2}\right) \quad (2.102)$$

и выделяем члены вида $e^{i\omega t/2}$:

$$x^2 \dot{x} = \frac{i\omega}{16}|a|^2 ae^{i\omega t/2} + \frac{i}{8}\omega A^2 ae^{i\omega t/2} + \dots \quad (2.103)$$

Существенный отклик на половинной частоте возникает из-за наличия в осцилляторе (2.98) квадратичной нелинейности, так что

$$\begin{aligned} x\dot{x} &= [y - A\sin(\omega t)][\dot{y} - A\omega\cos(\omega t)] = \\ &= y\dot{y} - A\dot{y}\sin(\omega t) - yA\omega\cos(\omega t) + \frac{1}{2}A^2\omega\sin(2\omega t). \end{aligned} \quad (2.104)$$

Соответствующий вклад дают второй и третий члены. Подставляем сюда (2.102) и получаем

$$x\dot{x} = -\frac{1}{8}\omega Aa^* e^{i\omega t/2} + \dots \quad (2.105)$$

Собирая все вместе и оставляя только существенные члены, получаем

$$\dot{a} + i\frac{\left(\frac{\omega}{2}\right)^2 - 1}{\omega}a = \frac{\lambda}{2}a - \frac{1}{8}|a|^2 a - \frac{1}{4}A^2 a + \frac{i}{4}cAa^*. \quad (2.106)$$

Вводя в дополнение к безразмерным переменным (2.16) безразмерные параметры

$$\Delta = 2\frac{\left(\frac{\omega}{2}\right)^2 - 1}{\lambda\omega}, \quad \varepsilon = \frac{A}{\sqrt{2\lambda}}, \quad \mu = \frac{c}{\sqrt{2\lambda}}, \quad (2.107)$$

получаем

$$\dot{z} + i\Delta z = (1 - \varepsilon^2)z - |z|^2 z + i\mu\varepsilon z^*. \quad (2.108)$$

Это и есть укороченное уравнение для резонанса 1:2.

Запишем уравнение (2.108) для действительных амплитуды и фазы:

$$\begin{aligned} \dot{R} &= (1 - \varepsilon^2)R - R^3 + \mu\varepsilon R \sin(2\varphi), \\ \dot{\varphi} &= -\Delta + \mu\varepsilon \cos(2\varphi). \end{aligned} \quad (2.109)$$

Уравнение для фазы в этом случае является точно уравнением Адлера. Оно имеет решение в виде четырех неподвижных точек, из которых две устойчивые,

а две неустойчивые, что отвечает характеру резонанса 1:2. Радиусы неподвижных точек также могут быть найдены аналитически. В стационарном случае из (2.109) получаем

$$\begin{aligned} R^2 &= 1 - \varepsilon^2 + \mu\varepsilon \sin(2\varphi), \\ \Delta &= \mu\varepsilon \cos(2\varphi). \end{aligned} \quad (2.110)$$

Отсюда можно получить в явном виде выражение для радиусов неподвижных точек:

$$R^2 = 1 - \varepsilon^2 \pm \sqrt{\mu^2 \varepsilon^2 - \Delta^2}. \quad (2.111)$$

Решение (2.111) существует при $|\Delta| < \mu\varepsilon$, так что $|\Delta| = \mu\varepsilon$ определяет линии седло-узловых бифуркаций, т.е. границы языка синхронизации.

Уравнение (2.108) имеет еще и неподвижную точку в начале координат. Для нее легко найти условие бифуркации Андронова-Хопфа, для чего вполне достаточно линейного уравнения (2.108), так что аналогично задаче 2.18 получаем

$$\varepsilon = 1. \quad (2.112)$$

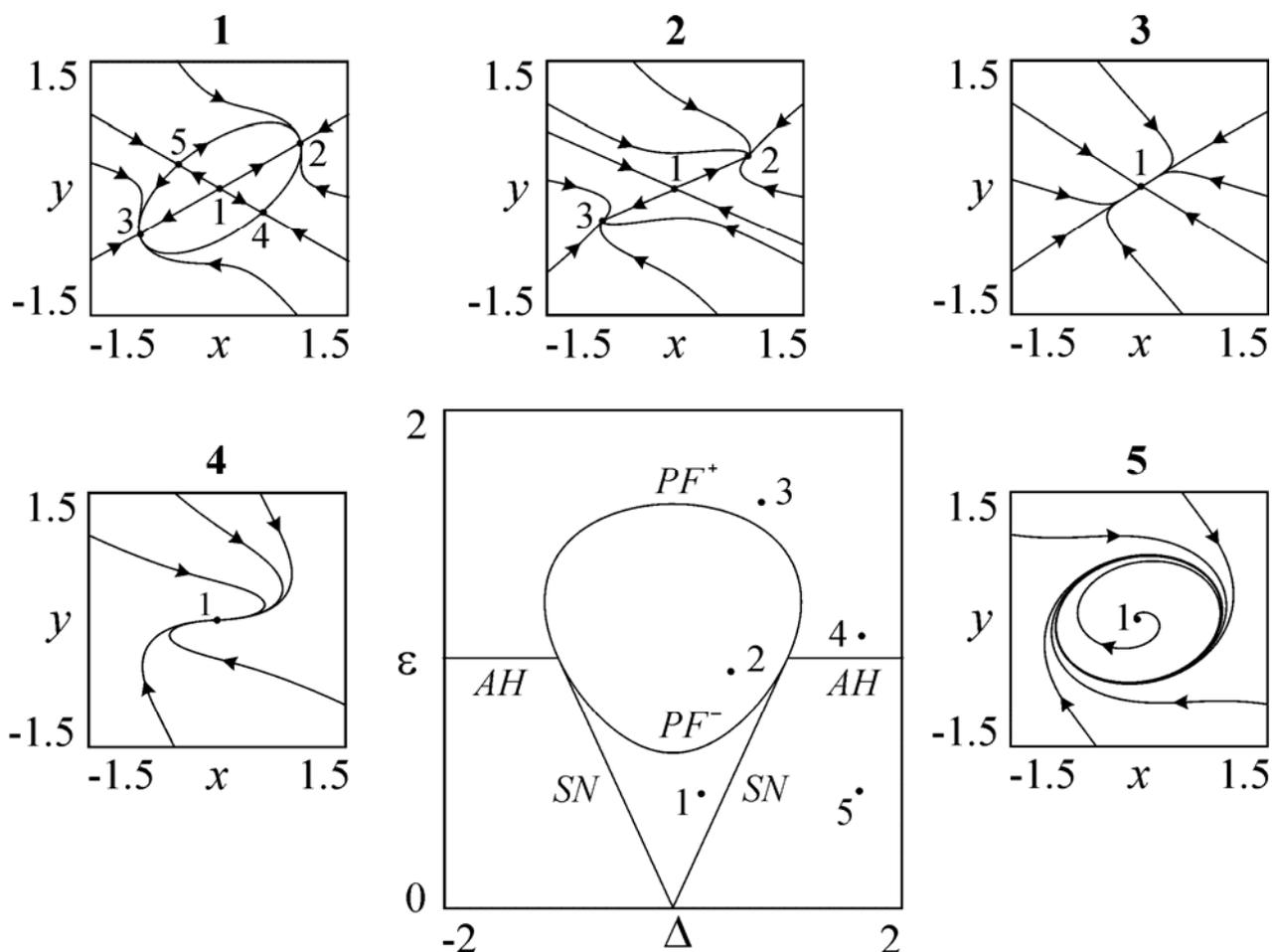


Рис. 2.24. Бифуркации и фазовые портреты для резонанса 1:2 в системе (2.108), $\mu = 1$; *SN* – линии седло-узловых бифуркаций, *AH* – линии бифуркаций Андронова-Хопфа, *PF⁺* – суперкритическая бифуркация вилка, *PF⁻* – субкритическая бифуркация вилка.

Бифуркационные линии уравнения (2.108) на плоскости параметров частотная расстройка Δ – амплитуда сигнала ε и характерные фазовые портреты приведены на рис. 2.24.

Соотношение (2.111) позволяет описать новую бифуркацию, характерную для резонанса 1:2. Действительно, при $1 - \varepsilon^2 \pm \sqrt{\mu^2 \varepsilon^2 - \Delta^2} = 0$ или

$$(1 - \varepsilon^2)^2 = \mu^2 \varepsilon^2 - \Delta^2 \quad (2.113)$$

радиус неподвижных точек обращается в ноль. Это значит, что пара неподвижных точек приближается к равновесию в начале координат, сливается с ним, в результате чего остается только одна точка в начале координат. Это бифуркация «вилка» (pitch fork). Условие (2.113) задает ее линию, имеющую на плоскости параметров частотная расстройка – амплитуда сигнала вид овала. Нижняя ветвь овала отвечает бифуркации вилка для двух седел, а верхняя – для двух устойчивых узлов. Таким образом, первая отвечает субкритической, а вторая – суперкритической форме такой бифуркации. Переход через нижнюю ветвь разрушает общую сепаратрису седел и узлов в виде замкнутой кривой.

Точки смены двух ветвей бифуркации вилка имеют координаты

$$\varepsilon = 1, \quad \Delta = \pm \mu.$$

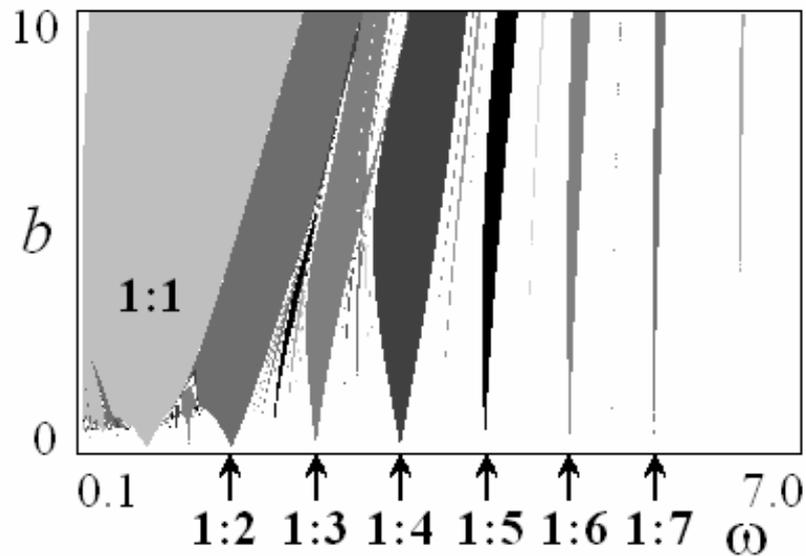
Через эти точки проходят линии бифуркаций седло-узел и одновременно заканчиваются линии бифуркаций Андронова-Хопфа. Это определенное вырождение, связанное с симметрией языка на рис. 2.24. В случае общего положения для резонанса 1:2 точки контакта линий седло-узловых бифуркаций с линиями бифуркаций вилка и Андронова-Хопфа не совпадают. Это можно наблюдать, например, в осцилляторе Ван-дер-Поля-Дуффинга с дополнительной квадратичной нелинейностью, см. задачу 2.26.

2.24. Карта режимов неавтономного обобщенного осциллятора Ван-дер-Поля. Постройте карту динамических режимов для неавтономного обобщенного осциллятора Ван-дер-Поля (2.98)

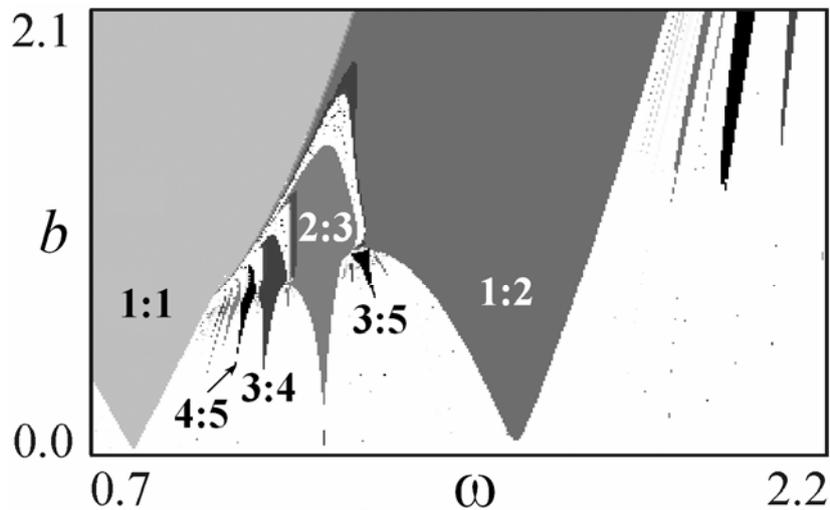
$$\ddot{x} - (\lambda + cx - x^2)\dot{x} + x = b \sin(\omega t).$$

К каким эффектам приводит учет квадратичной нелинейности?

Решение. Карта динамических режимов системы (2.98) показана на рис. 2.25, а. Введение квадратичной нелинейности (или асимметричной диссипативной функции) приводит к появлению выраженных языков синхронизации с четными знаменателями q . Для традиционной системы Ван-дер-Поля (2.1) эти языки настолько узкие, что не выявляются при построении крупномасштабной карты на рис. 2.22.



а)



б)

Рис. 2.25. Карта динамических режимов и ее увеличенный фрагмент для неавтономного обобщенного осциллятора Ван-дер-Поля (2.98), $\lambda = 1$.

На рис. 2.22, б показан увеличенный фрагмент карты в области между языками синхронизации с числами вращения 1:1 и 1:2. Он выявляет резонансы с числами вращения 2:3, 3:5, 4:3 и т.д. Таким образом, обобщенный осциллятор Ван-дер-Поля дает выраженную картину языков синхронизации со всеми основными числами вращения. При этом из каждой точки на оси частот $\omega = q\omega_0 : p$, где ω_0 – собственная частота автономного осциллятора, выходит свой язык синхронизации с числом вращения $w = p : q$.

2.25. Ряд Фарей. Определите числа вращения языков синхронизации, лежащих на карте режимов на плоскости частота – амплитуда сигнала между значениями 1:1 и 1:2, с помощью ряда Фарей.

Решение. Как видно из рис. 2.25, языки имеют существенно разную ширину. Языки с числами вращения $w = p : q$ оказываются тем более узкими, чем больше знаменатель q , определяющий период в сечении Пуанкаре. Поэтому целесообразно иметь соответствующую классификацию языков. Она должна опираться на подходы теории чисел, классифицирующие несократимые дроби вида $w = p : q$. Такую классификацию дает *ряд Фаря*. Применим его для описания языков с числами вращения от нуля до единицы.

На первом уровне построения «стартуем» с двух самых простых несократимых дробей $\frac{0}{1}, \frac{1}{1}$. Затем ищем *медианту* этих дробей по правилу

$$\frac{p'}{q'} = \frac{p + p''}{q + q''}. \quad (2.114)$$

Для облегчения запоминания это правило называют «правилом двоечника». Тогда получим

$$\frac{0+1}{1+1} = \frac{1}{2}. \quad (2.115)$$

Это число лежит посередине между «стартовыми». Можно показать, что это общее свойство: медианта всегда лежит между порождающими ее дробями.

Выписываем теперь в ряд все три дроби $\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}$, рис. 2.26. Эти дроби дают числа вращения самых широких языков на рис. 2.25. При продолжении построения по правилу (2.115) приходим к третьей строке на рис. 2.26. В результате такой процедуры можно упорядочить все дроби, при этом новые дроби, обведенные на рис. 2.26 эллипсом, будут давать числа вращения все более и более узких языков синхронизации.

$\frac{0}{1}$									$\frac{1}{1}$							
$\frac{0}{1}$	$\left(\frac{1}{2}\right)$								$\frac{1}{1}$							
$\frac{0}{1}$	$\left(\frac{1}{3}\right)$	$\frac{1}{2}$					$\left(\frac{2}{3}\right)$	$\frac{1}{1}$								
$\frac{0}{1}$	$\left(\frac{1}{4}\right)$	$\frac{1}{3}$	$\left(\frac{2}{5}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{3}{5}\right)$	$\frac{2}{3}$	$\left(\frac{3}{4}\right)$	$\frac{1}{1}$								
$\frac{0}{1}$	$\left(\frac{1}{5}\right)$	$\frac{1}{4}$	$\left(\frac{2}{7}\right)$	$\frac{1}{3}$	$\left(\frac{3}{8}\right)$	$\frac{2}{5}$	$\left(\frac{3}{7}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{4}{7}\right)$	$\frac{3}{5}$	$\left(\frac{5}{8}\right)$	$\frac{2}{3}$	$\left(\frac{5}{7}\right)$	$\frac{3}{4}$	$\left(\frac{4}{5}\right)$	$\frac{1}{1}$

Рис. 2.26. Ряд Фаря.

2.26. Резонанс 1:2 для обобщенного неавтономного осциллятора Ван-дер-Поля-Дуффинга. Для обобщенного осциллятора Ван-дер-Поля-Дуффинга

$$\ddot{x} - (\lambda + cx - x^2)\dot{x} + x + \beta x^3 = b \sin(\omega t) \quad (2.116)$$

найдите укороченное уравнение для резонанса 1:2. Обсудите бифуркации в укороченном уравнении.

Решение. Действуем аналогично задаче 2.23. Полагаем $x = y - A \sin(\omega t)$, где переменная y отвечает колебаниям на половинной частоте и задается соотношениями (2.102). Тогда нелинейность по типу осциллятора Дуффинга дает

$$x^3 = y^3 - 3y^2 A \sin(\omega t) + 3y A^2 \sin^2(\omega t) - A^3 \sin^2(\omega t).$$

Вклад в колебания на частоте $\frac{\omega}{2}$ вносят только первое и третье слагаемые.

Тогда, используя (2.102) и оставляя только резонансные члены, получаем

$$x^3 = \frac{3}{8\omega} |a|^2 a e^{i\omega t/2} + \frac{3}{4} A^2 a e^{i\omega t/2} + \dots \quad (2.117)$$

В результате, в укороченном уравнении (2.106) появляются дополнительные члены

$$\dot{a} + i \frac{\left(\frac{\omega}{2}\right)^2 - 1}{\omega} a = \frac{\lambda}{2} a - \frac{1}{8} |a|^2 a - \frac{1}{4} A^2 a + \frac{i}{4} c A a^* + \frac{3i\beta}{4\omega} |a|^2 a + \frac{3i\beta}{2\omega} A^2 a. \quad (2.118)$$

Вводя в дополнение к (2.107) безразмерный параметр неизохронности $\chi = \frac{6\beta}{\omega}$, получаем укороченное комплексное уравнение

$$\dot{z} + i\Delta z = (1 - \varepsilon^2 + i\chi\varepsilon^2)z - (1 - i\chi)|z|^2 z + i\mu\varepsilon z^*. \quad (2.119)$$

Для действительных амплитуды и фазы получаем

$$\begin{aligned} \dot{R} &= (1 - \varepsilon^2)R - R^3 + \mu\varepsilon R \sin(2\phi), \\ \dot{\phi} &= -\delta + \chi R^2 + \mu\varepsilon \cos(2\phi), \end{aligned} \quad (2.120)$$

где $\delta = \Delta - \chi\varepsilon^2$ – частотная расстройка, «подправленная» за счет неизохронности.

Найдем теперь неподвижные точки (2.119) и обсудим их бифуркации. Одна неподвижная точка так же, как и в изохронной системе, располагается в начале координат. При этом для нее условие бифуркации Андронова-Хопфа не меняется, и его легко найти из линеаризованной системы (2.119):

$$\varepsilon = 1. \quad (2.121)$$

Из соотношений (2.120) легко получить уравнение относительно квадрата радиуса $\xi = R^2$ для остальных неподвижных точек:

$$(1 - \varepsilon^2 - \xi)^2 + (\delta - \chi\xi)^2 = \mu^2\varepsilon^2 \quad (2.122)$$

или

$$(1 + \chi^2)\xi^2 - 2(1 - \varepsilon^2 + \delta\chi)\xi + (1 - \varepsilon^2)^2 + \delta^2 - \mu^2\varepsilon^2 = 0. \quad (2.123)$$

Уравнение (2.123) позволяет найти аналитически некоторые бифуркации. Приравнявая нулю дискриминант, находим условие седло-узловой бифуркации:

$$(1 - \varepsilon^2 + \delta\chi)^2 = (1 + \chi^2)[(1 - \varepsilon^2)^2 + \delta^2 - \mu^2\varepsilon^2]. \quad (2.124)$$

Приравнявая $\xi = R^2 = 0$, находим бифуркацию вилка:

$$(1 - \varepsilon^2)^2 + \delta^2 - \mu^2\varepsilon^2 = 0. \quad (2.125)$$

На плоскости (δ, ε) ей отвечает овал, точно такой же, как в изохронной системе (2.108). Линия бифуркации вилка имеет контакт с линиями бифуркации Андронова-Хопфа в *точках Арнольда-Такенса*, которые находим, совмещая условия (2.121) и (2.125):

$$\delta = \pm\mu, \quad \varepsilon = 1. \quad (2.126)$$

В свою очередь, линии седло-узловых бифуркаций имеют контакт с линией бифуркации вилка в *симметричных точках сборки* (symmetric cusp). Их находим, совмещая условия (2.124) и (2.125):

$$\delta = \frac{\mu^2\chi \pm \mu\sqrt{\mu^2\chi^2 + 4\chi^2 + 4}}{2(1 + \chi^2)}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \delta\chi}. \quad (2.127)$$

Сравнивая формулы (2.126) и (2.127), можно отметить важное свойство неизохронной системы: введение дополнительной нелинейности снимает вырождение, имеющее место при $\chi = 0$ для системы Ван-дер-Поля, когда точки Арнольда-Такенса и симметричной сборки совпадают. Теперь это разные точки.

На рис. 2.27 показаны бифуркационные линии и точки системы (2.119), найденные численно с помощью программы *Matcont*. Общий вид бифуркационных линий представлен на рис. 2.27, *a*. Можно видеть характерный овал, образованный линиями бифуркаций вилка *PF*. На этом овале располагаются точки Арнольда-Такенса двух типов: AT^- – на левой ветви, и AT^+ – на правой. Бифуркация вилка носит различный характер на различных отрезках соответствующей линии. Так ее верхняя часть отвечает суперкритической форме PF^+ . После точки симметричной сборки *SC* она превращается в субкритическую PF^- . Затем, после точки AT^+ , снова в

суперкритическую PF^+ , и опять в субкритическую после второй симметричной сборки.

В окрестности точек Арнольда-Тakensа AT^- и AT^+ можно наблюдать картину бифуркаций, отвечающую их нормальным формам (см. задачу 1.8). Так из точки AT^+ (правая ветвь) выходит также линия глобальной бифуркации G влипания предельного цикла в гетероклинический контур, образованный инвариантными многообразиями симметричных седловых положений равновесия, см. рис. 1.9.

Более сложно устроена окрестность точки AT^- (левая ветвь). Ее окрестность в увеличенном виде показана на рис. 2.27, б. В этом случае в соответствии с результатами для нормальной формы (задача 1.8) из этой точки выходит линия AH_2 «симметричной» бифуркации Андронова-Хопфа рождения пары неустойчивых предельных циклов и линия F бифуркации «седло-узел» для предельных циклов. Особенность картины, характерная для рассматриваемого резонанса, состоит в том, что линия симметричной бифуркации Андронова-Хопфа заканчивается в точке Богданова-Тakensа, лежащей на левой ветви линии седло-узловой бифуркации, рис. 2.27, а.

В области между точками Арнольда-Тakensа AT^- и Богданова-Тakensа BT имеется система линий нелокальных бифуркаций. Первая из них G_1 выходит из точки Арнольда-Тakensа и лежит между линиями AH_2 и F . Ей отвечает ситуация, когда два неустойчивых предельных цикла проходят через гомоклиническую «восьмерку», сливаясь и образуя один предельный цикл, см. рис. 1.11 к задаче 1.8. При переходе через нижнюю ветвь линии бифуркации вилка, эта линия расщепляется на две: G_2 и G_3 . Причина такого расщепления состоит в том, что при переходе через линию бифуркации вилка появляются два дополнительных положения равновесия, и картина гомоклинических петель седловых положений равновесия и, соответственно, нелокальных бифуркаций усложняется.

Отметим, что описанная картина имеет место при положительных значениях параметра неизохронности $\chi > 0$. При уменьшении χ точки Арнольда-Тakensа и симметричных сборок сближаются и при $\chi = 0$ сливаются. При $\chi < 0$ они снова расходятся, но при этом точки Арнольда-Тakensа меняются местами: точка AT^+ оказывается на левой ветви линии бифуркации вилка, а AT^- – на правой.

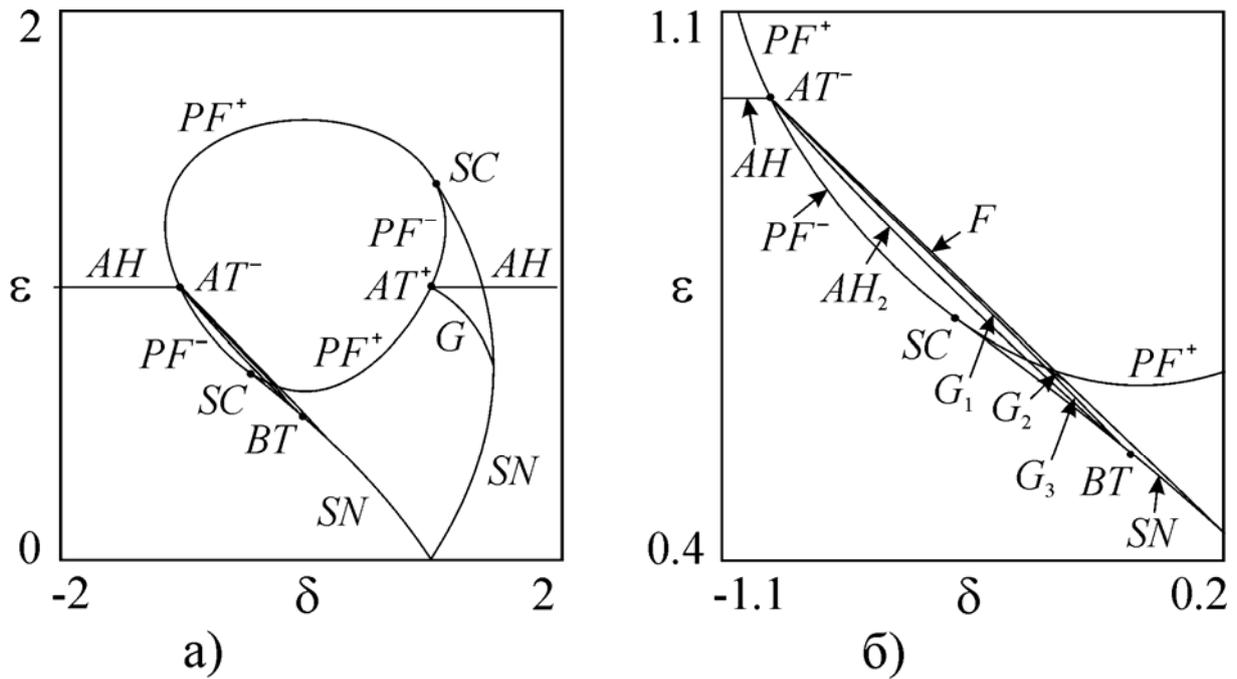


Рис. 2.27. Бифуркации для резонанса 1:2 в системе (2.119), $\mu=1$, $\chi=1$; SN – линии седло-узловых бифуркаций, AH – линия бифуркации Андронова-Хопфа, PF^+ – суперкритическая бифуркация вилка, PF^- – субкритическая бифуркация вилка, AH_2 – «симметричная» бифуркация Андронова-Хопфа, AT^- и AT^+ – точки Арнольда-Такенса, SC – симметричные точки сборки, BT – точка Богданова-Такенса, F – линия бифуркации «седло-узел» для двух симметричных предельных циклов, G , G_1 , G_2 и G_3 – линии нелокальных бифуркаций.

2.27. Качественная картина основных резонансов. Обобщите полученные в задачах 2.15, 2.18, 2.26 результаты для резонансов 1:1, 1:2, 1:3 и представьте качественную картину языков синхронизации в гипотетической потоковой системе.

Решение. Метод медленно меняющихся амплитуд приводит к укороченным уравнениям, которые позволяют описать устройство основных языков синхронизации с числами вращения $p : q = 1 : 1, 1 : 2, 1 : 3$. При переходе к неавтономной потоковой системе – автоколебательному осциллятору с внешним воздействием – картина в окрестности соответствующих резонансов качественно сохраняется, но при этом меняется тип бифуркаций. Так вместо бифуркации Андронова-Хопфа имеет место бифуркация Неймарка-Сакера, вместо точки Богданова-Такенса реализуется точка бифуркации резонанс 1:1, вместо бифуркации вилка – бифуркация удвоения периода. При этом характерные отрезки линий бифуркаций Андронова-Хопфа на рис. 2.11, 2.15 и 2.26 переходят в общую линию бифуркации Неймарка-Сакера. На рисунке указаны также еще некоторые точки бифуркаций коразмерности два: резонанса

1:2 и 1:3)¹⁷. Кроме языков 1:1, 1:2, 1:3 на рис. 2.28 показаны еще два языка более высоких периодов 3:4 и 3:5, которые определяются с помощью ряда Фарея. Рисунок 2.28 является схематическими и дает качественную картину, которая может наблюдаться в различных неавтономных автоколебательных осцилляторах, но ее детали могут отличаться.

Отметим, что резонансы со знаменателями $q=1, 2, 3, 4$ называют *сильными*. Для каждого из них характерна своя, специфическая картина бифуркаций. При этом, например, случай 1:4 очень сложен и включает десятки бифуркаций и перестроек. Резонансы с $q \geq 5$ называют *слабыми*, они устроены одинаково. При этом вершины языков синхронизации для сильных резонансов 1:1, 1:2, 1:3 являются гладкими, для резонанса 1:4 вершина имеет форму «клина», а вершины языков слабых резонансов имеют острие типа сборки.

Здесь следует отметить некоторые терминологические моменты. Мы говорим о резонансе как о физическом явлении, понимая при этом картину, которая имеет место в *окрестности резонансной частоты*. В этом случае в рассмотрение вводится *эталонное* (как вариант термина, модельное) уравнение, которое описывает картину явлений в окрестности резонансной частоты. Эта картина включает систему бифуркационных точек и линий, которые определенным образом сосуществуют, при этом она в значительной мере универсальна.

В математической литературе с понятием резонанса оказывается связанной задача исследования бифуркаций векторного поля (потока фазовых траекторий) на плоскости при наличии симметрии относительно поворотов на угол $2\pi/q$, где q – порядок резонанса. Как сказано в [15], «такие поля обычно называют 1:q резонансными». При этом в стиле теории локальных бифуркаций в центре внимания оказывается соответствующая *нормальная форма*, которая дает типичную и *строго универсальную* картину бифуркаций в *малой окрестности* соответствующей точки. Для определения соответствующих ситуаций могут использоваться такие термины, как «два нулевых собственных значения с симметрией порядка два (три, четыре и т.д.)». Например, для случая симметрии второго порядка нормальная форма имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= \mu_1 x + \mu_2 y \pm x^3 - x^2 y. \end{aligned} \tag{2.128}$$

¹⁷ Для точки резонанса 1:1 мультипликаторы отображения в сечении Пуанкаре равны +1 и +1, для резонанса 1:2, соответственно, -1, +1, для точки резонанса 1:3 мультипликаторы комплексные, модуль равен единице, а аргумента составляет $\pm 2\pi/3$.

Она определяет две бифуркационные точки коразмерности два (см. задачу 1.8). Картина резонанса в «физическом контексте» должна учитывать зависимость от частоты и амплитуды сигнала, как на рис. 2.27, и включает в себя обе эти точки, но не исчерпывается ими.

Нормальная форма с симметрией третьего порядка имеет вид

$$\dot{z} + i\Delta z = \mu z - C|z|^2 z + (z^*)^2. \quad (2.129)$$

Здесь $\mu = \mu_1 + i\mu_2$ – комплексный параметр, а C – комплексное число. Здесь аналогия с резонансом в физическом смысле (см. соотношение (2.90)) практически полная, за исключением «спрятанной» зависимости от частоты и амплитуды сигнала.

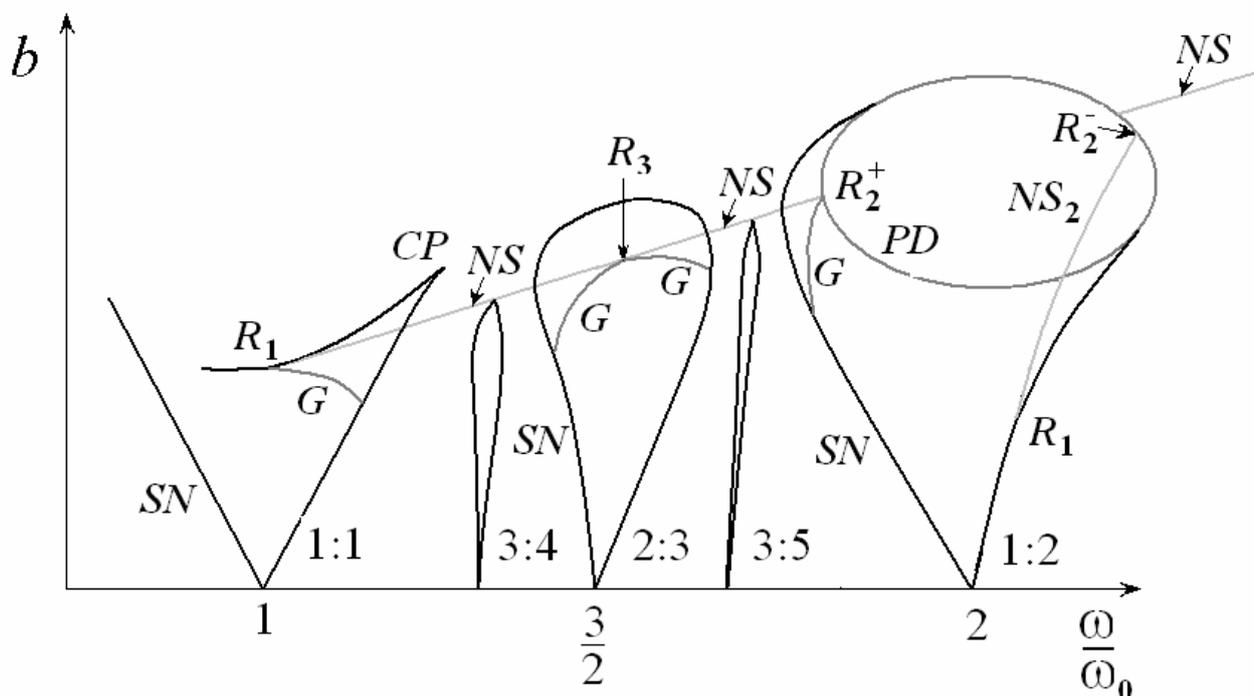


Рис. 2.28. Качественная картина основных языков синхронизации для потоковых систем; SN – линии седло-узловых бифуркаций, NS – линии бифуркаций Неймарка-Сакера, PD – линии бифуркаций удвоения периода, G – линии различных глобальных бифуркаций, $R_{1,2,3}$ – точки резонанса 1:1, 1:2, 1:3.

2.28. Укороченное уравнение для неавтономного осциллятора Ван-дер-Поля-Дуффинга. Получите и исследуйте укороченное уравнение для неавтономного осциллятора Ван-дер-Поля-Дуффинга

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \beta x^3 = b \sin(\omega t) \quad (2.130)$$

в области основного резонанса. Особо обсудите случай новых бифуркаций (по сравнению с системой Ван-дер-Поля) в области больших амплитуд воздействия.

Решение. Действуя аналогично задаче 2.4, получаем следующее укороченное уравнение для комплексной амплитуды:

$$\dot{a} + i \frac{\omega^2 - 1}{2\omega} a = \frac{\lambda}{2} a - \frac{1}{8} |a|^2 a + i \frac{3\beta}{2\omega} |a|^2 a - \frac{b}{2\omega}. \quad (2.131)$$

Выполним замену переменных и параметров (2.16), используя безразмерные параметры

$$\Delta = \frac{\omega^2 - 1}{\lambda\omega} \approx 2 \frac{\omega - 1}{\lambda\omega}, \quad \varepsilon = \frac{b}{2\omega\lambda^{3/2}}, \quad \chi = \frac{3\beta}{\omega}. \quad (2.132)$$

Тогда получим укороченное уравнение в безразмерной форме:

$$\dot{z} + i\Delta z = z - |z|^2 z + i\chi |z|^2 z - \varepsilon. \quad (2.133)$$

Используя подстановку $z = R e^{i\varphi}$ и отделяя в (2.133) действительную и мнимую части, находим уравнения для действительной амплитуды R и фазы φ :

$$\begin{aligned} \dot{R} &= R - R^3 - \varepsilon \cos \varphi, \\ \dot{\varphi} &= -\Delta + \chi R^2 + \frac{\varepsilon}{R} \sin \varphi. \end{aligned} \quad (2.134)$$

Можно видеть, что переход к осциллятору Ван-дер-Поля-Дуффинга приводит к появлению в (2.134) дополнительного члена χR^2 , ответственного за неизохронность колебаний.

Рассмотрим сначала случай малых амплитуд воздействия. Тогда в уравнении для фазы можно положить $R = 1$:

$$\dot{\varphi} = -\Delta + \chi + \varepsilon \sin \varphi. \quad (2.135)$$

Мы пришли к уравнению Адлера, из которого следует, что границы языка синхронизации даются соотношениями

$$\Delta = \chi \pm \varepsilon. \quad (2.136)$$

Таким образом, учет фазовой нелинейности приводит к сдвигу языка синхронизации вправо (при $\chi > 0$) по оси безразмерной частоты Δ на величину параметра неизохронности χ , при этом форма его не меняется. В размерном виде, используя (2.132), получаем для вершины языка

$$\omega = 1 + \frac{3}{2} \lambda \beta. \quad (2.137)$$

Тот же результат получается и из соотношения (1.27), определяющего собственную частоту автономного неизохронного осциллятора.

Откажемся теперь от условия малости ε и проведем анализ бифуркаций полной укороченной системы (2.133). Для того, чтобы найти неподвижные точки, положим производные равными нулю, оставим в правых частях только

члены с тригонометрическими функциями, возведем оба уравнения в квадрат и сложим. Делая обозначение $R^2 = \xi$, получим

$$\xi(1 - \xi)^2 + \xi(\Delta - \chi\xi)^2 = \varepsilon^2 \quad (2.138)$$

или

$$(1 + \chi^2)\xi^3 - 2(\chi\Delta + 1)\xi^2 + (1 + \Delta^2)\xi = \varepsilon^2. \quad (2.139)$$

Уравнение (2.139) может иметь одно или три действительных решения. Соответственно, в системе может быть одна или три неподвижные точки.

Найдем линию седло-узловой бифуркации. Для этого продифференцируем уравнение (2.139) по ξ :

$$3\xi^2(\chi^2 + 1) - 4(\Delta\chi + 1)\xi + 1 + \Delta^2 = 0. \quad (2.140)$$

Совместно с (2.138) имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 &= \xi(1 - \xi)^2 + \xi(\Delta - \chi\xi)^2, \\ \xi_{1,2} &= \frac{2(\Delta\chi + 1) \pm \sqrt{\Delta^2(\chi^2 - 3) + 8\Delta\chi + 1 - 3\chi^2}}{3(1 + \chi^2)}. \end{aligned} \quad (2.141)$$

Эти уравнения определяют две ветви линии седло-узловой бифуркации (линии складок).

Приравнявая вторую производную уравнения (2.139) нулю, можно получить условия, при которых линии бифуркаций седло-узел сливаются в точках сборки:

$$\Delta_{1,2} = \frac{-4\chi \pm \sqrt{3}(\chi^2 + 1)}{\chi^2 - 3}. \quad (2.142)$$

Можно видеть, что в отличие от изохронного случая $\chi = 0$, когда $\Delta_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{3}}{3}$,

сборки располагаются несимметричным образом.

Найдем условие бифуркации Андронова-Хопфа. Для этого разделим действительную и мнимую части z в уравнении (2.133):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + \Delta y - x(x^2 + y^2) - \chi(x^2 + y^2)y - \varepsilon, \\ \dot{y} &= y - \Delta x - y(x^2 + y^2) + \chi(x^2 + y^2)x. \end{aligned} \quad (2.143)$$

Условием бифуркации Андронова-Хопфа является равенство нулю следа матрицы линеаризации этой системы, что дает

$$2 - 4(x^2 + y^2) = 0 \quad (2.144)$$

или $\xi = \frac{1}{2}$. Подставляем это значение ξ в (2.139) и получаем уравнение для бифуркации Андронова-Хопфа

$$\varepsilon^2 = \frac{1 + 4\Delta^2 - 4\Delta\chi + \chi^2}{8}. \quad (2.145)$$

Можно видеть, что и картина бифуркаций Андронова-Хопфа при ненулевой неизохронности оказывается несимметричной.

Общие точки бифуркаций седло-узел и Андронова-Хопфа – точки Богданова-Такенса – ищем, подставляя $\xi = \frac{1}{2}$ в (2.140). После несложных преобразований получим

$$\Delta_{1,2} = \frac{2\chi \pm \sqrt{\chi^2 + 1}}{2}. \quad (2.146)$$

Исследуемая система характеризуется тремя параметрами, поэтому картина бифуркаций вложена, вообще говоря, в пространство параметров $(\Delta, \varepsilon, \chi)$. При этом, по сравнению с решением задачи 2.15, относящейся к системе Ван-дер-Поля, появляется новая бифуркация коразмерности три. Она соответствует слиянию сборки и бифуркации Богданова-Такенса¹⁸. Найдем отвечающие ей значения параметров. Для этого приравняем (2.142) и (2.146) и получим

$$\chi_c = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \Delta = 0, \quad \varepsilon = \frac{\sqrt{6}}{6}. \quad (2.147)$$

Для данной задачи естественно изучать пространство параметров, рассматривая метаморфозы плоскости частота – амплитуда воздействия с ростом параметра неизохронности. Рис. 2.29 иллюстрирует эволюцию языка синхронизации на плоскости (Δ, ε) с ростом χ .

При $\chi = 0$ система изохронна, и картина бифуркационных линий симметрична относительно точки $\Delta = 0$. При увеличении χ язык синхронизации меняет свою форму и становится асимметричным: низкочастотный порог бифуркации Андронова-Хопфа оказывается ниже, чем высокочастотный. Сам язык смещается вправо вдоль оси частот на величину χ , как и было предсказано при анализе малых амплитуд воздействия. Однако детали устройства плоскости параметров при $\chi < \chi_c = \frac{\sqrt{3}}{3}$ аналогичны традиционному уравнению Ван-дер-Поля. «Грубая» картина бифуркаций и вида фазовых портретов аналогична картине для традиционного уравнения Ван-дер-Поля также при $\chi > \chi_c$,

¹⁸ Такая бифуркация представлена также в задаче 1.9.

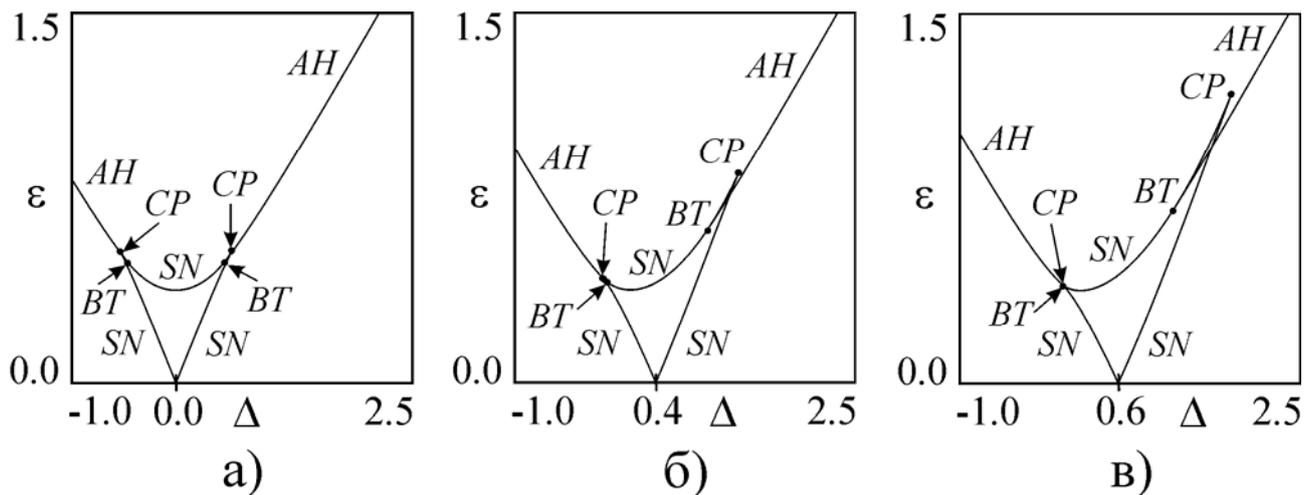


Рис. 2.29. Эволюция языка синхронизации на плоскости параметров (Δ, ε) укороченного уравнения Ван-дер-Поля-Дуффинга (2.133); $\chi = 0$ (а), $\chi = 0.4$ (б), $\chi = 0.6 > \chi_c$ (в). *SN* – линии седло-узловых бифуркаций, *AH* – линии бифуркаций Андронова-Хопфа, *CP* – точка сборки, *BT* – точки Богданова-Тakensа.

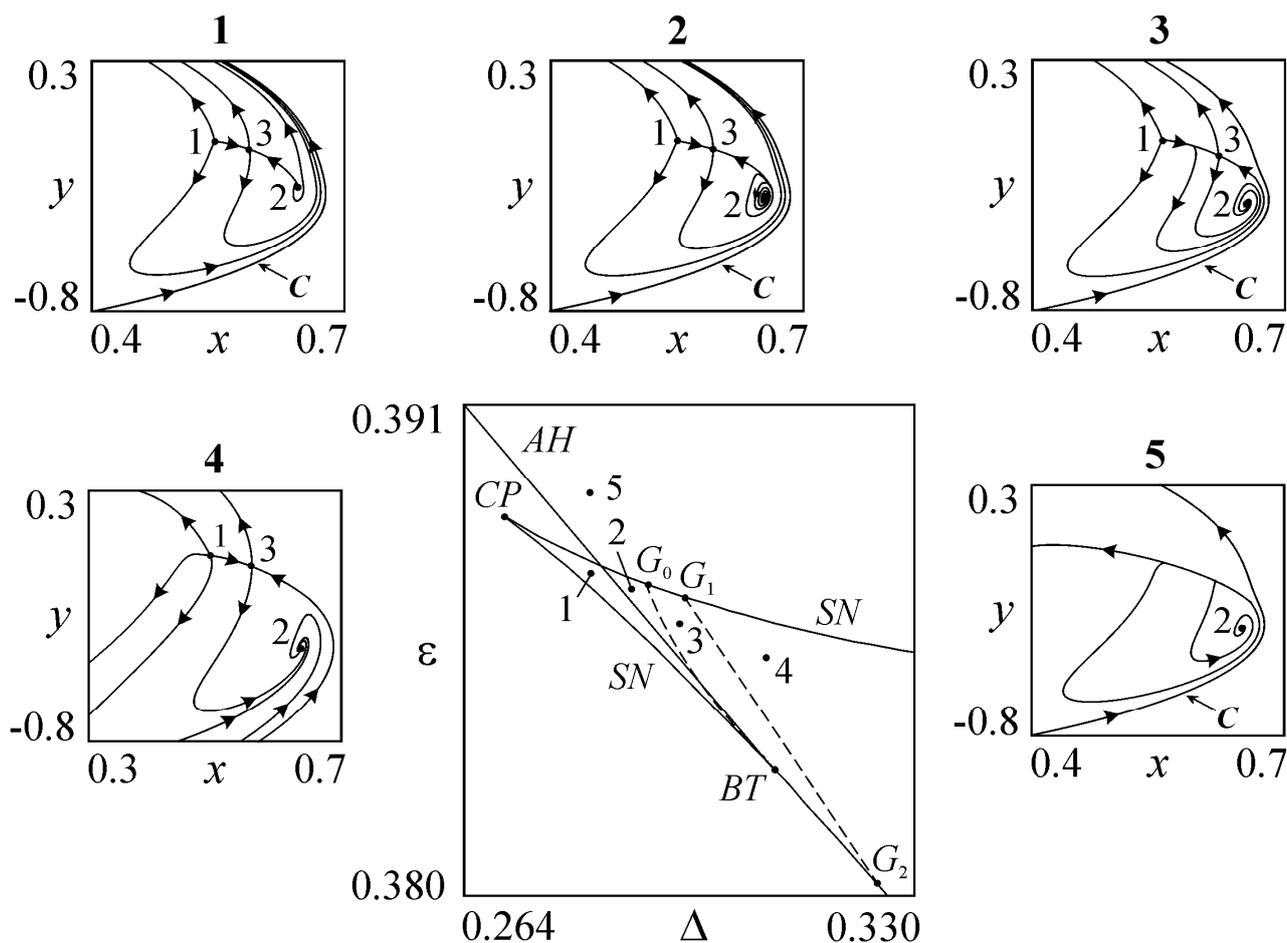


Рис. 2.30. Плоскость параметров укороченного уравнения Ван-дер-Поля-Дуффинга (2.133) в окрестности левой точки сборки при $\chi = 1$. На вставках – характерные фазовые портреты.

Переход через линию SN вблизи точки сборки сопровождается рождением неустойчивого узла 1 и седла 3, однако при этом остается устойчивый предельный цикл C , охватывающий все три неподвижные точки (вставка 1). На этой и последующих вставках показан только фрагмент фазовой плоскости системы вблизи неподвижных точек, так как в масштабах предельного цикла точки находятся очень близко друг к другу. Устойчивый предельный цикл имеет большой размер, в поле рисунка попадает только его часть. При переходе через линию бифуркации Андронова-Хопфа неустойчивый фокус 2 становится устойчивым, и вблизи него рождается *неустойчивый* предельный цикл (вставка 2). В этой области плоскости параметров в системе сосуществуют неустойчивый узел 1, устойчивый фокус 2 и седло 3, а также два предельных цикла – устойчивый C и неустойчивый. При переходе через первую линию нелокальной бифуркации (OG_0) неустойчивый предельный цикл влипает в неустойчивое многообразие седла и исчезает (вставка 3). Однако устойчивый предельный цикл все еще остается. Он исчезает, касаясь устойчивого многообразия седла, при переходе через другую линию нелокальной бифуркации (G_1G_2) (вставка 4).

В окрестности точки сборки присутствует еще одна линия нелокальной бифуркации, которая на рисунке 2.30 не показана. Выше линии седло-узловой бифуркации в точке 5 сосуществуют устойчивый и неустойчивый предельные циклы. Если двигаться далее вправо по плоскости параметров, то неустойчивый предельный цикл увеличивается и в некоторый момент касается устойчивого предельного цикла, так что оба они исчезают в результате fold бифуркации.

2.29. Карта динамических режимов неавтономного осциллятора Ван-дер-Поля-Дуффинга. Постройте карту динамических режимов неавтономного осциллятора Ван-дер-Поля-Дуффинга (2.130) для $\lambda = 1$, $\beta = 2.5$. Как проявляется введение нелинейности по типу осциллятора Дуффинга по сравнению с системой (2.1)?

Решение. Карта динамических режимов системы (2.130) представлена на рис. 2.31, *а*, а ее увеличенный фрагмент – на рис. 2.31, *б*. Здесь на картах указаны не числа вращения, а периоды в сечении Пуанкаре. Это более удобно в рамках метода карт динамических режимов, и кроме того, позволяет фиксировать области удвоенного периода внутри языков. Числа вращения могут быть легко определены с помощью ряда Фарея.

Прежде всего, отмечаем, что в силу неизохронности системы все языки заметно смещены в сторону высоких частот. (См. масштабы по оси частот на рис. 2.31, *а* и рис. 2.22, *а*.) Действительно, в соответствии с решением

задачи 2.27 неизохронность увеличивает собственную частоту осциллятора (при $\beta > 0$), см. формулу (2.137). Второе проявление неизохронности состоит в том, что появляются выраженные языки с четными значениями периода в сечении Пуанкаре, см. рис. 2.31, б. Наконец, на увеличенном фрагменте можно видеть появление сложной структуры внутри языков. Это могут быть острова удвоенного периода с хаотической областью посередине. Кроме того, характерно наличие бифуркационных элементов, известных как «*crossroad area*» (перекресток), состоящих из точек сборки с идущими характерным образом по берегам линий складок линиями удвоения периода (см. [9]).

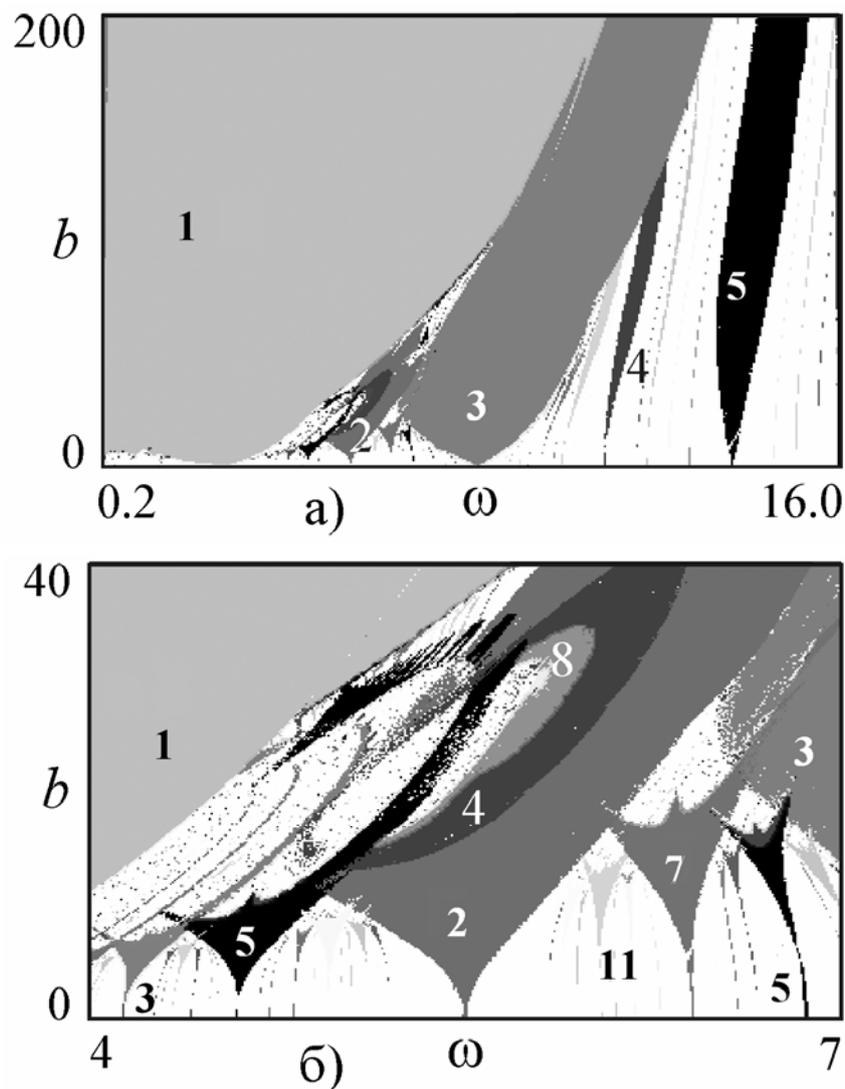


Рис. 2.31. Карта динамических режимов (а) и ее увеличенный фрагмент (б) для неавтономного осциллятора Ван-дер-Поля-Дуффинга (2.130), $\lambda = 1$, $\beta = 2.5$.

2.30. Синхронизация брюсселятора. Постройте карту динамических режимов неавтономного брюсселятора

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a - (b+1)x + x^2 y + B \sin(\omega t), \\ \dot{y} &= bx - x^2 y \end{aligned} \quad (2.148)$$

на плоскости частота – амплитуда воздействия. Параметры автономного осциллятора $a = 0.4$, $b = 1.2$.

Решение. Отметим, что в соответствии с (1.73), (1.74) выбранные параметры брюсселятора отвечают собственной частоте в линейном приближении $\omega_0 = a = 0.4$ и небольшому превышению над порогом бифуркации Андронова-Хопфа $\Lambda = b - a^2 - 1 = 0.04$. Карта динамических режимов системы (2.148) показана на рис. 2.32. Можно видеть, что выражены как резонансы с четными, так и с нечетными периодами в сечении Пуанкаре. Внутри языка синхронизации периода 2 (число вращения 1:2) наблюдается остров с удвоениями периода и переходом к хаосу. Картина качественно отвечает рис. 2.28.

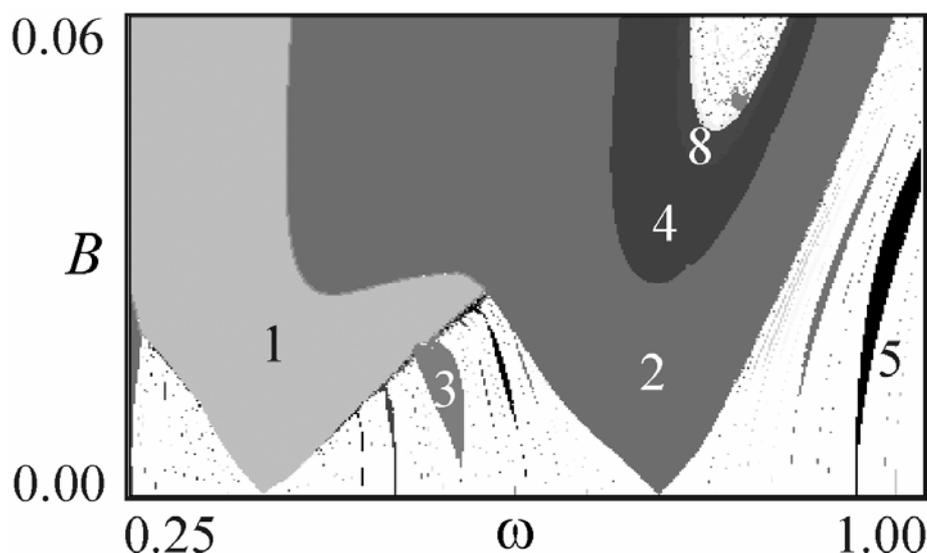


Рис. 2.32. Карта динамических режимов неавтономного брюсселятора на плоскости частота – период воздействия, $a = 0.4$, $b = 1.2$.

2.31. Синхронизация в брюсселяторе с изменяющимися параметрами.

Постройте карту динамических режимов брюсселятора с внешним воздействием (2.148) на плоскости параметров автономного осциллятора (a, b). Обсудите, как меняется картина за счет внешнего сигнала в окрестности линии бифуркации Андронова-Хопфа автономного осциллятора. Частота воздействия $\omega = 1$, амплитуда сигнала $B = 0.1$, $B = 0.5$.

Решение. Карты динамических режимов показаны на рис. 2.33. Если амплитуда сигнала мала, то несколько выше линии бифуркации Андронова-Хопфа автономной системы $b = a^2 + 1$ возникают квазипериодические режимы, показанные белым цветом на карте на рис. 2.33, а. Область квазипериодических режимов пересекают языки синхронизации, из которых самым широким является язык периода 1. Этот язык выходит из области периода 1 при значении

$a \approx 1$. Это значение отвечает единичной собственной частоте малых колебаний автономного брюсселятора (задача 1.10). Таким образом, частота сигнала примерно равна собственной частоте автономной системы. Если теперь увеличить амплитуду сигнала, то синхронные режимы практически вытесняют квазипериодические, так что языки синхронизации фактически смыкаются краями, рис. 2.33, б. По краям языка периода 2 теперь можно видеть удвоения периода.

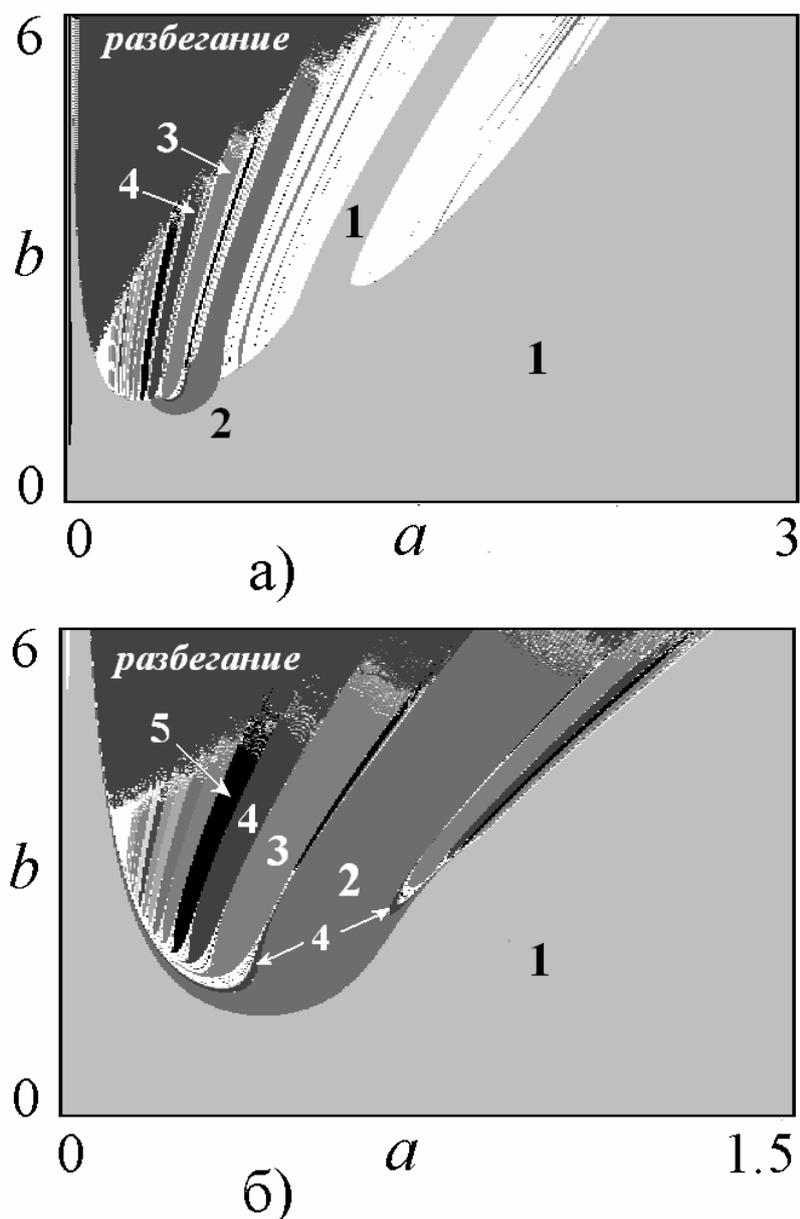


Рис. 2.33. Карты динамических режимов неавтономного брюсселятора на плоскости параметров осциллятора. Параметры сигнала $\omega = 1$, $B = 0.1$ (а), $B = 0.5$ (б).

2.32. Синхронизация осциллятора Богданова. Постройте карту динамических режимов осциллятора Богданова (1.28) с внешним воздействием

$$\ddot{x} - (\mu - x)\dot{x} + a - x^2 = B \cos(\omega t). \quad (2.149)$$

Используйте плоскость параметров (a, μ) , управляющих внутренней динамикой осциллятора. Как изменится характерная для автономного осциллятора картина в окрестности точки Богданова-Тakensа на рис. 1.3? Частота воздействия $\omega = 1$, амплитуда $B = 1$.

Решение. Карта динамических режимов системы (2.149) показана на рис. 2.34. Для автономной системы предельный цикл существует в достаточно узкой области, ограниченной снизу линией бифуркации Андронова-Хопфа, а сверху – линией нелокальной бифуркации влипания предельного цикла в петлю сепаратрисы, рис. 1.3. Эти линии сходятся собственно в точке Богданова-Тakensа. В соответствии с этим, на рис. 2.34 возникает узкая область квазипериодических режимов, ограниченная снизу линией бифуркации Неймарка-Сакера рождения инвариантной кривой, а сверху – линией нелокальной бифуркации исчезновения инвариантной кривой, приводящей к появлению области разбегания. Эти линии сходятся в точке бифуркации коразмерности два резонанс 1:1, которая приходит на смену точке Богданова-Тakensа в возбуждаемой системе. Внутри области квазипериодической динамики имеет место картина языков Арнольда¹⁹. Область существования квазипериодических режимов уже, чем область предельного цикла в автономной системе на рис. 1.3, что является следствием внешнего воздействия. Действительно, наличие внешнего сигнала с определенной амплитуды будет «выталкивать» изображающую точку в область фазового пространства, где траектории убегают на бесконечность.

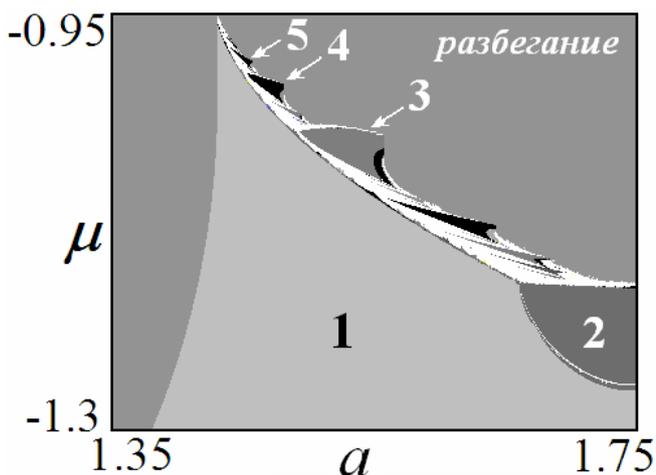
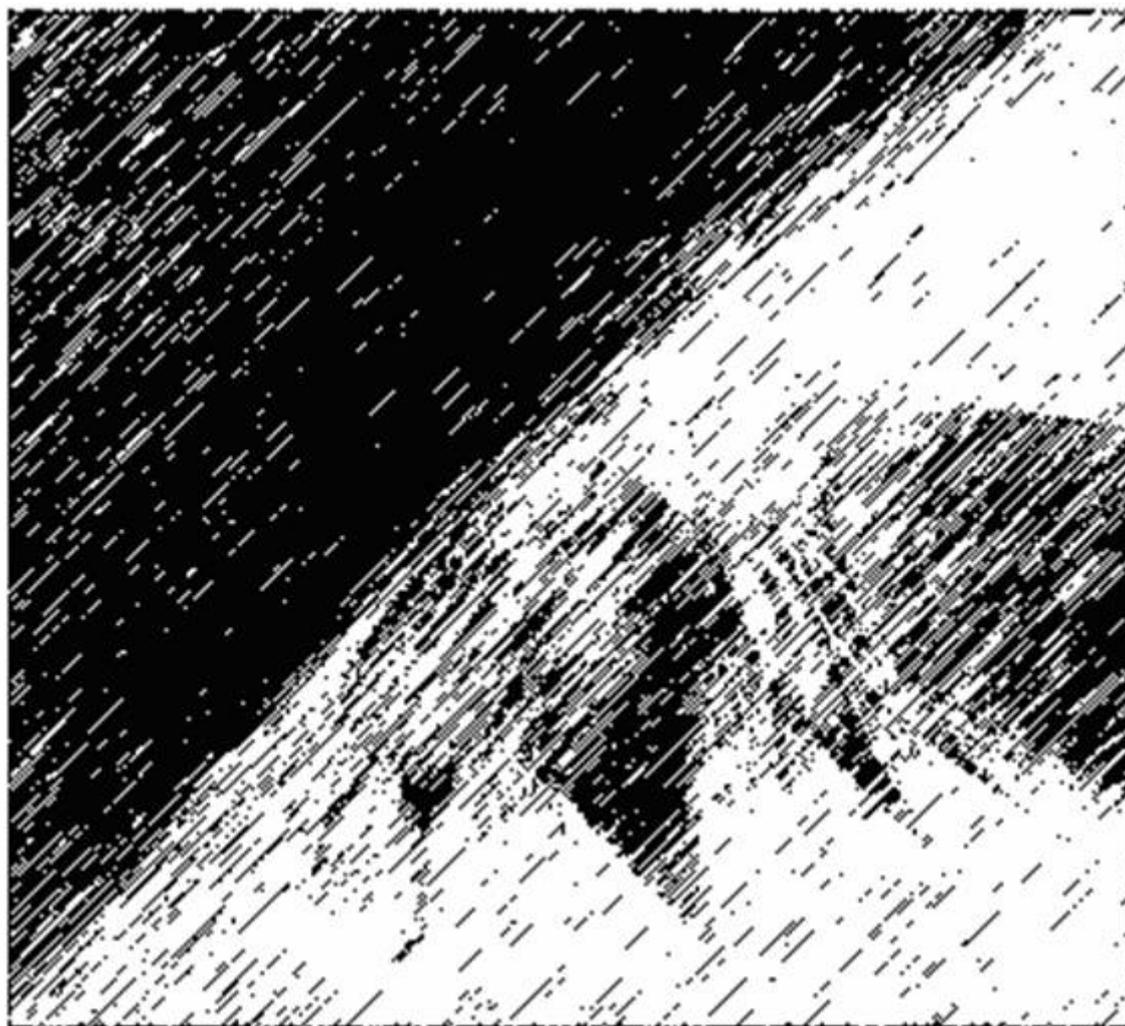


Рис. 2.34. Карта режимов неавтономного осциллятора Богданова в окрестности точки Богданова-Тakensа автономной системы. Параметры сигнала $B = 1$, $\omega = 1$

¹⁹ Отметим, что устройство плоскости параметров, аналогичное рис. 2.34, достаточно характерно для двумерных отображений с нефиксированным якобианом

Часть III

**ВЗАИМНАЯ
СИНХРОНИЗАЦИЯ**



Взаимная синхронизация диссипативно связанных осцилляторов

3.1. Укороченные уравнения диссипативно связанных автоколебательных осцилляторов. Рассмотрим систему двух диссипативно связанных осцилляторов Ван-дер-Поля:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + \left(1 - \frac{\Delta}{2}\right)x + \mu(\dot{x} - \dot{y}) &= 0, \\ \ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + \left(1 + \frac{\Delta}{2}\right)y + \mu(\dot{y} - \dot{x}) &= 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь λ – управляющий параметр, отвечающий за бифуркацию Андронова-Хопфа в отдельных осцилляторах, μ – коэффициент диссипативной связи, Δ – относительная частотная расстройка осцилляторов, центральная частота осцилляторов принята за единицу. Получите для этой системы укороченные уравнения для комплексных амплитуд. Обсудите возможность уменьшения числа существенных параметров в укороченных уравнениях за счет перенормировки.

Решение. Пусть амплитуды колебаний осцилляторов малы, малы также управляющий параметр λ , величина связи μ и частотная расстройка Δ : $\lambda, \mu, \Delta \ll 1$. Тогда можно считать, что движение происходит вблизи орбит линейных осцилляторов

$$\ddot{x} + x = 0 \text{ и } \ddot{y} + y = 0, \quad (3.2)$$

и применить метод медленно меняющихся амплитуд. С этой целью представим динамические переменные в виде

$$x = ae^{it} + a^*e^{-it}, \quad y = be^{it} + b^*e^{-it}, \quad (3.3)$$

где $a(t)$ и $b(t)$ – комплексные амплитуды первого и второго осцилляторов, медленно меняющиеся на фоне колебаний с единичной частотой. Накладывая стандартные дополнительные условия

$$\dot{a}e^{it} + \dot{a}^*e^{-it} = 0, \quad \dot{b}e^{it} + \dot{b}^*e^{-it} = 0, \quad (3.4)$$

имеем следующие выражения для скоростей осцилляторов:

$$\dot{x} = ia e^{it} - ia^* e^{-it}, \quad \dot{y} = ib e^{it} - ib^* e^{-it}. \quad (3.5)$$

Подставим соотношения (3.3), (3.4) в уравнения (3.1), умножим полученные выражения на e^{-it} и проведем усреднение для исключения быстро осциллирующих членов. После соответствующих преобразований получаем укороченные уравнения для комплексных амплитуд:

$$\begin{aligned} 2 \frac{da}{dt} &= \lambda a - |a|^2 a - i \frac{\Delta}{2} a - \mu(a - b), \\ 2 \frac{db}{dt} &= \lambda b - |b|^2 b + i \frac{\Delta}{2} b - \mu(b - a). \end{aligned} \quad (3.6)$$

В уравнениях (3.6) управляющий параметр λ может быть убран перенормировкой переменных и параметров

$$a = \sqrt{\lambda} \bar{a}, \quad b = \sqrt{\lambda} \bar{b}, \quad t = \bar{t}/\lambda, \quad \mu = \lambda \bar{\mu}, \quad \Delta = \lambda \bar{\Delta}, \quad (3.7)$$

так что

$$\begin{aligned} 2 \frac{da}{dt} &= a - |a|^2 a - i \frac{\Delta}{2} a - \mu(a - b), \\ 2 \frac{db}{dt} &= b - |b|^2 b + i \frac{\Delta}{2} b - \mu(b - a). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Для сокращения записи черту над новыми переменными и параметрами опускаем.

Таким образом, укороченные уравнения содержат два существенных параметра: нормированные на управляющий параметр частотную расстройку Δ и величину связи μ . Удобство нормировки (3.7) состоит в том, что при переходе к размерным параметрам все иллюстрации сохраняют свой вид, только изменяются в одинаковое число раз масштабы по осям Δ и μ . При этом при анализе системы (3.8) можно полагать, что параметры уже не обязательно являются малыми.

Как следует из приведенного обсуждения, величина управляющего параметра λ в квазигармоническом приближении не влияет качественно на характер динамики системы. В свою очередь, динамика исходной системы (3.1) уже существенным образом зависит от величины параметра λ , если он не мал.

3.2. Уравнения для амплитуд и фаз осцилляторов. Получите уравнения для действительных амплитуд и фаз диссипативно связанных осцилляторов. Покажите, что соответствующая система уравнений зависит только от относительной фазы осцилляторов.

Решение. Положим в укороченных уравнениях (3.8) $a = R e^{i\psi_1}$ и $b = r e^{i\psi_2}$, где R , r и $\psi_{1,2}$ – действительные амплитуды и фазы осцилляторов. Тогда, разделяя действительные и мнимые части, находим:

$$\begin{aligned}
2 \frac{dR}{dt} &= R(1-\mu) - R^3 + \mu r \cos(\psi_2 - \psi_1), \\
2 \frac{dr}{dt} &= r(1-\mu) - r^3 + \mu R \cos(\psi_1 - \psi_2), \\
\frac{d\psi_1}{dt} &= -\frac{\Delta}{4} + \frac{r}{2R} \mu \sin(\psi_2 - \psi_1), \\
\frac{d\psi_2}{dt} &= \frac{\Delta}{4} + \frac{R}{2r} \mu \sin(\psi_1 - \psi_2).
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Размерность системы (3.9) может быть понижена на единицу, если ввести относительную фазу осцилляторов $\theta = \psi_1 - \psi_2$. Тогда

$$\begin{aligned}
2 \frac{dR}{dt} &= R(1-\mu) - R^3 + \mu r \cos \theta, \\
2 \frac{dr}{dt} &= r(1-\mu) - r^3 + \mu R \cos \theta, \\
\frac{d\theta}{dt} &= -\frac{\Delta}{2} - \frac{\mu}{2} \left(\frac{R}{r} + \frac{r}{R} \right) \sin \theta.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Таким образом, для динамики связанных осцилляторов оказывается существенной только их относительная фаза. Уравнения для обеих фаз, однако, необходимы при вычислении частоты взаимного захвата осцилляторов (см. задачу 3.5).

3.3. Динамика диссипативно связанных осцилляторов вблизи устойчивых невозмущенных орбит. Обсудите динамику амплитуд и относительной фазы осцилляторов при малой связи в окрестности невозмущенных орбит. Покажите, что в этом случае при описании динамики относительной фазы можно считать амплитуды невозмущенными. Получите соответствующее фазовое уравнение и покажите, что оно является уравнением Адлера.

Решение. Пусть величина связи мала и $\mu \ll 1$. При выключенной связи из (3.10) получаем для устойчивых стационарных орбит осцилляторов²⁰ $R = r = 1$. При слабой связи осцилляторы движутся в окрестности этих стационарных орбит. Положим поэтому $R = 1 + \tilde{R}$ и $r = 1 + \tilde{r}$, где знаком «тильда» отмечены возмущения орбит осцилляторов. Подставим эти соотношения в два первых уравнения (3.10). Отбрасывая члены более высокого порядка по возмущениям, получаем

²⁰ Заметим, что в размерной форме такая оценка в соответствии с (3.7) дает, что радиусы орбит осцилляторов растут как корень квадратный из параметра λ , отвечающего за бифуркацию Андронова-Хопфа в отдельных осцилляторах

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{R}}{dt} &= -\tilde{R} + \frac{1}{2}\mu(\cos\theta - 1), \\ \frac{d\tilde{r}}{dt} &= -\tilde{r} + \frac{1}{2}\mu(\cos\theta - 1).\end{aligned}\tag{3.11}$$

Таким образом, система оказывается сильно «продемпфированной»: при малой связи возмущения быстро стремятся к стационарным значениям

$$\tilde{R} = \tilde{r} = \frac{1}{2}\mu(\cos\theta - 1).\tag{3.12}$$

Мы видим, что диссипативная связь меняет (уменьшает) радиусы орбит обоих осцилляторов одинаковым образом, так что их возмущенные орбиты совпадают. Как мы увидим далее, в случае реактивной связи это не так, см. задачу 3.30.

Перейдем теперь к фазовому уравнению (3.10)

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\Delta}{2} - \frac{\mu}{2}\left(\frac{R}{r} + \frac{r}{R}\right)\sin\theta.\tag{3.13}$$

Если подставить в зависящий от амплитуд множитель, входящий в это уравнение, выражения $R = 1 + \tilde{R}$ и $r = 1 + \tilde{r}$, то получим

$$\frac{R}{r} + \frac{r}{R} = \frac{1 + \tilde{R}}{1 + \tilde{r}} + \frac{1 + \tilde{r}}{1 + \tilde{R}} = (1 + \tilde{R} - \tilde{r} + \dots) + (1 + \tilde{r} - \tilde{R} + \dots) = 1 + \dots\tag{3.14}$$

Здесь многоточием обозначены члены второго порядка и выше по возмущениям. При подстановке в (3.13) они дадут члены третьего порядка и выше. Этот факт приводит к простому способу получения фазового уравнения в случае диссипативной связи: для этого можно просто подставить уравнения в (3.13) стационарные невозмущенные значения орбит осцилляторов $R = r = 1$. Тогда получим

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\Delta}{2} - \mu \sin\theta.\tag{3.15}$$

Это классическое уравнение Адлера для относительной фазы осцилляторов.

3.4. Уравнение Адлера для связанных осцилляторов. С помощью фазового уравнения обсудите устройство плоскости параметров частотная расстройка – величина связи осцилляторов.

Решение. Динамика относительной фазы осцилляторов описывается уравнением Адлера (3.15), которое оказывается эквивалентным случаю возбуждения осциллятора внешним сигналом. Отличие состоит в интерпретации наблюдаемых режимов.

В стационарном случае уравнение (3.15) приводится к виду $\Delta + 2\mu \sin \theta = 0$, так что при $|\Delta| < 2\mu$ оно имеет два решения. При совпадении собственных частот осцилляторов $\Delta = 0$, и первое из них $\theta = 0$ отвечает синфазным колебаниям, а второе $\theta = \pi$ (или $\theta = -\pi$ в силу периодичности фазы) – противофазным. При этом синфазные колебания устойчивы, а противофазные – неустойчивы.

С ростом частотной расстройки Δ устойчивое и неустойчивое состояния равновесия сближаются, и при $|\Delta| = 2\mu$ сливаются и исчезают в результате седло-узловой бифуркации, рис.3.1,б. При $|\Delta| > 2\mu$ фаза θ неограниченно нарастает, чему отвечает режим биений относительной фазы.

На плоскости параметров частотная расстройка – величина связи (Δ, μ) указанным режимам отвечают области внутри и вне языка Арнольда, рис. 3.1,а. Основание языка расположено в точке $\Delta = 0$, что отвечает резонансному условию в системе, когда собственные частоты осцилляторов совпадают. При $\Delta = 0$ синхронизация осцилляторов может происходить при сколь угодно малой связи.

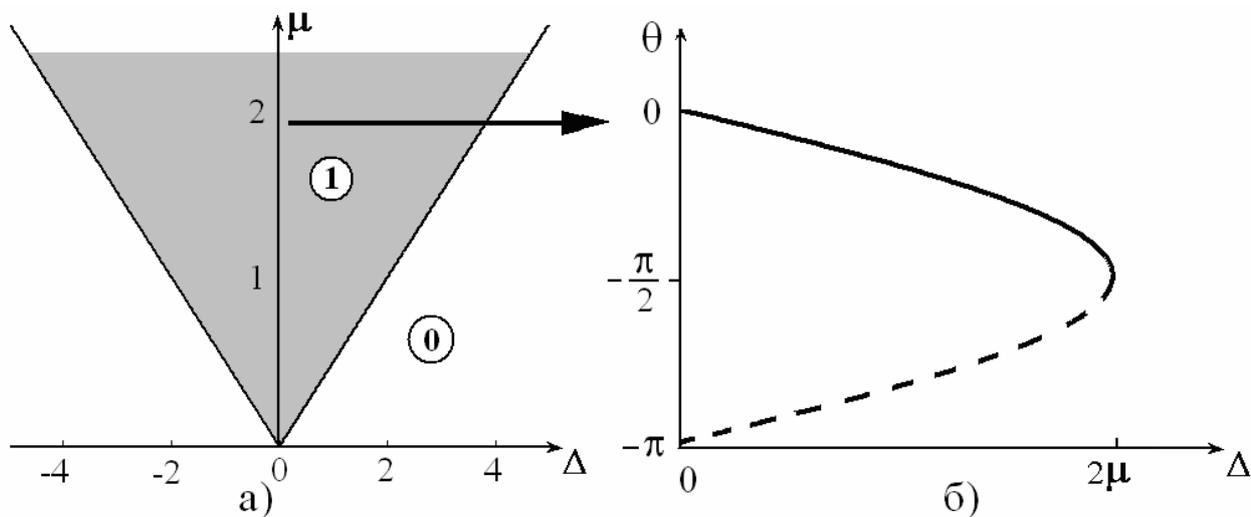


Рис. 3.1. Язык синхронизации в системе с диссипативной связью. Серым цветом показана область взаимного захвата фаз осцилляторов, белым – режим биений. Число в кружочке указывает число устойчивых состояний равновесия фазы. Справа – бифуркационная диаграмма при пересечении языка по указанной на левом рисунке линии, сплошная линия – устойчивое равновесие, пунктир – неустойчивое.

Отметим, что данное рассмотрение справедливо в области, где эффективно фазовое приближение, т.е. когда управляющий параметр и величина связи в исходных уравнениях малы.

3.5. Частота захвата связанных осцилляторов. Получите фазовое уравнение для каждого осциллятора. Используя их, покажите, что

диссипативно связанные осцилляторы захватываются на центральной частоте $\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$, где $\omega_{1,2}$ – собственные частоты невзаимодействующих осцилляторов.

Решение. Получим уравнения для фаз первого и второго осцилляторов. Для этого, следуя логике решения задачи 3.3, подставим в фазовые уравнения системы (3.9) невозмущенные орбиты осцилляторов $R = r = 1$:

$$\begin{aligned}\frac{d\psi_1}{dt} &= -\frac{\Delta}{4} - \frac{1}{2}\mu \sin \theta, \\ \frac{d\psi_2}{dt} &= \frac{\Delta}{4} + \frac{1}{2}\mu \sin \theta.\end{aligned}\tag{3.16}$$

При выключенной связи уравнения (3.16) описывают собственные колебания первого и второго осцилляторов с частотами $-\frac{\Delta}{4}$ и $\frac{\Delta}{4}$. Таким образом, с учетом единичной «опорной» частот в соответствии с (3.3), для собственных частот в нашем приближении справедливы выражения

$$\omega_1 = 1 - \frac{\Delta}{4}, \quad \omega_2 = 1 + \frac{\Delta}{4}.\tag{3.17}$$

Заметим, что этому же результату можно придти и непосредственно из (3.1), откуда для собственных частот осцилляторов имеем

$$\omega_1 = \sqrt{1 - \frac{\Delta}{2}} \approx 1 - \frac{\Delta}{4}, \quad \omega_2 = \sqrt{1 + \frac{\Delta}{2}} \approx 1 + \frac{\Delta}{4}.\tag{3.18}$$

Найдем теперь частоту захвата осцилляторов. В этом режиме скорость изменения относительной фазы равна нулю $\dot{\theta} = 0$, так что из уравнения Адлера (3.15) получаем $\mu \sin \theta = -\frac{\Delta}{2}$. Подставляя это соотношение в (3.16), находим:

$$\dot{\psi}_1 = \dot{\psi}_2 = 0.\tag{3.19}$$

Это и есть частота колебаний для «медленных» переменных. В свою очередь, для наблюдаемой частоты колебаний из соотношений (3.3) следует, что $\omega = 1 + \dot{\psi}_{1,2}$, и поэтому $\omega = 1$.

Таким образом, с учетом (3.17), частота захвата равна среднему арифметическому собственных частот осцилляторов:

$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}.\tag{3.20}$$

3.6. Эффект «гибели колебаний». Покажите, что при определенной величине диссипативной связи, малые колебания в связанных

автоколебательных осцилляторах становятся затухающими. Найдите соответствующую область на плоскости параметров частотная расстройка – величина связи.

Решение. При анализе малых колебаний можно использовать линейризованное уравнение (3.6)²¹:

$$\begin{aligned} 2 \frac{da}{dt} &= \lambda a - i \frac{\Delta}{2} a - \mu(a - b), \\ 2 \frac{db}{dt} &= \lambda b + i \frac{\Delta}{4} b - \mu(b - a). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Для исследования устойчивости положения равновесия $a = b = 0$ полученной линейной системы, положим $a = Ae^{i\omega t}$, $b = Be^{i\omega t}$. Тогда

$$\begin{aligned} \left(2i\omega - \lambda + \mu + i \frac{\Delta}{2} \right) A &= \mu B, \\ \left(2i\omega - \lambda + \mu - i \frac{\Delta}{2} \right) B &= \mu A. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Умножая эти уравнения друг на друга, получаем характеристическое уравнение для частоты линейных колебаний ω :

$$(2i\omega - \lambda + \mu)^2 + \frac{\Delta^2}{4} = \mu^2. \quad (3.23)$$

Оно легко разрешается относительно частоты ω :

$$\omega_{1,2} = i \frac{\mu - \lambda}{2} \pm \frac{i}{2} \sqrt{\mu^2 - \frac{\Delta^2}{4}}. \quad (3.24)$$

Если $|\Delta| > 2\mu$, то подкоренное выражение отрицательно. Тогда для мнимой части частоты имеем: $\text{Im}\omega_{1,2} = \frac{\mu - \lambda}{2}$. Используя $e^{i\omega t} = \exp(-\text{Im}\omega t + i \text{Re}\omega t)$, заключаем, что если $\mu > \lambda$, то колебания затухают.

Если же $|\Delta| < 2\mu$, то подкоренное выражение в (3.24) положительно и

$$\text{Im}\omega_{1,2} = \frac{\mu - \lambda}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\mu^2 - \frac{\Delta^2}{4}}. \quad (3.25)$$

Условием устойчивости в этом случае будет положительное значение наименьшего из корней. Это условие можно записать как $\mu - \lambda > \sqrt{\mu^2 - \frac{\Delta^2}{4}}$, или

$$\lambda < \mu < \frac{1}{2} \left(\lambda + \frac{\Delta^2}{4\lambda} \right). \quad (3.26)$$

²¹ Здесь для удобства физической интерпретации сохраняем параметр λ .

На рис. 3.2 показаны соответствующие граничные линии

$$\mu = \frac{1}{2}|\Delta|, \quad \mu = \frac{1}{2}\left(\lambda + \frac{\Delta^2}{4\lambda}\right), \quad \mu = \lambda. \quad (3.27)$$

Использовано значение $\lambda = 1$. Отметим, что вторая линия (3.27) касается первой в точке $\Delta = 2$, $\mu = 1$. Область, когда в соответствии с нашим обсуждением, положение равновесия в начале координат устойчиво, отмечена на рис. 3.2 светло-серым цветом. Она располагается при $\Delta > 2$ и ограничена снизу линией $\mu = 1$. В области отрицательных частотных расстройок имеется симметричная ей вторая область.

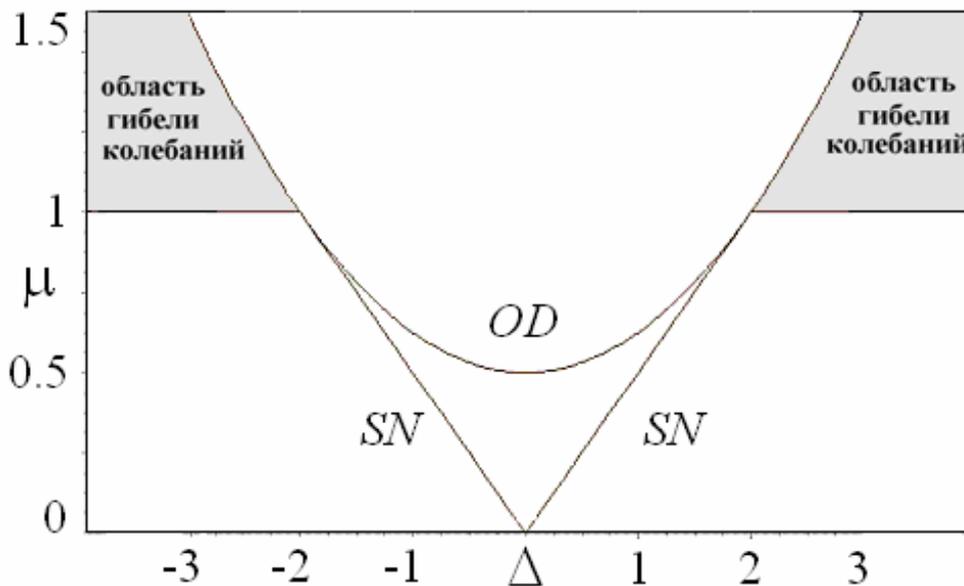


Рис. 3.2. Плоскость параметров частотная расстройка – величина связи диссипативно связанных осцилляторов, $\lambda=1$. Светло-серым цветом показана область гибели колебаний, *SN* – линии седло-узловых бифуркаций, *OD* – линия (3.27).

Описанный режим получил название эффекта «гибели колебаний» (oscillator death). Его физическая природа состоит в том, что связь вносит дополнительную диссипацию в систему, и когда она начинает доминировать над подкачкой энергии от внешнего источника (условие $\mu > \lambda$), связанные автоколебательные системы демонстрируют затухающие колебания. Отметим, что в соответствии с рис.3.2 для реализации эффекта гибели колебаний нужна определенная величина расстройки осцилляторов по частоте. Физически это тоже понятно. Если частоты осцилляторов близки, то они взаимно захватываются, их скорости выравниваются, и величина диссипативного «трения» оказывается малой и не способной компенсировать автоколебания.

Условие для нижней границы области «гибели колебаний» также может быть получено непосредственно из исходной системы уравнений (3.1). Для

малых колебаний можно использовать линеаризованные уравнения (3.1):

$$\begin{aligned} \ddot{x} - \lambda \dot{x} + \left(1 - \frac{\Delta}{2}\right)x + \mu(\dot{x} - \dot{y}) &= 0, \\ \ddot{y} - \lambda \dot{y} + \left(1 + \frac{\Delta}{2}\right)y + \mu(\dot{y} - \dot{x}) &= 0. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Если искать решение в виде $x = Xe^{i\omega t}$, $y = Ye^{i\omega t}$, то получаем:

$$\begin{aligned} \left(i\omega(\mu - \lambda) + 1 - \omega^2 - \frac{\Delta}{2}\right)X &= i\omega Y, \\ \left(i\omega(\mu - \lambda) + 1 - \omega^2 + \frac{\Delta}{2}\right)X &= i\omega X. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Отсюда следует характеристическое уравнение для определения собственных частот ω :

$$(1 - \omega^2)^2 + 2i\omega(\mu - \lambda)(1 - \omega^2) - \omega^2(\mu - \lambda)^2 = \frac{\Delta^2}{4} - \omega^2. \quad (3.30)$$

Граничному условию отвечает обращение в ноль мнимой части частоты ω . Как видно из (3.30), частота будет чисто действительной, если $\mu = \lambda$. Это условие, как мы уже отмечали, имеет простое физическое объяснение: автоколебания будут подавлены, когда диссипативная связь точно компенсирует отрицательное трение осцилляторов.

Отметим, что режим гибели колебаний характерен не только для исследуемой системы, а имеет «общеколебательное» значение.

3.7. Симметричные решения укороченных уравнений. Покажите, что укороченные уравнения в случае диссипативной связи допускают решения, когда действительные амплитуды осцилляторов равны. Найдите неподвижные точки укороченных уравнений и их бифуркации в этом случае.

Решение. В рамках укороченных уравнений (3.10) осцилляторы «равноправны». Соответственно, эти уравнения обладают симметрией: они не меняются при замене $R \rightarrow r$ и $r \rightarrow R$. Поэтому уравнения (3.10) допускают симметричное решение $R = r$. Найдём его.

Положим в уравнениях для действительных амплитуд и относительных фаз осцилляторов $R = r$. В этом случае первое и второе уравнения в (3.10) оказываются идентичными, и размерность системы понижается на единицу:

$$\begin{aligned} 2 \frac{dR}{dt} &= R(1 - \mu) - R^3 + \mu R \cos \theta, \\ \frac{d\theta}{dt} &= -\frac{\Delta}{2} - \mu \sin \theta. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Уравнение для фазы оказывается независимым от амплитудных уравнений и представляет собой уравнение Адлера. Подчеркнем, что в данном случае не используется никаких приближений, в отличие от задачи 3.3.

Неподвижные точки системы (3.31) ищем из условия равенства нулю производных, так что

$$\begin{aligned} R(1-\mu) - R^3 + \mu R \cos \theta &= 0, \\ \frac{\Delta}{2} + \mu \sin \theta &= 0. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Отсюда без труда находим два решения

$$R_{1,2}^2 = 1 - \mu + \mu \cos \theta_{1,2}, \quad (3.33)$$

где

$$\theta_1 = -\arcsin\left(\frac{\Delta}{2\mu}\right), \quad \theta_2 = \pi + \arcsin\left(\frac{\Delta}{2\mu}\right). \quad (3.34)$$

Решения (3.34) существуют при $2\mu > |\Delta|$. Условие $2\mu = |\Delta|$ отвечает седло-узловой бифуркации, когда эти два состояния равновесия сливаются.

Поскольку фаза подчиняется уравнению Адлера (3.31), то легко заключаем, что первое решение устойчиво, а второе – нет. В частном случае идентичных осцилляторов $\Delta = 0$ относительные фазы $\theta_1 = 0$, а $\theta_2 = \pi$, так что первое решение отвечает устойчивому синфазному режиму колебаний осцилляторов, а второе – неустойчивому противофазному.

Отметим далее, что в системе возможна еще одна бифуркация. Найдем ее условие. Используя выражение $\cos \theta = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \theta}$ и фазовое уравнение (3.32), из (3.33) получаем:

$$R_{1,2}^2 = 1 - \mu \pm \sqrt{\mu^2 - \frac{\Delta^2}{4}}. \quad (3.35)$$

С ростом величины связи радиус орбиты, отвечающей второму решению (нижний знак в (3.35)), уменьшается. При условии

$$1 - \mu + \sqrt{\mu^2 - \frac{\Delta^2}{4}} = 0, \quad (3.36)$$

он обращается в ноль, и это решение перестает существовать. Таким образом, при

$$\mu \geq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\Delta^2}{4} \right), \quad (3.37)$$

это решение невозможно.

Условие (3.37) в случае равенства совпадает с уравнением линии (3.27), см. задачу 3.6, поэтому на рис. 3.2, фактически, показаны все бифуркационные

линии симметричного типа колебаний. На рис. 3.3 воспроизведена соответствующая картина, дополненная фазовыми портретами системы (3.31) В качестве фазовых переменных используется пара $(R^2 \cos \theta, R^2 \sin \theta)$.

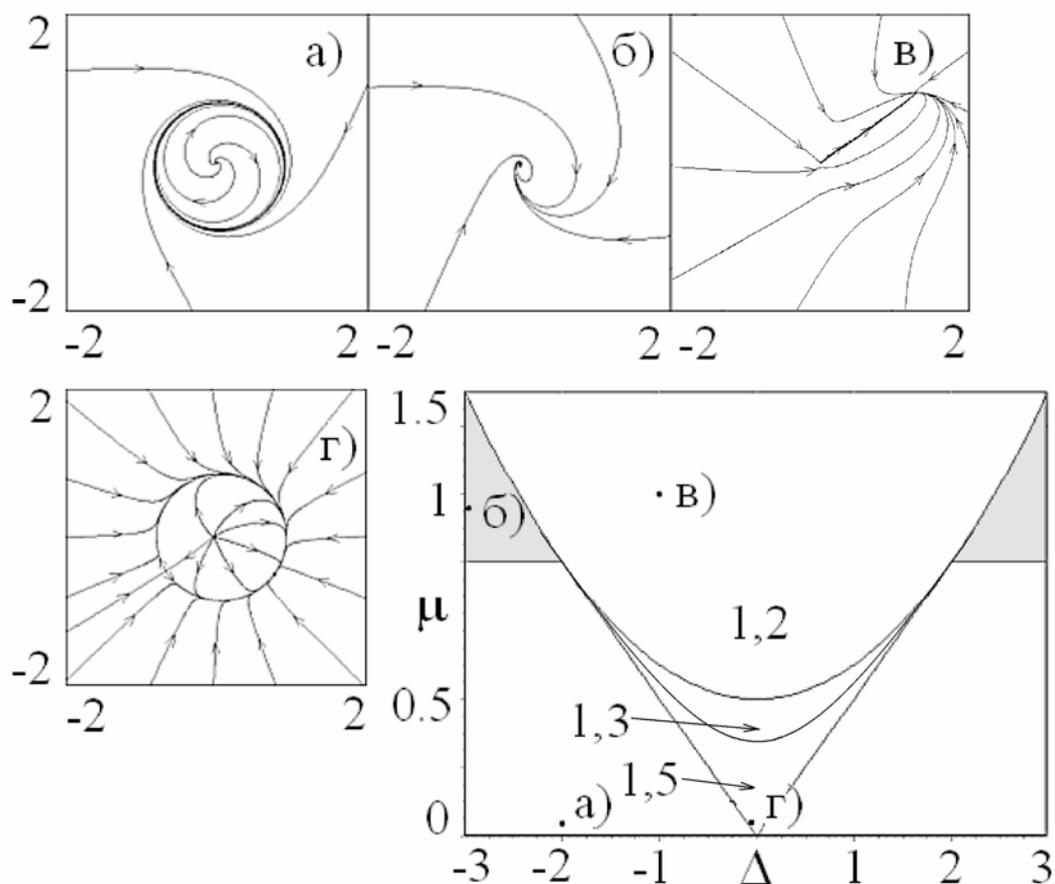


Рис. 3.3. Плоскость параметров частотная расстройка – величина связи диссипативно связанных осцилляторов и фазовые портреты симметричного решения (3.31) в характерных точках. Цифры указывают число устойчивых равновесий и общее их число в системе (3.10).

В области *a*) для укороченных уравнений существует устойчивый предельный цикл, который отвечает за режим биений в исходной системе. Если увеличивать связь, то предельный цикл уменьшается в размере и при $\mu = 1$ стягивается в точку. При этом мы попадаем в область *б*), отвечающую режиму «гибели колебаний». В этом случае имеется устойчивая неподвижная точка в начале координат. Если перейти из области *a*) в область *г*), то на инвариантной кривой на вставке *a*) происходит рождение пары неподвижных точек, одна из которых является седлом, а вторая – устойчивым узлом. Этот переход отвечает возникновению взаимного захвата частот осцилляторов. Наконец, если пересечь линию (3.37) и попасть из области *г*) в область *в*), происходит следующее. Седловая точка приближается к началу координат, а затем сливается с ним. Поэтому остается единственная устойчивая неподвижная точка, не лежащая в начале координат. Она отвечает за автоколебания в

исходной системе.

Отметим, что полученная картина является сечением поверхностью $R = r$ трехмерного фазового пространства системы (3.10) (R, r, θ) и поэтому описывает не все возможные решения. В общем случае, возможны решения с несимметричными колебаниями, и количество возможных неподвижных точек возрастает до пяти, но дополнительные неподвижные точки неустойчивы и не сказываются на существенных элементах картины, см. задачу 3.8.

3.8. Несимметричные решения укороченных уравнений. Покажите возможность существования несимметричных решений укороченных уравнений (3.10) и укажите их бифуркации. Обсудите физическую природу этих решений при малой связи.

Решение. В общем случае неподвижные точки (3.10) ищем из условий

$$\begin{aligned} R(1-\mu) - R^3 &= -\mu r \cos \theta, \\ r(1-\mu) - r^3 &= -\mu R \cos \theta, \\ \Delta + \left(\frac{R}{r} + \frac{r}{R} \right) \mu \sin \theta &= 0. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Поделим первое уравнение на второе. Тогда получим:

$$R^2(1-\mu) - R^4 = r^2(1-\mu) - r^4, \quad (3.39)$$

или

$$(1-\mu)(R^2 - r^2) = R^4 - r^4. \quad (3.40)$$

Для несимметричного решения отсюда следует, что

$$R^2 + r^2 = 1 - \mu. \quad (3.41)$$

В свою очередь, вычитая из первого уравнения второе, получим

$$(1-\mu)(R-r) - (R^3 - r^3) = \mu \cos \theta (R-r), \quad (3.42)$$

или

$$1 - \mu - R^2 - Rr - r^2 = \mu \cos \theta. \quad (3.43)$$

С учетом (3.41), получаем

$$Rr = -\mu \cos \theta. \quad (3.44)$$

Если подставить (3.41) и (3.44) в фазовое уравнение (3.38), то получим

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\Delta}{1-\mu}. \quad (3.45)$$

Из соотношений (3.41) и (3.44) для радиусов орбит получаем биквадратное уравнение, которое легко решается. С учетом выражения для фазы (3.45) получаем два решения. Для первого

$$R^2 = \frac{1-\mu}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4\mu^2}{(1-\mu)^2 + \Delta^2}} \right), \quad r^2 = \frac{1-\mu}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4\mu^2}{(1-\mu)^2 + \Delta^2}} \right). \quad (3.46)$$

Второе является симметричным к данному, и получается заменой $R \rightarrow r$ и $r \rightarrow R$.

Выясним физический смысл полученных решений, для чего устремим связь к нулю. Из (3.46) в этом случае имеем

$$R^2 \approx 1 - \mu, \quad r^2 \approx \frac{\mu^2}{1 + \Delta^2}. \quad (3.47)$$

Таким образом, первый осциллятор движется вблизи невозмущенной орбиты $R = 1$, а второй – вблизи неустойчивой точки в начале координат $r = 0$. Это существенно несимметричные решения, когда орбиты осцилляторов заметно отличаются. При этом очевидно, что за счет неустойчивости точки в начале координат, решение в целом будет также неустойчивым.

Второе решение, как уже было отмечено, получается заменой $R \rightarrow r$ и $r \rightarrow R$, так что оно отвечает ситуации, когда второй осциллятор движется в окрестности невозмущенной орбиты, а первый – вблизи начала координат. Оно тоже будет неустойчивым.

Как видно из (3.46) и оценки (3.47), с ростом параметра связи малая орбита растет, а большая, наоборот, уменьшается. При условии равенства нулю подкоренного выражения

$$(1 - \mu)^2 + \Delta^2 = 4\mu^2, \quad (3.48)$$

они сливаются и исчезают.

Уравнение (3.48) задает на плоскости параметров (Δ, μ) еще одну бифуркационную линию системы (3.10) – гиперболу, которая, как и линия (3.37), проходит через точку $\Delta = 2$, $\mu = 1$, но внутри языка лежит ниже нее (рис. 3.3).

3.9. Устройство плоскости параметров частотная расстройка – величина связи. Обсудите все полученные типы решений (неподвижных точек) укороченных уравнений с точки зрения равновесных состояний системы с выключенной связью. Обсудите бифуркации в случае $\Delta = 0$ и укажите общее число равновесий и число устойчивых равновесий.

Решение. Как показало проведенное обсуждение, общее количество неподвижных точек системы (3.10) может быть равно пяти: неподвижная точка в начале координат, два симметричных решения и два несимметричных. Их происхождение можно легко понять с физической точки зрения. Действительно, выключим связь полностью. Тогда каждый осциллятор

характеризуется двумя равновесными решениями: устойчивый автоколебательный режим и неподвижное равновесие в начале координат. При этом система из двух осцилляторов может находиться в следующих равновесных состояниях:

- ✓ оба осциллятора на устойчивых орбитах, $R = r = 1$, при этом возможно одно устойчивое состояние (синфазная синхронизация) и одно неустойчивое (противофазная синхронизация);
- ✓ оба осциллятора в начале координат, $R = r = 0$;
- ✓ один осциллятор на своей устойчивой орбите, а второй в начале координат, $R = 1, r = 0$ или $R = 0, r = 1$.

Связь возмущает эти режимы, но при малой связи характер неустойчивости сохраняется. Поэтому возможен только один тип устойчивого поведения, когда оба осциллятора движутся синфазным образом вблизи устойчивых стационарных орбит. При этом он относится к симметричному типу решения, когда амплитуды колебаний осцилляторов равны.

Сильная связь может стабилизировать второй из перечисленных типов равновесия, и возникает режим «гибели колебаний», описанный в задаче 3.6. Наконец, третий тип отвечает двум несимметричным решениям. Они сливаются и исчезают с ростом связи на линии (3.48), оставаясь неустойчивыми.

Зафиксируем нулевую частотную расстройку $\Delta = 0$, и опишем все бифуркации, происходящие в системе с ростом связи. При малой связи в системе имеется пять равновесий, и только одно из них устойчиво. При $\mu = 1/3$ в соответствии с (3.48) два неустойчивых равновесия сливаются, так что остается три равновесия – одно устойчивое и два неустойчивых. Наконец, при $\mu = 0.5$, в соответствии с (3.37), одно из них сталкивается с точкой в начале координат и исчезает, остается два равновесия, из которых одно устойчиво.

На рис. 3.3 цифрами через запятую указано количество устойчивых и неустойчивых равновесий в системе.

3.10. Укороченные уравнения и нормировка частотных расстройек.

Получите фазовые уравнения, если систему двух диссипативно связанных осцилляторов Ван-дер-Поля выбрать в виде:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \mu(\dot{x} - \dot{y}) &= 0, \\ \ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + (1 + \Delta)y + \mu(\dot{y} - \dot{x}) &= 0. \end{aligned} \tag{3.49}$$

Решение. Уравнение (3.49) отличается от использованного ранее уравнения (3.1) способом введения частотной расстройки. Теперь за единичную

выбрана не центральная частота, а частота первого осциллятора. При этом уравнение для относительной фазы $\theta = \psi_1 - \psi_2$ получается точно таким же, как и в предыдущих задачах. Таким образом, одно и то же фазовое уравнение может отвечать, вообще говоря, разным исходным уравнениям. Или, говоря иными словами, по фазовому уравнению нельзя однозначно восстановить исходные уравнения. Это следствие приближенного характера метода медленно меняющихся амплитуд. В зависимости от постановки задачи бывает удобно использовать как систему (3.1), так и систему (3.49). Последняя бывает более удобна в компьютерных расчетах, так как при $\Delta > 0$ отсутствуют ограничения на величину частотной расстройки.

3.11. Карта динамических режимов, система связанных осцилляторов Ван-дер-Поля (3.1). Для системы связанных осцилляторов Ван-дер-Поля (3.1) постройте карту динамических режимов на плоскости параметров частотная расстройка – величина связи. Для построения сечения Пуанкаре используйте условие пересечения фазовых траекторий с поверхностью $\dot{y} = 0$. Обсудите изменение вида карт при увеличении управляющего параметра λ .

Решение. При исследовании исходной системы (3.1) следует иметь в виду, что в отличие от квазигармонического приближения, ее динамика зависит от величины управляющего параметра λ . При малых λ предельные циклы автономных осцилляторов близки к окружностям, и эффективно квазигармоническое приближение. При возрастании λ предельные циклы искажаются, и при больших значениях λ колебания становятся релаксационными.

Карты динамических режимов системы диссипативно связанных осцилляторов Ван-дер-Поля (3.1) для значений $\lambda = 0.5$, $\lambda = 1$ и $\lambda = 2.5$ показаны на рис. 3.4. При построении карт для системы (3.1) диапазон изменения частотной расстройки следует выбирать $-2 < \Delta < 2$, поскольку в противоположном случае одна из подсистем, фактически, перестает быть осциллятором, а решение уходит на бесконечность.

На картах можно видеть основную область синхронизации 1:1, границы которой в фазовом приближении даются условием $|\Delta| = 2\mu$. Как видно из рис. 3.4, даже для λ порядка единицы, это условие хорошо задает границу основной области синхронизации. Кроме того, на картах видны языки Арнольда более высоких порядков, «погруженные» в область квазипериодических режимов. Окрестность наиболее широкого языка показана рядом с рис. 3.4, б в увеличенном виде.

Для $\lambda = 0.5$ при $\mu > \lambda$ имеет место режим «гибели колебаний», когда диссипативная связь компенсирует автоколебания, и неподвижная точка в начале координат становится устойчивой. При возрастании λ , однако, область гибели колебаний исчезает (см. в связи с этим обсуждение в задаче 3.13). С ростом λ языки высших порядков расширяются.

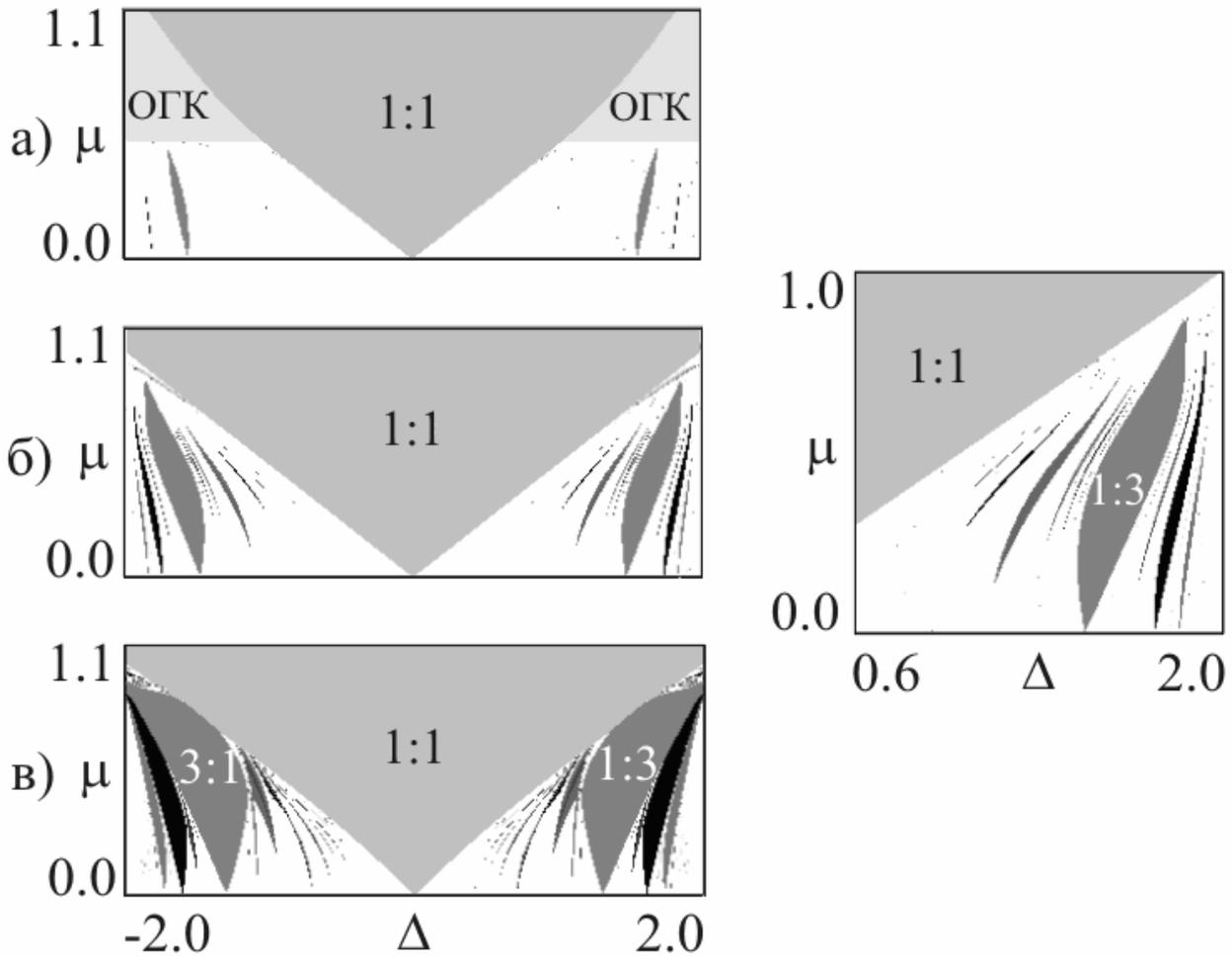


Рис. 3.4. Карты динамических режимов системы двух диссипативно связанных осцилляторов Ван-дер-Поля (3.1) для $\lambda = 0.5$ (а), $\lambda = 1$ (б), $\lambda = 2.5$ (в); ОГК – область гибели колебаний.

3.12. Карта динамических режимов, система связанных осцилляторов Ван-дер-Поля (3.49). Постройте карту динамических режимов для системы связанных осцилляторов Ван-дер-Поля в форме (3.49) при $\lambda = 1$. Постройте фазовые портреты в характерных точках карты. Постройте реализации первого и второго осцилляторов $x(t)$ и $y(t)$ внутри областей, которые при вычислении в сечении Пуанкаре фиксируются как режимы периода 1 и 3, и дайте им физическую интерпретацию.

Решение. Для системы (3.49) диапазон возможных частотных расстройк $-1 < \Delta < +\infty$. Соответствующая карта при $\lambda = 1$ показана на рис. 3.5. Рядом

представлены фазовые портреты первого и второго осцилляторов в характерных точках, отмеченных соответствующими буквами на карте:

- в области основной синхронизации (а);
- внутри области гибели колебаний (б);
- в области квазипериодической динамики (в);
- внутри языка синхронизации периода 3 (г).

На рис.3.6 дополнительно показаны реализации $x(t)$ и $y(t)$ внутри областей периода 1 и 3. Можно видеть, что в первом случае периоды зависимостей координат первого и второго осцилляторов от времени точно равны. На языке теории колебаний это означает, что осцилляторы демонстрируют режим взаимной синхронизации с соотношением частот 1:1.

Во втором случае период колебаний второго осциллятора точно в три раза меньше периода первого, таким образом, в этом случае имеет место синхронизация с соотношением частот 1:3. В соответствии с этим, фазовый портрет второго осциллятора на рис. 3.5, г представляет собой «трехоборотный» предельный цикл. В этом случае фазовая траектория пересекает горизонтальную ось $\dot{y} = 0$ в одном направлении в трех точках. Поэтому в сечении Пуанкаре $\dot{y} = 0$ такой режим фиксируется как цикл периода 3.

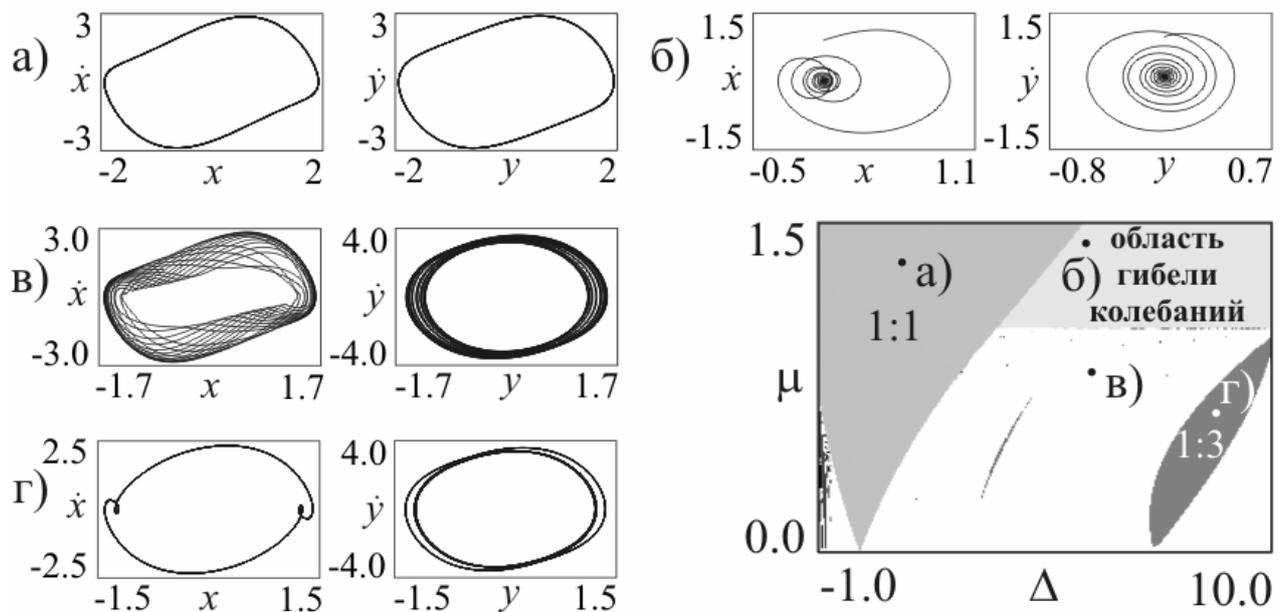


Рис. 3.5. Карта динамических режимов системы двух диссипативно связанных осцилляторов Ван-дер-Поля (3.49) и характерные фазовые портреты первого и второго осцилляторов, $\lambda = 1$.

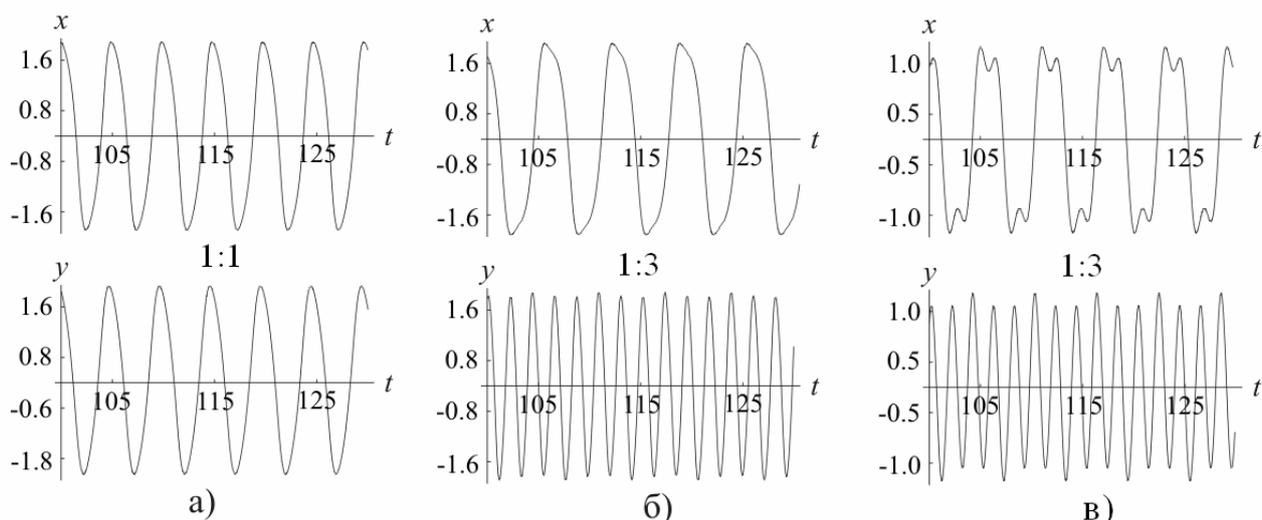


Рис. 3.6. Реализации первого и второго осцилляторов $x(t)$ и $y(t)$ внутри областей на карте периода 1 (а) и периода 3 (б, в).

3.13. Эффект исчезновения областей «гибели колебаний». Покажите, что при увеличении управляющего параметра области «гибели колебаний» исчезают. Оцените значение управляющего параметра, когда это происходит. Отдельно обсудите случай системы (3.1) и системы (3.49).

Решение. На картах на рис. 3.4 видно, что при $\lambda = 0.5$ имеются области гибели колебаний, а при $\lambda = 1$ их нет. Расчеты показывают, что при всех $\lambda > 1$ области гибели колебаний отсутствуют. Причина состоит в том, что для реализации этого режима необходимо, чтобы частотная расстройка была достаточно велика и превышала значение $\Delta = 2$ в нормированных переменных (задача 3.6). При переходе к размерным переменным (3.7), это условие отвечает $\Delta = 2\lambda$. С другой стороны, уравнения (3.1) допускают решения только для $\Delta < 2$, в противном случае первый осциллятор становится неустойчивым. Тогда легко получить, что как раз при $\lambda = 1$ область гибели колебаний исчезает. Разумеется, это только оценка на основе квазигармонического приближения, но она хорошо согласуется с численно полученными результатами.

Несколько иная ситуация имеет место для системы (3.49). В этом случае частотная расстройка может быть сколь угодно большой положительной величиной. Поэтому высокочастотная область гибели колебаний реализуется всегда. Отрицательные же расстройки не могут быть меньше -1, поэтому с ростом параметра λ примерно при $\lambda \approx 0.65$ низкочастотная область гибели колебаний также исчезает.

3.14. Активная связь. Синфазная и противофазная синхронизация. Обсудите случай отрицательных значений параметра μ . Покажите, что в этом случае устойчивым является противофазный тип колебаний.

Решение. Если связь между осцилляторами диссипативная, то параметр связи μ положителен. Формально в исследуемых уравнениях этот параметр может принимать и отрицательные значения, что вполне допустимо при компьютерном моделировании. Однако такие режимы могут иметь и физическую интерпретацию. Действительно, элемент связи может содержать не только резистор, но и активный элемент (например, операционный усилитель). В этом случае параметр связи может быть отрицательным, $\mu < 0$. Будем называть такую связь *активной*.

Если диссипативная связь при достаточно большой ее величине приводит к исчезновению автоколебаний, то активная связь, наоборот, инициирует автоколебания. В этом случае они могут возникать, даже если автономные осцилляторы находятся до порога возбуждения. Действительно, в ходе рассуждений в задаче 3.6 нигде не упоминалась величина знака связи, так что условие самовозбуждения $\mu < \lambda$ при отрицательных μ может быть выполнено и для отрицательных значений управляющего параметра λ , если только $|\mu| > |\lambda|$.

В случае диссипативной связи осцилляторы демонстрируют синфазную синхронизацию. Если связь меняет знак, то в соответствии с уравнением Адлера (3.15), устойчивые равновесия заменятся на неустойчивые и наоборот. Это означает, что синфазное движение становится неустойчивым, а устойчивым оказываются противофазные колебания. Смену типа

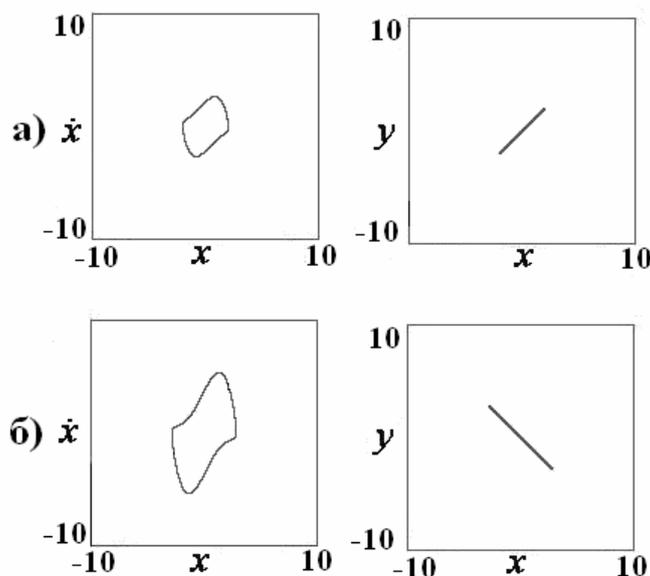


Рис. 3.7. Проекция аттракторов на плоскости (x, \dot{x}) и фигуры Лиссажу на плоскости (x, y) для системы (3.1). Параметры: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\Delta = 0.01$, $\mu = 0.5$, диссипативная связь (а) и $\mu = -0.5$, активная связь (б).

синхронизации иллюстрирует рис. 3.7. На этом рисунке показаны фазовый портрет первого осциллятора на плоскости (x, \dot{x}) , а также своего рода «фигуры Лиссажу» на плоскости переменных (x, y) . Выбрана очень маленькая частотная расстройка и представлены случаи диссипативной и активной связи. Из рисунков хорошо видно, что в первом случае осцилляторы синхронизованы практически точно в фазе, а во втором – в противофазе. Хорошо видно также, что в соответствии с (3.12), при диссипативной связи радиус орбиты уменьшается, а при активной – увеличивается. В последнем случае цикл искажается еще и по форме так же, как и в автономной системе с ростом λ .

На рис. 3.8 показана карта динамических режимов системы (3.1) с учетом возможного отрицательного знака параметра связи, на рис. 3.8, б представлен ее увеличенный фрагмент в области активной связи.

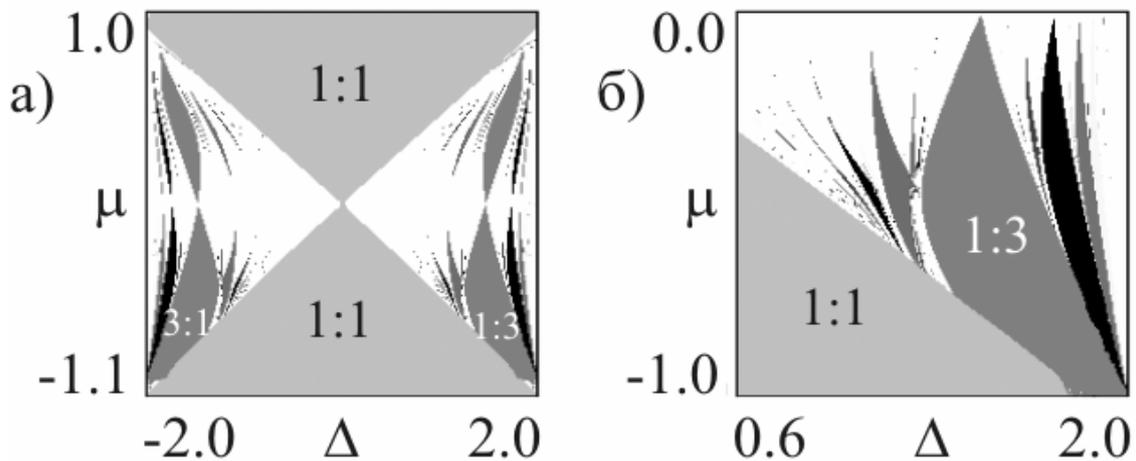


Рис. 3.8. Карта динамических режимов (а) и ее фрагмент (б) для системы двух осцилляторов Ван-дер-Поля (3.1) с учетом возможности диссипативной и активной связи при $\lambda = 1$.

3.15. Фазовое уравнение для связанных осцилляторов Ван-дер-Поля-Дуффинга. Получите укороченные уравнения и уравнения для действительных амплитуд и фаз диссипативно связанных осцилляторов Ван-дер-Поля-Дуффинга

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + \left(1 - \frac{\Delta}{2}\right)x + \beta x^3 + \mu(\dot{x} - \dot{y}) &= 0, \\ \ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + \left(1 + \frac{\Delta}{2}\right)xy + \beta y^3 + \mu(\dot{y} - \dot{x}) &= 0. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Получите уравнение в фазовом приближении и обсудите полученный результат.

Решение. Действуя аналогично задачам 3.1 и 3.10, получаем следующие укороченные уравнения

$$\begin{aligned}
2 \frac{da}{dt} &= a - |a|^2 a + 3i\beta |a|^2 a - i \frac{\Delta}{2} a - \mu(a - b), \\
2 \frac{db}{dt} &= b - |b|^2 b + 3i\beta |b|^2 b + i \frac{\Delta}{2} b - \mu(b - a).
\end{aligned}
\tag{3.51}$$

Это уравнения в нормированной на управляющий параметр форме. Заметим только, что при использовании замены переменных (3.7), параметр неизохронности не меняется и сохраняет свою величину.

Им отвечают уравнения для амплитуд и фаз осцилляторов:

$$\begin{aligned}
2 \frac{dR}{dt} &= R(1 - \mu) - R^3 + \mu r \cos \theta, \\
2 \frac{dr}{dt} &= r(1 - \mu) - r^3 + \mu R \cos \theta, \\
\frac{d\psi_1}{dt} &= \frac{3}{2} \beta R^2 - \frac{\Delta}{4} - \frac{r}{2R} \mu \sin \theta, \\
\frac{d\psi_2}{dt} &= \frac{3}{2} \beta r^2 + \frac{\Delta}{4} + \frac{R}{2r} \mu \sin \theta.
\end{aligned}
\tag{3.52}$$

Для относительной фазы осцилляторов $\theta = \psi_1 - \psi_2$ имеем:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{3}{2} \beta (R^2 - r^2) - \frac{\Delta}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{R}{r} + \frac{r}{R} \right) \mu \sin \theta.
\tag{3.53}$$

Используем теперь условия движения вблизи невозмущенных орбит $R = 1 + \tilde{R}$ и $r = 1 + \tilde{r}$. Тогда

$$\frac{3}{2} \beta (R^2 - r^2) = 3\beta (\tilde{R} - \tilde{r}) + \dots
\tag{3.54}$$

Но для диссипативной связи в соответствии с (3.12) возмущения орбит равны друг другу: $\tilde{R} = \tilde{r}$. Поэтому соответствующий член в фазовом уравнении равен нулю. Таким образом, уравнения для диссипативно связанных осцилляторов Ван-дер-Поля и Ван-дер-Поля-Дуффинга в фазовом приближении совпадают. Физическая причина этого состоит в том, что диссипативная связь уменьшает орбиты осцилляторов одинаковым образом. Нелинейность, введенная по типу осциллятора Дуффинга, приводит к изменению частот обращения осцилляторов по орбитам, но эти изменения одинаковы. Поэтому неизохронность в таком приближении оказывается не существенной.

3.16. Карта режимов связанных осцилляторов Ван-дер-Поля-Дуффинга. Постройте карту динамических режимов для диссипативно связанных осцилляторов Ван-дер-Поля-Дуффинга в форме

$$\begin{aligned}
\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \beta x^3 + \mu(\dot{x} - \dot{y}) &= 0, \\
\ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + (1 + \Delta)y + \beta y^3 + \mu(\dot{y} - \dot{x}) &= 0.
\end{aligned}
\tag{3.55}$$

Используйте значения параметров $\lambda = 2.5$ и $\beta = 1$. Обсудите, какие особенности проявляются в динамике системы при введении дополнительной нелинейности.

Решение. Карта динамических режимов и ее увеличенный фрагмент показаны на рис. 3.9. На карте языки синхронизации обозначены в соответствии с числами вращения (см. задачу 3.17). Можно видеть, что введение дополнительной нелинейности по типу осциллятора Дуффинга приводит к заметной модификации наблюдаемых режимов. Языки синхронизации становятся существенно шире и имеют сложную внутреннюю структуру: наблюдаются области удвоенного периода, структуры *crossroad area* и хаос. Виден также широкий язык синхронизации с числом вращения 1:2, в то время как на приведенных ранее картах динамических режимов резонансы с четными номерами не проявлялись.

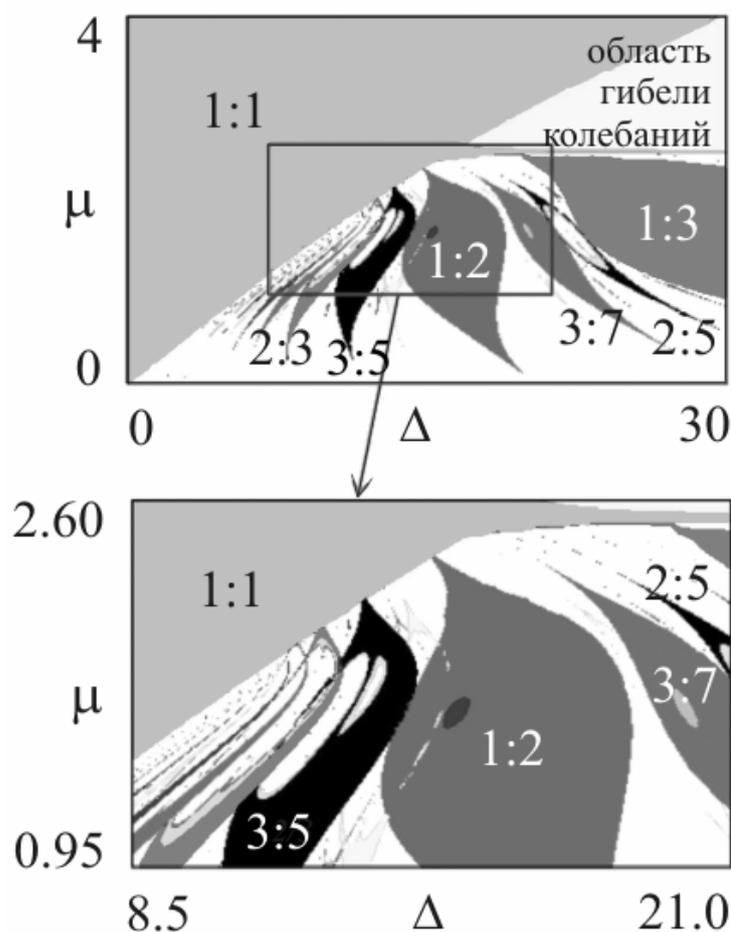


Рис. 3.9. Карта динамических режимов и ее увеличенный фрагмент для двух диссипативно связанных осцилляторов Ван-дер-Поля-Дуффинга (3.55), $\lambda = 2.5$ и $\beta = 1$.

3.17. Числа вращения. Для описания различных режимов синхронизации связанных осцилляторов можно использовать число вращения w , которое вводится следующим образом. Определим численно среднее время возврата τ_y в сечение Пуанкаре для второго осциллятора $\dot{y} = 0$ и среднее время возврата τ_x

в сечение, отвечающее первому осциллятору $x = 0$. Тогда число вращения $w = \tau_y : \tau_x$. Постройте графики зависимости числа вращения от частотной расстройки связанных осцилляторов Ван-дер-Поля (3.49) для $\lambda = 2.5$, $\mu = 0.5$ и Ван-дер-Поля-Дуффинга (3.55) для $\lambda = 2.5$, $\beta = 1$, $\mu = 1$.

Решение. Графики зависимости числа вращения от частотной расстройки осцилляторов показаны на рис. 3.10. Полочки на графике отвечают языкам Арнольда на картах динамических режимов. Самый широкий из них для связанных осцилляторов Ван-дер-Поля отвечает числу вращения $w = 1:3$, а для связанных осцилляторов Ван-дер-Поля-Дуффинга – $w = 1:2$. Режимам синхронизации отвечают рациональные числа вращения $w = p:q$, квазипериодическим – иррациональные.

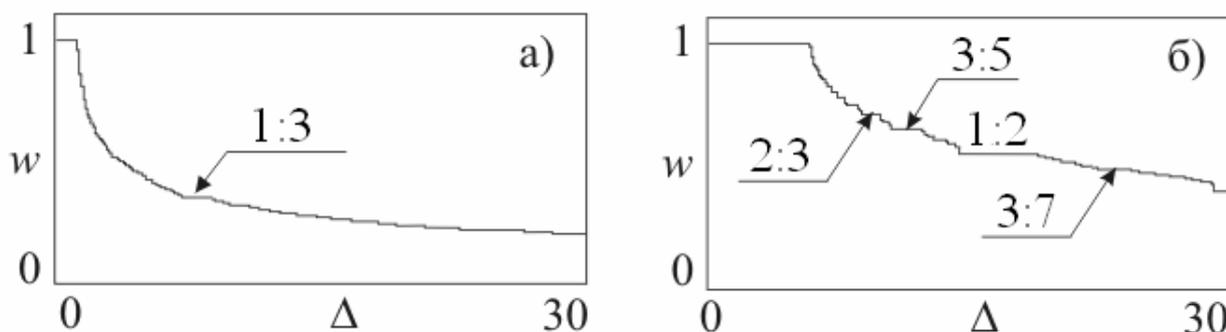


Рис. 3.10. Графики зависимости числа вращения от частотной расстройки связанных осцилляторов Ван-дер-Поля (3.49), $\lambda = 2.5$, $\mu = 0.5$ (а); Ван-дер-Поля-Дуффинга (3.55), $\lambda = 2.5$, $\beta = 1$, $\mu = 1$ (б).

3.18. Карта старшего ляпуновского показателя связанных осцилляторов Ван-дер-Поля-Дуффинга. Постройте карту старшего ляпуновского показателя для связанных осцилляторов Ван-дер-Поля-Дуффинга (3.55). На карте оттенками разных цветов обозначьте области хаоса, квазипериодического поведения и периодических режимов. Значения параметров $\lambda = 2.5$, $\beta = 1$.

Решение. Карта старшего ляпуновского показателя приведена на рис. 3.11. На такой карте оттенки синего цвета соответствуют областям синхронизации, которым отвечают отрицательные значения ляпуновского показателя. При этом чем темнее цвет, тем больше показатель по абсолютной величине. Оттенки желтого и оранжевого цветов соответствуют близким к нулю значениям показателя и выявляют области квазипериодических режимов. В силу конечной точности расчетов идеально зафиксировать нулевой показатель не удастся, и поэтому области квазипериодических режимов имеют не строго одинаковую

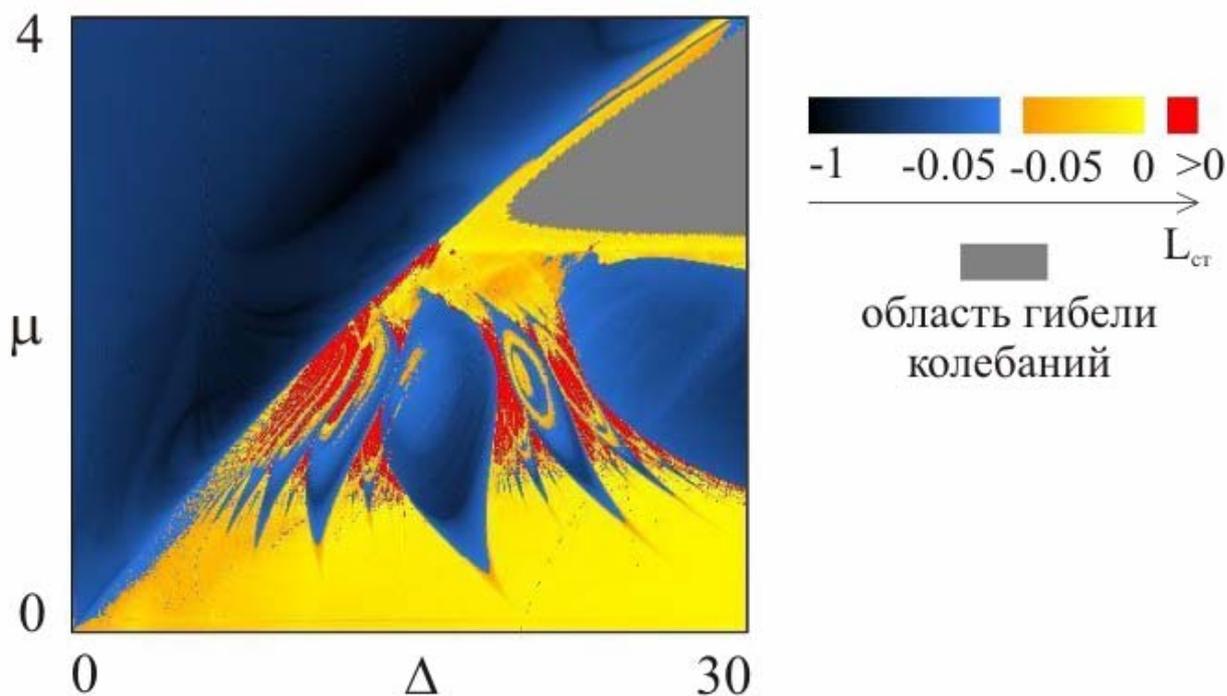


Рис. 3.11. Карта старшего ляпуновского показателя для системы связанных осцилляторов Ван-дер-Поля-Дуффинга (3.55) при $\lambda_1 = \lambda_2 = 2.5$, $\beta = 1$.

окраску. Оттенком желтого цвета обозначена и область гибели колебаний. Красный цвет соответствует хаотическим режимам с положительным ляпуновским показателем. Присутствие красного цвета на карте старшего ляпуновского показателя подтверждает наличие хаотического поведения в системе. Таким образом, введение дополнительной нелинейности по типу осциллятора Дуффинга приводит к появлению хаоса.

3.19. Тор-аттракторы и их разрушение. Для системы связанных осцилляторов Ван-дер-Поля-Дуффинга в избранных точках карты динамических режимов постройте трехмерные портреты сечений Пуанкаре, отвечающие пересечениям фазовой траектории с плоскостью $\dot{y} = 0$.

Решение. Трехмерные «сечения Пуанкаре», иллюстрирующие динамику системы связанных осцилляторов в областях квазипериодических режимов и у порога хаоса, показаны на рис. 3.12. Сечение Пуанкаре выбиралось в виде гиперповерхности $\dot{y} = 0$ в четырехмерном фазовом пространстве (x, \dot{x}, y, \dot{y}) . Таким образом, движение в этом случае будет происходить дискретным образом по некоторому набору точек в трехмерном пространстве (x, \dot{x}, y) , как и показано на рис. 3.12. Можно видеть, что фазовые портреты в таком сечении Пуанкаре представляют собой инвариантные кривые, что иллюстрирует квазипериодический характер динамики. При приближении к области хаоса кривые начинают деформироваться и разрушаются через потерю гладкости.

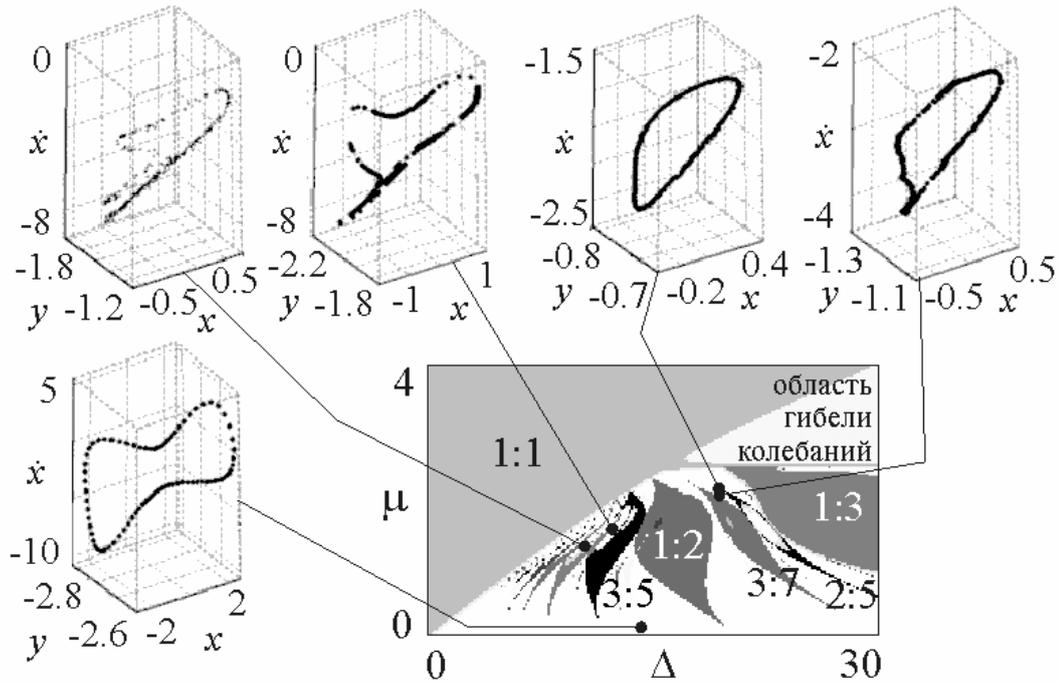


Рис. 3.12. Инвариантная кривая и ее разрушение в сечении Пуанкаре для системы (3.55), $\lambda = 2.5$, $\beta = 1$.

Динамика неидентичных осцилляторов

3.20. Укороченные уравнения для неидентичных связанных осцилляторов. Получите уравнения для действительных амплитуд и фаз для двух связанных осцилляторов Ван-дер-Поля с неодинаковыми управляющими параметрами λ_1, λ_2 , отвечающими за бифуркацию Андронова-Хопфа:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\lambda_1 - x^2)\dot{x} + \left(1 - \frac{\Delta}{2}\right)x + \mu(\dot{x} - \dot{y}) &= 0, \\ \ddot{y} - (\lambda_2 - y^2)\dot{y} + \left(1 + \frac{\Delta}{2}\right)y + \mu(\dot{y} - \dot{x}) &= 0. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Выполните оценку размеров предельных циклов осцилляторов и с ее помощью получите фазовое уравнение.

Решение. Действуя аналогично задаче 3.1, получаем следующие укороченные уравнения для комплексных амплитуд

$$\begin{aligned} 2\frac{da}{dt} &= \lambda_1 a - |a|^2 a - i\frac{\Delta}{2}a - \mu(a - b), \\ 2\frac{db}{dt} &= \lambda_2 b - |b|^2 b + i\frac{\Delta}{2}b - \mu(b - a). \end{aligned} \quad (3.57)$$

Отсюда для действительных амплитуд и фаз осцилляторов имеем

$$\begin{aligned}
2 \frac{dR}{dt} &= R(\lambda_1 - \mu) - R^3 + \mu r \cos(\psi_2 - \psi_1), \\
2 \frac{dr}{dt} &= r(\lambda_2 - \mu) - r^3 + \mu R \cos(\psi_1 - \psi_2), \\
\frac{d\psi_1}{dt} &= -\frac{\Delta}{4} + \frac{r}{2R} \mu \sin(\psi_2 - \psi_1), \\
\frac{d\psi_2}{dt} &= \frac{\Delta}{4} + \frac{R}{2r} \mu \sin(\psi_1 - \psi_2).
\end{aligned}
\tag{3.58}$$

Как было показано при решении задачи 3.1, в случае $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ параметр λ может быть убран перенормировкой, так что динамика системы не зависит от его величины. В рассматриваемом случае можно устранить перенормировкой только один из управляющих параметров, так что решение будет зависеть от отношения $v = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$. Например, можно использовать соотношения (3.7), положив, $\lambda = (\lambda_1 + \lambda_2)/2$, т.е. отнормировать на среднее значение параметра²². Для удобства предельных переходов, однако, сохраним в уравнениях оба параметра λ_1, λ_2 , считая, нормировку выполненной.

Из первых двух уравнений (3.58) получаем оценку для радиусов орбит осцилляторов

$$R \approx \sqrt{\lambda_1 - \mu}, \quad r \approx \sqrt{\lambda_2 - \mu}. \tag{3.59}$$

Таким образом, при $\lambda_1 \neq \lambda_2$ размеры предельных циклов осцилляторов могут быть разными.

Подставляя соотношения (3.59) в (3.58), получаем искомые фазовые уравнения

$$\begin{aligned}
\frac{d\psi_1}{dt} &= -\frac{\Delta}{4} + \frac{\mu}{2} \sqrt{\frac{\lambda_2 - \mu}{\lambda_1 - \mu}} \sin(\psi_2 - \psi_1), \\
\frac{d\psi_2}{dt} &= \frac{\Delta}{4} + \frac{\mu}{2} \sqrt{\frac{\lambda_1 - \mu}{\lambda_2 - \mu}} \sin(\psi_1 - \psi_2).
\end{aligned}
\tag{3.60}$$

Как и в случае идентичных осцилляторов, для относительной фазы осцилляторов $\theta = \psi_1 - \psi_2$ получается независимое уравнение

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\Delta}{2} + \frac{\mu}{2} \left(\sqrt{\frac{\lambda_2 - \mu}{\lambda_1 - \mu}} + \sqrt{\frac{\lambda_1 - \mu}{\lambda_2 - \mu}} \right) \sin \theta. \tag{3.61}$$

²² Можно использовать и $\lambda = \lambda_1$ или $\lambda = \lambda_2$. Отличия связаны с приближенным характером метода и исчезающе малы при малых λ_1, λ_2 .

Это разновидность уравнения Адлера, применимая для системы с неидентичными управляющими параметрами.

3.21. Область синхронизации в случае неидентичных связанных осцилляторов. С помощью полученного уравнения Адлера найдите границы области синхронизации (языка Арнольда) для системы с неидентичными управляющими параметрами на плоскости частотная расстройка – величина связи.

Решение. В стационарном случае из уравнения (3.61) следует, что

$$\Delta = \mu \left(\sqrt{\frac{\lambda_2 - \mu}{\lambda_1 - \mu}} + \sqrt{\frac{\lambda_1 - \mu}{\lambda_2 - \mu}} \right) \sin \theta. \quad (3.62)$$

Граница области синхронизации задается условием $\sin \theta = \pm 1$ ²³. Тогда

$$\Delta = \pm \mu \left(\sqrt{\frac{\lambda_2 - \mu}{\lambda_1 - \mu}} + \sqrt{\frac{\lambda_1 - \mu}{\lambda_2 - \mu}} \right). \quad (3.63)$$

Уравнение (3.63) определяет границу области синхронизации на плоскости частотная расстройка – величина связи.

Для идентичных осцилляторов $\lambda_1 = \lambda_2$ получаем известный результат $\Delta = \pm 2\mu$, чему отвечает пунктирная линия на рис. 3.1. В случае не равных управляющих параметров λ_1, λ_2 граница области синхронизации оказывается устроена иначе. На рис. 3.13 она показана сплошной линией.

У своего основания в области малой связи язык синхронизации имеет традиционную форму «угла». Действительно, при малых μ из (3.63) получаем

$$\Delta \approx \mu \left(\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} + \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \right). \quad (3.64)$$

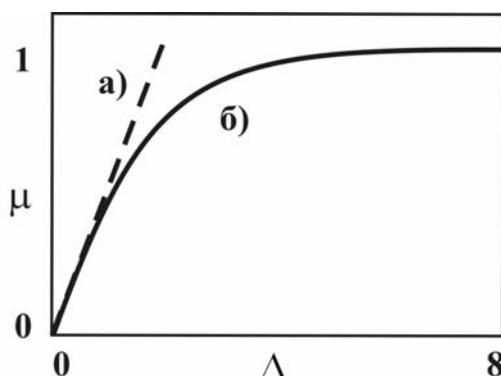


Рис. 3.13. Граница основного языка синхронизации: $\Delta = 2\mu$, пунктирная линия (а); в соответствии с уравнением (3.63) для $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$, сплошная линия (б).

²³ Отметим, что в этом случае $\cos \theta = 0$, что является дополнительным обоснованием сделанных при выводе соотношений (3.59) приближений.

Визуально языки синхронизации для идентичных и неидентичных осцилляторов на рис. 3.13 имеют одинаковый наклон у своего основания. Это связано с тем, что множитель $\left(\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} + \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \right)$ минимален при равенстве $\lambda_1 = \lambda_2$.

Соответственно, он мало меняется при вариации отношения $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$. На самом деле, при $\lambda_1 \neq \lambda_2$ язык оказывается несколько шире, чем в случае идентичных подсистем.

Наиболее существенные изменения наблюдаются в области больших значений расстройки Δ . В этой области найденная с помощью (3.63) граница языка асимптотически стремится к линии $\mu = \lambda_2$. Причина такого поведения системы в том, что при $\mu \rightarrow \lambda_2$ в соответствии с оценкой (3.59)

$$R \approx \sqrt{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad r \approx \sqrt{\lambda_2 - \mu} \rightarrow 0. \quad (3.65)$$

Таким образом, размер предельного цикла второго осциллятора за счет действия диссипативной связи стремится к нулю. При этом $R \gg r$, и второй осциллятор будет доминировать над первым. Немного выше линии $\mu = \lambda_2$ первый осциллятор все еще достаточно возбужден, и синхронизация осцилляторов оказывается возможной в сколь угодно широком диапазоне частотных расстроек. Возникает специфический режим *широкополосной синхронизации*. Сверху область широкополосной синхронизации ограничена областью «гибели колебаний», когда подавленными за счет связи оказываются колебания обоих осцилляторов, см. задачу 3.23.

3.22. Частота захвата неидентичных осцилляторов. С помощью фазового уравнения вычислите частоту захвата двух связанных осцилляторов, неидентичных по управляющим параметрам. Покажите, что в этом случае частота захвата не совпадает с центральной частотой.

Решение. Для частот осцилляторов $f_{1,2}$ имеем:

$$f_{1,2} = 1 + \psi_{1,2}. \quad (3.66)$$

(См. задачу 3.5.) Поскольку при захвате $\dot{\theta} = 0$, то $\dot{\psi}_1 = \dot{\psi}_2 = 0$, и частоты взаимодействующих осцилляторов равны друг другу: $f_1 = f_2 = f$.

С другой стороны, выражая из (3.61) $\sin \theta$ при $\dot{\theta} = 0$ и подставляя результат в (3.60), после некоторых преобразований, находим

$$\dot{\psi}_1 = \dot{\psi}_2 = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{4(\lambda_2 + \lambda_1 - 2\mu)} \Delta. \quad (3.67)$$

Таким образом, для частоты взаимно захваченных осцилляторов имеем

$$f = 1 + \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{4(\lambda_2 + \lambda_1 - 2\mu)} \Delta. \quad (3.68)$$

Если осцилляторы идентичны и $\lambda_1 = \lambda_2$, то захват происходит точно на центральной частоте $f = 1$. Если же осцилляторы неидентичны, то в соответствии с (3.68) это не так. Более возбужденный осциллятор (для которого управляющий параметр больше) «оттягивает» захваченную частоту на себя. Это хорошо видно для сильно неидентичных осцилляторов. Так если $\lambda_1 \gg \lambda_2$, то из (3.68) следует

$$f \approx 1 - \frac{\Delta}{4}, \quad (3.69)$$

и захват происходит почти точно на собственной частоте первого осциллятора. Если же $\lambda_2 \gg \lambda_1$, то частота захвата почти совпадает с собственной частотой второго осциллятора

$$f \approx 1 + \frac{\Delta}{4}. \quad (3.70)$$

3.23. Гашение колебаний неидентичных осцилляторов. Эффект широкополосной синхронизации. Найдите границы области «гибели колебаний» для неидентичных осцилляторов. Используя результат задачи 3.21, укажите основную область синхронизации неидентичных осцилляторов на плоскости частотная расстройка – величина связи.

Решение. Как отмечалось при решении задачи 3.6, для поиска режима «гибели колебаний» достаточно линейного приближения. Укороченные уравнения (3.57) в линейном приближении имеют вид

$$\begin{aligned} 2 \frac{da}{dt} &= \lambda_1 a - i \frac{\Delta}{2} a - \mu(a - b), \\ 2 \frac{db}{dt} &= \lambda_2 b + i \frac{\Delta}{2} b - \mu(b - a). \end{aligned} \quad (3.71)$$

Для исследования устойчивости положения равновесия в начале координат полученной линейной системы, положим

$$a \sim e^{(\eta+i\varepsilon)t}, b \sim e^{(\eta+i\varepsilon)t}, \quad (3.72)$$

где η, ε – действительные числа. Для реализации режима «гибели колебаний» необходимо выполнение условия $\eta < 0$. Соответственно, на границе этой области $\eta = 0$. Тогда

$$a \sim e^{i\varepsilon t}, b \sim e^{i\varepsilon t}. \quad (3.73)$$

Подставляя (3.73) в (3.71), получаем характеристическое уравнение

$$\left(2i\varepsilon - \lambda_1 + \mu + i\frac{\Delta}{2}\right)\left(2i\varepsilon - \lambda_2 + \mu - i\frac{\Delta}{2}\right) = \mu^2. \quad (3.74)$$

Отсюда следует, что

$$4\varepsilon^2 + \mu(\lambda_1 + \lambda_2) - \lambda_1\lambda_2 + \frac{\Delta^2}{4} + i\left[2\varepsilon(\lambda_1 + \lambda_2 - 2\mu) - \frac{\Delta}{2}(\lambda_1 - \lambda_2)\right] = 0. \quad (3.75)$$

Отделяя действительную и мнимую части, получим

$$\begin{aligned} 4\varepsilon^2 + \mu(\lambda_1 + \lambda_2) - \lambda_1\lambda_2 + \frac{\Delta^2}{4} &= 0, \\ 2\varepsilon(\lambda_1 + \lambda_2 - 2\mu) - \frac{\Delta}{2}(\lambda_1 - \lambda_2) &= 0. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Отсюда следует следующее выражение для искомой границы:

$$\Delta^2 = \frac{[\mu(\lambda_1 + \lambda_2) - \lambda_1\lambda_2](\lambda_1 + \lambda_2 - 2\mu)^2}{(\lambda_1 - \mu)(\lambda_2 - \mu)}. \quad (3.77)$$

В частном случае $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ соотношение (3.77) принимает вид

$$\Delta^2 = 4\lambda(2\mu - \lambda), \quad (3.78)$$

отвечающее условию, полученному при решении задачи 3.6.

Область синхронизации системы неидентичных осцилляторов показана на рис. 3.14. Она имеет две границы, отвечающих условиям седло-узловой бифуркации (3.63) и «гибели колебаний» (3.78).

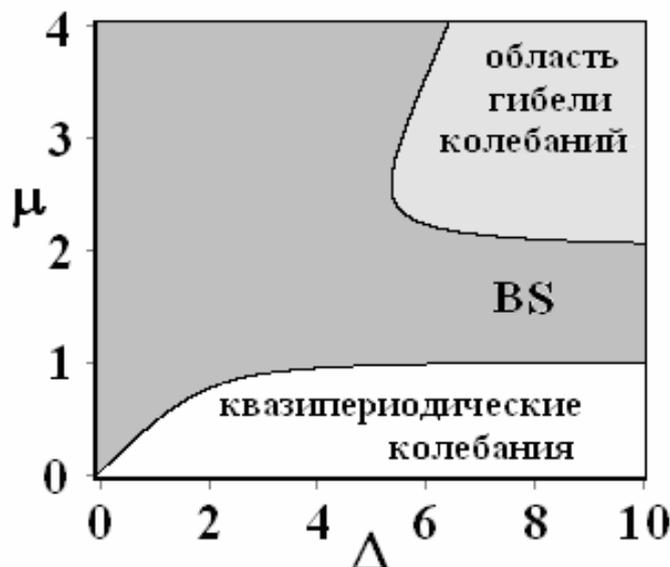


Рис. 3.14. Область синхронизации (выделена темно серым цветом), построенная в соответствии с (3.63) и (3.77); BS – область широкополосной синхронизации (Broadband Synchronization). Значения параметров $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$.

3.24. Карта динамических режимов неидентичных осцилляторов.

Постройте карту динамических режимов, характерные фазовые портреты и реализации в области широкополосной синхронизации. Используйте систему уравнений в форме

$$\begin{aligned}\ddot{x} - (\lambda_1 - x^2)\dot{x} + x + \mu(\dot{x} - \dot{y}) &= 0, \\ \ddot{y} - (\lambda_2 - y^2)\dot{y} + (1 + \Delta)y + \mu(\dot{y} - \dot{x}) &= 0.\end{aligned}\tag{3.79}$$

Как изменяется вид карты при увеличении разницы между управляющими параметрами подсистем?

Решение. Карта динамических режимов и характерные фазовые портреты системы (3.79) для близких значений $\lambda_1 = 1.25$, $\lambda_2 = 1$ представлены на рис. 3.15.

Различие значений управляющих параметров λ_1 и λ_2 приводит к изменению устройства плоскости параметров (Δ, μ) по сравнению с рис. 3.5. На рис. 3.15 граница между областями гибели колебаний и квазипериодических режимов уже является не линией, а представляет собой полосу конечной ширины по коэффициенту связи $\lambda_2 < \mu < \lambda_1$, безгранично простирающуюся в область возрастающей частотной расстройки. Если двигаться внутри этой полосы, увеличивая собственную частоту второго осциллятора, то можно наблюдать синхронные режимы, отличающиеся на фазовых портретах числом «оборотов» фазовой траектории второго осциллятора, что демонстрируют приведенные на рис. 3.15 фазовые портреты. Соответствующие области на карте выглядят как «размытые» вершины языков синхронизации.

Причина особого устройства области $\lambda_2 < \mu < \lambda_1$ на качественном уровне объяснялась в рамках квазигармонического приближения в задаче 3.21. Это режим *широкополосной синхронизации*. В этом случае диссипативная связь достаточно велика, чтобы компенсировать возбуждение второго осциллятора. Первый же осциллятор остается все еще возбужденным и доминирует над вторым. В этом плане очень характерно соотношение масштабов на нижней паре фазовых портретов на рис. 3.15. Можно видеть, что размер предельного цикла первого осциллятора на порядок больше, чем второго. При уменьшении частотной расстройки размеры предельных циклов выравниваются, рис. 3.15,б,в.

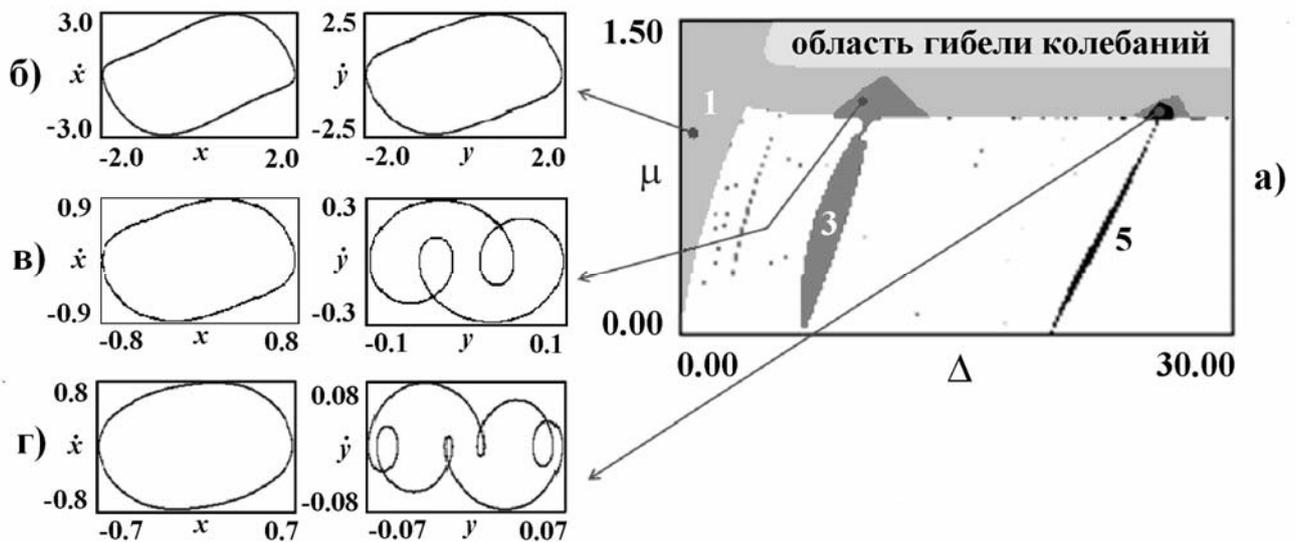


Рис. 3.15. Карта динамических режимов связанных осцилляторов Ван-дер-Поля (3.79) с неидентичными параметрами $\lambda_1 = 1.25$, $\lambda_2 = 1$ (а); характерные фазовые портреты (б-г).

С другой стороны, имеющие место на картах режимов в области широкополосной синхронизации при $\mu > \lambda_2$ границы областей, фиксируемые в сечении Пуанкаре как режимы периода 1, 3, 5 и т.д. не связаны с какими-либо бифуркациями. Однако при переходе из одной такой области в другую, тип режима испытывает определенные перестройки. Этот факт иллюстрируют реализации $x(t)$ и $y(t)$ первого и второго осцилляторов на вставках на рис. 3.16. Можно видеть, что определенные формальным образом периоды колебаний²⁴ первого и второго осцилляторов совпадают, так что во всей этой полосе с этой точки зрения можно говорить о синхронизации с соотношением частот осцилляторов 1:1. Однако при переходе из областей, обозначенных на карте как 1, 3, 5, реализация второго осциллятора наряду с основным периодом демонстрирует заметные осцилляции с утроенной частотой, частотой в пять раз больше и т.д. Таким образом, в спектре колебаний второго осциллятора будут существенно проявляться и эти частотные составляющие, а не только основная частота. В этом особенность «переходной» области $\lambda_2 < \mu < \lambda_1$. На фазовых портретах, как мы отмечали, эти особенности связаны с появлением у аттрактора петель, пересекающих ось $\dot{y} = 0$.

Сравнение карт на рис. 3.15,а и рис. 3.16,а иллюстрирует изменения, отвечающие увеличению степени неидентичности систем по управляющим параметрам.

²⁴ Здесь они понимаются в традиционном смысле, т.е. как временные периоды функций, зависящих от времени.

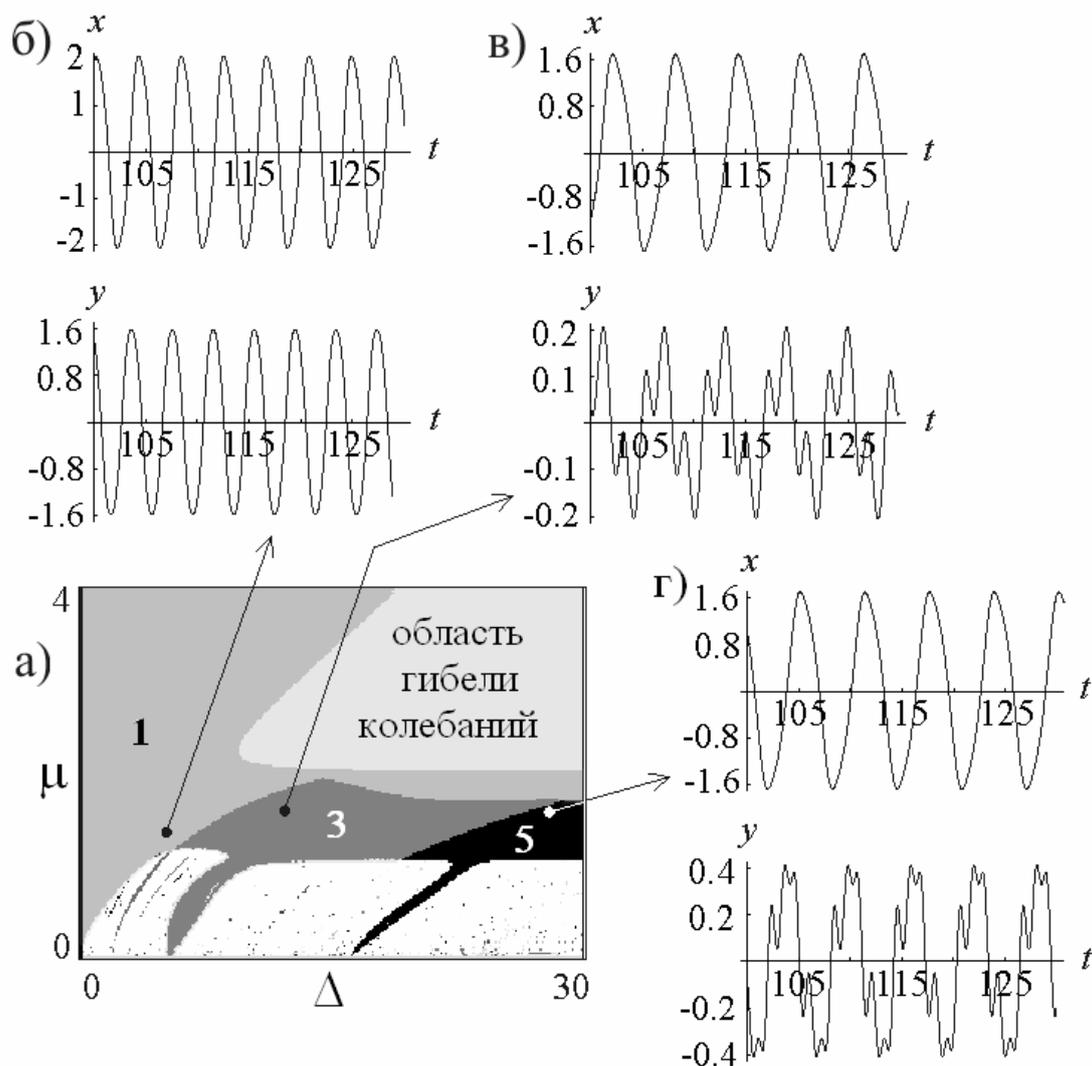


Рис. 3.16. Карта динамических режимов связанных осцилляторов Ван-дер-Поля (3.79) с неидентичными параметрами, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$ (а); характерные реализации $x(t)$ и $y(t)$ первого и второго осцилляторов в области широкополосной синхронизации (б-г).

3.25. Осцилляторы, неидентичные по параметрам нелинейной диссипации. Получите уравнение для действительных амплитуд и фаз для связанных осцилляторов Ван-дер-Поля в случае неидентичных параметров нелинейной диссипации:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\lambda_1 - \gamma_1 x^2) \dot{x} + \left(1 - \frac{\Delta}{2}\right) x + \mu(\dot{x} - \dot{y}) &= 0, \\ \ddot{y} - (\lambda_2 - \gamma_2 y^2) \dot{y} + \left(1 + \frac{\Delta}{2}\right) y + \mu(\dot{y} - \dot{x}) &= 0. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Выполните оценки размеров предельных циклов, и на их основе покажите, что в такой системе возможна смена доминирующего осциллятора. Считайте, что управляющий параметр первого осциллятора больше второго: $\lambda_1 > \lambda_2$.

Решение. Прежде всего, отметим, что один из параметров нелинейной диссипации в (3.80) может быть убран перенормировкой, так что можно использовать уравнения

$$\begin{aligned}\ddot{x} - (\lambda_1 - x^2)\dot{x} + \left(1 - \frac{\Delta}{2}\right)x + \mu(\dot{x} - \dot{y}) &= 0, \\ \ddot{y} - (\lambda_2 - \gamma y^2)\dot{y} + \left(1 + \frac{\Delta}{2}\right)y + \mu(\dot{y} - \dot{x}) &= 0,\end{aligned}\tag{3.81}$$

где $\gamma = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}$ – относительный параметр нелинейной диссипации.

Действуя аналогично задаче 3.20, можно придти к следующим уравнениям для амплитуд и фаз осцилляторов:

$$\begin{aligned}2\frac{dR}{dt} &= R(\lambda_1 - \mu) - R^3 + \mu r \cos \theta, \\ 2\frac{dr}{dt} &= r(\lambda_2 - \mu) - \gamma r^3 + \mu R \cos \theta, \\ \frac{d\psi_1}{dt} &= -\frac{\Delta}{4} - \frac{r}{2R}\mu \sin \theta, \\ \frac{d\psi_2}{dt} &= \frac{\Delta}{4} + \frac{R}{2r}\mu \sin \theta.\end{aligned}\tag{3.82}$$

Из амплитудных уравнений следует оценка размеров предельных циклов первого и второго осцилляторов

$$R \approx \sqrt{\lambda_1 - \mu}, \quad r \approx \sqrt{\frac{\lambda_2 - \mu}{\gamma}}.\tag{3.83}$$

При $\mu \rightarrow 0$ имеем

$$R \approx \sqrt{\lambda_1}, \quad r \approx \sqrt{\frac{\lambda_2}{\gamma}}.\tag{3.84}$$

Таким образом, если управляющие параметры λ_1, λ_2 одного порядка, а $\gamma \approx 1$, то при малой связи размеры предельных циклов одного порядка. Если же параметр нелинейной диссипации мал и $\gamma \ll 1$, то размер предельного цикла второго осциллятора много больше первого: $r \gg R$. Это означает, что в этом случае второй осциллятор будет доминировать.

Если теперь увеличивать величину связи, то размеры предельных циклов будут уменьшаться. При $\mu \rightarrow \lambda_2$ и $\lambda_1 > \lambda_2$ из (3.83) получаем оценки

$$R \approx \sqrt{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad r \approx \sqrt{\frac{\lambda_2 - \mu}{\gamma}} \rightarrow 0.\tag{3.85}$$

В этом случае диссипативная связь гораздо более существенно сказывается на размере второго осциллятора, так что теперь $r \ll R$. Это означает, что теперь будет доминировать первый осциллятор. Таким образом, в такой системе возможен эффект смены доминирующего осциллятора.

3.26. Эффект смены доминирующего осциллятора. Получите фазовое уравнение для системы (3.82) и на его основе выясните, как проявляется эффект смены доминирующего осциллятора в устройстве границы области синхронизации.

Решение. Подставляя оценки для радиусов предельных циклов (3.83) в фазовые уравнения (3.82), получаем для относительной фазы осцилляторов

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\Delta}{2} + \frac{\mu}{2} \left(\sqrt{\frac{\lambda_2 - \mu}{\gamma(\lambda_1 - \mu)}} + \sqrt{\frac{\gamma(\lambda_1 - \mu)}{\lambda_2 - \mu}} \right) \sin \theta. \quad (3.86)$$

Отсюда следует выражение для границы области синхронизации

$$\Delta = \mu \left(\sqrt{\frac{\lambda_2 - \mu}{\gamma(\lambda_1 - \mu)}} + \sqrt{\frac{\gamma(\lambda_1 - \mu)}{\lambda_2 - \mu}} \right). \quad (3.87)$$

На рис. 3.17, а показана полученная с помощью (3.87) граница основного языка синхронизации. Она имеет специфический вид с характерной «перетяжкой». Покажем, что такой вид границы обусловлен сменой лидирующего осциллятора.

Формула (3.87) содержит два слагаемых:

$$\Delta = \Delta_1(\mu) + \Delta_2(\mu) = \mu \sqrt{\frac{\gamma(\lambda_1 - \mu)}{\lambda_2 - \mu}} + \mu \sqrt{\frac{\lambda_2 - \mu}{\gamma(\lambda_1 - \mu)}}. \quad (3.88)$$

Графики функций $\Delta_1(\mu)$ и $\Delta_2(\mu)$ показаны на рис. 3.17, б, так что кривая рис. 3.17, а получается их суммированием по оси частотных расстроек.

Каждому из двух членов в (3.88) можно придать физическую интерпретацию. Действительно, «выключим» в (3.80) воздействие второго осциллятора на первый. Проводя для этого случая выкладки по приведенному выше образцу, получаем выражение для границы основного языка синхронизации

$$\Delta = \Delta_1(\mu) = \mu \sqrt{\frac{\gamma(\lambda_1 - \mu)}{\lambda_2 - \mu}}. \quad (3.89)$$

Таким образом, первое слагаемое в (3.88) отвечает ситуации, когда второй осциллятор не действует на первый, т.е. первый доминирует. Граница языка $\Delta = \Delta_1(\mu)$ показана на рис. 3.17, б сплошной линией. Качественно она

соответствует рис. 3.13 за тем лишь исключением, что язык у основания очень узкий за счет малой нелинейной диссипации второго осциллятора.

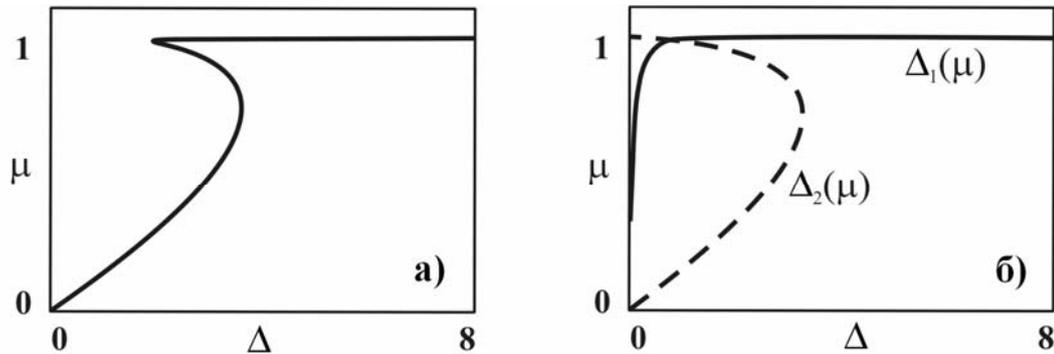


Рис. 3.17. Граница области синхронизации для осцилляторов с неидентичными параметрами в соответствии с уравнением (3.87) (а); графики функций $\Delta_1(\mu)$ и $\Delta_2(\mu)$ (б); $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\gamma = 0.01$.

Совершенно аналогично можно показать, что случаю выключенного воздействия первого осциллятора на второй, отвечает уравнение

$$\Delta = \Delta_2(\mu) = \mu \sqrt{\frac{\lambda_2 - \mu}{\gamma(\lambda_1 - \mu)}}. \quad (3.90)$$

Таким образом, второе слагаемое в (3.88) соответствует доминированию второго осциллятора. График функции $\Delta_2(\mu)$ показан на рис. 3.17, б пунктирной линией. В области малых μ

$$\Delta_2(\mu) \approx \mu \sqrt{\frac{\lambda_2}{\gamma\lambda_1}}. \quad (3.91)$$

Форма языка у основания на плоскости (Δ, μ) имеет вид традиционного «угла», но наклон его в соответствии с (3.90) мал. С ростом уровня связи начинает заметно уменьшаться орбита второго осциллятора, обращаясь в соответствии с (3.85) в ноль при условии $\mu = \lambda_2$ ²⁵. В этом случае уже не может произойти заметный эффект синхронизации, и в соответствии с (3.90) и пунктирной линией на рис. 3.17, б, ширина области синхронизации стремится к нулю.

Суммарный график, учитывающий взаимное влияние осцилляторов, приведен на рис. 3.17, а. Можно видеть, как два описанных механизма синхронизации в сумме приводят к характерной границе языка с «перетяжкой». Таким образом, форма языка, действительно, связана со сменой доминирующего осциллятора при возрастании уровня диссипативной связи.

²⁵ В рамках сделанных здесь предположений. На самом деле, радиус орбиты уменьшается не до нуля.

3.27. *Карты динамических режимов для осцилляторов, неидентичных по управляющим параметрам и величине нелинейной диссипации.*

Постройте карты динамических режимов для системы связанных осцилляторов Ван-дер-Поля на плоскости частотная расстройка – величина связи в случае неидентичных управляющих параметров и параметров нелинейной диссипации. Используйте уравнения в форме

$$\begin{aligned}\ddot{x} - (\lambda_1 - x^2)\dot{x} + x + \mu(\dot{x} - \dot{y}) &= 0, \\ \ddot{y} - (\lambda_2 - \gamma y^2)\dot{y} + (1 + \Delta)y + \mu(\dot{y} - \dot{x}) &= 0.\end{aligned}\tag{3.92}$$

и значения параметров $\lambda_1 = 1.25$, $\lambda_2 = 1$ и $\gamma = 0.05$, $\gamma = 0.02$, $\gamma = 0.01$. Как проявляется в устройстве карты неидентичность по параметрам нелинейной диссипации? Для последнего случая постройте фазовые портреты для увеличивающихся значений параметра связи, и на их основе продемонстрируйте эффект смены доминирующего осциллятора.

Решение. Карты динамических режимов и характерные фазовые портреты представлены на рис. 3.18. Из сравнения с рис. 3.15 видно, что неидентичность по величине нелинейной диссипации приводит к существенным изменениям в устройстве плоскости параметров. У основного языка синхронизации происходит образование характерного «выступа» в сторону больших значений частотной расстройки. Его величина существенно возрастает при уменьшении параметра нелинейной диссипации γ , т.е. при возрастании относительного размера орбиты второго осциллятора. Таким образом, картина качественно аналогична описанной в задаче 3.26. Отметим, что характерное искажение имеют и языки более высоких порядков: периода 3, 5 и др.

Наблюдаемая картина объясняется сменой доминирующего осциллятора в системе при увеличении уровня диссипативной связи. Это подтверждают фазовые портреты на рис. 3.18. На рис. 3.18, г можно видеть ситуацию, отвечающую колебаниям осцилляторов внутри характерного «выступа» основного языка синхронизации. При этом размер аттрактора второго осциллятора заметно больше, чем первого (см. масштабы по осям координат). Таким образом, второй осциллятор доминирует. Рис. 3.18, д отвечает языку синхронизации периода 3 вблизи границы области широкополосной синхронизации, когда $\mu \approx \lambda_2$. Можно видеть, что размеры предельных циклов первого и второго осцилляторов примерно сравнялись. Тем не менее, существенно возмущенным выглядит фазовый портрет первого осциллятора, а фазовый портрет второго близок по форме к случаю изолированного осциллятора. Далее при смещении по величине связи внутрь полосы.

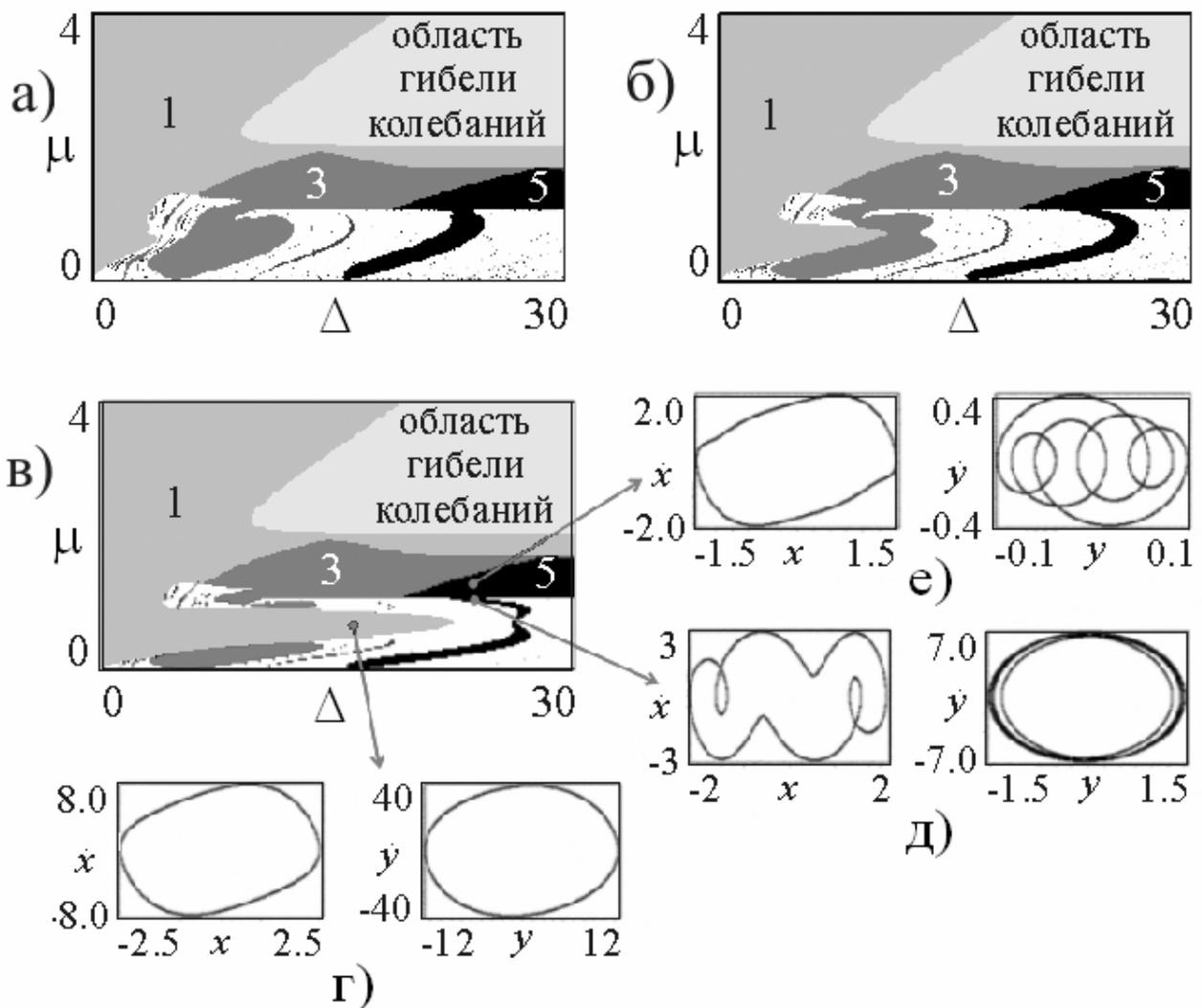


Рис. 3.18. Карты динамических режимов связанных осцилляторов Ван-дер-Поля (3.92) с неидентичными управляющими параметрами и параметрами нелинейной диссипации при $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\gamma = 0.05$ (а), $\gamma = 0.02$ (б), $\gamma = 0.01$ (в). На вставках к рис. (в) – фазовые портреты в характерных точках плоскости параметров (г-е).

широкополосной синхронизации переходим от рис. 3.18, д к рис. 3.18, е. Теперь возмущенным выглядит фазовый портрет второго осциллятора, при этом его размер заметно уменьшился. Это означает, что в системе сменился «лидер» – теперь доминирует первый осциллятор.

3.28. Бифуркационный анализ системы неидентичных связанных осцилляторов Ван-дер-Поля. Проведите анализ бифуркаций системы (3.92) для $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$ и $\gamma = 0.05$.

Решение. Полученная численно картина бифуркационных линий показана на рис. 3.19. Можно видеть, что в области $\mu < \lambda_2$ картина бифуркаций соответствует карте динамических режимов на рис. 3.18, а. Для улучшения восприятия на рис. 3.19 в кружочках обозначены области существования

режимов периода 1 и 3, при этом цвет заполнения выбран точно таким же, как на картах динамических режимов.

На рис. 3.19 можно видеть, что граница основного языка синхронизации при малых значениях связи определяется линией седло-узловой бифуркации SN , которая, однако, заканчивается в точке коразмерности два R_1 – резонанса 1:1. Ее продолжает линия бифуркации Неймарка-Сакера NS , которая теперь ограничивает основную область синхронизации.

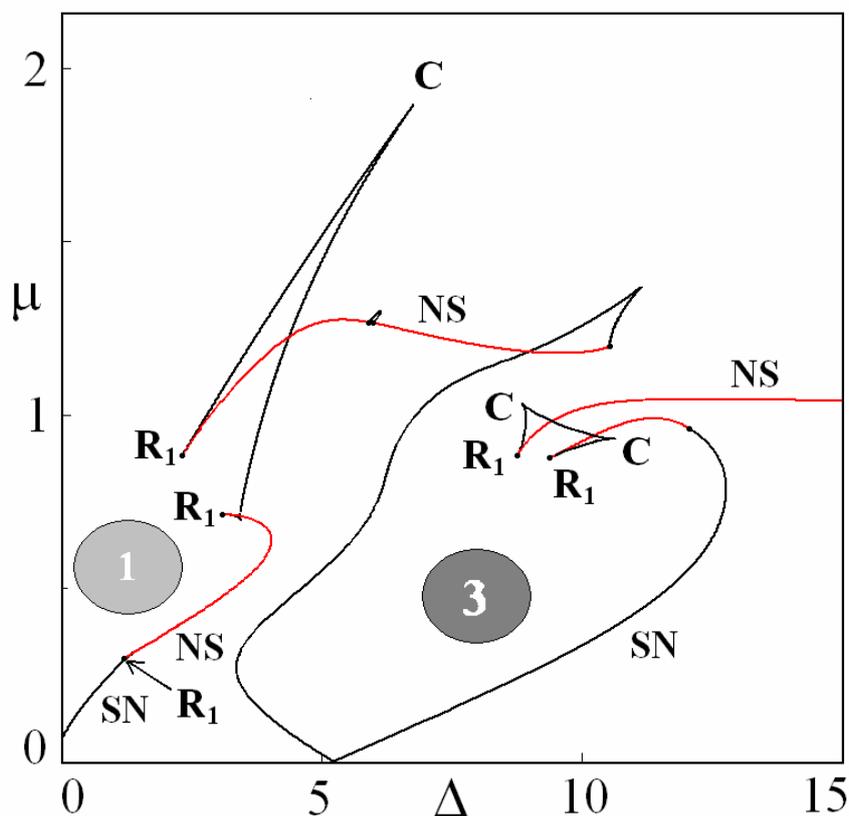


Рис. 3.19. Бифуркационные линии и точки системы (3.92) при $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\gamma = 0.05$; SN – линии седло-узловых бифуркаций, NS – линии бифуркаций Неймарка-Сакера, C – точки сборки, R_1 – точки резонанса 1:1.

Особенность бифуркационной картины для неидентичных систем на рис. 3.19 состоит в том, что линия бифуркации Неймарка-Сакера состоит из отдельных «кусков», заканчивающихся точками R_1 . При этом весьма характерную бифуркационную структуру можно наблюдать вблизи вершины языка синхронизации 1:3. Она состоит из пары точек сборки и пары точек резонанса 1:3. В результате, формируется разрыв линии Неймарка-Сакера, а внутренняя область языка синхронизации оказывается объединена с областью широкополосной синхронизации. Таким образом, если выйти из внутренней области основного языка синхронизации 1:1, увеличивая связь, то можно,

проходя по области широкополосной синхронизации, попасть в область синхронизации 1:3. При этом мы не будем пересекать линии бифуркаций.

Таким образом, внутри области широкополосной синхронизации нет скачкообразных качественных изменений типа режима, а наблюдаются его непрерывные трансформации.

Отметим, что на рис. 3.19 основная область синхронизации также имеет небольшой характерный «выступ» в область больших частотных расстройек, как и получено в рамках квазигармонического приближения.

Реактивно связанные осцилляторы

3.29. Укороченные уравнения реактивно связанных автоколебательных осцилляторов. Рассмотрите систему двух реактивно связанных осцилляторов Ван-дер-Поля

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + \left(1 - \frac{\Delta}{2}\right)x + \varepsilon(x - y) &= 0, \\ \ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + \left(1 + \frac{\Delta}{2}\right)y + \varepsilon(y - x) &= 0. \end{aligned} \tag{3.93}$$

Здесь λ – управляющий параметр изолированных осцилляторов, ε – коэффициент реактивной связи, Δ – относительная частотная расстройка осцилляторов. Получите для этой системы укороченные уравнения для комплексных амплитуд и уравнения для действительных амплитуд и фаз осцилляторов.

Решение. Действуя аналогично решению задачи 3.1, получаем следующие укороченные уравнения для комплексных амплитуд осцилляторов:

$$\begin{aligned} 2\frac{da}{dt} &= \lambda a - |a|^2 a - i\frac{\Delta}{2}a + i\varepsilon(a - b), \\ 2\frac{db}{dt} &= \lambda b - |b|^2 b + i\frac{\Delta}{2}b + i\varepsilon(b - a). \end{aligned} \tag{3.94}$$

В этих уравнениях управляющий параметр λ может быть убран перенормировкой (3.7). Отделяя затем действительные и мнимые части, получаем следующие уравнения для действительных амплитуд и фаз первого и второго осцилляторов:

$$\begin{aligned}
2\frac{dR}{dt} &= R - R^3 - \varepsilon r \sin \theta, \\
2\frac{dr}{dt} &= r - r^3 + \varepsilon R \sin \theta, \\
\frac{d\psi_1}{dt} &= \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\Delta}{4} - \frac{r}{2R} \varepsilon \cos \theta, \\
\frac{d\psi_2}{dt} &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\Delta}{4} - \frac{R}{2r} \varepsilon \cos \theta.
\end{aligned}
\tag{3.95}$$

Здесь $\theta = \psi_1 - \psi_2$ – относительная фаза осцилляторов. Как и в случае диссипативной связи, можно понизить размерность системы, если записать уравнение для относительной фазы:

$$\begin{aligned}
2\frac{dR}{dt} &= R - R^3 - \varepsilon r \sin \theta, \\
2\frac{dr}{dt} &= r - r^3 + \varepsilon R \sin \theta, \\
\frac{d\theta}{dt} &= -\frac{\Delta}{2} - \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{r}{R} - \frac{R}{r} \right) \cos \theta.
\end{aligned}
\tag{3.96}$$

3.30. Динамика реактивно связанных осцилляторов вблизи устойчивых невозмущенных орбит. Опишите динамику амплитуд и относительной фазы реактивно связанных осцилляторов при малой связи в окрестности невозмущенных орбит. Обсудите отличия от случая диссипативной связи.

Решение. При выключенной связи из (3.96) получаем уравнения для устойчивых стационарных орбит осцилляторов $R = r = 1$. При слабой связи осцилляторы движутся в окрестности этих стационарных орбит, поэтому положим $R = 1 + \tilde{R}$ и $r = 1 + \tilde{r}$, где знаком «тильда» отмечены возмущения орбит. Тогда из (3.96) для возмущений получаем

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{R}}{dt} &= -\tilde{R} - \frac{\varepsilon}{2} \sin \theta, \\
\frac{d\tilde{r}}{dt} &= -\tilde{r} + \frac{\varepsilon}{2} \sin \theta.
\end{aligned}
\tag{3.97}$$

Таким образом, динамика амплитуд сильно протемпирована, и орбиты быстро выходят на значения, отвечающие возмущениям

$$\begin{aligned}
\tilde{R} &= -\frac{\varepsilon}{2} \sin \theta, \\
\tilde{r} &= \frac{\varepsilon}{2} \sin \theta.
\end{aligned}
\tag{3.98}$$

Обсудим влияние связи на орбиты осцилляторов. Напомним, что в случае

диссипативной связи, связь меняет орбиты обоих осцилляторов одинаковым образом. В случае реактивной связи из (3.98) заключаем, что такая связь влияет иначе – она «разводит» орбиты. Если у одного осциллятора радиус орбиты уменьшается, то у второго он увеличивается. Смена знака параметра реактивной связи приводит к тому, что на орбиту большего радиуса уходит второй осциллятор.

3.31. Фазовое уравнение для реактивно связанных осцилляторов.

Получите фазовое уравнение для реактивно связанных осцилляторов. Обсудите отличия от случая диссипативной связи.

Решение. Обратимся к уравнению для относительных фаз осцилляторов (3.96):

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\Delta}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{r}{R} - \frac{R}{r} \right) \cos \theta. \quad (3.99)$$

По аналогии с решением задачи 3.3, подставим в это уравнение $R = 1 + \tilde{R}$ и $r = 1 + \tilde{r}$. Тогда для амплитудного сомножителя получаем

$$\frac{r}{R} - \frac{R}{r} = \frac{1 + \tilde{r}}{1 + \tilde{R}} - \frac{1 + \tilde{R}}{1 + \tilde{r}} = (1 + \tilde{r} - \tilde{R} + \dots) - (1 + \tilde{R} - \tilde{r} + \dots) = 2(\tilde{r} - \tilde{R}) + \dots \quad (3.100)$$

Многоточием обозначены члены второго порядка по возмущениям и выше. Таким образом, мы имеем существенно иную ситуацию, чем в случае диссипативной связи. Теперь вклад в динамику фазы в «нулевом» порядке по возмущениям отсутствует. Поэтому действовать аналогично случаю диссипативной связи, просто подставляя в фазовое уравнение невозмущенные орбиты $R = r = 1$, нельзя. Необходимо более аккуратно вычислять возмущения орбит.

С этой целью подставим (3.100) в фазовое уравнение (3.99), а затем учтем соотношения (3.100):

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\Delta}{2} + \varepsilon(\tilde{R} - \tilde{r}) \cos \theta = -\frac{\Delta}{2} - \varepsilon^2 \sin \theta \cos \theta. \quad (3.101)$$

Тогда получаем

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\Delta}{2} - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \sin(2\theta). \quad (3.102)$$

Это и есть фазовое уравнение реактивно связанных осцилляторов. В отличие от диссипативной связи, в него входит квадрат параметра связи и удвоенное значение относительной фазы осцилляторов.

3.32. Область синхронизации и фазовая бистабильность реактивно связанных осцилляторов. С помощью фазового уравнения выясните форму

языка синхронизации для реактивно связанных осцилляторов. Покажите, что в этом случае имеет место фазовая бистабильность.

Решение. В стационарном случае фазовое уравнение (3.102) принимает вид:

$$\Delta + \varepsilon^2 \sin(2\theta) = 0. \quad (3.103)$$

Границы языка синхронизации задаются соотношением $\sin(2\theta) = \pm 1$, что при подстановке в (3.103) приводит к соотношению

$$\Delta = \pm \varepsilon^2. \quad (3.104)$$

Таким образом, язык синхронизации на плоскости частотная расстройка – величина связи (Δ, ε) имеет очень узкое острие в виде корневой особенности $\varepsilon = \sqrt{|\Delta|}$, рис. 3.20, а. Этот факт связан с тем, что синхронизация осцилляторов в этом случае – эффект «второго порядка». Однако язык очень быстро расширяется с ростом ε и вполне выявляется в ходе компьютерного моделирования (см. задачу 3.34). На рис. 3.20 представлен случай положительных значений параметра связи ε . Для отрицательных ε картина получается зеркальным отражением относительно оси частотной расстройки.

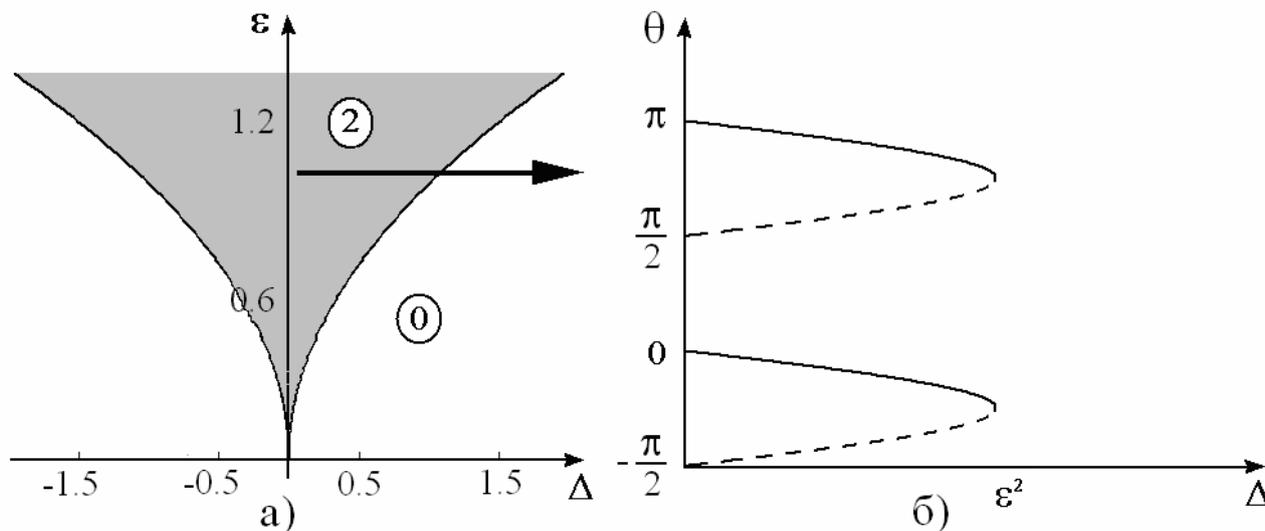


Рис. 3.20. Язык синхронизации в системе с реактивной связью, серым цветом выделена область синхронизации, цифрами показано число устойчивых состояний равновесия фазы (а); бифуркационная диаграмма вдоль выделенной линии (б).

Особенность задачи в анализируемом случае – возможность одновременного сосуществования двух устойчивых состояний, отвечающих разным значениям относительной фазы осцилляторов (фазовая бистабильность). Это свойство формально связано с удвоенным аргументом синуса в соотношении (3.103). Чтобы сделать этот факт более наглядным, рассмотрим подробнее случай нулевой частотной расстройки $\Delta = 0$.

В этом случае (3.103) имеет четыре решения: $\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\theta = \pi$, $\theta = \frac{3\pi}{2}$.

Выясним их устойчивость. С этой целью сопоставим системе (3.102) эффективный потенциал $U(\theta)$:

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\partial U(\theta)}{\partial \theta}, \quad U(\theta) = -\frac{1}{2}\varepsilon^2 \cos 2\theta. \quad (3.105)$$

Тогда решения $\theta = 0$, $\theta = \pi$ отвечают минимумам потенциала, а значит – устойчивым равновесиям. Соответственно, $\theta = \frac{\pi}{2}$ и $\theta = \frac{3\pi}{2}$ отвечают максимумам и неустойчивым равновесиям. Таким образом, в системе, действительно, одновременно сосуществуют два устойчивых состояния равновесия, причем одно отвечает синфазным, а второе – противофазным колебаниям осцилляторов. Между устойчивыми положениями равновесия располагаются два неустойчивых.

При изменении частотой расстройки устойчивые и неустойчивые равновесия попарно сближаются и одновременно исчезают при переходе через границу языка. Соответствующая бифуркационная диаграмма, отвечающая выходу за границу языка синхронизации, показана на рис. 3.20, б. На рис. 3.20, а цифрами в кружочке показано число устойчивых состояний равновесия фазы.

3.33. Частоты взаимного захвата реактивно связанных осцилляторов.

Получите фазовые уравнения для каждого осциллятора и с их помощью вычислите частоты захвата реактивно связанных осцилляторов. Сравните их с собственными частотами «неактивной» системы с выключенной неустойчивостью и нелинейной диссипацией.

Решение. Мы получили уравнение для относительной фазы осцилляторов. Получим в этом приближении фазовые уравнения для каждого осциллятора. Для этого подставим в фазовые уравнения (3.95) вытекающее из (3.98) соотношение

$$\frac{r}{R} = 1 + \tilde{r} - \tilde{R} + \dots = 1 + \varepsilon \sin \theta + \dots \quad (3.106)$$

В результате получим

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= -\frac{\Delta}{4} + \frac{\varepsilon}{2}(1 - \cos \theta) - \frac{\varepsilon^2}{4} \sin(2\theta), \\ \dot{\psi}_2 &= \frac{\Delta}{4} + \frac{\varepsilon}{2}(1 - \cos \theta) + \frac{\varepsilon^2}{4} \sin(2\theta). \end{aligned} \quad (3.107)$$

В режиме захвата осцилляторов производная от относительной фазы равна нулю, так что в соответствии с (3.103) $\Delta + \varepsilon^2 \sin(2\theta) = 0$. Тогда

$$\dot{\psi}_1 = \dot{\psi}_2 = \frac{\varepsilon}{2}(1 - \cos \theta). \quad (3.108)$$

Это уравнение совместно с $\Delta + \varepsilon^2 \sin(2\theta) = 0$ задает частоту взаимного захвата реактивно связанных осцилляторов. Особенность задачи по сравнению со случаем диссипативной связи состоит в том, что возможны два значения этой частоты: для синфазных и противофазных колебаний.

Покажем это сначала для случая нулевой частотной расстройки осцилляторов $\Delta = 0$. В этом случае для синфазной моды $\theta = 0$, и частота захвата в соответствии с (3.108) $\dot{\psi}_1 = \dot{\psi}_2 = 0$. Таким образом, синфазная мода захватывается точно на центральной частоте осцилляторов. В свою очередь, для противофазной моды $\theta = \pi$, и частота захвата $\dot{\psi}_1 = \dot{\psi}_2 = \varepsilon$.

Пусть теперь мы находимся на границе языка синхронизации, так что $\sin(2\theta) = -1$. Поэтому для синфазной моды $\theta = -\frac{\pi}{4}$ (см. рис. 3.20) и

$$\dot{\psi}_1 = \dot{\psi}_2 = \frac{1}{2}\varepsilon\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right). \quad (3.109)$$

Соответственно, для противофазной моды $\theta = \frac{3\pi}{4}$ и

$$\dot{\psi}_1 = \dot{\psi}_2 = \frac{1}{2}\varepsilon\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right). \quad (3.110)$$

Таким образом, с ростом частотной расстройки частоты захвата для синфазной и противофазной мод сближаются.

Полученные результаты сравним с нормальными частотами системы связанных осцилляторов. В отличие от случая диссипативной связи, инерционная связь меняет частоты неактивных осцилляторов. В этом случае укороченные уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} 2\frac{da}{dt} &= -i\frac{\Delta}{2}a + i\varepsilon(a - b), \\ 2\frac{db}{dt} &= i\frac{\Delta}{2}b + i\varepsilon(b - a). \end{aligned}$$

Отсюда для собственных частот имеем $\left(2\Omega + \frac{\Delta}{2} - \varepsilon\right)\left(2\Omega - \frac{\Delta}{2} - \varepsilon\right) = \varepsilon^2$, и

$$\Omega_{1,2} = \frac{\varepsilon}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon^2 + \frac{\Delta^2}{4}}. \quad (3.111)$$

Этот же результат можно получить непосредственно из (3.93), если использовать малость ε .

При $\Delta = 0$ без труда находим: $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = \varepsilon$. Таким образом, в отсутствие частотной расстройки осцилляторы захватываются на частотах нормальных мод системы. С ростом частотной расстройки осцилляторов частоты захвата для двух автоколебательных мод уже не совпадают с нормальными модами. Это видно из (3.111): с ростом частотной расстройки расстояние между нормальными модами увеличивается, в отличие от частот захвата, которые сближаются.

В соответствии с правилами введения медленных амплитуд частота исходной системы отличается от частот укороченных уравнений на единицу, так что нормальные моды даются соотношениями

$$\omega_{1,2} = 1 + \frac{\varepsilon}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon^2 + \frac{\Delta^2}{4}}. \quad (3.112)$$

Этот же результат можно получить и из (3.93). Действительно, если искать решение в виде $e^{i\omega t}$, то для неактивной системы получаем характеристическое уравнение $\left(1 - \omega^2 - \varepsilon - \frac{\Delta}{2}\right)\left(1 - \omega^2 + \frac{\Delta}{2}\right) = \varepsilon^2$, откуда следует

$$\omega_{1,2} = \sqrt{1 + \varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 + \frac{\Delta^2}{4}}}. \quad (3.113)$$

Если связь мала, то, используя известное приближенное соотношение для квадратного корня из числа, близкого к единице, приходим к соотношению (3.112). Приближенное совпадение результатов связано с тем, что укороченные уравнения являются приближенными.

Заметим, что при $\varepsilon = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta^2}{4} - 1 \right)$ частота второй моды обращается в ноль. В

динамике связанных осцилляторов это выражается в том, что возникает разбегание траекторий, см. задачу 3.34.

3.34. Карта динамических режимов осцилляторов с реактивной связью. Постройте карту динамических режимов на плоскости частотная расстройка – величина связи (Δ, ε) для связанных осцилляторов Ван-дер-Поля с реактивной связью. Используйте нормировку, отвечающую единичной собственной частоте первого осциллятора:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \varepsilon(x - y) &= 0, \\ \ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + (1 + \Delta)y + \varepsilon(x - y) &= 0. \end{aligned} \quad (3.114)$$

Решение. Карты динамических режимов системы (3.114) в окрестности основного языка синхронизации показана на рис. 3.21 для значений управляющего параметра $\lambda = 1$ и $\lambda = 3$. Сравнивая карту с рис. 3.20, заключаем, что форма основного языка синхронизации, выявленное в рамках фазового уравнения, включая характерное острие по закону квадратного корня, передается правильно. При этом при малой связи острие симметрично относительно изменения знака связи, как и предсказывает анализ фазового уравнения. Однако при увеличении связи симметрия существенно нарушается.

В левой нижней части карты можно видеть область разбегания траекторий. Ее граница отвечает обращению в ноль частоты одной из нормальных мод системы. Для данной нормировки, действуя аналогично задаче 3.33, легко находим уравнение этой границы:

$$\varepsilon = -\frac{\Delta + 1}{\Delta + 2}.$$

Она имеет горизонтальную асимптоту $\varepsilon = -1$ и вертикальную $\Delta = -2$.

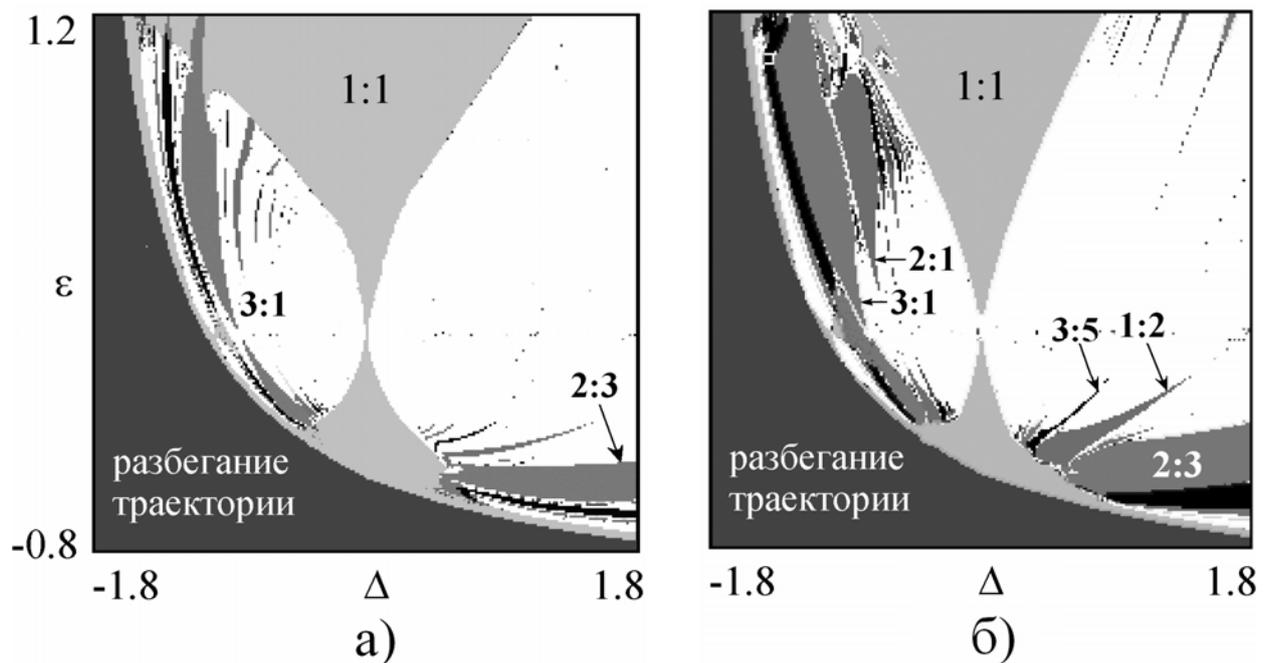


Рис. 3.21. Карта динамических режимов связанных осцилляторов Ван-дер-Поля (3.114) с реактивной связью, $\lambda = 1$ (а), $\lambda = 3$ (б).

Рис. 3.21 выявляет систему высших языков синхронизации в области $\Delta < 0$, что отвечает ситуации, когда частота первого осциллятора больше, чем второго. Наиболее широкий язык этой системы имеет число вращения 3:1. Заметим, что в области $\Delta < -1$ вторая система в автономном случае в соответствии с (3.114), фактически, перестает быть осциллятором: ее потенциальная функция имеет не минимум, а максимум. Однако в отличие от случая диссипативной связи в связанной системе возможны колебания, а порог

разбегания дается формулой $\varepsilon = -\frac{\Delta + 1}{\Delta + 2}$. С ростом управляющего параметра λ высшие языки синхронизации становятся более широкими, и на рис. 3.21, б можно видеть языки с числами вращения 2:3, 3:5 и т.д.

Более детально область $\Delta > 0$ для $\lambda = 1$ показана на рис. 3.22. При этом использована естественная частота системы (3.114) ω , так что $\omega^2 = 1 + \Delta$. Несмотря на то, что выбран большой диапазон по частотной расстройке осцилляторов ($0 < \Delta < 100$), кроме основного языка в поле зрения оказывается, фактически, только язык с числом вращения 1:3. Остальные языки очень узкие. Отметим также характерное поведение языка 1:3: он имеет острие в точке $\omega \approx 3$, однако имеет сильный наклон в области высоких частот. Этот факт характерен именно для системы с реактивной связью.

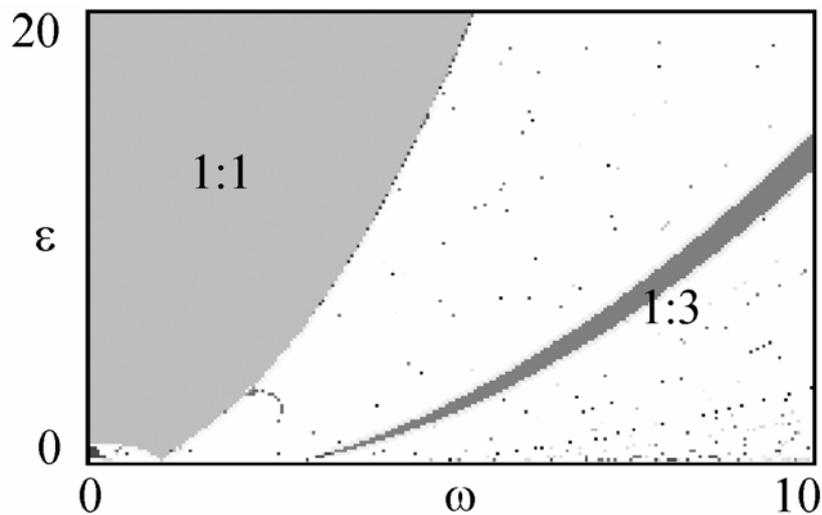


Рис. 3.22. Карта динамических режимов связанных осцилляторов Ван-дер-Поля (3.114) с реактивной связью, $\lambda = 1$.

3.35. Фазовое уравнение для связанных осцилляторов с комбинированной связью. Получите уравнение для относительной фазы осцилляторов с комбинированной связью: диссипативной и реактивной.

Решение. Действуем аналогично задачам 3.1 и 3.31. Отметим при этом, что в случае реактивной связи в фазовое уравнение вносят вклад члены, начиная со второго порядка по возмущениям. Соответственно, в случае диссипативной связи были отброшены члены третьего порядка по возмущениям. Это означает, что вывод «согласован» по порядку возмущений, поэтому итоговое уравнение просто содержит суммы соответствующих членов:

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\Delta}{2} - \mu \sin \theta - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \sin(2\theta). \quad (3.115)$$

Это фазовое уравнение для системы с комбинированной связью.

3.36. Область синхронизации для связанных осцилляторов с комбинированной связью. Получите уравнение для относительной фазы осцилляторов с комбинированной связью. Обсудите устройство области синхронизации в этом случае на плоскости (Δ, μ) и (Δ, ε) . Найдите бифуркации в системе в случае нулевой расстройки осцилляторов.

Решение. Стационарному случаю в системе с комбинированной связью в соответствии с (3.115) отвечает уравнение

$$\Delta + 2\mu \sin \theta + \varepsilon^2 \sin(2\theta) = 0. \quad (3.116)$$

Проанализируем сначала случай нулевой расстройки $\Delta = 0$. В этом случае уравнение распадается на два:

$$\begin{aligned} \sin \theta &= 0, \\ \mu + \varepsilon^2 \cos \theta &= 0. \end{aligned} \quad (3.117)$$

Из первого уравнения получаем два решения: $\theta = 0$ и $\theta = \pi$. При малых μ оба они устойчивы, как следует из анализа системы с чисто реактивной связью. В свою очередь, в соответствии со вторым условием (3.117), возможны еще два положения равновесия. При $\mu = 0$ они располагаются при $\theta = \frac{\pi}{2}$ и $\theta = \frac{3\pi}{2}$, и оба неустойчивы. С ростом параметра диссипативной связи μ они сближаются и при $\mu = \varepsilon^2$ сливаются и исчезают в точке $\theta = \pi$. Общая бифуркационная диаграмма показана на рис. 3.23, б. В соответствии с этим рисунком, при $\mu = \varepsilon^2$ наблюдается бифуркация «вилка», когда устойчивое положение равновесия $\theta = \pi$ теряет устойчивость, сливаясь с двумя симметричными неустойчивыми равновесиями. Таким образом, фазовая бистабильность возможна при $\mu < \varepsilon^2$, когда доминирует инерционная связь.

Пусть теперь частотная расстройка отлична от нуля. Границе области синхронизации отвечает условие слияния корней уравнения (3.116), которое можно найти, приравняв его производную по угловой переменной нулю:

$$\mu \cos \theta + \varepsilon^2 \cos(2\theta) = 0. \quad (3.118)$$

Соотношения (3.116), (3.118) задают границы области синхронизации в параметрической форме. Конфигурация этой области на плоскости (Δ, μ) при $\varepsilon = \text{const}$ показана на рис. 3.1.

Заметим, что наличие бифуркации вилка «сигнализирует» о существовании точки сборки на плоскости (Δ, μ) в точке $(0, \varepsilon^2)$. Несложно показать, что в этой точке располагается вершина полукубического острия. Для этого положим $\theta = \pi + x$. Тогда из (3.118) получаем

$$\varepsilon^2 = -\frac{\mu \cos \theta}{\cos(2\theta)} = \frac{\mu \cos x}{\cos(2x)} = \mu \left(1 + \frac{3}{2} x^2 + \dots \right), \quad (3.119)$$

откуда $x \approx \sqrt{\frac{2}{3}(\mu - \varepsilon^2)}$. В свою очередь, из (3.116) следует

$$\Delta = 2\mu \sin x - \varepsilon^2 \sin(2x) = 2(\mu - \varepsilon^2)x + \dots \quad (3.120)$$

Комбинируя эти соотношения, действительно, получаем полукубическую параболу

$$\Delta = 2\sqrt{\frac{2}{3}}(\mu - \varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}, \quad (3.121)$$

характерную, как известно, для точки сборки. Отходящие от точки сборки линии седло-узловых бифуркаций ограничивают область бистабильности в системе. Отметим, что область синхронизации на рис. 3.23 опирается на конечный частотный интервал $\Delta = 2\varepsilon^2$, который легко находим из (3.116) при $\mu = 0$ и $\sin(2\theta) = \pm 1$.

Рассматриваемая задача характеризуется тремя параметрами $(\Delta, \varepsilon, \mu)$, поэтому полезно изобразить область синхронизации на плоскости (Δ, ε) . На этой плоскости область синхронизации опирается на конечный интервал частотных расстройок $\Delta = 4\mu$. В точке $\varepsilon = \sqrt{\mu}$ располагается точка сборки, а отходящие от нее линии седло-узловых бифуркаций ограничивают область фазовой бистабильности (рис. 3.24).

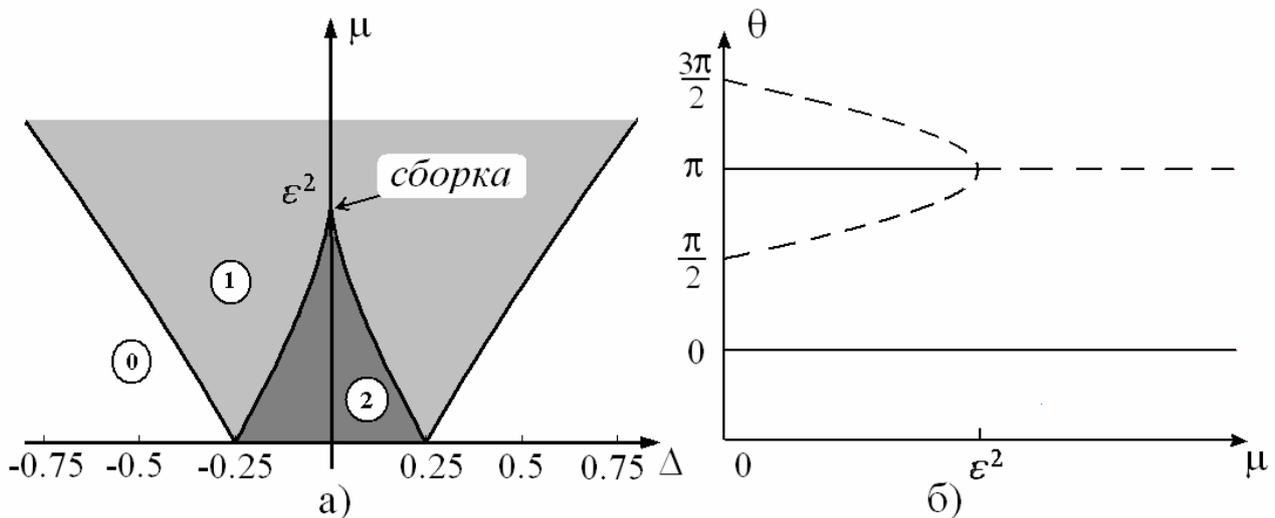


Рис. 3.23. Язык синхронизации в системе с комбинированной связью на плоскости частотная расстройка – параметр диссипативной связи, серым цветом показана область синхронизации, более темным выделена область бистабильности, $\varepsilon = 0.5$ (а); бифуркационная диаграмма при пересечении языка по линии нулевой частотной расстройки $\Delta = 0$ (б).

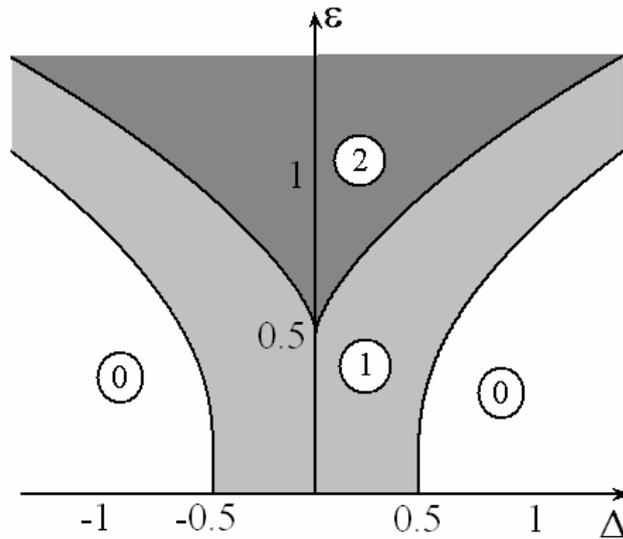


Рис. 3.24. Язык синхронизации в системе с комбинированной связью на плоскости частотная расстройка – параметр реактивной связи. Серым цветом показана область синхронизации, более темным выделена область бистабильности; $\mu = 0.25$. Точка сборки отвечает значению $\varepsilon = \sqrt{\mu}$.

3.37. Осцилляторы Ван-дер-Поля-Дуффинга с реактивной связью. Фазовое приближение. Получите фазовое уравнение для реактивно связанных осцилляторов Ван-дер-Поля-Дуффинга

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + \left(1 - \frac{\Delta}{2}\right)x + \beta x^3 + \varepsilon(x - y) &= 0, \\ \ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + \left(1 + \frac{\Delta}{2}\right)y + \beta y^3 + \varepsilon(y - x) &= 0. \end{aligned} \quad (3.122)$$

Решение. В этом случае получаем следующее уравнение для фаз осцилляторов (см. решение аналогичной задачи 3.15 для диссипативной связи и решение задачи 3.29):

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_1}{dt} &= \frac{3}{2}\beta R^2 - \frac{\Delta}{4} + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{r}{2R}\varepsilon \cos\theta, \\ \frac{d\psi_2}{dt} &= \frac{3}{2}\beta r^2 + \frac{\Delta}{4} + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{R}{2r}\varepsilon \cos\theta. \end{aligned} \quad (3.123)$$

Введение дополнительной нелинейности по типу осциллятора Дуффинга приводит к тому, что в уравнение для относительной фазы

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{3}{2}\beta(R^2 - r^2) - \frac{\Delta}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{r}{R} - \frac{R}{r}\right)\cos\theta \quad (3.124)$$

входит дополнительное слагаемое $\frac{3}{2}\beta(R^2 - r^2)$. В отличие от случая диссипативной связи, его вклад будет не нулевым, поскольку инерционная

связь по-разному возмущает орбиты первого и второго осцилляторов. Используя вытекающие из (3.98) соотношения

$$\begin{aligned} R &= 1 - \frac{\varepsilon}{2} \sin \theta + \dots, \\ r &= 1 + \frac{\varepsilon}{2} \sin \theta + \dots, \end{aligned} \quad (3.125)$$

получаем $\frac{3}{2}\beta(R^2 - r^2) = 3\beta \sin \theta$. Тогда получаем искомое фазовое уравнение

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\Delta}{2} - \chi\varepsilon \sin \theta - \frac{1}{2}\varepsilon^2 \sin(2\theta). \quad (3.126)$$

Здесь введено обозначение $\chi = 3\beta$ для параметра неизохронности.

Таким образом, в системе с реактивной связью влияние неизохронности представляет собой комбинированный эффект второго порядка. Связь возмущает орбиты, увеличивая одну из них, и уменьшая вторую. За счет наличия неизохронности один из осцилляторов начинает опережать другой, так что возникает изменение относительной фазы.

Совместное действие реактивной связи и неизохронности оказывается аналогичным диссипативной связи. Это формально видно из сопоставления уравнений (3.115) и (3.126). Обсудим этот факт подробнее. Пусть первый осциллятор опережает немного второй по фазе. Тогда относительная фаза осцилляторов невелика и положительна. В соответствии с (3.125) это означает, что орбита первого осциллятора немного меньше орбиты второго. В свою очередь, за счет такого изменения радиусов орбит при $\beta > 0$ скорость изменения фазы первого осциллятора уменьшится, а второго – увеличится. Это означает, что осцилляторы начнут сближаться по фазе. Полученный эффект эквивалентен действию диссипативной связи.

При изменении знака одного из параметров (неизохронности или реактивной связи) их совместное действие оказывается эквивалентным случаю активной связи с отрицательным значением параметра μ . Действительно, если параметр реактивной связи ε будет отрицателен, то увеличивает орбиту первый осциллятор и, соответственно, скорость изменения его фазы возрастает. В свою очередь, второй осциллятор уменьшает орбиту и начинает отставать по фазе. Осцилляторы начинают «расходиться» по фазе. Реализуется, своего рода, *отталкивающее* взаимодействие осцилляторов, которое эквивалентно случаю отрицательной диссипации или, как мы его назвали, активной связи. Аналогичная ситуация имеет место и при смене знака параметра неизохронности.

3.38. Язык синхронизации в системе с реактивной связью и неизохронностью. Выясните устройство языка синхронизации для осциллятора Ван-дер-Поля-Дуффинга в фазовом приближении.

Решение. В фазовом приближении система описывается уравнением (3.126). В этом случае имеем следующее уравнение для равновесия фазы:

$$\Delta + 2\chi\varepsilon \sin \theta + \varepsilon^2 \sin(2\theta) = 0. \quad (3.127)$$

Для поиска границ области синхронизации приравняем нулю производную по фазе:

$$\chi \cos \theta + \varepsilon \cos(2\theta) = 0. \quad (3.128)$$

Из (3.127), (3.128) получаем уравнение границы языка синхронизации в параметрической форме:

$$\begin{aligned} \Delta &= -2\chi\varepsilon \sin \theta - \varepsilon^2 \sin(2\theta), \\ \varepsilon &= -\frac{\chi \cos \theta}{\cos(2\theta)}. \end{aligned} \quad (3.129)$$

Соответствующий рисунок представлен на рис. 3.25. Введение неизохронности «исправляет» форму языка у его основания по сравнению с рис. 3.20. Действительно, при очень малых ε вторым членом в первом уравнении (3.129) можно пренебречь, и язык будет иметь традиционный вид с изломом $\varepsilon = \pm \frac{\Delta}{2\chi}$.

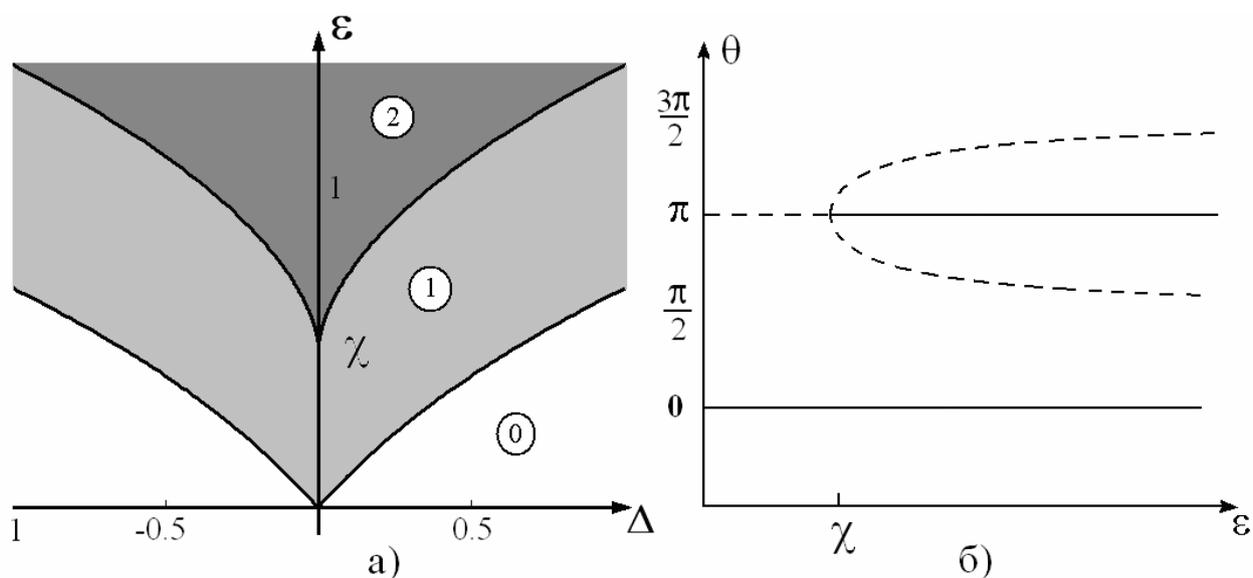


Рис. 3.25. Язык синхронизации в системе с реактивной связью и неизохронностью ($\chi=0.5$), темно серым цветом выделена область бистабильности, цифрами в кружочке показано число устойчивых состояний равновесия (а); бифуркационная диаграмма при пересечении языка по линии нулевой частотной расстройки $\Delta = 0$ (б).

Проанализируем бифуркации в системе для случая нулевой расстройки осцилляторов $\Delta = 0$. В этом случае первое уравнение (3.129) распадается на два:

$$\sin \theta = 0 \text{ и } \chi + \varepsilon \cos \theta = 0. \quad (3.130)$$

Из первого следует, что имеются два положения равновесия $\theta = 0$ и $\theta = \pi$, причем в соответствии с (3.126) при малых ε первое устойчиво, а второе неустойчиво. Из второго условия (3.130) следует, что при $\varepsilon = \chi$ в точке $\theta = \pi$ возникают еще два состояния равновесия, которые с ростом ε расходятся, стремясь в асимптотике к значениям $\theta = \frac{\pi}{2}$ и $\theta = \frac{3\pi}{2}$. Общая бифуркационная диаграмма показана на рис. 3.25, б. В соответствии с этим рисунком, при $\varepsilon = \chi$ наблюдается бифуркация вилка, в результате которой при $\varepsilon > \chi$ становится возможной фазовая бистабильность. Таким образом, неидентичность осцилляторов разрушает общую границу синхронизации бистабильных состояний – теперь у каждого из них она своя, рис. 3.25, а. При этом при $\varepsilon = \chi$ располагается точка сборки.

3.39. Осцилляторы Ван-дер-Поля-Дуффинга с реактивной связью. Карта динамических режимов. Постройте карту динамических режимов на плоскости частотная расстройка – величина связи для связанных осцилляторов Ван-дер-Поля-Дуффинга с реактивной связью в форме

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \beta x^3 + \varepsilon(x - y) &= 0, \\ \ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + (1 + \Delta)y + \beta y^3 + \varepsilon(x - y) &= 0. \end{aligned} \quad (3.131)$$

Решение. Соответствующая карта для значений параметров $\lambda = 2.5$, $\beta = 1$ показана на рис. 3.26. Сравнивая ее с рис. 3.21, заключаем, что введение неизохронности приводит к расширению высших языков синхронизации. Так на рис. 3.26 можно видеть языки с числами вращения 5:7, 2:3, 3:5 и т.д. При этом внутренняя структура языков не выявляется, не наблюдаются ни области удвоенного периода, ни хаоса. Такой характер динамики сохраняется и при очень большой неизохронности $\beta = 2.5$. В этом существенное отличие от случая диссипативной связи, см. задачу 3.16. Отметим также, что основание языка приобретает характерный вид «угла», а не острия в виде корневой особенности, что следует из предыдущей задачи. С другой стороны, метод карт динамических режимов не позволяет выявить «расслоение» языка на два листа, отвечающих синфазной и противофазной синхронизации – эти области накладываются друг на друга.

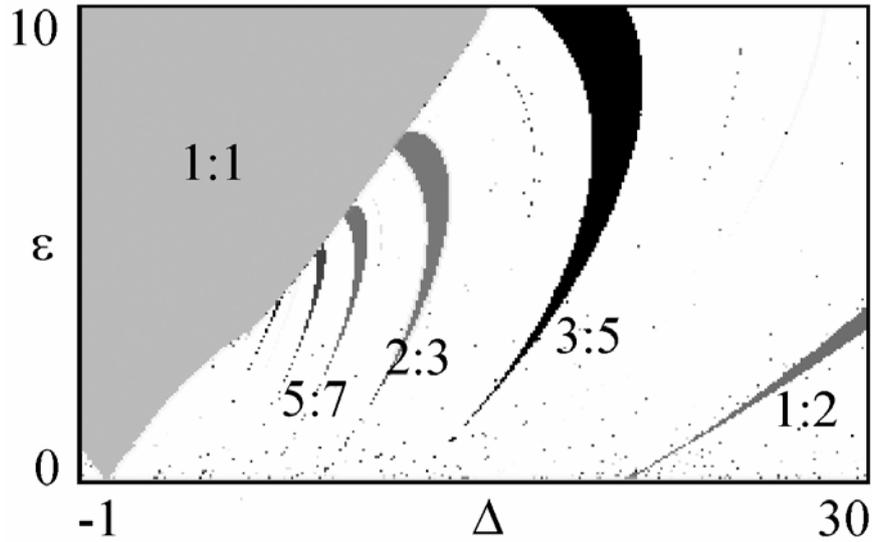


Рис. 3.26. Карта динамических режимов связанных осцилляторов Ван-дер-Поля-Дуффинга с реактивной связью (3.131), $\lambda = 2.5$, $\beta = 1$.

3.40. Обобщенное уравнение Адлера. Получите обобщенное уравнение Адлера, учитывающее комбинированный характер связи, неизохронность системы и малую идентичность по управляющим параметрам.

Решение. Исходные уравнения с учетом всех существенных факторов имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\lambda_1 - x^2)\dot{x} + x + \beta x^3 + \varepsilon(x - y) + \mu(\dot{x} - \dot{y}) &= 0, \\ \ddot{y} - (\lambda_2 - y^2)\dot{y} + (1 + \Delta)y + \beta y^3 + \varepsilon(y - x) + \mu(\dot{y} - \dot{x}) &= 0. \end{aligned} \quad (3.132)$$

Введем параметр неидентичности систем δ так, что $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 1 + 2\delta$. Действуя аналогично задачам 3.1 и 3.29 и используя нормировку (3.7) на управляющий параметр λ_2 , нетрудно получить для действительных амплитуд и фаз

$$\begin{aligned} 2 \frac{dR}{dt} &= (1 + 2\delta - \mu)R - R^3 + \mu r \cos \theta - \varepsilon r \sin \theta, \\ 2 \frac{dr}{dt} &= (1 - \mu)r - r^3 + \mu R \cos \theta + \varepsilon R \sin \theta, \\ \frac{d\theta}{dt} &= -\frac{\Delta}{2} + \frac{\chi}{2}(r^2 - R^2) + \varepsilon \left(\frac{r}{2R} - \frac{R}{2r} \right) \cos \theta - \mu \left(\frac{r}{2R} + \frac{R}{2r} \right) \sin \theta. \end{aligned} \quad (3.133)$$

Для возмущений \tilde{R} , \tilde{r} стационарных орбит $R = r = 1$ из первых двух уравнений получаем

$$\begin{aligned} \tilde{R} &= \frac{1}{2} [\mu(\cos \theta - 1) - \varepsilon \sin \theta + \delta], \\ \tilde{r} &= \frac{1}{2} [\mu(\cos \theta - 1) + \varepsilon \sin \theta - \delta]. \end{aligned} \quad (3.134)$$

Подставляя $R = 1 + \tilde{R}$ и $r = 1 + \tilde{r}$ в фазовое уравнение (3.133) с учетом (3.134), получаем

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\Delta + 2\chi\delta}{2} - (\mu + \chi\varepsilon) \sin \theta - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \sin(2\theta) - \varepsilon\delta \cos \theta. \quad (3.135)$$

Это обобщение уравнения Адлера на случай всех существенных факторов. Мы уже обсуждали влияние большинства факторов на картину синхронизации. Напомним, что диссипативная связь стремится синхронизовать осцилляторы в фазе, активная – в противофазе. Инерционная связь проявляется во втором порядке по величине связи, при этом для нее характерна фазовая бистабильность: возможность сосуществования устойчивого синфазного и противофазного режима. Остальные факторы проявляются только в комбинации с реактивной связью и являются эффектами второго порядка. При этом неизохронность приводит к притяжению или отталкиванию осцилляторов в зависимости от комбинации знаков соответствующих параметров.

Что касается неидентичности, то в данном приближении в отсутствие реактивной связи она не проявляется. В комбинации же с реактивной связью неидентичность дает еще один механизм синхронизации. Ей можно сопоставить эффективный потенциал

$$U(\theta) = \varepsilon\delta \sin \theta. \quad (3.136)$$

Он отвечает устойчивому режиму синхронизации со сдвигом фаз между вторым и первым осцилляторами на $\frac{3\pi}{2}$. Сдвигу фаз $\frac{\pi}{2}$ соответствует неустойчивое состояние равновесия. Смена знака связи или изменение знака добавки к управляющим параметрам меняет характер устойчивости этих состояний равновесия на противоположный. В неизохронной системе неидентичность также дает еще и аддитивную добавку к частотной расстройке: $\Delta + 2\chi\delta$.

Итак, в общем случае есть несколько механизмов, которые стремятся привести к синхронизации с разным фазовым сдвигом $\left(0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ между осцилляторами.

3.41. Симметрии обобщенного уравнения Адлера. Обсудите свойства симметрии обобщенного уравнения Адлера, которые возможны из-за периодичности уравнения по фазовой переменной.

Решение. Структура обобщенного уравнения Адлера такова, что при добавлении к реактивной связи того или иного дополнительного фактора,

возникает их эквивалентность из-за свойств периодичности фазы. Добавим, например, к реактивной связи неизохронность осцилляторов. Тогда из (3.135) имеем:

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\Delta}{2} - \chi\varepsilon \sin \theta - \frac{\varepsilon^2}{2} \sin(2\theta). \quad (3.137)$$

Возьмем теперь систему с реактивной связью с неидентичными осцилляторами:

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\Delta}{2} - \varepsilon\delta \cos \theta - \frac{1}{2}\varepsilon^2 \sin(2\theta). \quad (3.138)$$

Если выполнить в (3.138) замену переменной $\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$,

$$-\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{\Delta}{2} - \varepsilon\delta \sin \varphi - \frac{1}{2}\varepsilon^2 \sin(2\varphi), \quad (3.139)$$

и положить $\delta = \chi$, то (3.139) с точностью до знака производной от фазы совпадает с соотношением (3.137). Таким образом, в рассматриваемом приближении неидентичность осцилляторов по управляющим параметрам и неизохронность приводят к эквивалентной картине с точностью до сдвига фаз осцилляторов на $\frac{\pi}{2}$ и смене неустойчивых равновесий на устойчивые и наоборот. Соответственно, картина бифуркационных линий, определяющих вид областей синхронизации, в этих случаях оказывается эквивалентной и такой же, как на рис. 3.25 при замене $\chi \leftrightarrow \delta$.

В определенной мере, свойство симметрии применимо и к ситуации, когда к реактивной связи добавляется диссипативная:

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\Delta}{2} - \mu \sin \theta - \frac{1}{2}\varepsilon^2 \sin(2\theta). \quad (3.140)$$

При фиксированном уровне реактивной связи $\varepsilon = 1$ соотношение (3.140) совпадает с (3.137), если положить $\mu = \chi$. Картина будет аналогичной и при других значениях реактивной связи, необходимо только пересчитывать ее величину по определенному правилу. Действительно, если выполнить в уравнении (3.137) замены вида

$$\Delta \rightarrow \varepsilon^2 \Delta, \quad \varepsilon \rightarrow \varepsilon^2, \quad \chi \rightarrow \mu, \quad (3.141)$$

то оно с точностью до изменения масштаба времени на фактор ε^2 перейдет в (3.140).

С другой стороны, за счет требования перенормировки уровня реактивной связи (3.141), устройство языка синхронизации на плоскости (Δ, ε) в области $\varepsilon \rightarrow 0$ при добавлении фиксированной диссипативной компоненты или неизохронности оказывается различным, сравните рис. 3.24 и рис. 3.25, а.

3.42. Влияние неизохронности на неидентичную систему с реактивной связью. Покажите, что в системе с реактивной связью и неидентичными управляющими параметрами с ростом неизохронности происходит исчезновение области фазовой бистабильности. Укажите пороговое значение параметра неизохронности и тип бифуркации в этой точке.

Решение. В этом случае в обобщенном уравнении Адлера следует учитывать три члена. При этом эквивалентность между разными физическими факторами нарушится, потому что решения, отвечающие, например, сдвигу фазы на $\frac{\pi}{2}$, оказываются уже неэквивалентными. Уравнение для равновесия фазы выглядит следующим образом:

$$\Delta + 2\chi\delta + 2\chi\varepsilon \sin \theta + \varepsilon^2 \sin(2\theta) + 2\varepsilon\delta \cos \theta = 0. \quad (3.142)$$

Для поиска границ областей синхронизации приравниваем нулю производную по фазе:

$$\chi \cos \theta + \varepsilon \cos(2\theta) - \delta \sin \theta = 0. \quad (3.143)$$

Откуда

$$\delta = \frac{\varepsilon \cos(2\theta) + \chi \cos \theta}{\sin \theta}. \quad (3.144)$$

Соотношения (3.142), (3.144) задают в параметрической форме границы области синхронизации на плоскости (Δ, δ) . Их вид и характерные перестройки при вариации параметра неизохронности χ при фиксированном уровне реактивной связи $\varepsilon = 0.5$ показаны на рис. 3.27. На этом рисунке серым цветом выделена только область бистабильности, чтобы было более удобно следить за ее трансформациями.

Из рисунка хорошо видно, что с ростом неизохронности χ язык становится асимметричным (рис. 3.27, б). Две ветви линий складок сближаются и при $\chi = 0.5$ сливаются (рис. 3.27, в), так что от начала координат отделяются две новые сборки, которые затем постепенно расходятся (рис. 3.27, г). Соответствующая перестройка в терминах теории катастроф называется «клюв к клюву». (См. в этом контексте характерное расположение двух наиболее близких сборок на рис. 3.27, г.) Ее пороговое значение может быть найдено из тех соображений, что при $\delta = 0$ сливаются и исчезают две точки пересечения линий складок с осью Δ . Поэтому, полагая в (3.143) $\delta = 0$, получаем

$$\varepsilon \cos(2\theta) = -\chi \cos \theta. \quad (3.145)$$

Условие исчезновения корней, очевидно, $\cos \theta = \pm 1$, тогда получаем $\chi = \pm \varepsilon$, что находится в соответствии с рис. 3.27, в.

Далее, одна «новая» и одна «старая» сборки попарно образуют на рис. 3.27, *г-д* характерные конфигурации, известные в теории катастроф как «ласточкин хвост». Входящие в них точки сборки, в свою очередь, с ростом параметра неизохронности сближаются, сливаются и исчезают, рис. 3.27, *г-е*. Соответствующую бифуркационную ситуацию коразмерности три ищем, приравнявая в дополнение к (3.143) нулю вторую и третью производные по θ :

$$\begin{aligned} \chi \sin \theta + 2\varepsilon \sin(2\theta) + \delta \cos \theta &= 0, \\ \chi \cos \theta + 4\varepsilon \cos(2\theta) - \delta \sin \theta &= 0. \end{aligned} \quad (3.146)$$

Из соотношений (3.143), (3.146) после некоторых преобразований, получаем

$$\chi = \mp \sqrt{2\varepsilon}, \quad \Delta = \mp \frac{\chi^2}{2}, \quad \delta = \pm \chi. \quad (3.147)$$

Таким образом, пороговое значение параметра неизохронности $\chi = \mp \sqrt{2\varepsilon}$. При $\varepsilon = 0.5$ это дает $\chi = \mp 0.707\dots$, что находится в соответствии с рис. 3.27, *д-е*. Можно видеть, что перестройка ласточкин хвост при $\chi = \mp \sqrt{2\varepsilon}$ и приводит к исчезновению области бистабильности.

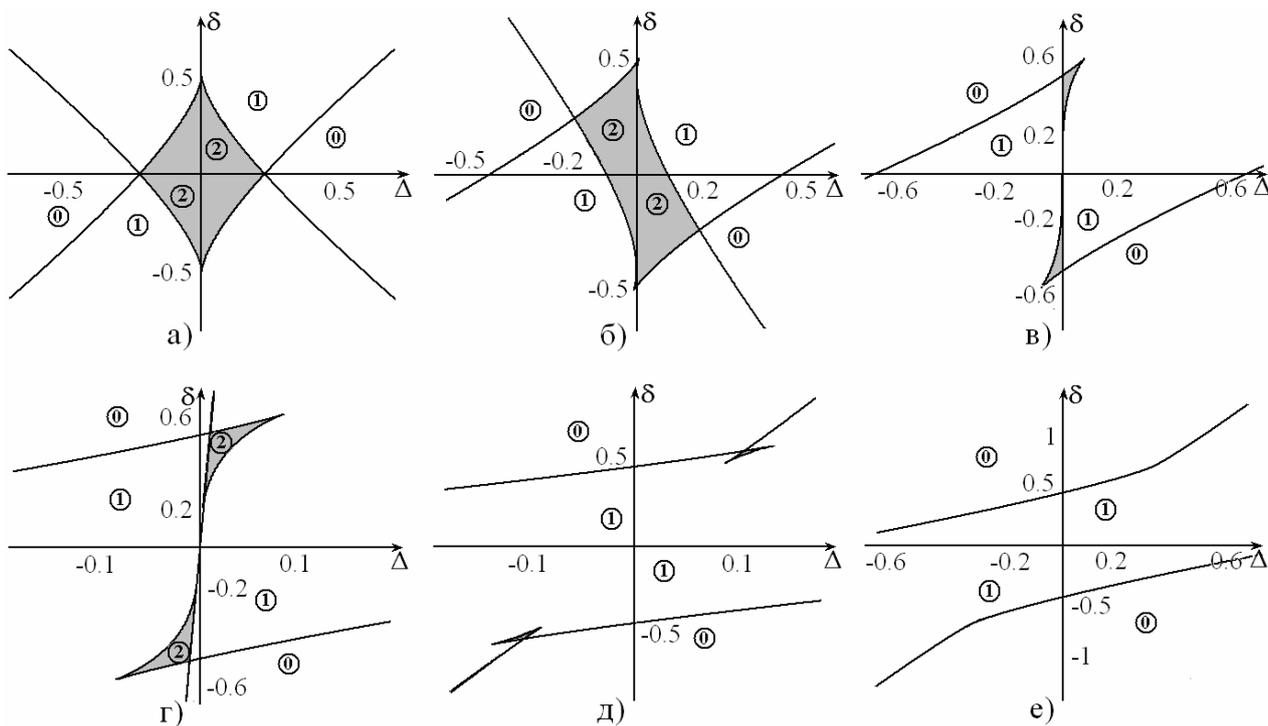


Рис. 3.27. Исчезновение области бистабильности в результате катастрофы ласточкин хвост в системе с реактивной связью в присутствии неидентичности и неизохронности на плоскости параметров (Δ, δ) . Параметр реактивной связи $\varepsilon = 0.5$. Параметр неизохронности: $\chi = 0$ (а); $\chi = 0.25$ (б); $\chi = 0.5$ (в); $\chi = 0.51$ (г); $\chi = 0.6$ (д); $\chi = 0.75$ (е).

Связанные автоколебательные осцилляторы разной природы

3.43. Связанные автоколебательные осцилляторы Ван-дер-Поля и брюсселятор. Характер связи. Покажите, что эмпирическое введение связи между брюсселятором и осциллятором Ван-дер-Поля через первую переменную брюсселятора

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= a - (b+1)x + x^2 y + \mu \left(\frac{dz}{dt} - x + a \right), \\ \frac{dy}{dt} &= bx - x^2 y, \\ \frac{d^2 z}{dt^2} - (\lambda - z^2) \frac{dz}{dt} + (1 + \delta)z &= \mu \left(x - a - \frac{dz}{dt} \right)\end{aligned}\tag{3.148}$$

приводит к возникновению и диссипативной, и реактивной компоненты связи.

Решение. Введение связи между разнотипными моделями автоколебательных систем представляется априорно нетривиальной задачей. Действительно, переменные разных осцилляторов имеют разный смысл. Поэтому если связь вводить эмпирически, то она, скорее всего, будет иметь как диссипативную компоненту, так и реактивную, и, возможно, будет асимметричной. Чтобы выяснить характер связи, воспользуемся линейным приближением, описывающим динамику вблизи состояния равновесия. Автономный брюсселятор имеет неподвижную точку²⁶:

$$x_0 = a, \quad y_0 = \frac{b}{a}.\tag{3.149}$$

Рассмотрим динамику малых возмущений вблизи этой точки, положив

$$x = a + \xi, \quad y = \frac{b}{a} + \eta.\tag{3.150}$$

Подставим соотношения (3.150) в (3.148) и, пренебрегая членами второго порядка по возмущениям, после некоторых преобразований получим

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{dt} &= (b-1)\xi + a^2\eta + \mu \left(\frac{dz}{dt} - \xi \right), \\ \frac{d\eta}{dt} &= -b\xi - a^2\eta, \\ \frac{d^2 z}{dt^2} - (\lambda - z^2) \frac{dz}{dt} + (1 + \Delta)z + \mu \left(\frac{dz}{dt} - \xi \right) &= 0.\end{aligned}\tag{3.151}$$

²⁶ Неподвижная точка брюсселятора не совпадает с началом координат. Поэтому связь в системе (3.148) организована так, чтобы она реагировала на отклонение переменной брюсселятора от состояния равновесия.

Введем теперь новую переменную θ так, что $\xi = \frac{d\theta}{dt}$. Тогда из первого уравнения (3.151) получаем

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} - (b-1)\frac{d\theta}{dt} - a^2\eta + \mu\left(\frac{d\theta}{dt} - \frac{dz}{dt}\right) = 0. \quad (3.152)$$

Проинтегрируем теперь второе уравнение (3.151):

$$\eta = -b\theta - a^2 \int \eta dt. \quad (3.153)$$

Аналогично, интегрируя (3.152), находим

$$\frac{d\theta}{dt} + (1-b)\theta - a^2 \int \eta dt + \mu(\theta - z). \quad (3.154)$$

Если из (3.153) и (3.154) исключить $\int \eta dt$, то получим

$$\eta = -\frac{d\theta}{dt} - \theta - \mu(\theta - z). \quad (3.155)$$

Подставляем этот результат в (3.152). Тогда совместно с третьим уравнением (3.151) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\theta}{dt^2} - (b - a^2 - 1)\frac{d\theta}{dt} + a^2\theta + \mu\left(\frac{d\theta}{dt} - \frac{dz}{dt}\right) + a^2\mu(\theta - z) &= 0, \\ \frac{d^2z}{dt^2} - (\lambda - z^2)\frac{dz}{dt} + (1 + \Delta)z + \mu\left(\frac{dz}{dt} - \frac{d\theta}{dt}\right) &= 0. \end{aligned} \quad (3.156)$$

Таким образом, мы получили два связанных осциллятора. Первый из них – линейризованный брюсселятор. Как видно из (3.156), для него возможность бифуркации Андронова-Хопфа определяется фактором

$$\Lambda = b - a^2 - 1, \quad (3.157)$$

а частота колебаний – параметром a^{27} . При этом связь имеет взаимную диссипативную компоненту, регулируемую параметром μ . Имеется также и инерционная односторонняя компонента связи, отвечающая воздействию осциллятора Ван-дер-Поля на брюсселятор.

3.44. Карта режимов связанных брюсселятора и осциллятора Ван-дер-Поля. Постройте карту режимов системы (3.148) на плоскости (Δ, μ) при $b = 4$, $a = 1$, $\lambda = 1.5$ и обсудите ее устройство с точки зрения доминирования разных осцилляторов. Оцените степень возбуждения брюсселятора по формуле (3.157) и сравните ее с полученными численно результатами.

Решение. Карта динамических режимов системы (3.148) показана на рис. 3.28, а. При построении этого рисунка сечение Пуанкаре выбиралось по

²⁷ Эти оценки, однако, справедливы только вблизи порога бифуркации Андронова-Хопфа.

осциллятору Ван-дер-Поля (условие $\dot{z} = 0$).

Прежде всего отметим, что в системе наблюдается эффект гибели колебаний, что обусловлено диссипативной компонентой связи. При выбранных значениях параметров $b=4$, $a=1$ в соответствии с (3.157) $\Lambda = 2$, так что в линейном приближении брусселятор является более возбужденным, нежели осциллятор Ван-дер-Поля. В рамках этой оценки нижняя граница области гибели колебаний должна отвечать величине диссипативной составляющей связи $\mu \approx \Lambda = 2$, что хорошо согласуется с рис. 3.28, а.

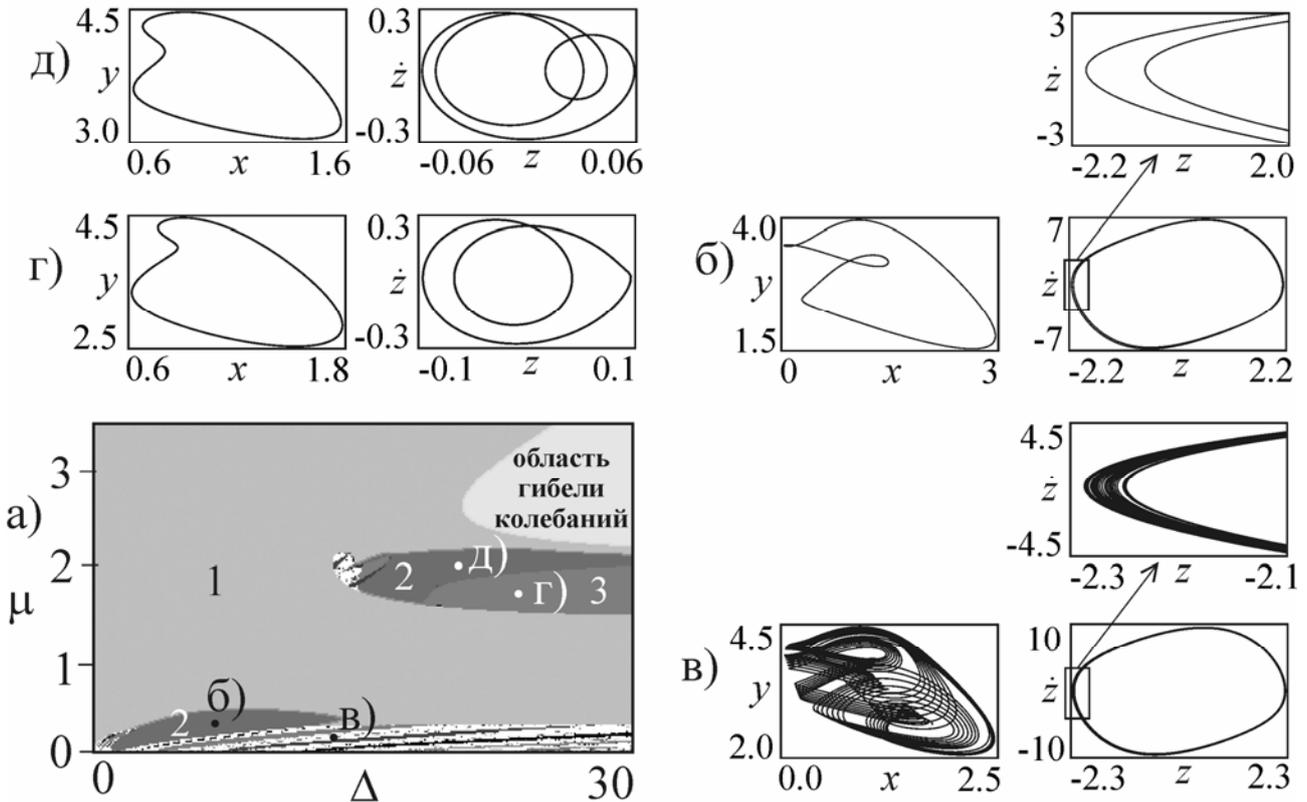


Рис. 3.28. Карта динамических режимов системы связанных осциллятора Ван-дер-Поля и брусселятора и характерные фазовые портреты для $b = 4$, $a = 1$, $\lambda = 1.5$.

В области малой связи наблюдаются квазипериодические режимы с системой языков Арнольда, самый широкий из которых имеет период 2. На фазовом портрете брусселятора хорошо проявляются возмущения, определяющие характер режима: периода 2 на рис. 3.28, б и квазипериодического – на рис. 3.28, в. В последнем случае возмущение очень сильное, оно полностью разрушает исходный предельный цикл брусселятора. При этом осциллятор Ван-дер-Поля возмущен очень слабо, и его фазовый портрет на рис. 3.28, б, в выглядит невозмущенным. Однако если рассмотреть его с существенным увеличением, то можно зафиксировать структуру, характерную для режима периода 2 и квазипериодического режима. Следовательно, в области малых связей доминирует осциллятор Ван-дер-Поля,

хотя брюсселятор является более возбужденным ($\Lambda = 2$, $\lambda = 1.5$). Таким образом, наблюдаемую картину нельзя объяснить только на основе различий управляющих параметров λ и Λ , оказывается, что существенную роль играют различие в размерах предельных циклов автономных «разнотипных» осцилляторов.

Область синхронизации периода 1 на рис. 3.28 имеет вид языка с характерным, очень широким по связи «отростком». Верхняя его граница отвечает условию равенства величины связи управляющему параметру осциллятора Ван-дер-Поля $\mu \approx \lambda$, так что выше нее этот осциллятор становится сильно диссипативным. При этом наблюдается еще одна система областей синхронизации более высоких периодов. Несколько отвечающих ей фазовых портретов показаны на рис. 3.28, *з*, *д*. Теперь слабо возмущенным выглядит фазовый портрет брюсселятора. Фазовый портрет осциллятора Ван-дер-Поля, наоборот, становится сильно возмущенным и представляет собой двухоборотный предельный цикл на рис. 3.28, *з*. При этом размер предельного цикла осциллятора Ван-дер-Поля резко падает (примерно в 30 раз при переходе от рис. 3.28, *в* к рис. 3.28, *з*). Если теперь увеличить частоту осциллятора Ван-дер-Поля, т.е. параметр Δ , то можно наблюдать увеличение числа петель на фазовом портрете осциллятора Ван-дер-Поля на рис. 3.28, *д*, что характерно для динамики ведомого осциллятора. Таким образом, в этой области, действительно, доминирует брюсселятор.

Таким образом, в данной системе возможна смена доминирующего осциллятора: в области малых значений связи доминирует осциллятор Ван-дер-Поля, а больших – брюсселятор.

Описанная картина на качественном уровне подобна картине синхронизации, характерной для неидентичных по управляющим параметрам и параметрам нелинейной диссипации осцилляторов Ван-дер-Поля. Это не удивительно: если системы разнотипны, то добиться ситуации с идентичными параметрами можно только каким-то их специальным выбором, который требует, как минимум, приведение к нормальной форме бифуркации Андронова-Хопфа. При этом не очевидно, что при отклонении от порога этой бифуркации, картина не модифицируется. Таким образом, режимы широкополосной синхронизации с характерными особенностями устройства плоскости параметров будут типичными для разнотипных систем.

3.45. Связанные автоколебательные осцилляторы с существенно разными временными масштабами. Постройте карту режимов связанных брюсселятора и осциллятора Ван-дер-Поля (3.148) и обсудите характерные

колебательные режимы в системе при $b = 3$, $a = 0.4$, $\lambda = 1.16$. Для иллюстрации наблюдаемых режимов используйте фазовые портреты, вид реализаций, а также фазовые портреты в трехмерном пространстве.

Решение. При решении задачи 3.44 был рассмотрен случай, когда второй параметр брюсселятора $a = 1$, что примерно отвечает равенству его собственной частоты и частоты осциллятора Ван-дер-Поля при нулевой расстройке. Если уменьшить этот параметр до значения $a = 0.4$, то собственные частоты подсистем будут сильно разнесены, частота брюсселятора заметно уменьшится, так что осциллятор Ван-дер-Поля будет «вращаться» существенно быстрее. Этот факт сказывается заметным образом как на фазовых портретах, так и на карте режимов, приведенных на рис. 3.29. Теперь область «гибели колебаний» окружена достаточно широкой полосой режимов, которые на карте фиксируются как неперiodические. В этой области реализуются весьма характерные фазовые портреты. Изображающая точка на фазовом портрете осциллятора Ван-дер-Поля быстро вращается вокруг начала координат и очень медленно приближается к нему, рис. 3.29, в. Эта стадия эволюции напоминает режим гибели колебаний. Однако, когда изображающая точка, совершив большое число оборотов, подходит к началу координат, она резко выбрасывается, и затем процесс повторяется. Возникает, своего рода, режим «пульсирующей генерации», который иллюстрирует показанная на рис. 3.30 зависимость переменной осциллятора Ван-дер-Поля от времени.

Фазовый портрет соответствующего режима для брюсселятора представлен слева на рис. 3.29, б. Медленное движение брюсселятора происходит в окрестности неподвижной точки $x_0 = a = 0.4$ с малой амплитудой $|x| \leq 0.5$. Это значит, что брюсселятор слабо возмущает осциллятор Ван-дер-Поля, который при данной величине параметра μ оказывается слабо диссипативным ($\lambda < \mu$), поэтому он и совершает колебания с медленно убывающей амплитудой. Когда эта фаза колебаний брюсселятора заканчивается, его изображающая точка уходит от $x = x_0$, и начинается быстрая стадия, которая существенно возмущает осциллятор Ван-дер-Поля.

На рис. 3.31 показаны трехмерные фазовые портреты осцилляторов, на которых пара фазовых переменных каждого автономного осциллятора дополнена переменной другого. Из соответствующего портрета осциллятора Ван-дер-Поля рис. 3.31, б можно видеть, что режим пульсирующей генерации отвечает (по крайней мере, на качественном уровне) ситуации разрушения гомоклинической петли.

Вернемся к карте на рис. 3.29. При малой частотной расстройке Δ реализуется режим синхронизации периода 2, который хорошо определяется как по осциллятору Ван-дер-Поля, так и по брюсселятору, рис. 3.29, б. Это и понятно: в этом случае частота брюсселятора примерно в 2 раза меньше частоты осциллятора Ван-дер-Поля. При заметном увеличении или уменьшении связи наблюдаются удвоения периода с рождением режима синхронизации периода 4. В области малой связи и малых частотных расстройок можно видеть систему языков синхронизации разных периодов.

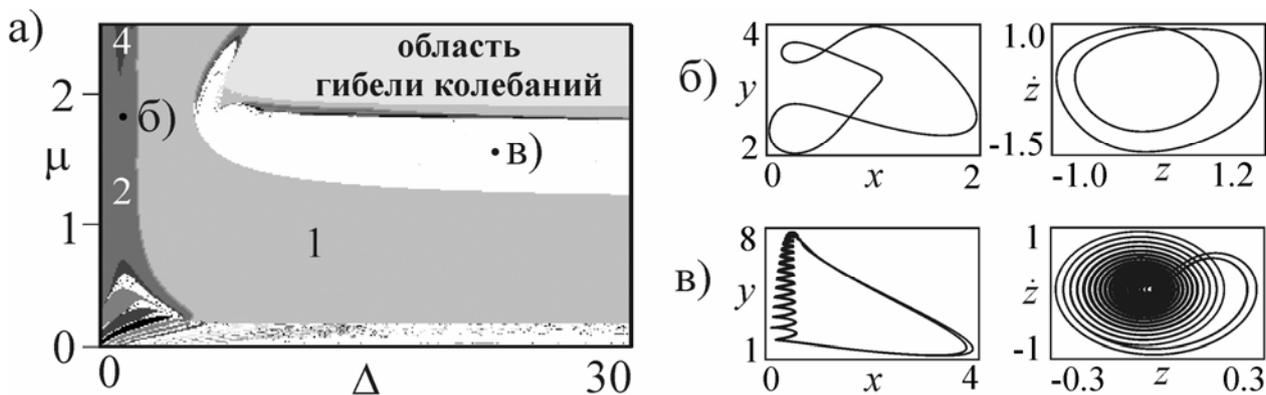


Рис. 3.29. Карта динамических режимов системы (3.148) и характерные фазовые портреты при $b = 3$, $a = 0.4$, $\lambda = 1.16$. Сечение Пуанкаре отвечает осциллятору Ван-дер-Поля.

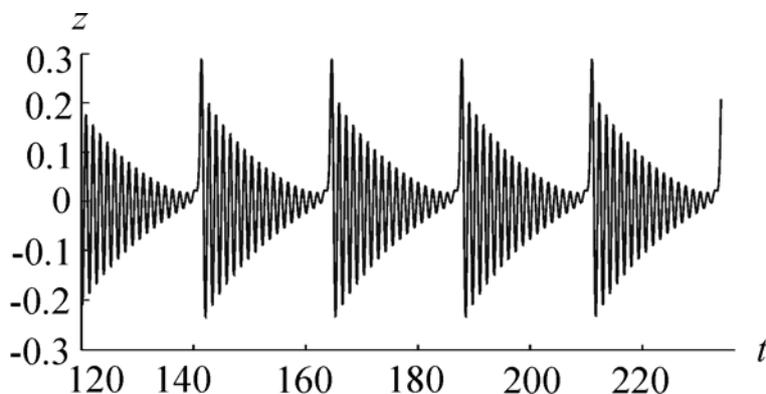


Рис. 3.30. Временная реализация осциллятора Ван-дер-Поля в режиме «пульсирующей генерации». Параметры отвечают рис. 3.29, в.

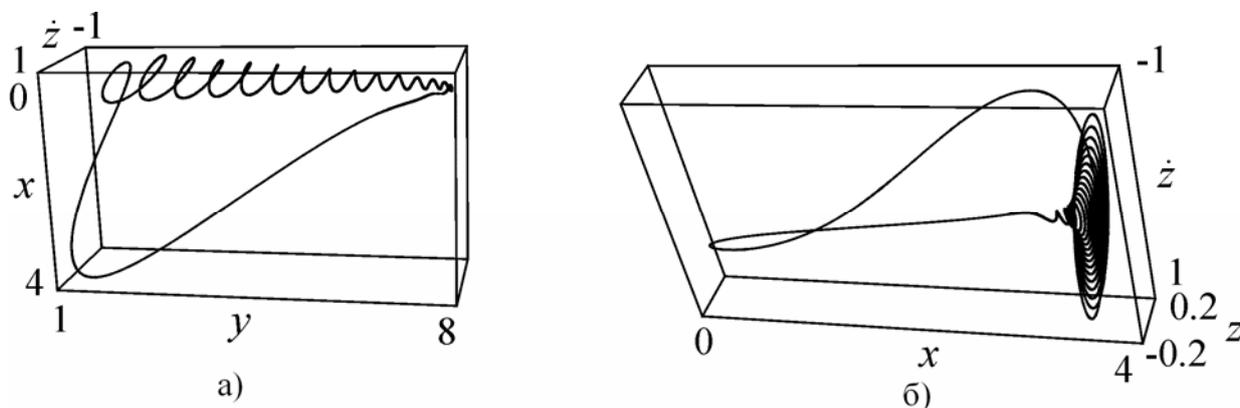
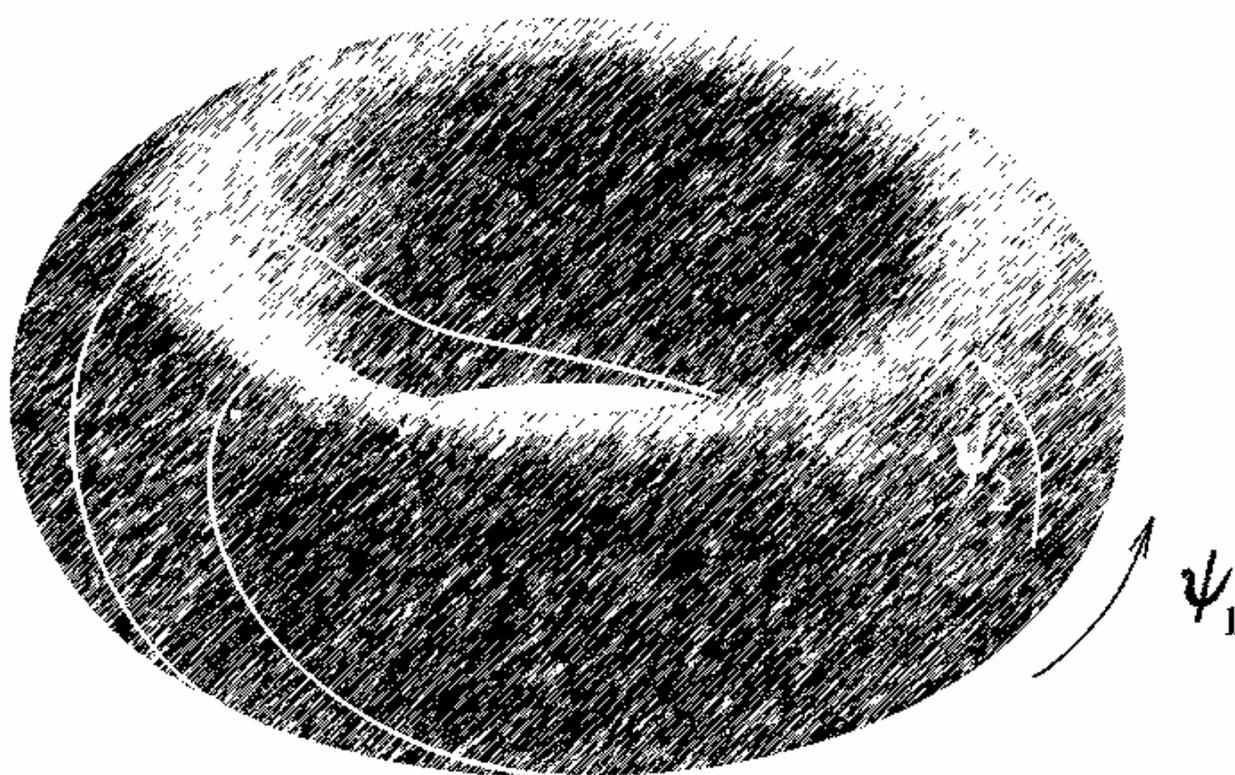


Рис. 3.31. Трехмерные фазовые портреты связанных брюсселятора (а) и осциллятора Ван-дер-Поля (б). Значения параметров отвечают рис. 3.29, в.

Часть IV

СИНХРОНИЗАЦИЯ МНОГОЧАСТОТНЫХ КОЛЕБАНИЙ



Взаимная синхронизация многочастотных колебаний

4.1. Укороченные и фазовые уравнения трех диссипативно связанных автоколебательных осцилляторов. Получите укороченные и фазовые уравнения для трех диссипативно связанных осцилляторов Ван-дер-Поля, связанных в цепочку, как показано на рис. 4.1.

Решение. Система дифференциальных уравнений, описывающая показанную на рис. 4.1 цепочку из трех диссипативно связанных осцилляторов Ван-дер-Поля, имеет вид:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \mu(\dot{x} - \dot{y}) &= 0, \\ \ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + (1 + \Delta_1)y + \mu(\dot{y} - \dot{x}) + \mu(\dot{y} - \dot{z}) &= 0, \\ \ddot{z} - (\lambda - z^2)\dot{z} + (1 + \Delta_2)z + \mu(\dot{z} - \dot{y}) &= 0. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь λ – параметр возбуждения автономных осцилляторов, Δ_1 – частотная расстройка второго осциллятора относительно первого, Δ_2 – третьего относительно первого, μ – коэффициент диссипативной связи. Частота первого осциллятора принята за единицу.

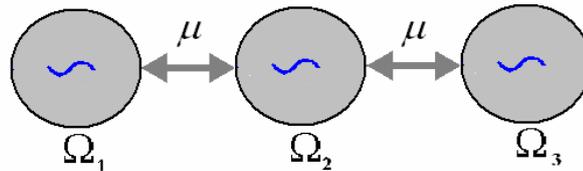


Рис. 4.1. Схематическое изображение трех связанных автоколебательных осцилляторов.

Если параметр возбуждения λ мал, а также малы частотные расстройки и величина связи, то для анализа уравнений (4.1) можно применить метод медленно меняющихся амплитуд. С этой целью представим динамические переменные в виде

$$x = ae^{it} + a^* e^{-it}, \quad y = be^{it} + b^* e^{-it}, \quad z = ce^{it} + c^* e^{-it}. \quad (4.2)$$

Здесь $a(t)$, $b(t)$ и $c(t)$ – комплексные амплитуды осцилляторов, которые являются медленно меняющимися на фоне колебаний с единичной частотой.

Наложим традиционные дополнительные условия:

$$\dot{a}e^{it} + \dot{a}^* e^{-it} = 0, \quad \dot{b}e^{it} + \dot{b}^* e^{-it} = 0, \quad \dot{c}e^{it} + \dot{c}^* e^{-it} = 0. \quad (4.3)$$

Тогда имеем следующие выражения для скоростей осцилляторов:

$$\dot{x} = i(ae^{it} - a^* e^{-it}), \quad \dot{y} = i(be^{it} - b^* e^{-it}), \quad \dot{z} = i(ce^{it} - c^* e^{-it}). \quad (4.4)$$

Подставим соотношения (4.2)-(4.4) в уравнения (4.1), умножим полученные выражения на e^{-it} и проведем усреднение для исключения быстро

осциллирующих членов. После соответствующих преобразований приходим к следующим укороченным уравнениям:

$$\begin{aligned} 2\dot{a} &= \lambda a - |a|^2 a - \mu(a - b), \\ 2\dot{b} &= \lambda b - |b|^2 b + i\Delta_1 b - \mu_1(b - a) - \mu(b - c), \\ 2\dot{c} &= \lambda c - |c|^2 c + i\Delta_2 - \mu(c - b). \end{aligned} \quad (4.5)$$

В полученных уравнениях управляющий параметр λ можно убрать перенормировкой переменных и параметров:

$$a = \sqrt{\lambda}\bar{a}, \quad b = \sqrt{\lambda}\bar{b}, \quad c = \sqrt{\lambda}\bar{c}, \quad t = \bar{t}/\lambda, \quad \mu = \lambda\bar{\mu}, \quad \Delta_{1,2} = \lambda\bar{\Delta}_{1,2}. \quad (4.6)$$

Будем считать такую перенормировку выполненной, а для сокращения записи черту над нормированными величинами будем опускать. Теперь новые отнормированные параметры можно считать уже не малыми.

Положим далее $a = R e^{i\psi_1}$, $b = r e^{i\psi_2}$ и $c = v e^{i\psi_3}$, где R, r, v – действительные амплитуды, а $\psi_{1,2,3}$ – фазы осцилляторов. Тогда получаем

$$\begin{aligned} 2\dot{R} &= R - R^3 + \mu(r \cos(\psi_2 - \psi_1) - R), \\ 2\dot{r} &= r - r^3 + \mu(R \cos(\psi_1 - \psi_2) + v \cos(\psi_3 - \psi_2) - 2r), \\ 2\dot{v} &= v - v^3 + \mu(v \cos(\psi_2 - \psi_3) - r), \\ \dot{\psi}_1 &= \frac{r}{2R} \mu \sin(\psi_2 - \psi_1), \\ \dot{\psi}_2 &= \frac{\Delta_1}{2} + \frac{R}{2r} \mu \sin(\psi_1 - \psi_2) + \frac{v}{2r} \mu \sin(\psi_3 - \psi_2), \\ \dot{\psi}_3 &= \frac{\Delta_2}{2} + \frac{r}{2v} \mu \sin(\psi_2 - \psi_3). \end{aligned} \quad (4.7)$$

В уравнениях для фаз в (4.7), как и при решении задачи 3.3, считаем, что осцилляторы движутся в окрестностях стационарных невозмущенных орбит $R = r = v = 1$. Тогда получаем:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= \frac{\mu}{2} \sin(\psi_2 - \psi_1), \\ \dot{\psi}_2 &= \frac{\Delta_1}{2} + \frac{\mu}{2} \sin(\psi_1 - \psi_2) + \frac{\mu}{2} \sin(\psi_3 - \psi_2), \\ \dot{\psi}_3 &= \frac{\Delta_2}{2} + \frac{\mu}{2} \sin(\psi_2 - \psi_3). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Размерность системы (4.8) может быть понижена на единицу, если ввести относительные фазы осцилляторов

$$\theta = \psi_1 - \psi_2, \quad \varphi = \psi_2 - \psi_3. \quad (4.9)$$

Тогда получаем

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= -\frac{\Delta_1}{2} - \mu \sin \theta + \frac{\mu}{2} \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} &= \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{2} - \mu \sin \varphi + \frac{\mu}{2} \sin \theta.\end{aligned}\tag{4.10}$$

Это и есть фазовые уравнения, описывающие взаимодействие трех взаимно диссипативно связанных автоколебательных осцилляторов.

4.2. Предельные переходы в фазовых уравнениях трех связанных осцилляторов. Рассмотрите ситуации в системе трех осцилляторов (4.10), когда выключена связь между вторым-третьим и первым-вторым осцилляторами в цепочке. Найдите соответствующие собственные частоты для подсистем, на которые распадается в этом случае цепочка.

Решение. Выключим связь между вторым и третьим осцилляторами. Тогда вместо уравнений (4.10) будем иметь одно уравнение для относительной фазы первого и второго осцилляторов:

$$\dot{\theta} = -\frac{\Delta_1}{2} - \mu \sin \theta.\tag{4.11}$$

Это классическое уравнение Адлера, которое описывает возможность двух режимов колебаний: захвата относительной фазы при $|\Delta_1| < 2\mu$, и режима биений при $|\Delta_1| > 2\mu$ (задача 3.4). На плоскости параметров частотная расстройка – величина связи (Δ_1, μ) указанным режимам отвечают области внутри и вне языка Арнольда, рис. 4.2. Основание языка расположено в точке $\Delta_1 = 0$, что отвечает резонансному условию в системе, когда собственные частоты первого и второго осциллятора совпадают.

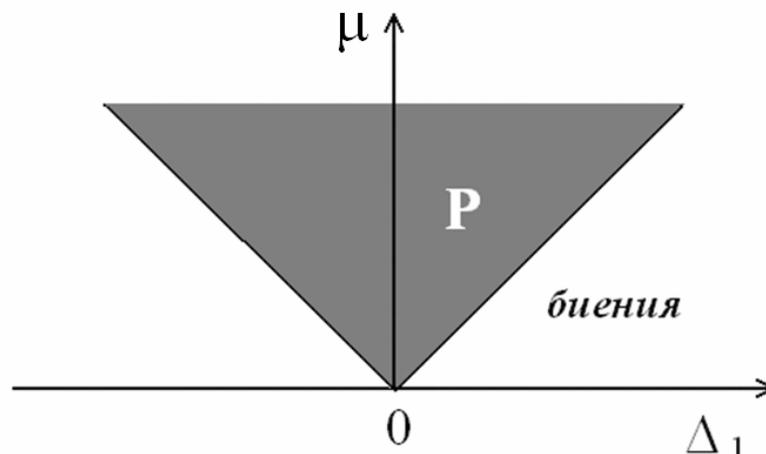


Рис. 4.2. Области захвата P (темно серый цвет) и биений (белый цвет) двух диссипативно связанных осцилляторов.

Аналогично, если оставить связь только между вторым и третьим осцилляторами, то приходим к режиму их захвата при $|\Delta_2 - \Delta_1| < 2\mu$ и режиму биений при противоположном условии.

Приведем сводку основных характерных частот в безразмерной форме в принятых обозначениях. Так собственные частоты отдельных осцилляторов $\Omega_i = \dot{\psi}_i$ можно найти из фазовых уравнений (4.8), если положить равной нулю величину связи:

$$\Omega_1 = 0, \quad \Omega_2 = \frac{\Delta_1}{2}, \quad \Omega_3 = \frac{\Delta_2}{2}. \quad (4.13)$$

В соответствии с решением задачи 3.5, два осциллятора захватываются на их центральной частоте. Поэтому частоты захвата пар осцилляторов при выключенной связи с третьим даются соотношениями

$$\Omega_{1-2} = \frac{\Delta_1}{4}, \quad \Omega_{2-3} = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{4}. \quad (4.14)$$

4.3. Частота захвата трех автоколебательных осцилляторов. Покажите, что три диссипативно связанных фазовых осциллятора захватываются на частоте, равной среднему арифметическому их собственных частот.

Решение. Если все осцилляторы захвачены, то скорости изменения их относительных фаз равны нулю, т.е. $\dot{\theta} = 0$ и $\dot{\varphi} = 0$. Тогда из (4.10) можно получить следующие выражения для синусов относительных фаз:

$$\begin{aligned} \mu \sin \theta &= -\frac{\Delta_1 + \Delta_2}{3}, \\ \mu \sin \varphi &= \frac{\Delta_1 - 2\Delta_2}{3}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Подставляя (4.15) в каждое из уравнений (4.8), получаем для скоростей изменения фаз каждого осциллятора:

$$\Omega_{1-2-3} = \dot{\psi}_1 = \dot{\psi}_2 = \dot{\psi}_3 = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{6}. \quad (4.16)$$

Общая скорость изменения фаз (4.16) и есть частота захвата осцилляторов. Используя выражения для собственных частот первого, второго и третьего осцилляторов (4.13), получаем

$$\Omega_{1-2-3} = \frac{\Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3}{3}. \quad (4.17)$$

Таким образом, три осциллятора захватываются на общей центральной частоте.

Полезно привести аналогичное соотношение в размерной форме. В соответствии с (4.1) собственные частоты осцилляторов

$$\omega_1 = 1, \quad \omega_2 = \sqrt{1 + \Delta_1} \approx 1 + \frac{\Delta_1}{2}, \quad \omega_3 = \sqrt{1 + \Delta_2} \approx 1 + \frac{\Delta_2}{2}. \quad (4.18)$$

Следовательно, с учетом единичной добавки к частоте в соответствии с определением медленных амплитуд (4.2) в размерной форме получаем:

$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3}{3}. \quad (4.19)$$

4.4. Типы колебаний трех связанных фазовых осцилляторов. Постройте фазовые портреты системы трех связанных осцилляторов (4.10) на плоскости относительных фаз (θ, φ) . Обсудите характер решений во всех случаях, а также характер наблюдаемых режимов с точки зрения динамики исходной системы (4.1). Значения параметров: а) $\Delta_1 = 0.5$, $\mu = 0.75$, б) $\Delta_1 = -0.25$, $\mu = 0.25$, в) $\Delta_1 = 0.75$, $\mu = 0.25$, г) $\Delta_1 = -1$, $\mu = 0.25$. Вторая частотная расстройка фиксирована $\Delta_2 = 1$.

Решение. Соответствующие фазовые портреты на плоскости относительных фаз осцилляторов (θ, φ) приведены на рис. 4.3. Отметим, что переменные θ и φ являются фазами осцилляторов, и поэтому их динамику можно рассматривать на «фазовом квадрате» $0 < \theta < 2\pi$, $0 < \varphi < 2\pi$. При этом, если фазовая траектория уходит, например, через правую сторону этого квадрата, то она появляется в соответствующей точке на его левой стороне. Аналогично, для верхней и нижней границ.

Обратимся к фазовым портретам на рис. 4.3. В случае а) система фазовых уравнений (4.10) имеет четыре неподвижные точки, из которых две являются седлами, одна – неустойчивым узлом, а еще одна – устойчивым узлом. Таким образом, с течением времени относительные фазы осцилляторов будут стремиться к устойчивому равновесию, так что после переходного процесса установятся значения $\theta = const$, $\varphi = const$. В соответствии с определением относительных фаз $\theta = \psi_1 - \psi_2$, $\varphi = \psi_2 - \psi_3$ это означает, что скорости изменения фаз каждого осциллятора $\dot{\psi}_i$ будут постоянными величинами, причем все они равны друг другу и отвечают частоте захвата трех осцилляторов (4.16).

В соответствии с определением медленных амплитуд (4.2) и (4.6), обобщенные координаты осцилляторов изменяются во времени по закону

$$\begin{aligned}
 x(t) &= 2\sqrt{\lambda}R(t)\cos[t + \psi_1(t)], \\
 y(t) &= 2\sqrt{\lambda}r(t)\cos[t + \psi_2(t)], \\
 z(t) &= 2\sqrt{\lambda}v(t)\cos[t + \psi_3(t)].
 \end{aligned}
 \tag{4.20}$$

Поэтому режимы с постоянными скоростями изменения фаз каждого осциллятора в терминах исходной системы отвечают колебаниям с постоянной частотой, равной среднему арифметическому собственным частот трех осцилляторов. Такой режим будем называть режимом *полной синхронизации* осцилляторов.

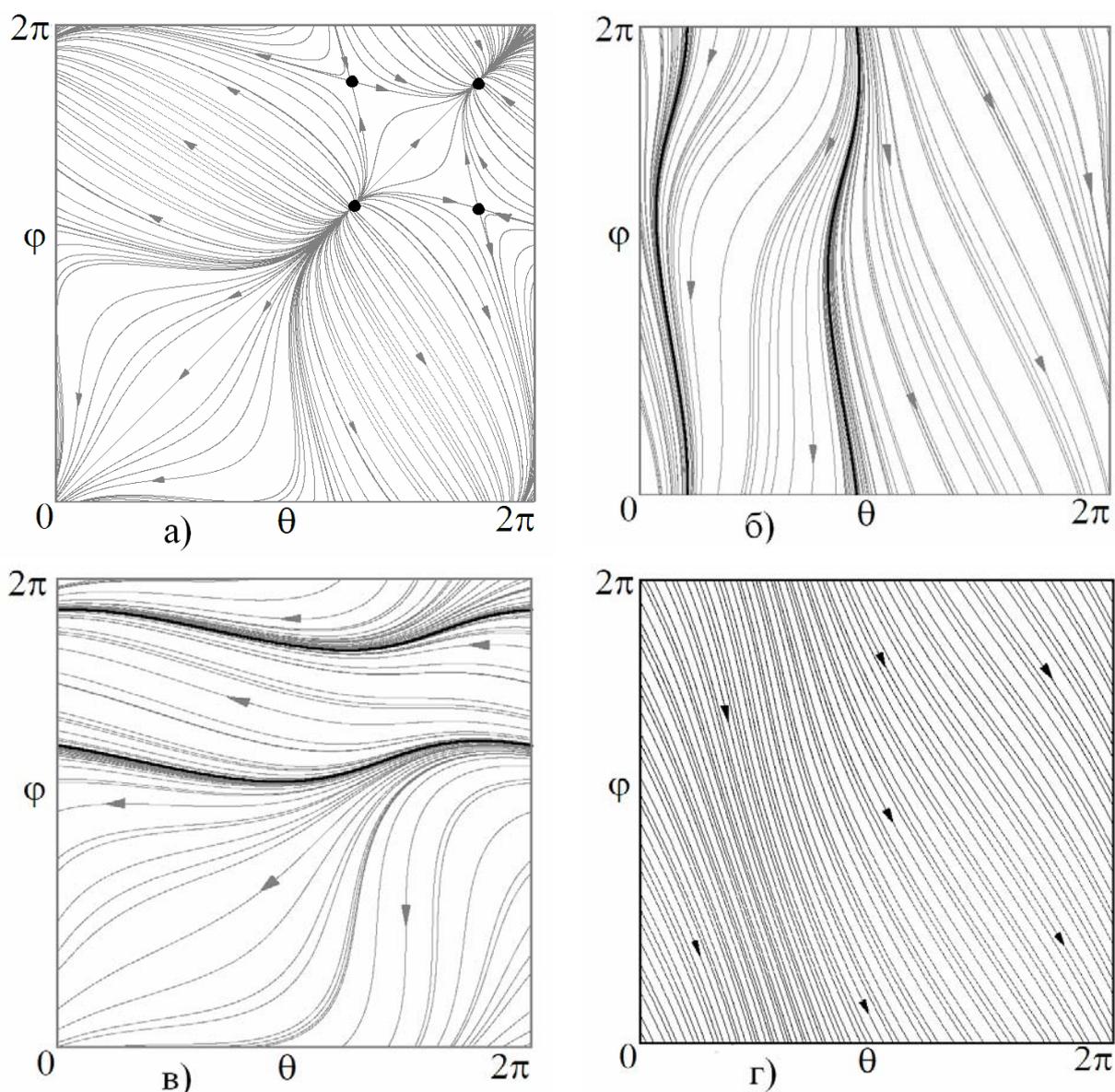


Рис. 4.3. Фазовые портреты системы (4.10): режим полной синхронизации всех осцилляторов, $\Delta_1 = 0.5$, $\mu = 0.75$ (а); режим частичного захвата первого и второго осцилляторов, $\Delta_1 = -0.25$, $\mu = 0.25$ (б); режим частичного захвата второго и третьего осцилляторов, $\Delta_1 = 0.75$, $\mu = 0.25$ (в); трехчастотный квазипериодический режим, $\Delta_1 = -1$, $\mu = 0.25$ (г). Значение $\Delta_2 = 1$.

Перейдем теперь к рис. 4.3, б. На этом рисунке имеются два новых объекта: притягивающая и отталкивающая *инвариантные кривые*. Эти кривые показаны более жирными линиями. Как можно видеть из рис. 4.3, б, фаза θ теперь не постоянна, однако она осциллирует около положения равновесия. Поскольку по определению $\theta = \psi_1 - \psi_2$ – относительная фаза первого и второго осцилляторов, то этот режим можно охарактеризовать как *частичный захват* этих осцилляторов. При этом относительная фаза второго и третьего осциллятора φ неограниченно нарастает.

На рис. 4.3, в можно видеть другой вариант расположения притягивающей инвариантной кривой. В этом случае колеблется около стационарного значения фаза $\varphi = \psi_2 - \psi_3$, а фаза θ неограниченно нарастает. Таким образом, это режим частичного захвата второго и третьего осциллятора.

Поскольку одна из фаз в рассмотренных случаях б) и в) неограниченно нарастает, то в соответствии с (4.20), они отвечают ситуации, когда исходная система демонстрирует режим *квазипериодических колебаний*.

На рис. 4.3, г можно видеть еще одну разновидность возможного режима колебаний системы из трех осцилляторов. В этом случае наблюдается «поток» фазовых траекторий и притягивающих объектов на фазовой плоскости вообще нет. Это тоже режим квазипериодических колебаний, отличающийся однако по характеру от рис. 4.3, б, в. (См. следующую задачу.)

4.5. Классификация квазипериодических режимов. Выясните особенности и отличия квазипериодических режимов, описанных в предыдущей задаче. Для этого, используя 2π -периодичность фазового пространства по обоим угловым переменным, трансформируйте область $0 < \theta < 2\pi$, $0 < \varphi < 2\pi$ в тор.

Решение. Воспользуемся 2π -периодичностью фазового пространства по угловым переменным. Это свойство позволяет трансформировать фазовый квадрат $0 < \theta < 2\pi$, $0 < \varphi < 2\pi$ в тор, «склеивая» его дважды, как показано на рис. 4.4. Тогда инвариантные кривые на рис. 4.3 превращаются в замкнутые орбиты на поверхности «тора фаз».

Так кривая C , отвечающая частичному захвату первого и второго осцилляторов, трансформируется в замкнутую кривую, обходящую тор только по меридиану. Кривая C' , отвечающая частичному захвату второго и третьего осцилляторов, трансформируется в замкнутую кривую, обходящую тор только по параллели.

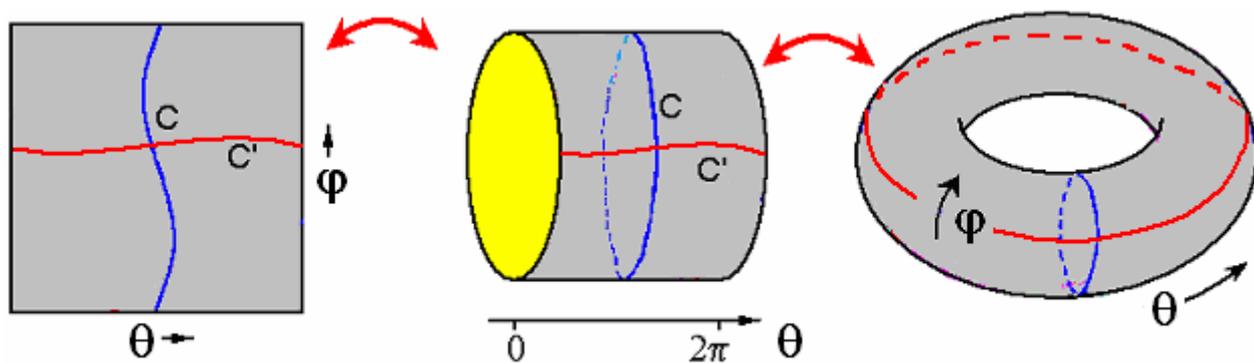


Рис. 4.4. Качественная картина замыкания плоскости фазовых переменных (θ, φ) в тор. Показаны инвариантные кривые C и C' , отвечающие простейшим режимам с числами вращения $0:1$ и $1:0$.

Указанная интерпретация позволяет понять возможность более сложных вариантов инвариантных кривых, которые образуют *замкнутые орбиты* на поверхности тора. В этом случае каждой инвариантной кривой можно приписать *число вращения* $w = p:q$, где p – число оборотов по поверхности построенного тора по параллели, а q – по меридиану. При этом отвечающие кривым C и C' на рис. 4.4 режимы частичного захвата первого-второго и второго-третьего осциллятора характеризуются числами вращения $w = 1:0$ и $w = 0:1$.

Исходя из топологических соображений, ясно, что возможны инвариантные кривые с любыми числами вращения, представляемыми несократимыми дробями с *рациональными* значениями p и q .

Пусть теперь на фазовой плоскости нет притягивающих объектов, рис. 4.3, *г*. Такому режиму будет соответствовать «фазовый» эргодический тор, как показано на рис. 4.5, *а*. Фазовые траектории будут всюду плотно покрывать его поверхность. Рядом, на рис. 4.5, *б* представлен пример режима, отвечающего инвариантной кривой с числом вращения $w = 1:2$. Сравнение этих двух рисунков делает понятным, что режимы с инвариантными кривыми являются своего рода *резонансными* по отношению к случаю потока фазовых траекторий. Действительно, соответствующая инвариантная кривая лежит на поверхности «тора фаз».

Обсудим теперь, как указанные свойства квазипериодических режимов проявляются в динамике исходной системы. Если на фазовой плоскости реализуется поток фазовых траекторий, то с движением по поверхности эргодического тора на рис. 4.5, *а* ассоциируются *две* частоты, из которых одна отвечает движению по параллели, а вторая – по меридиану. В соответствии с (4.20) к ним следует добавить еще одну частоту – опорную единичную

частоту колебаний системы. Таким образом, режиму с потоком фазовых траекторий на плоскости относительных фаз в исходной системе отвечает режим *трехчастотной квазипериодичности*. Если говорить о фазовом образе для исходной системы, то следует говорить о торе более высокой размерности – *трехмерном торе*.

Соответственно, режимы с инвариантной кривой на плоскости относительных фаз будут отвечать *двухчастотной квазипериодичности* в исходной системе. Фазовым объектом в этом случае будут *двумерные торы*. При этом такие торы носят, как мы видели, резонансный характер, так что можно говорить о *резонансных двухчастотных торах*, лежащих на поверхности трехмерных торов.

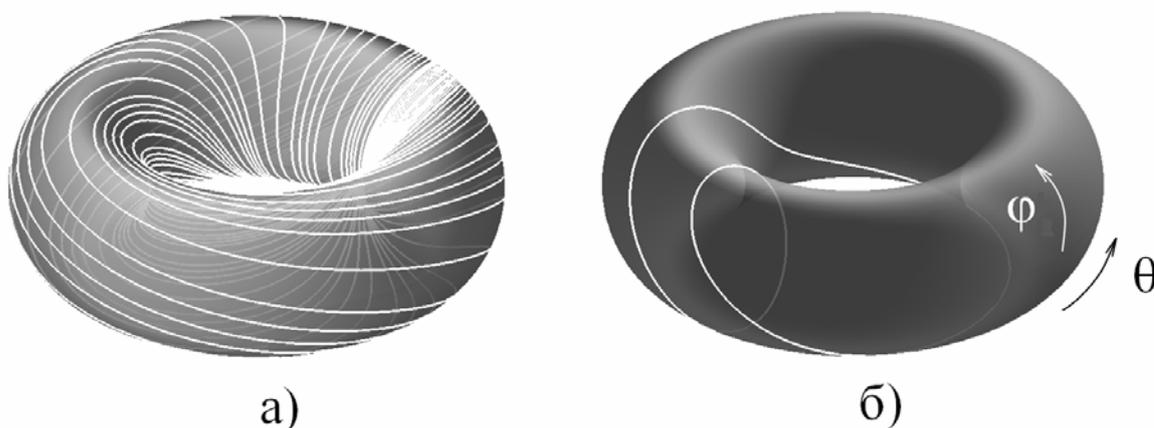


Рис. 4.5. Траектории на «фазовом торе»: поток фазовых траекторий на эргодическом торе, отвечающий трехмерному тору в исходной системе (а); инвариантная кривая на поверхности тора, отвечающая резонансному двухчастотному тору с числом вращения $w = 1 : 2$ (б).

4.6. Условия полного захвата трех фазовых осцилляторов. Получите условия полной синхронизации трех диссипативно связанных фазовых осцилляторов. Укажите соответствующую область на плоскости параметров частотная расстройка – величина связи. Обсудите бифуркации неподвижных точек, наблюдаемые при выходе из области полной синхронизации. В чем состоят отличия от случая двух связанных осцилляторов?

Решение. Найдем условия *полной* синхронизации, т.е. режима, когда реализуется точный одновременный захват относительных фаз всех осцилляторов. В этом случае $\dot{\theta} = 0$ и $\dot{\varphi} = 0$, и из (4.10) можно выразить синус каждой относительной фазы:

$$\begin{aligned} \mu \sin \theta &= -\frac{\Delta_1 + \Delta_2}{3}, \\ \mu \sin \varphi &= \frac{\Delta_1 - 2\Delta_2}{3}. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Отсюда сразу следуют уравнения границ области захвата как условия обращения в плюс-минус единицу синусов относительных фаз:

$$\mu = \pm \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{3}, \quad (4.22)$$

$$\mu = \pm \frac{\Delta_1 - 2\Delta_2}{3}. \quad (4.23)$$

В пространстве параметров $(\Delta_1, \Delta_2, \mu)$ условия (4.22), (4.23) задают некоторые поверхности. Фиксируем одну из расстроек Δ_2 и изучим устройство плоскости частотная расстройка Δ_1 – величина связи μ . На плоскости (Δ_1, μ) условия (4.22), (4.23) задают линии, показанные на рис. 4.6. Они определяют два языка традиционного вида с вершинами в точках

$$\Delta_1 = -\Delta_2, \quad \Delta_1 = 2\Delta_2. \quad (4.24)$$

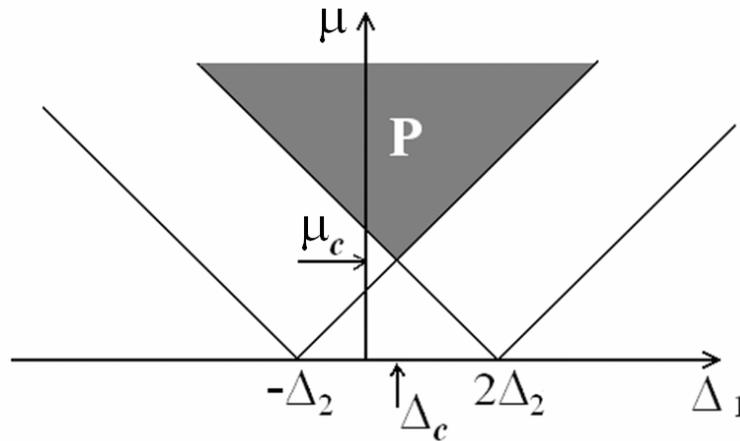


Рис. 4.6. Области полного захвата трех фазовых осцилляторов P (темно-серый цвет) и квазипериодических режимов (белый цвет). Линии отвечают условиям (4.22) и (4.23). μ_c – порог полной синхронизации.

Однако, в отличие от случая двух осцилляторов, языки с вершинами в точках (4.24) при малой величине связи не отвечают устойчивым состояниям равновесия. Обсудим этот вопрос подробнее.

Внутри области P на рис. 4.6 в системе имеется четыре неподвижные точки: устойчивый и неустойчивый узел и два седла. Соответствующий фазовый портрет показан на рис. 4.3, *а*. Устойчивый узел и отвечает за режим полной синхронизации.

При выходе из области P при пересечении ее левой границы все четыре точки *одновременно* попарно сливаются. Пороговая ситуация показана на рис. 4.7. После этого равновесия исчезают, и остаются устойчивая и неустойчивая инвариантная кривая, показанные на рис. 4.3, *б*. При этом режим полной синхронизации разрушается, и возникает режим двухчастотных квазипериодических колебаний.

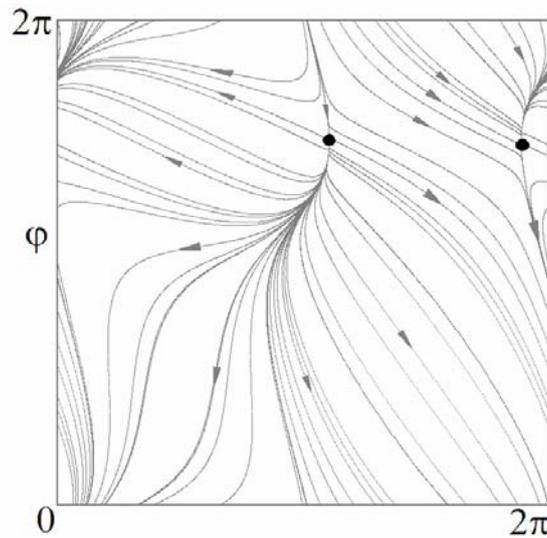


Рис. 4.7. Фазовый портрет системы (4.10) точно на границе области полной синхронизации. Момент слияния состояний равновесия и формирования инвариантных кривых.

Таким образом, за разрушение полной синхронизации отвечает специфический вариант бифуркации, когда одновременно происходят, фактически, две седло-узловые бифуркации состояний равновесия. Поясним механизм наблюдаемой бифуркации подробнее.

Из соотношений (4.21) видно, что решения появляются парами: θ_1 и θ_2 для первого уравнения, φ_1 и φ_2 – для второго. При этом имеют место четыре неподвижные точки: (φ_1, θ_1) , (φ_1, θ_2) , (φ_2, θ_1) , (φ_2, θ_2) . На фазовой плоскости они располагаются в вершинах прямоугольника, как схематически показано на рис. 4.8, а. Их устойчивые и неустойчивые многообразия образуют замкнутый *гетероклинический контур*, схематически изображенный на рис. 4.8, а. (Сравните также рис. 4.8, а и рис. 4.3, а).

Будем теперь варьировать одну из комбинаций параметров, стоящих в правых частях (4.21), например, вторую. Тогда решения θ_1 и θ_2 не будут меняться, а решения φ_1 и φ_2 будут сближаться, как показано стрелками на рис. 4.8, а. При выполнении условия (4.23) они сливаются. На рис. 4.8 это будет отвечать одновременному слиянию обеих пар состояний равновесия. После такой бифуркации остаются два многообразия, обозначенные на рис. 4.8, б как M_1 и M_2 . Из них и возникают неустойчивая и устойчивая инвариантные кривые, причем вторая отвечает за режим двухчастотных колебаний.

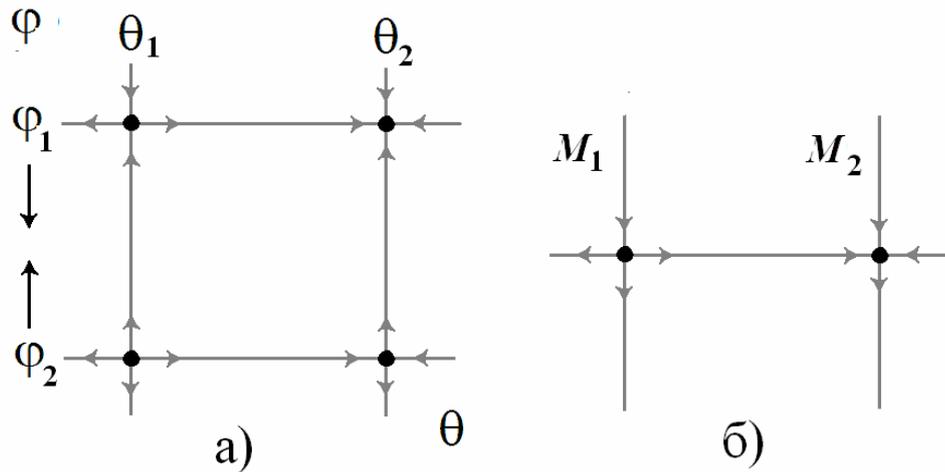


Рис. 4.8. «Каркас» из состояний равновесия и их многообразий системы (4.10) (а); ситуация на пороге разрушения полной синхронизации (б).

Из рис. 4.8, б нетрудно понять, что возникающий квазипериодический режим будет отвечать ситуации, когда переменная θ будет «примерно» постоянна. Это означает, что в результате описанной бифуркации можно ожидать возникновение режима частичного захвата первого и второго осцилляторов, см. рис. 4.3, б.

Если варьировать другую комбинацию параметров, отвечающую первому соотношению (4.21), то сливаются решения θ_1 и θ_2 , и уже не горизонтальные, а вертикальные многообразия на рис. 4.8. Эта ситуация имеет место при выходе через правую границу области полной синхронизации P . При этом примерно постоянной должна оказаться вторая относительная фаза φ , что отвечает режиму частичного захвата второго и третьего осцилляторов.

Две линии седло-узловых бифуркаций описанного типа сходятся на плоскости параметров на рис. 4.6 в точке, которую легко находим, совмещая (4.22), (4.23):

$$\mu_c = \frac{\Delta_2}{2}, \quad \Delta_c = \frac{\Delta_2}{2}. \quad (4.25)$$

Эти значения отмечены стрелочками на рис. 4.6. Таким образом, область полной синхронизации имеет *пороговый характер* по величине связи, что отличает обсуждаемую ситуацию от случая двух связанных осцилляторов.

Заметим, что точка (4.25) является, на самом деле, *бифуркацией коразмерности два*. В этой точке все четыре положения равновесия на рис. 4.8, а одновременно стягиваются в точку и исчезают. В окрестности точки (4.25) имеет место достаточно сложная картина областей различных режимов и бифуркаций, см. задачи 4.8 и 4.9.

4.7. Резонансные условия в цепочке трех фазовых осцилляторов.

Обсудите с физической точки зрения условия (4.24), отвечающие вершинам языков на рис. 4.6. Покажите, что они отвечают резонансам между подсистемами, на которые может быть разбита цепочка.

Решение. Как мы отмечали при решении задачи 4.2, в случае двух осцилляторов основание языка отвечает резонансному условию в системе, когда собственные частоты осцилляторов совпадают. Для случая трех осцилляторов значения (4.24), отвечающие основаниям соответствующих языков на оси частотной расстройки, также имеют простое физическое объяснение. Действительно, разобьем исследуемую систему на две подсистемы, как показано на рис. 4.9, а. Частота захвата кластера из второго и третьего осцилляторов как единого целого в соответствии с (4.14) равна Ω_{2-3} . Условие резонанса этой частоты с частотой первого осциллятора: $\Omega_1 = \Omega_{2-3}$. Подставляя сюда соответствующие частоты из (4.13, 4.14), получаем первое из условий (4.24).

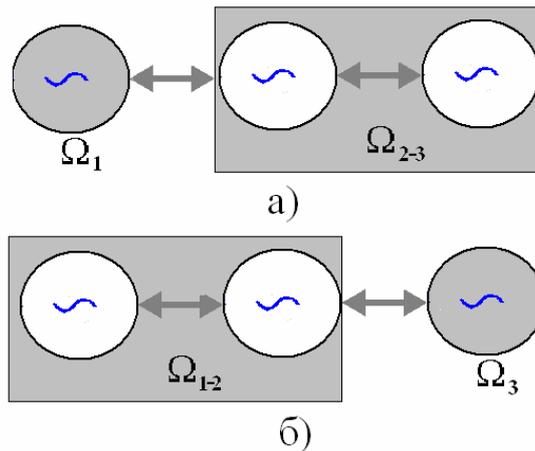


Рис. 4.9. Объединение трех связанных осцилляторов в подсистемы. Резонансные условия: $2\omega_1 = \omega_2 + \omega_3$ (а), $\omega_1 + \omega_2 = 2\omega_3$ (б), ω_i – собственная частота i -го осциллятора.

Если же разбить три осциллятора на две подсистемы, как показано на рис. 4.9, б, то получим резонансное условие $\Omega_{1-2} = \Omega_3$. Используя (4.13, 4.14), приходим ко второму условию (4.24). Полезно привести резонансные условия в размерной форме, они даны в подписи к рис. 4.9.

4.8. Устройство плоскости партеров частотная расстройка – величина связи трех осцилляторов. Карта ляпуновских показателей.

Проведите численное исследование устройства плоскости параметров уравнений (4.10), описывающих взаимодействие трех фазовых осцилляторов. С этой целью постройте карту ляпуновских показателей, на которой разными

цветами укажите режимы с разной сигнатурой спектра ляпуновских показателей. Сравните результаты с аналитическим исследованием задачи 4.6.

Решение. Мы описали пока простейшие режимы колебаний трех связанных осцилляторов. Для более полного исследования необходимо более детально проанализировать устройство пространства параметров, привлекая численные методы. Для этого используем построение *карты ляпуновских показателей*. Ляпуновские показатели – это важная характеристика нелинейной системы, которая позволяет различать тип наблюдаемого режима. Так положительное значение ляпуновского показателя отвечает хаосу, а нулевое значение отвечает квазипериодическим колебаниям²⁸.

Система (4.10) имеет второй порядок и поэтому характеризуется двумя ляпуновскими показателями. Будем вычислять оба ляпуновских показателя этой системы Λ_1, Λ_2 в каждой точке плоскости параметров (Δ_1, μ) ²⁹. Затем эту плоскость окрасим в разные цвета в соответствии с величиной показателей так, чтобы визуализировать следующие режимы:

а) P – наличие устойчивой неподвижной точки (точный захват фаз), $\Lambda_1 < 0, \Lambda_2 < 0$;

б) T_2 – квазипериодический режим, отвечающий двухчастотному тору, $\Lambda_1 = 0, \Lambda_2 < 0$;

в) T_3 – квазипериодический режим, отвечающий трехчастотному тору, $\Lambda_1 = 0, \Lambda_2 = 0$.

Такая карта показана на рис. 4.10, значения остальных параметров $\Delta_2 = 1, \mu = 0.15$. Цветовая палитра расшифрована в подписи к рисунку.

Анализируя рис. 4.10, прежде всего, отмечаем наличие области точного захвата всех трех осцилляторов P , которая отвечает аналитическому рассмотрению и рис. 4.6. В частности, выявляется амплитудный порог полной синхронизации трех осцилляторов, определяемый формулой (4.25).

Область полной синхронизации граничит также с двумя обширными областями двухчастотных торов. Выход из области полной синхронизации приводит к описанной в задаче 4.6 бифуркации положений равновесия. Такой переход имеет место при выходе как через левую, так и через правую границы области полной синхронизации.

²⁸ Если только нулевой показатель не отвечает тривиальной ситуации возможности сдвига изображающей точки вдоль фазовой траектории.

²⁹ О вычислении спектра ляпуновских показателей см., например, [9].

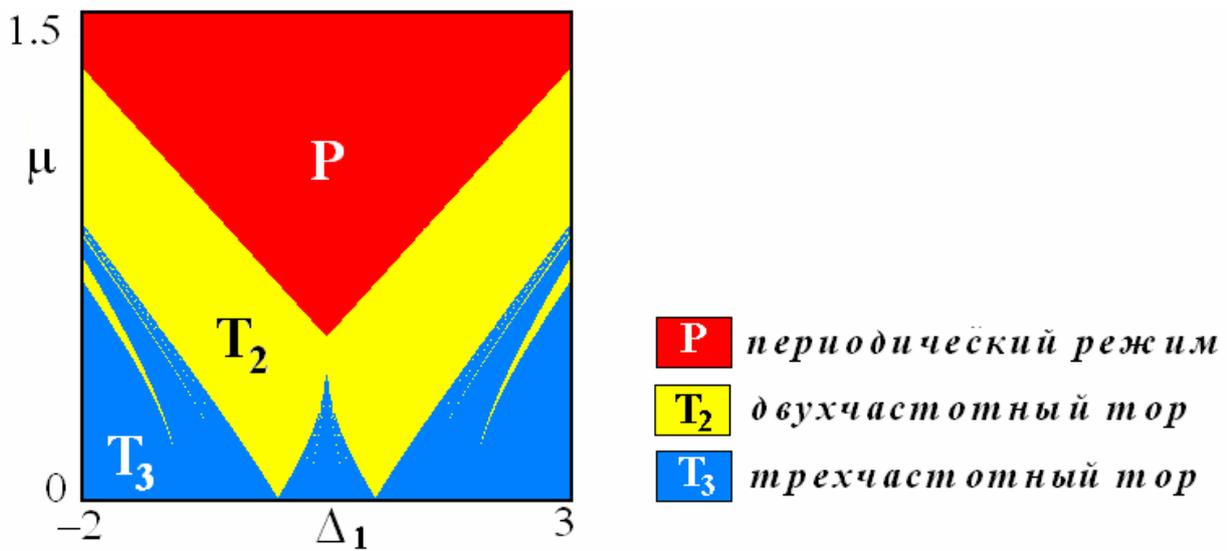


Рис. 4.10. Карта ляпуновских показателей для трех связанных фазовых осцилляторов (4.10).

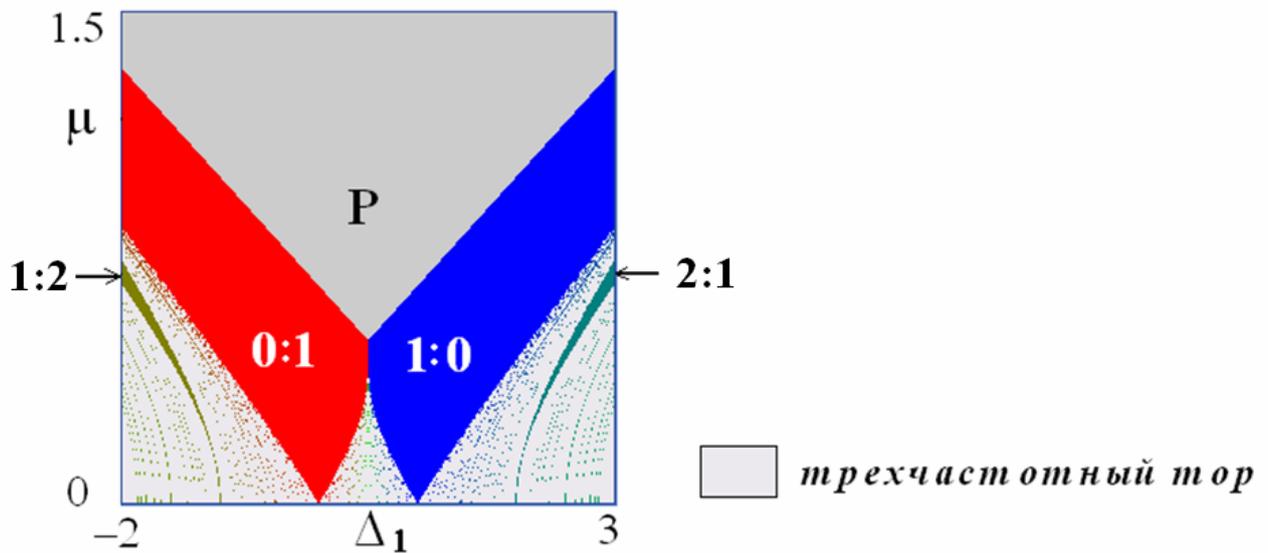


Рис. 4.11. Карта торов для трех связанных фазовых осцилляторов (4.10), $\Delta_2 = 1$, $\mu = 0.15$.

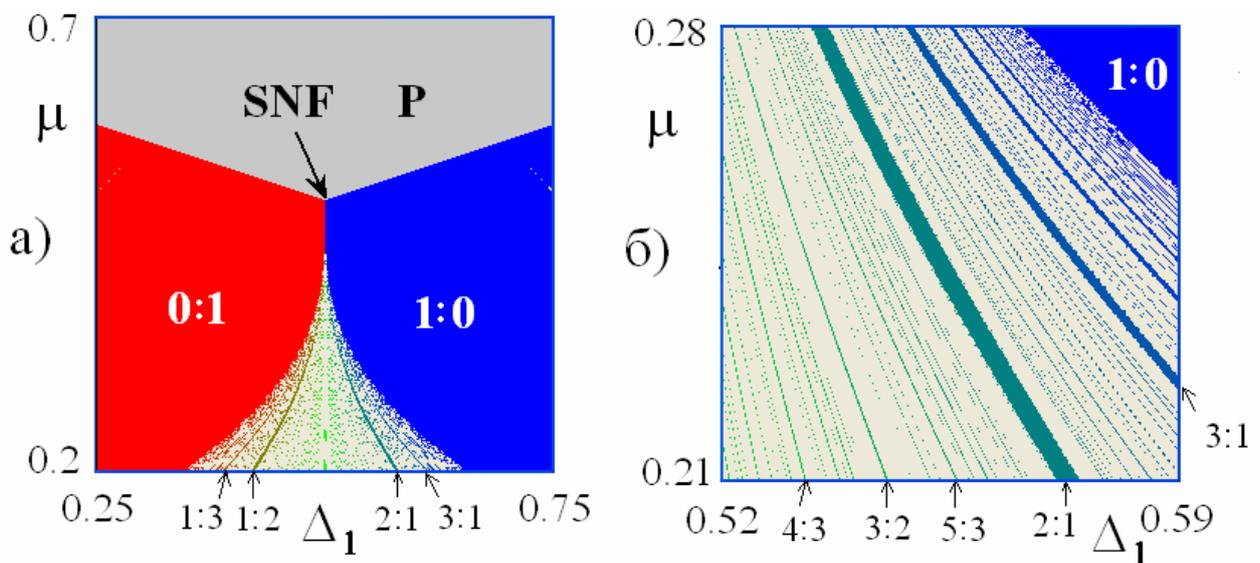


Рис. 4.12. Увеличенные фрагменты карты торов в окрестности точки коразмерности два: SNF – saddle node fan.

При уменьшении связи ниже порогового значения (4.25) указанные области двухчастотных торов «отрываются» от области полной синхронизации и превращаются в языки, по виду напоминающие классические языки Арнольда. Основания этих языков лежат на оси частотной расстройки, а сами они погружены в область трехчастотных торов. При малой связи трехчастотные торы доминируют. Кроме того, имеются узкие языки резонансных двухчастотных торов высшего порядка, погруженных в область трехчастотных торов. Острия этих языков также лежат на оси частотной расстройки. Таким образом, в области малой связи картина напоминает классическую, характерную, например, для отображения окружности, только роль синхронных режимов играют двухчастотные торы, а биений – трехчастотные.

4.9. Карта торов системы трех связанных фазовых осцилляторов.

Проведите численное исследование устройства плоскости параметров уравнений (4.10), используя для этой цели модификацию метода карт динамических режимов. Постройте «карты торов», для чего укажите разными цветами области на плоскости параметров, отвечающие торам с разными числами вращения.

Решение. Интерпретация динамики фаз на торе с помощью рис. 4.5 позволяет предложить еще один способ численного исследования устройства пространства параметров фазовой системы (4.10), модифицируя для данной задачи метод карт динамических режимов. С этой целью будем выявлять на плоскости параметров области, отвечающие торам с разными числами вращения $w = p : q$. В численной процедуре используем тот факт, что числа p и q дают, фактически, число пересечений фазовой траектории с левой (правой) и нижней (верхней) сторонами фазового квадрата.

Алгоритм организован следующим образом. Фиксируем сначала точку на плоскости параметров (Δ_1, μ) . Решаем затем численно систему (4.10) для этих значений параметров и находим установившийся режим. Задавшись координатами пересечения установившейся траектории с одной из сторон фазового квадрата, определяем период устойчивого режима по возврату траектории обратно в эту точку (с определенным малым допуском). После этого определяем на периоде этого режима число пересечений фазовой траектории с границами фазового квадрата: p с левой и правой сторонами, q – с верхней и нижней. Затем окрашиваем точку плоскости параметров в определенный цвет, свой для каждого типа двухчастотного тора.

Трехчастотные торы фиксируются как непериодические режимы. После этого выполняем аналогичную процедуру в каждой точке плоскости параметров.

Следует иметь в виду, что числа p и q , определяющие число вращения, совпадают с числом пересечений притягивающей кривой сторон фазового квадрата только для простейших двухчастотных торов. В случае торов высокого порядка фаза может совершать колебательные движения, что приводит к «ложным» пересечениям, которые учитывать не нужно. Принимая во внимание отождествление правой/левой и верхней/нижней сторон фазового квадрата, можно использовать следующее правило: если траектория покидает фазовый квадрат через верхнюю границу и снова входит в него через нижнюю, значение p увеличивается на единицу, а если наоборот – уменьшается. Точно так же, если траектория покидает фазовый квадрат через правую границу и снова входит в него через левую, значение q увеличивается на единицу, а если наоборот – уменьшается. Начальные условия во всех расчетах выбирались нулевыми: $\theta(0) = \varphi(0) = 0$.

Будем использовать следующую цветовую палитру. Режиму с числом вращения $w = 1:0$ сопоставим синий цвет. Уменьшение числа вращения отвечает постепенной трансформации этого цвета в зеленый, так что режиму $w = 1:1$ отвечает светло-зеленый цвет. Затем зеленый цвет постепенно трансформируется в красный, так что режиму с числом вращения $w = 0:1$ отвечает насыщенный красный цвет. Полученная «карта торов» в тех же масштабах и для тех же параметров, что и приведенная выше ляпуновская карта, показана на рис. 4.11. Дробями на рисунке обозначены числа вращения основных резонансных двухчастотных торов.

На этой карте можно видеть, что выход из области полной синхронизации через ее правую границу приводит к режиму с числом вращения $w = 1:0$, что отвечает частичному захвату второго и третьего осцилляторов. В этом плане полезно обратиться к рис. 4.9, *а* из задачи 4.7, иллюстрирующему резонансное условие, связанное с уравнением (4.23) правой границы области полной синхронизации.

Аналогично, выход из области полной синхронизации через ее левую границу, заданную уравнением (4.24), приводит к режиму с числом вращения $w = 0:1$. Это режим частичного захвата первого и второго осцилляторов, см. схематический рис. 4.9, *б*.

На карте выявляется также множество языков резонансных двухчастотных торов с разными числами вращения. Самые широкие из них отвечают $w = 1:2$ и $w = 2:1$, и обозначены соответствующими цифрами на рис. 4.11.

4.10. Бифуркации, ответственные за возникновение квазипериодических колебаний. Обсудите бифуркацию, отвечающую за возникновение трехчастотных колебаний в цепочке трех фазовых осцилляторов. Отдельно обсудите точку коразмерности два, отвечающую порогу полной синхронизации и постройте карту торов в ее окрестности.

Решение. Пусть мы находимся внутри области $w = 0:1$ на рис. 4.11. В этом случае на фазовой плоскости имеют место устойчивая и неустойчивая инвариантные кривые, показанные на рис. 4.3, б. Будем уменьшать (с учетом знака) частотную расстройку Δ_1 . Тогда можно наблюдать *бифуркацию инвариантных кривых*. В этом случае устойчивая и неустойчивая инвариантные кривые сливаются и исчезают. Режим двухчастотного тора разрушается и возникает режим трехчастотных колебаний, которому отвечает «поток» фазовых траекторий на фазовой плоскости, рис. 4.3, г. Таким образом, за разрушение двухчастотных колебаний отвечает бифуркация, которую можно назвать *седло-узловой бифуркацией инвариантных кривых*.

Анализируя рис. 4.11, можно заключить, что точка, отвечающая порогу полной синхронизации с координатами (4.25), дает важный пример бифуркации *коразмерности два* для системы с трехчастотной квазипериодичностью. Карта торов в окрестности этой точки в увеличенном виде показана на рис. 4.12, а.

В окрестности обсуждаемой точки SNF на рис. 4.12, а имеют место режимы полного захвата всех осцилляторов, частичного захвата пар осцилляторов (первый-второй и второй-третий) и трехчастотных торов. В свою очередь, область трехчастотных торов пронизана целой системой языков синхронизации резонансных двухчастотных торов, самые широкие из которых имеют числа вращения 1:2 и 2:1, следующие – числа вращения 1:3 и 3:1 и т.д. О многообразии возможных двухчастотных торов можно судить по увеличенному фрагменту на рис. 4.12, б, на котором фиксируются области резонансных торов с числами вращения 4:3, 3:2, 5:3 и т.д. Все эти языки имеют вершины в точке SNF, причем границами *всех* языков являются линии седло-узловых бифуркаций соответствующих инвариантных кривых.

Наличие таких точек, по-видимому, важный атрибут задач о трехчастотной квазипериодичности. Так аналогичные точки были представлены в работе *Baesens, Guckenheimer, Kim, MacKay, 1991* [29] для связанных отображений поворота, моделирующих динамику связанных осцилляторов (рис. 4.21 в [29]). Там они получили название *saddle node fan* – «седло-узловой веер», в соответствии с характерным расположением системы высших языков

двухчастотных торов³⁰. Отметим, что эти точки легко выявляются на плоскости параметров, поскольку им отвечает характерный «угол», образованный двумя линиями седло-узловых бифуркаций состояний равновесия разного типа. Наличие таких «углов» может служить простым эмпирическим признаком существования точек *saddle node fan* при численном исследовании.

4.11. Фазовые уравнения четырех диссипативно связанных осцилляторов. Получите фазовые уравнения для четырех диссипативно связанных в цепочку осцилляторов Ван-дер-Поля.

Решение. Рассмотрим цепочку из четырех связанных осцилляторов Ван-дер-Поля:

$$\begin{aligned}\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \mu(\dot{x} - \dot{y}) &= 0, \\ \ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + (1 + \Delta_1)y + \mu(\dot{y} - \dot{x}) + \mu(\dot{y} - \dot{z}) &= 0, \\ \ddot{z} - (\lambda - z^2)\dot{z} + (1 + \Delta_2)z + \mu(\dot{z} - \dot{y}) + \mu(\dot{z} - \dot{w}) &= 0, \\ \ddot{w} - (\lambda - w^2)\dot{w} + (1 + \Delta_3)w + \mu(\dot{w} - \dot{z}) &= 0.\end{aligned}\tag{4.26}$$

Здесь смысл параметров аналогичен уравнениям (4.1). Действуя совершенно аналогично задаче 4.1, получаем уравнения для фаз четырех осцилляторов:

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_1 &= -\frac{\mu}{2}\sin\theta, \\ \dot{\psi}_2 &= \frac{\Delta_1}{2} + \frac{\mu}{2}\sin\theta - \frac{\mu}{2}\sin\varphi, \\ \dot{\psi}_3 &= \frac{\Delta_2}{2} + \frac{\mu}{2}\sin\varphi - \frac{\mu}{2}\sin\phi, \\ \dot{\psi}_4 &= \frac{\Delta_3}{2} + \frac{\mu}{2}\sin\phi.\end{aligned}\tag{4.27}$$

Здесь использованы обозначения для относительных фаз осцилляторов:

$$\theta = \psi_1 - \psi_2, \quad \varphi = \psi_2 - \psi_3, \quad \phi = \psi_3 - \psi_4.\tag{4.28}$$

Перейдем от (4.27) к уравнениям для относительных фаз:

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= -\frac{\Delta_1}{2} - \mu\sin\theta + \frac{\mu}{2}\sin\varphi, \\ \dot{\varphi} &= \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{2} + \frac{\mu}{2}\sin\theta - \mu\sin\varphi + \frac{\mu}{2}\sin\phi, \\ \dot{\phi} &= \frac{\Delta_2 - \Delta_3}{2} + \frac{\mu}{2}\sin\varphi - \mu\sin\phi.\end{aligned}\tag{4.29}$$

³⁰ Они также достаточно уверенно диагностируются и по экспериментальным картам, представленным в работе *Linsay., Cumming, 1989* [28], см. рис. 9 в [28].

Эта система третьего порядка и описывает динамику четырех диссипативно связанных осцилляторов в фазовом приближении.

4.12. Режим полной синхронизации четырех связанных осцилляторов.

Найдите условия полной синхронизации системы четырех фазовых осцилляторов (4.29), обсудите устройство области полной синхронизации на плоскости параметров частотная расстройка – величина связи и бифуркации состояний равновесия, отвечающие ее границам.

Решение. Найдем условия полной синхронизации в системе четырех связанных фазовых осцилляторов, для чего положим $\dot{\theta} = \dot{\varphi} = \dot{\phi} = 0$. Тогда из (4.29) после несложных преобразований можно получить уравнения для синусов каждой из относительных фаз:

$$\begin{aligned} \mu \sin \theta &= -\frac{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3}{4}, \\ \mu \sin \varphi &= \frac{\Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3}{2}, \\ \mu \sin \phi &= \frac{\Delta_1 + \Delta_2 - 3\Delta_3}{4}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Если все три соотношения (4.30) имеют решения, то они дают, соответственно, *восемь* неподвижных точек, расположенных в фазовом пространстве (θ, φ, ϕ) , в вершинах параллелепипеда. При этом только одна из них устойчива. При вариации любой из трех комбинаций параметров в правых частях (4.30) две из граней параллелепипеда будут сближаться и могут слиться. При этом все восемь неподвижных точек попарно сливаются и *одновременно* исчезают, как только синус одной из фазовых переменных обращается в единицу. Картина аналогична рис. 4.8, только вложена в трехмерное фазовое пространство.

Из приведенных рассуждений сразу следуют выражения для седло-узловых бифуркаций указанного типа:

$$\mu = \pm \frac{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3}{4}, \quad (4.31)$$

$$\mu = \pm \frac{\Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3}{2}, \quad (4.32)$$

$$\mu = \pm \frac{\Delta_1 + \Delta_2 - 3\Delta_3}{4}. \quad (4.33)$$

Соотношения (4.31)-(4.33) определяют три языка на плоскости параметров (Δ_1, μ) , схематически показанные на рис. 4.13, а. Основания языков отвечают точкам

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= -\Delta_2 - \Delta_3, \\ \Delta_1 &= \Delta_2 + \Delta_3, \\ \Delta_1 &= -\Delta_2 + 3\Delta_3. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Из соотношений (4.30) нетрудно понять, что их решения существуют только внутри области перекрытия *всех* этих языков, которая и образует область полной синхронизации P четырех связанных осцилляторов.

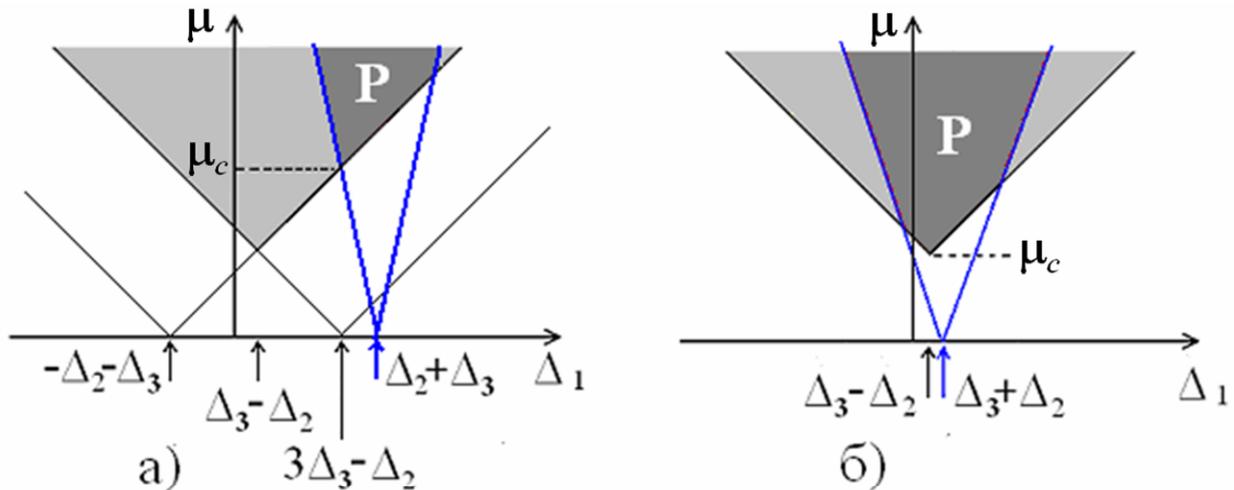


Рис. 4.13. Различные конфигурации линий седло-узловых бифуркаций и область точного захвата P для четырех связанных осцилляторов (4.29); μ_c – порог полной синхронизации.

Чтобы классифицировать режимы синхронизации системы (4.29), удобно следить за относительным положением области, показанной светло-серым цветом («объединенного» языка для (4.31), (4.33)), и языка (4.32), рис. 4.13, б. Ординаты их острий равны, соответственно, $\Delta_1 = -\Delta_2 + \Delta_3$ и $\Delta_1 = \Delta_2 + \Delta_3$. Проследим, как меняется конфигурация при уменьшении частотной расстройки Δ_2 . При $\Delta_2 > \frac{\Delta_3}{2}$ реализуется конфигурация, показанная на рис. 4.13, а. Отвечающая ей область полного захвата всех четырех осцилляторов показана темно-серым цветом. Полная синхронизация в этом случае имеет порог по величине связи, который находим, совмещая (4.31) и (4.33):

$$\mu_c = \frac{\Delta_3 + \Delta_2}{3}, \quad \Delta_c = \frac{\Delta_3 + \Delta_2}{3}. \quad (4.35)$$

При уменьшении расстройки Δ_2 языки на рис. 4.13, а сближаются, и при $\Delta_2 < \frac{\Delta_3}{2}$ точка пересечения их границ переходит на другую ветвь, так что

реализуется ситуация, показанная на рис. 4.13, б. В этом случае форма области точного захвата осцилляторов меняет форму, а пороговое значение связи перестает зависеть от Δ_2 и отвечает значению

$$\mu_c = \frac{\Delta_3}{2}, \quad \Delta_c = \Delta_3 - \Delta_2. \quad (4.36)$$

Затем ситуация симметричным образом повторяется. Таким образом, возможны два типа области полной синхронизации четырех осцилляторов, отвечающие рис. 4.13, а и б.

4.13. Частота захвата четырех осцилляторов. Найдите частоту захвата четырех фазовых осцилляторов.

Решение. Подставим соотношения (4.30), отвечающие условиям полной синхронизации, в каждое уравнение для фаз четырех осцилляторов (4.29). В результате, получим

$$\dot{\psi}_1 = \dot{\psi}_2 = \dot{\psi}_3 = \dot{\psi}_4 = \frac{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3}{8}. \quad (4.37)$$

Используя вытекающие из (4.29) при выключенной связи выражения для собственных частот каждого осциллятора $\Omega_1 = 0$, $\Omega_i = \frac{\Delta_{i-1}}{2}$, получаем, что частота захвата равна среднему арифметическому значению собственных частот всех четырех осцилляторов:

$$\Omega_{1-2-3-4} = \frac{\Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 + \Omega_4}{4}. \quad (4.38)$$

4.14. Резонансные условия в цепочке четырех фазовых осцилляторов. Обсудите с физической точки зрения появление условий (4.34), отвечающих основаниям языков на рис. 4.13, а.

Решение. Как и в случае трех осцилляторов, условия (4.34) отвечают определенным резонансам в системе. Система из четырех осцилляторов допускает разбиение на кластеры, как показано на рис. 4.14. Вычислим соответствующие собственные частоты, используя известные правила расчета частот захвата двух и трех осцилляторов как среднего арифметического собственных частот:

$$\Omega_{2-3-4} = \frac{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3}{6}, \quad \Omega_{1-2} = \frac{\Delta_1}{4}, \quad \Omega_{3-4} = \frac{\Delta_2 + \Delta_3}{4}, \quad \Omega_{1-2-3} = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{6}. \quad (4.39)$$

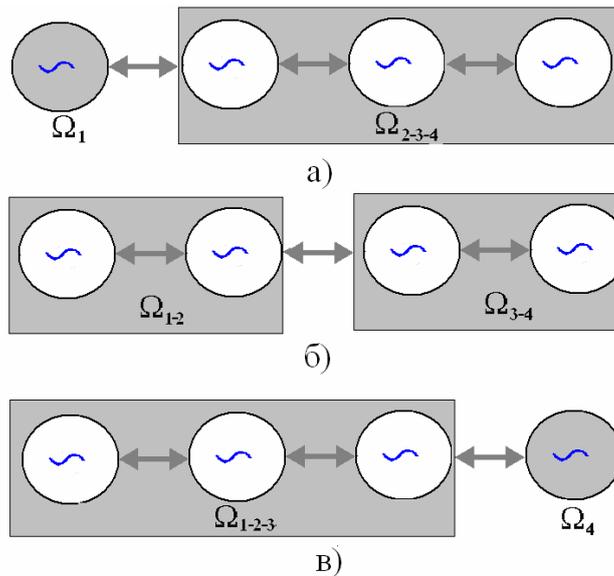


Рис. 4.14. Объединение четырех связанных осцилляторов в подсистемы для резонансных условий (4.34); $3\omega_1 = \omega_2 + \omega_3 + \omega_4$ (а), $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4$ (б), $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 3\omega_4$ (в).

Из (4.39) нетрудно показать, что первое условие (4.34) отвечает ситуации, когда собственная частота первого осциллятора равна частоте кластера из трех оставшихся, рис. 4.14, а. Второе отвечает резонансу между двумя кластерами из двух осцилляторов, рис. 4.14, б, и, наконец, третье – резонансу кластера из первых трех и четвертого осцилляторов, рис. 4.14, в:

$$\Omega_1 = \Omega_{2-3-4}, \quad \Omega_{1-2} = \Omega_{3-4}, \quad \Omega_{1-2-3} = \Omega_4. \quad (4.40)$$

Условия резонансов в размерной форме даны в подписи к рис. 4.14.

4.15. Карта ляпуновских показателей четырех связанных осцилляторов. Постройте карту ляпуновских показателей системы (4.29), обсудите ее устройство и сравните с аналитическим рассмотрением задачи 4.12.

Решение. На рис. 4.15, а представлена карта ляпуновских показателей системы (4.29) на плоскости (Δ_1, μ) . Такая система характеризуется уже тремя ляпуновскими показателями, так что дополнительно появляется возможность режимов *четырёхчастотной квазипериодичности*³¹ и *хаоса*. На рис. 4.15, а показаны:

- а) P – область устойчивой неподвижной точки, $\Lambda_1 < 0, \Lambda_2 < 0, \Lambda_3 < 0$;
- б) T_2 – режим, отвечающий двухчастотному тору, $\Lambda_1 = 0, \Lambda_2 < 0, \Lambda_3 < 0$;
- в) T_3 – режим, отвечающий трехчастотному тору, $\Lambda_1 = 0, \Lambda_2 = 0, \Lambda_3 < 0$;
- г) T_4 – режим, отвечающий четырехчастотному тору, $\Lambda_1 = 0, \Lambda_2 = 0, \Lambda_3 = 0$;
- д) C – хаотический режим, $\Lambda_1 > 0, \Lambda_2 < 0, \Lambda_3 < 0$.

³¹ В исходной системе (4.26) такой режим соответствует *четырёхчастотному тору*. Далее будет удобно использовать этот термин, имея в виду все же, что речь идет о фазовых уравнениях.

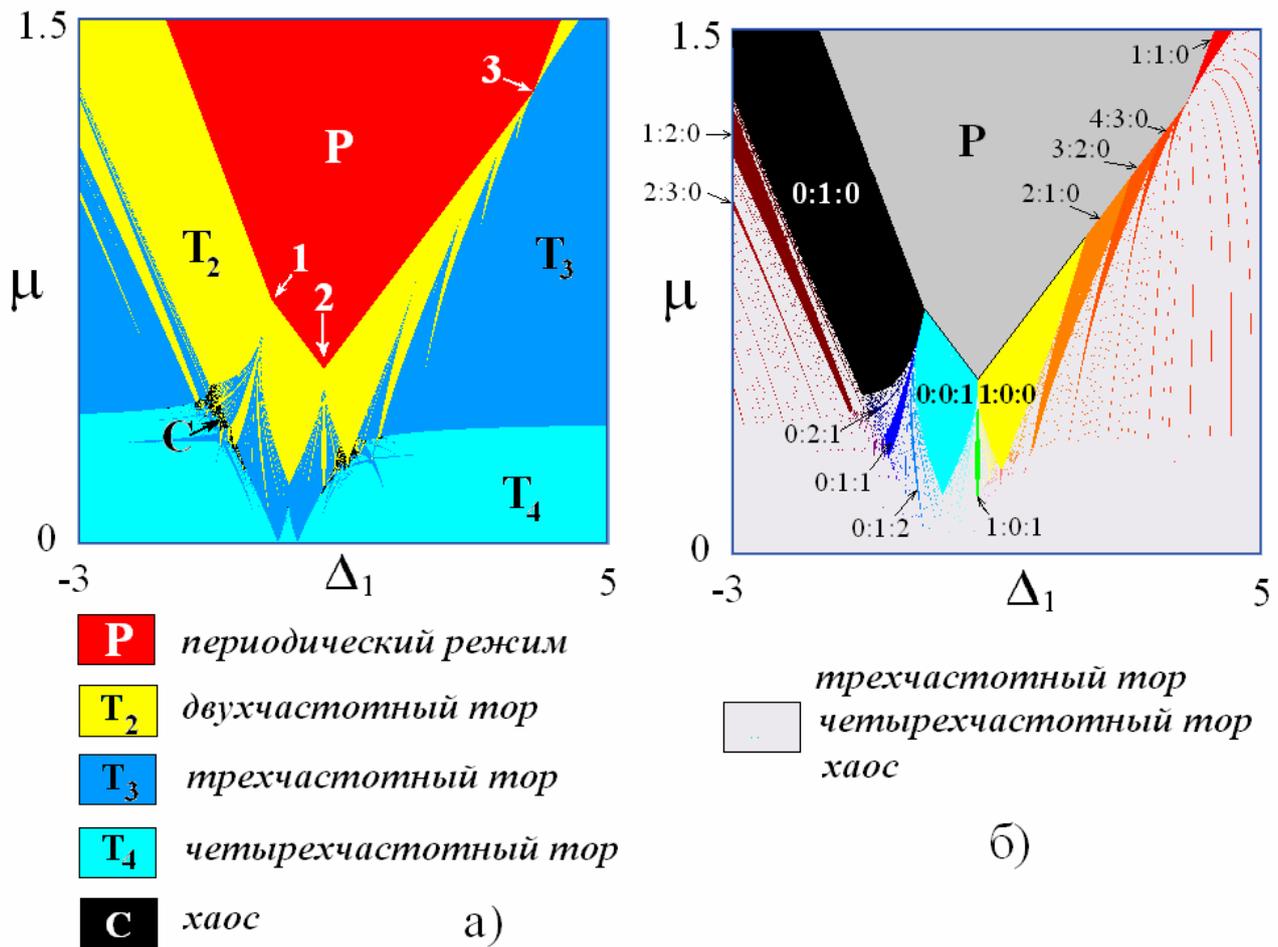


Рис. 4.15. Карта ляпуновских показателей четырех связанных фазовых осцилляторов (4.25) (а), карта двухчастотных торов той же системы (б); $\Delta_2 = 0.3$, $\Delta_3 = 1.1$.

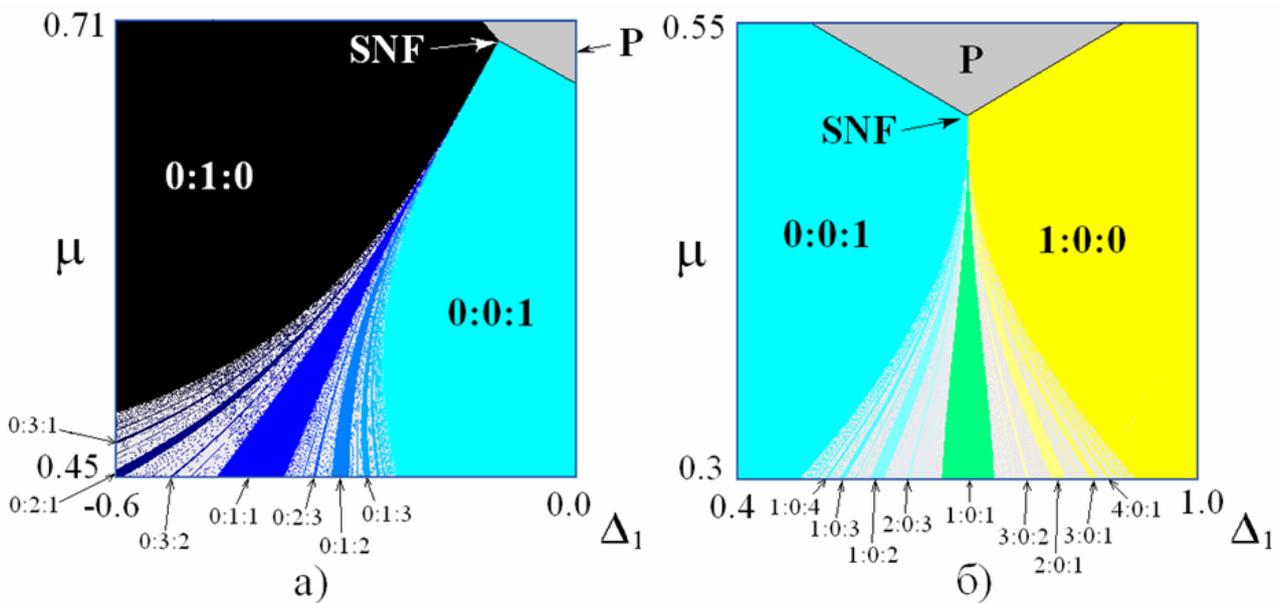


Рис. 4.16. Увеличенные фрагменты карты торов в окрестности точек SNF; окрестность точки, обозначенной на рис. 4.15, а цифрой 1 (а), окрестность точки, обозначенной на рис. 4.15, а цифрой 2 (б); $\Delta_1 = 0.3$, $\Delta_2 = 1$.

Значения остальных параметров $\Delta_1 = 0.3$, $\Delta_2 = 1$ выбраны так, чтобы реализовалась наиболее сложная из возможных конфигурация области полной синхронизации, рис. 4.13, б.

На карте можно видеть область полной синхронизации P , отвечающую аналитическому рассмотрению и рис. 4.13, б. Эта область имеет три «угла» – точки коразмерности два, – обозначенные на рисунке цифрами 1, 2 и 3, в которых сходятся попарно линии седло-узловых бифуркаций состояний равновесия системы (4.29).

Область полной синхронизации граничит с областью двухчастотных торов, за исключением указанных точек, в которых она имеет «точечный» контакт с областью трехчастотных торов. По сравнению со случаем трех осцилляторов на рис. 4.11, основания языков двухчастотных торов на оси частотной расстройки разрушены. Область двухчастотных торов теперь окружена областями трехчастотных торов, которые располагаются, в основном, выше линии $\mu \approx 0.3$. При меньших значениях связи доминируют уже четырехчастотные торы. Однако и при очень малой связи можно видеть два языка трехчастотных торов, основания которых расположены на оси частот. Для системы из четырех связанных осцилляторов возникают и области хаоса, однако они незначительны и локализованы на границе областей трех- и четырехчастотных торов.

4.16. Карта торов четырех связанных осцилляторов. Постройте карту торов системы (4.29), обсудите ее устройство с точки зрения возникновения кластерных состояний разного типа. Постойте увеличенные фрагменты карты в окрестности точек коразмерности два.

Решение. Карта для системы четырех связанных фазовых осцилляторов (4.29), на которой разными цветами показаны области различных резонансных двухчастотных торов, показана на рис. 4.15, б рядом с соответствующей картой ляпуновских показателей. Торы обозначены числами вращения $w = p : q : r$, где p , q , r отвечают числам существенных пересечений инвариантной кривой со сторонами фазового куба со сторонами 2π в фазовом пространстве относительных фаз осцилляторов (θ, φ, ϕ) .

Выбор цветовой палитры для чисел вращения $w = p : q : r$ представляется априорно не очевидным. Мы рекомендуем использовать следующую гамму. Сначала определяется наибольшее число из трех чисел p , q и r : $M = \max(p, q, r)$. Затем красный, зеленый и синий цвета смешиваются в пропорции

$$\frac{P}{M} : \left(1 - \frac{q}{M}\right) : \frac{r}{M}.$$

Следует сделать только одно исключение: для режима 1:0:1 по такому правилу получается белый цвет, плохо различимый на картах, так что он заменяется на светло-зеленый. Такие правила дают приемлемую цветовую гамму, причем соседние на карте языки с близкими числами вращения оказываются окрашенными в близкие цвета.

Обсуждение устройства карты торов системы четырех связанных осцилляторов удобно проводить, используя увеличенные фрагменты в окрестности точек 1 и 2, которые показаны на рис. 4.16.

Обратимся сначала к первой точке на рис. 4.16, *a*. Можно видеть, что ее окрестность устроена аналогично обсуждавшейся выше точке SNF. При этом все числа вращения на рис. 4.16, *a* имеют вид $w = 0:q:r$. Это означает, что первый и второй осцилляторы частично захвачены, и система кластеризуется, как схематически показано на рис. 4.17, *a*. При этом правила для оставшихся двух индексов $q:r$ совершенно аналогичны случаю трех осцилляторов, см. рис. 4.12.

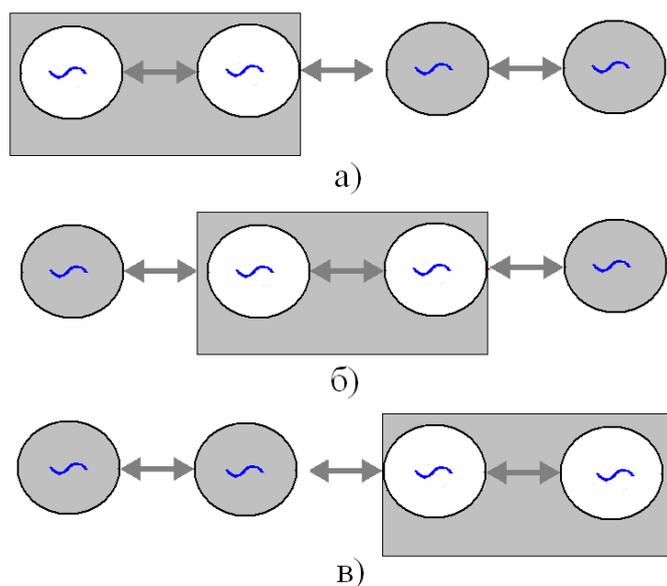


Рис. 4.17. Кластеризация в системе четырех осцилляторов в окрестности точек коразмерности два, обозначенных соответственно цифрами 1, 2 и 3 на рис. 4.15, *a*.

Таким образом, в окрестности обсуждаемой точки имеют место:

- область полной синхронизации P , ограниченная линиями седло-узловых бифуркаций состояний равновесия разных типов;
- область с числом вращения $0:1:0$, отвечающая частичному захвату первого-второго и третьего-четвертого осцилляторов;
- область с числом вращения $0:0:1$, отвечающая одновременному частичному захвату первого-второго-третьего осцилляторов.

К обсуждаемой первой точке SNF также подходит в виде «веера» целая

система языков двухчастотных торов, отвечающих частичному захвату первого-второго осцилляторов, погруженная в область трехчастотных торов. Таким образом, в окрестности этой точки динамика системы качественно аналогична случаю трех осцилляторов³², при этом в качестве подсистемы выступают частично захваченные первый и второй осцилляторы.

Из рис. 4.16, б нетрудно видеть, что подобная ситуация имеет место и в окрестности второй точки SNF, только в этом случае частично захваченными оказываются второй и третий осцилляторы, что схематически показано на рис. 4.17, б. При этом числа вращения имеют вид $w = p:0:r$, а оставшиеся индексы $p:r$ также повторяют правила для случая трех осцилляторов.

Несколько иная ситуация имеет место в окрестности третьей характерной точки пересечения седло-узловых бифуркаций, показанной на рис. 4.15, а. Из рис. 4.15, б можно видеть, что в этом случае числа вращения равны $w = p:q:0$, что соответствует ситуации частичного захвата третьего и четвертого осцилляторов, рис. 4.17, в. Однако вид областей не отвечает каноническому для точки *saddle node fan*. Действительно, для нее характерно наличие в ее малой окрестности областей с числами вращения $p:q=1:0$ и $p:q=0:1$ (см. рис. 4.12). В рассматриваемом же случае эти области отделены от точки 3.

Кроме того, как видно из рис. 4.15, б, области резонансных торов с числами вращения $2:1:0$, $3:2:0$, $4:3:0$, ... имеют не вид узких языков, погруженных в область трехчастотных торов, а имеют протяженный «контакт» с областью полной синхронизации.

4.17. Бифуркационная ситуация коразмерности три в системе четырех связанных осцилляторов. Покажите, что при вариации второй частотной расстройке возникает бифуркационная ситуация коразмерности три, отвечающая слиянию точек SNF. Постройте карты торов в окрестности такой бифуркации.

Решение. Вновь обратимся к рис. 4.13. Нетрудно видеть, что, варьируя частотную расстройку Δ_2 , можно добиться ситуации, когда два «угла» на рис. 4.13, б сольются. При этом возникает новая *ситуация коразмерности три*. В этом случае в одной точке пересекаются все три линии (4.31)-(4.33). Совмещая соответствующие уравнения, нетрудно получить условие реализации такой бифуркации коразмерности три:

$$\Delta_2 = \frac{\Delta_3}{2}. \quad (4.41)$$

³² По крайней мере, на уровне проведенного численного исследования.

Ситуация до порога этой бифуркации обсуждалась в предыдущей задаче и показана на рис. 4.16. Она отвечает двум точкам *saddle node fan*. Таким образом, указанная бифуркация может быть интерпретирована как *слияние двух точек saddle node fan*.

Карта торов непосредственно в такой точке дана на рис. 4.18. Можно видеть, что точки *saddle node fan* разрушены: теперь в одной точке сходятся области разных типов, отвечающие как частичному захвату первого-второго, так и второго-третьего осцилляторов с числами вращения как $w = 0 : q : r$, так и $w = p : 0 : r$. Эти два семейства четко разделены языком с числом вращения $w = 0 : 0 : 1$, для которого частично захвачены одновременно три осциллятора: первый, второй и третий.

При увеличении параметра Δ_2 в область $\Delta_2 > \Delta_3 / 2$ за порог обсуждаемой бифуркации происходит заметная перестройка и усложнение картины, что иллюстрируют карты торов и ляпуновских показателей на рис. 4.19. Между областями $0 : 1 : 0$ и $1 : 0 : 0$, в дополнение к обсуждавшимся семействам, появляется система языков $w = p : q : 0$, отвечающая частичному захвату третьего и четвертого осцилляторов. Таким образом, на рис. 4.19 одновременно присутствуют *все* три варианта кластеризации, отвечающие рис. 4.17. Кроме того, возникают языки двухчастотных торов, не отвечающие кластерным состояниям. Их можно видеть в нижней части рисунка, наиболее крупные из них имеют числа вращения $1 : 3 : 2$, $2 : 4 : 3$ и т.д. Если обратиться к карте ляпуновских показателей на рис. 4.19, б, то можно видеть, что эти языки погружены в область хаоса.

Интересно отметить, что характерные «углы» приобретает не только область полной синхронизации, но и область двухчастотных торов, отвечающая частичной синхронизации типа $0 : 1 : 0$. При этом область хаоса локализована как раз в окрестности такого «угла». При уменьшении связи можно наблюдать, как хаос превращается в четырехчастотные торы.

Таким образом, окрестность точки слияния двух точек *saddle node fan* оказывается наиболее «представительной» с точки зрения наблюдаемых режимов. Реализуются все три типа попарной кластеризации, резонансы, не отвечающие кластеризации, области хаоса и четырехчастотных торов. При этом все эти режимы можно наблюдать в достаточно малой области на плоскости параметров.

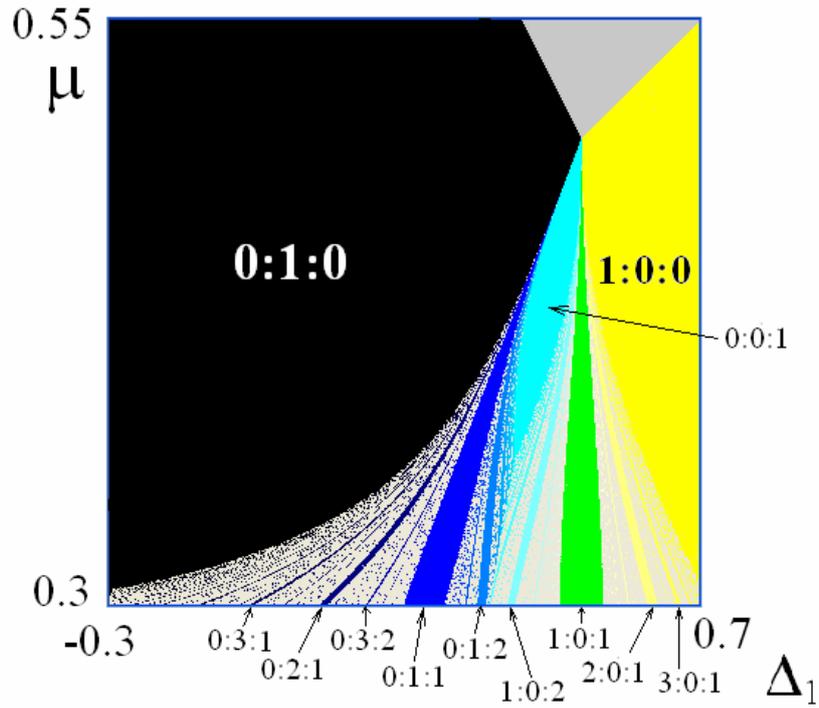


Рис. 4.18. Карта торов для ситуации, отвечающей бифуркации коразмерности три: слиянию двух точек SNF, $\Delta_2 = 0.5$, $\Delta_3 = 1$.

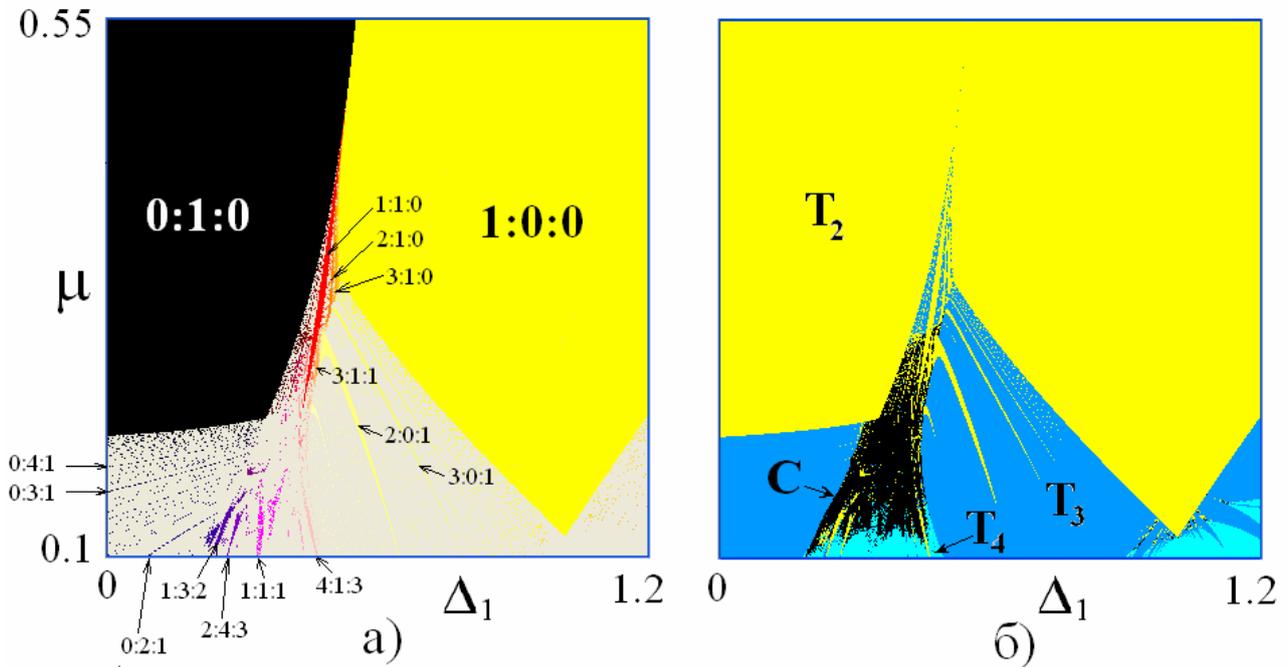


Рис. 4.19. Карта торов (а) и карта ляпуновских показателей (б) за порогом бифуркации слияния двух точек SNF, $\Delta_2 = 0.65$, $\Delta_3 = 1$.

4.18. Обобщение на случай большего числа осцилляторов. Обсудите, как описанный алгоритм поиска и изучения конфигурации области полной синхронизации можно обобщить на случай большего числа осцилляторов.

Решение. Описанный алгоритм анализа области полной синхронизации может быть распространен на случай большего числа осцилляторов. Например, для пяти осцилляторов вместо уравнений (4.29) будем иметь:

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= -\frac{\Delta_1}{2} - \mu \sin \theta + \frac{\mu}{2} \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} &= \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{2} + \frac{\mu}{2} \sin \theta - \mu \sin \varphi + \frac{\mu}{2} \sin \phi, \\ \dot{\phi} &= \frac{\Delta_2 - \Delta_3}{2} + \frac{\mu}{2} \sin \varphi - \mu \sin \phi + \frac{\mu}{2} \sin \vartheta, \\ \dot{\vartheta} &= \frac{\Delta_3 - \Delta_4}{2} + \frac{\mu}{2} \sin \phi - \mu \sin \vartheta.\end{aligned}\tag{4.42}$$

Для неподвижных точек полагаем $\dot{\theta} = \dot{\varphi} = \dot{\phi} = \dot{\vartheta} = 0$. Далее следуем описанному выше алгоритму. В первом уравнении выражаем $\sin \varphi$ через $\sin \theta$, подставляем во второе. Оттуда выражаем $\sin \phi$ через $\sin \theta$ и так далее, «вниз» по цепочке уравнений. В результате, после некоторых преобразований получаются следующие выражения для синусов всех четырех фазовых переменных:

$$\begin{aligned}\mu \sin \theta &= -\frac{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4}{5}, \\ \mu \sin \varphi &= \frac{3\Delta_1 - 2\Delta_2 - 2\Delta_3 - 2\Delta_4}{2}, \\ \mu \sin \phi &= \frac{2\Delta_1 + 2\Delta_2 - 3\Delta_3 - 3\Delta_4}{5}, \\ \mu \sin \vartheta &= \frac{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 - 4\Delta_4}{5}.\end{aligned}\tag{4.43}$$

Если все уравнения (4.43) имеют решения, то система имеет 16 неподвижных точек, расположенных в вершинах *четырёхмерного* параллелепипеда в четырёхмерном фазовом пространстве $(\theta, \varphi, \phi, \vartheta)$. Аналогично случаю трех и четырех осцилляторов, при вариации соответствующих комбинаций параметров в (4.43), трехмерные грани этого параллелепипеда могут сближаться. В результате, происходит седло-узловая бифуркация такого типа, что все 16 точек сливаются попарно и *одновременно* исчезают.

Условие обращения каждого синуса в ± 1 приводит к соотношениям

$$\begin{aligned} \mu &= \pm \frac{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4}{5}, \\ \mu &= \pm \frac{3\Delta_1 - 2\Delta_2 - 2\Delta_3 - 2\Delta_4}{2}, \\ \mu &= \pm \frac{2\Delta_1 + 2\Delta_2 - 3\Delta_3 - 3\Delta_4}{5}, \\ \mu &= \pm \frac{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 - 4\Delta_4}{5}. \end{aligned} \tag{4.44}$$

Теперь на плоскости (Δ_1, μ) имеют место четыре языка, два из которых имеют наименьший одинаковый наклон, а два других – больший наклон. Несложно показать, что картина пересечения этих языков может иметь не более четырех «углов» – точек коразмерности два. На рис. 4.20 представлен качественный рисунок, иллюстрирующий соответствующую конфигурацию.

Наличие такой конфигурации можно выявить в результате следующих рассуждений. Разбиение плоскости параметров первой и четвертой линиями (4.44), дополненное третьей линией, аналогично случаю трех осцилляторов. Из (4.44) можно показать, что случай с тремя «углами» для этой области имеет место при условии $\Delta_3 < \Delta_4 / 2$. При этом имеет место порог полной синхронизации по величине связи, который определяется соотношениями

$$\mu_c = \frac{\Delta_4}{2}, \quad \Delta_c = \frac{3}{2}\Delta_4 - \Delta_3 - \Delta_2. \tag{4.45}$$

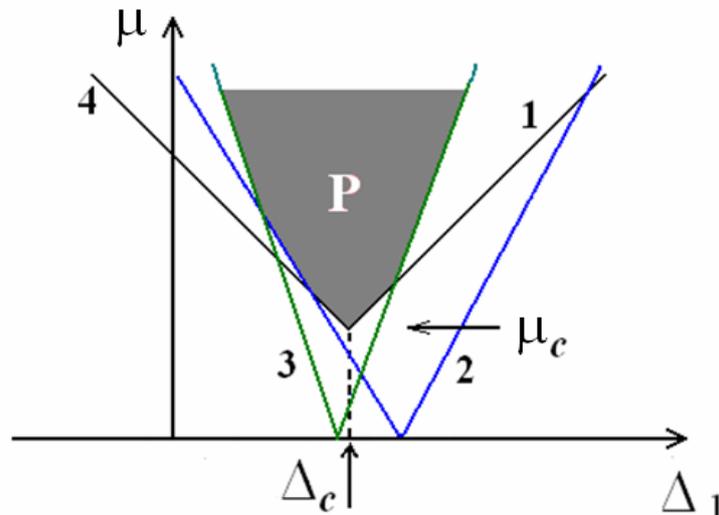


Рис. 4.20. Качественная картина возможного расположения линий седло-узловых бифуркаций и конфигурации области точного захвата P для пяти осцилляторов. Цифры отвечают соответствующим по порядку уравнениям (4.44), μ_c – порог полной синхронизации.

Эта картина должна быть дополнена двумя линиями, задающими второй язык (4.44), как показано на рис. 4.20. При этом если этот язык охватывает точку (4.45), то она и определяет порог полной синхронизации пяти осцилляторов.

Приведенные рассуждения обобщаются на случай $(N+1)$ -го осциллятора. В этом случае имеется N языков, причем при малой связи все они отвечают неустойчивым режимам. Основания языков отвечают N вариантам разбиения системы на кластеры из $N-1$, $N-2$ и т.д. осцилляторов. Область полной синхронизации получается как пересечение *всех внутренних областей* языков. Нетрудно усмотреть здесь определенную аналогию с известной интерпретацией синхронизации хаоса как области пересечения языков синхронизации встроенных в хаотический аттрактор неустойчивых периодических орбит³³. Отличие состоит в том, что в случае режима синхронизации многочастотного ансамбля число языков конечно и на единицу меньше числа взаимодействующих осцилляторов, причем имеют место определенные правила расчета вершин языков и наклона их границ. Границы области полной синхронизации могут иметь «углы» – точки коразмерности два, в которых сходятся линии седло-узловых бифуркаций разных типов.

Вынужденная синхронизация многочастотных колебаний

4.19. Фазовые уравнения возбуждаемой системы двух диссипативно связанных автоколебательных осцилляторов. Получите укороченные и фазовые уравнения для возбуждаемой внешним сигналом системы двух диссипативно связанных осцилляторов Ван-дер-Поля.

Решение. Будем считать, что внешнее воздействие возбуждает первый осциллятор. Система дифференциальных уравнений, описывающая взаимодействие осцилляторов указанного типа, имеет вид:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + \left(1 - \frac{\Delta}{2}\right)x + \mu(\dot{x} - \dot{y}) &= B \sin(\omega t), \\ \ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + \left(1 + \frac{\Delta}{2}\right)y + \mu(\dot{y} - \dot{x}) &= 0. \end{aligned} \tag{4.46}$$

Здесь λ – параметр отрицательного трения автономных осцилляторов, Δ – их относительная частотная расстройка, μ – коэффициент диссипативной связи, B – амплитуда воздействия, $\omega = 1 + \Omega$ – частота воздействия. Центральная

³³ См. рис. 10.11 из [1] и соответствующее обсуждение.

частота осцилляторов принята за единицу, так что Ω представляет собой отстройку частоты сигнала от центральной.

Применим для анализа уравнений (4.46) метод медленно меняющихся амплитуд. Представим динамические переменные в виде

$$x = ae^{i\omega t} + a^* e^{-i\omega t}, \quad y = be^{i\omega t} + b^* e^{-i\omega t}, \quad (4.47)$$

где $a(t)$ и $b(t)$ – комплексные амплитуды осцилляторов, медленно меняющиеся на фоне колебаний с частотой сигнала ω . (Обратите внимание на отличие от случая трех взаимно связанных осцилляторов, см. формулу (4.2) из задачи 4.1.)

Наложим стандартные дополнительные условия

$$\dot{a}e^{i\omega t} + \dot{a}^* e^{-i\omega t} = 0, \quad \dot{b}e^{i\omega t} + \dot{b}^* e^{-i\omega t} = 0. \quad (4.48)$$

Тогда имеем следующие выражения для скоростей осцилляторов:

$$\dot{x} = i\omega ae^{i\omega t} - i\omega a^* e^{-i\omega t}, \quad \dot{y} = i\omega be^{i\omega t} - i\omega b^* e^{-i\omega t}. \quad (4.49)$$

Подставим соотношения (4.47), (4.49) в уравнения (4.45), умножим полученные выражения на $e^{-i\omega t}$ и проведем усреднение для исключения быстро осциллирующих членов. При этом удобно представить внешнее воздействие в виде $B \sin(\omega t) = B \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}$. После соответствующих преобразований, получаем следующие укороченные уравнения:

$$\begin{aligned} 2\dot{a} &= \lambda a - |a|^2 a + i \frac{1 - \omega^2 - \frac{\Delta}{2}}{\omega} a - \mu(a - b) - \frac{B}{2\omega}, \\ 2\dot{b} &= \lambda b - |b|^2 b + i \frac{1 - \omega^2 + \frac{\Delta}{2}}{\omega} b - \mu(b - a). \end{aligned} \quad (4.50)$$

При условии $\lambda \ll 1$ можно использовать, что $\omega \approx 1$, и положить

$$\frac{1 - \omega^2 \mp \frac{\Delta}{2}}{2\omega} \approx 1 - \omega \mp \frac{\Delta}{4} \quad \text{и} \quad \frac{B}{\omega} \approx B. \quad \text{Тогда}$$

$$\begin{aligned} 2\dot{a} &= \lambda a - |a|^2 a - 2i \left(\frac{\Delta}{4} + \Omega \right) a - \mu(a - b) - \frac{B}{2}, \\ 2\dot{b} &= \lambda b - |b|^2 b + 2i \left(\frac{\Delta}{4} - \Omega \right) b - \mu(b - a). \end{aligned} \quad (4.51)$$

В уравнениях (4.51) управляющий параметр λ может быть убран перенормировкой переменных и параметров

$$a = \sqrt{\lambda} \bar{a}, \quad b = \sqrt{\lambda} \bar{b}, \quad t = \bar{t}/\lambda, \quad \mu = \lambda \bar{\mu}, \quad \Delta = \lambda \bar{\Delta}, \quad \Omega = \lambda \bar{\Omega}, \quad B = \sqrt{\lambda} \bar{B}, \quad (4.52)$$

что приводит к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned}
2\dot{a} &= a - |a|^2 a - 2i \left(\frac{\Delta}{4} + \Omega \right) a - \mu(a-b) - \frac{B}{2}, \\
2\dot{b} &= b - |b|^2 b + 2i \left(\frac{\Delta}{4} - \Omega \right) b - \mu(b-a).
\end{aligned}
\tag{4.53}$$

Для сокращения записи черту над новыми переменными и параметрами опускаем.

Положим $a = R e^{i\psi_1}$ и $b = r e^{i\psi_2}$, где R, r и $\psi_{1,2}$ – действительные амплитуды и фазы осцилляторов относительно внешнего сигнала. Тогда получаем

$$\begin{aligned}
2\dot{R} &= R - R^3 + \mu(r \cos(\psi_2 - \psi_1) - R) - \frac{B}{2} \cos \psi_1, \\
2\dot{r} &= r - r^3 + \mu(R \cos(\psi_1 - \psi_2) - r), \\
\dot{\psi}_1 &= -\Omega - \frac{\Delta}{4} + \frac{r}{2R} \mu \sin(\psi_2 - \psi_1) + \frac{B}{4} \sin \psi_1, \\
\dot{\psi}_2 &= -\Omega + \frac{\Delta}{4} + \frac{R}{2r} \mu \sin(\psi_1 - \psi_2).
\end{aligned}
\tag{4.54}$$

В уравнениях для фаз осцилляторов считаем, что осцилляторы движутся в окрестности стационарных орбит $R = r = 1$. Тогда получаем

$$\begin{aligned}
\dot{\psi}_1 &= -\Omega - \frac{\Delta}{4} + \frac{\mu}{2} \sin(\psi_2 - \psi_1) + b \sin \psi_1, \\
\dot{\psi}_2 &= -\Omega + \frac{\Delta}{4} + \frac{\mu}{2} \sin(\psi_1 - \psi_2),
\end{aligned}
\tag{4.55}$$

где $b = B/4$ – нормированная амплитуда воздействия. Это и есть фазовые уравнения возбуждаемой внешним гармоническим сигналом системы двух диссипативно связанных осцилляторов. При этом собственные частоты осцилляторов определяются из (4.55) при выключенном воздействии:

$$\Omega_1 = -\frac{\Delta}{4}, \quad \Omega_2 = \frac{\Delta}{4}.
\tag{4.56}$$

Соответственно, частота захвата автономных осцилляторов в принятой нормировке $\Omega = \frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2} = 0$.

4.20. Полная синхронизация двух осцилляторов внешней силой.

Получите условие точного захвата двух возбуждаемых фазовых осцилляторов (4.55) внешней силой. Укажите вид области полной синхронизации на плоскости параметров сигнала частота – амплитуда воздействия (Ω, b) . Как она изменяется при вариации «внутренних» параметров системы: частотной расстройки осцилляторов Δ и величины связи μ ?

Решение. Условие точного захвата фаз обоих осцилляторов внешним сигналом – это обращение в ноль скоростей изменения их фаз, так что $\dot{\psi}_2 = \dot{\psi}_1 = 0$. При подстановке в (4.55) это приводит к следующим уравнениям

$$\begin{aligned} -\Omega - \frac{\Delta}{4} + \frac{\mu}{2} \sin(\psi_2 - \psi_1) + b \sin \psi_1 &= 0, \\ -\Omega + \frac{\Delta}{4} + \frac{\mu}{2} \sin(\psi_1 - \psi_2) &= 0. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Исключим из первого из них $\sin(\psi_2 - \psi_1)$. Тогда

$$\begin{aligned} 2\Omega &= b \sin \psi_1, \\ \Omega - \frac{\Delta}{4} &= \frac{\mu}{2} \sin(\psi_1 - \psi_2). \end{aligned} \quad (4.58)$$

Отсюда легко получаем условия седло-узловых бифуркаций, определяющих границы области полной синхронизации:

$$b = \pm 2\Omega, \quad (4.59)$$

$$\Omega = \frac{\Delta}{4} \pm \frac{\mu}{2}. \quad (4.60)$$

Условие (4.59) задает на плоскости частота – амплитуда воздействия (Ω, b) классический по форме язык синхронизации, показанный на рис. 4.21. Он имеет основанием точку $\Omega = 0$, отвечающую частоте захвата автономных осцилляторов. Условие (4.60) дополняет (4.59) и определяет частотную ширину полосы режима захвата осцилляторов внешней силой. Центр этой полосы лежит на собственной частоте второго осциллятора $\Omega_2 = \frac{\Delta}{4}$, а сама она имеет ширину, равную константе связи μ .

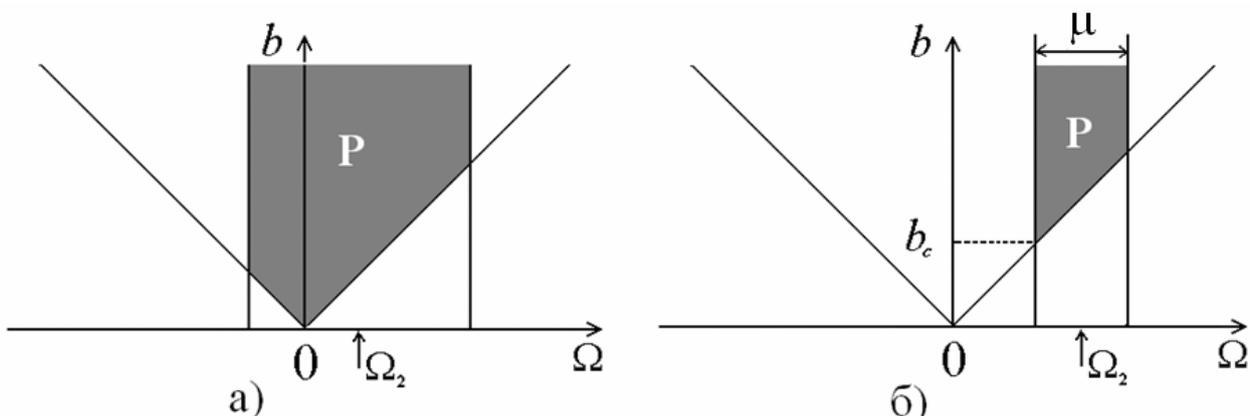


Рис. 4.21. Область точного захвата P системы двух возбуждаемых фазовых осцилляторов (4.55): взаимная синхронизация автономных осцилляторов (а), режим биений автономных осцилляторов (б). Ω_2 – собственная частота второго осциллятора, μ – величина связи, b_c – амплитудный порог синхронизации квазипериодических колебаний.

Область полной синхронизации системы осцилляторов внешней силой дается пересечением областей, границы которых заданы условиями (4.59), (4.60). Она показана на рис. 4.21 темным цветом.

Нетрудно понять, что возможны два типа областей полной синхронизации, показанные соответственно на рис. 4.21, *а* и *б*. Первый тип имеет место, если левая граница полосы (4.60) проходит левее вершины языка $\Omega = 0$. Тогда из (4.59), (4.60) следует, что такой тип области полной синхронизации реализуется при $|\Delta| < 2\mu$, а второй – при $|\Delta| > 2\mu$. Замечательно, что эти неравенства соответствуют условиям захвата и режима биений двух автономных связанных осцилляторов, задача 4.2. Таким образом, первый тип устройства области полной синхронизации отвечает ситуации, когда в отсутствие внешнего сигнала осцилляторы *взаимно захвачены*, а второй – когда они совершают *квазипериодические колебания с несоизмеримыми частотами*.

Из сравнения рис. 4.21, *а*, *б* можно видеть, что внешний сигнал может точно захватить не только синхронизованные между собой осцилляторы, но и осцилляторы, совершающие квазипериодические колебания. При этом, однако, режим полной синхронизации квазипериодических колебаний носит пороговый характер по амплитуде. Из (4.59), (4.60) легко находим порог синхронизации квазипериодических колебаний:

$$b_c = \frac{\Delta}{2} - 2\mu. \quad (4.61)$$

4.21. Два возбуждаемых внешней силой осциллятора. Режим захвата автономных осцилляторов. Постройте карты ляпуновских показателей системы (4.55) на плоскости частота – амплитуда воздействия. Обсудите возможные типы колебаний в системе. Рассмотрите случай, когда автономные осцилляторы захвачены, $\mu = 0.3$ и $\Delta = 0.2$. Дополните карты примерами характерных фазовых портретов и обсудите возможность частичного захвата осцилляторов внешней силой.

Решение. Карты ляпуновских показателей двух возбуждаемых внешней силой фазовых осцилляторов (4.55) на плоскости частота – амплитуда воздействия (Ω , b) приведены на рис. 4.22. При этом рис. 4.22, *а* отвечает случаю, когда автономные осцилляторы захвачены. Использована та же цветовая гамма, что и на рис. 4.10 из задачи 4.8.

Карта ляпуновских показателей дополняется фазовыми портретами системы на плоскости фаз осцилляторов (ψ_1, ψ_2) , примеры которых даны на рис. 4.23.

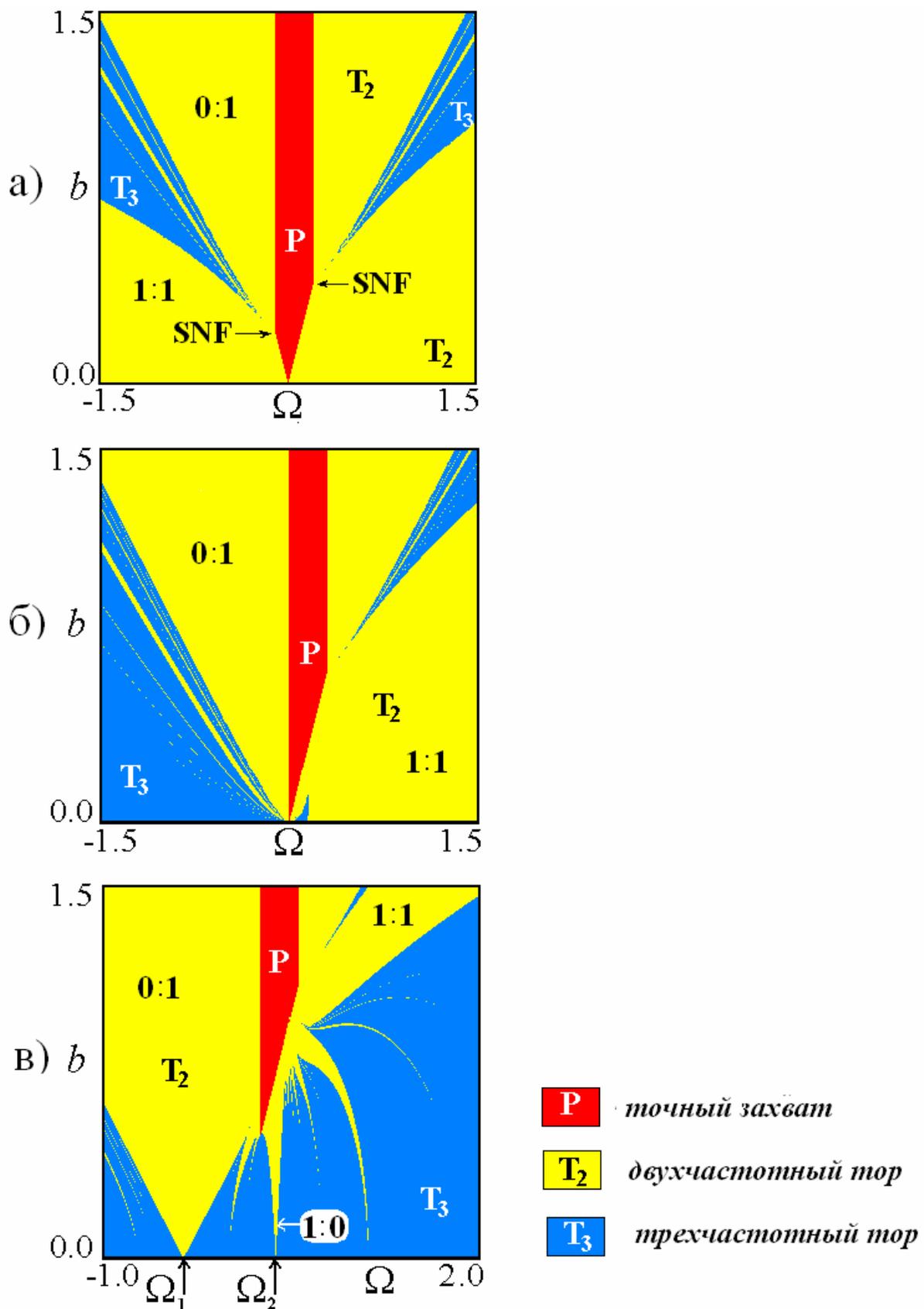


Рис. 4.22. Карты ляпуновских показателей системы двух возбуждаемых фазовых осцилляторов (4.55): режим захвата автономных осцилляторов, $\mu = 0.3$ и $\Delta = 0.2$ (а); пороговая ситуация, $\mu = 0.3$ и $\Delta = 0.6$ (б); режим биений автономных осцилляторов, $\mu = 0.3$ и $\Delta = 1.6$ (в). Ω_1 и Ω_2 – собственные частоты первого и второго осцилляторов.

На рис. 4.22, *a* область P отвечает приведенному выше аналитическому рассмотрению, см. рис. 4.21, *a*. В этой области в системе имеются три неустойчивые и одна устойчивая неподвижные точки, последняя и определяет режим полного захвата связанных осцилляторов. Соответствующий фазовый портрет приведен на рис. 4.23, *a*. В областях T_2 притягивающей является инвариантная кривая (двухчастотный тор), которая отвечает двухчастотной квазипериодической динамике, рис. 4.23, *б, в*. В области T_3 реализуется поток фазовых траекторий, и притягивающего объекта нет, рис. 4.23, *г*.

Построение фазовых портретов выявляет два основных типа двухчастотных торов, реализующихся в системе:

а) рис. 4.23, *б*. В этом случае в установившемся режиме фаза первого осциллятора ψ_1 колеблется около некоторого стационарного значения, в то время как фаза второго ψ_2 неограниченно нарастает. Этот режим можно охарактеризовать как *частичный захват первого осциллятора* внешней силой;

б) рис. 4.23, *в*. В этом случае неограниченно дрейфуют фазы обоих осцилляторов, однако относительная фаза осцилляторов $\theta = \psi_1 - \psi_2$ колеблется около стационарного значения. Это режим *частичного захвата относительной фазы* осцилляторов.

Если режимы двухчастотной квазипериодичности характеризовать числом вращения $w = p : q$, где числа p и q отвечают количеству пересечений инвариантной кривой с вертикальной и горизонтальной сторонами фазового квадрата (ψ_1, ψ_2) , то первый из указанных режимов имеет тип $0 : 1$, а второй – $1 : 1$.

На плоскости (Ω, b) на рис. 4.22, *a* можно видеть пару точек *saddle node fan*, в которых сходятся области двухчастотных торов, трехчастотных торов и периодических режимов. Эти точки легко могут быть найдены аналитически из соотношений (4.59), (4.60), как условия пересечения двух линий седло-узловых бифуркаций неподвижных точек разного типа, так что

$$b = \frac{\Delta}{2} \pm \mu, \quad \Omega = \frac{\Delta}{4} \pm \frac{\mu}{2}, \quad (4.62)$$

В рассматриваемом случае точки (4.62) определяют пороговый уровень амплитуды сигнала, при котором становятся возможными трехчастотные квазипериодические режимы. Выходящие из этих точек языки трехчастотных торов T_3 делят область двухчастотных торов на две характерные области.

Первая из них располагается в области малых амплитуд. Внутри нее имеет место частичный захват относительной фазы осцилляторов $1 : 1$. Вторая

располагается в области больших амплитуд. Внутри нее имеет место режим частичного захвата первого осциллятора $0:1$. При этом картина в качественном отношении симметрична – указанные режимы реализуются как слева, так и справа от области полной синхронизации.

Физически появление двух таких режимов понятно: маленькая внешняя сила не может разрушить сильный захват автономных осцилляторов, но может синхронизовать их как единое целое. Если же амплитуда воздействия велика, то взаимная синхронизация разрушается, и внешняя сила захватывает непосредственно возбуждаемый первый осциллятор. Стоит отметить, что отсутствует (по крайней мере, на визуальном уровне) возможность частичного захвата второго осциллятора – он может захватываться внешней силой только точно и одновременно с первым внутри области P .

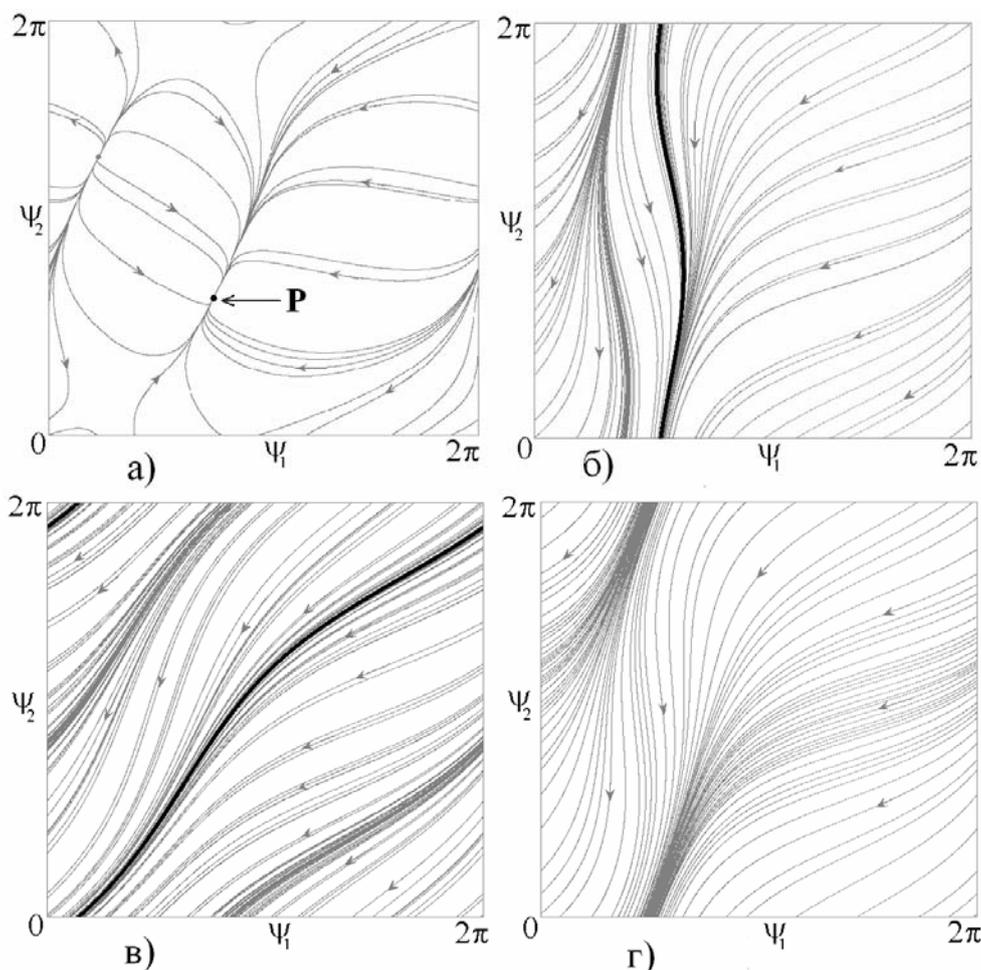


Рис. 4.23. Фазовые портреты в режиме захвата автономных осцилляторов: полный захват обоих осцилляторов внешней силой, P – устойчивая неподвижная точка; $\Omega = 0.1$, $b = 0.3$ (а); частичный захват фазы первого осциллятора, $\Omega = 0.75$, $b = 0.9$ (б); частичный захват относительной фазы осцилляторов, $\Omega = 0.75$, $b = 0.4$ (в); трехчастотный тор, $\Omega = 0.75$, $b = 0.75$ (г). Значения остальных параметров $\mu = 0.3$ и $\Delta = 0.2$.

4.22. Точка перехода от режима захвата к режиму биений в автономной системе. Постройте карту ляпуновских показателей системы (4.55) на плоскости частота – амплитуда воздействия, отвечающую пороговой ситуации на границе области синхронизации автономных осцилляторов, $\mu = 0.3$ и $\Delta = 0.6$.

Решение. Увеличим теперь взаимную частотную расстройку осцилляторов Δ . При этом будет наблюдаться переход от режима захвата автономных осцилляторов к режиму биений. Карта ляпуновских показателей для порогового значения $\Delta = 2\mu$ показана на рис. 4.22, б. Сравнивая его с рис. 4.22, а, заключаем, что произошли заметные изменения. Левая точка SNF «влипает» в основание (острие) языка синхронизации. Таким образом, возникла *новая ситуация коразмерности три*. Теперь в области частот, меньших центральной частоты автономных осцилляторов $\Omega < 0$, область трехчастотных торов не имеет амплитудного порога. Это означает, что трехчастотные режимы могут возникать при сколь угодно малой величине внешнего сигнала. Полосы двухчастотных резонансных торов более высокого порядка все еще достаточно узкие, но ширина их немного увеличилась. Теперь области их существования подходят к основанию языка $\Omega = 0$, а значит, соответствующие резонансные торы могут наблюдаться при малых амплитудах сигнала.

4.23. Режим биений автономных осцилляторов. Постройте карту ляпуновских показателей системы (4.55) на плоскости частота – амплитуда воздействия, отвечающую режиму биений автономных осцилляторов, $\mu = 0.3$ и $\Delta = 1.6$.

Решение. Увеличим расстройку осцилляторов еще больше и перейдем в режим биений автономных осцилляторов. Соответствующая карта приведена на рис. 4.22, в.

Можно видеть область точного захвата обоих осцилляторов внешней силой P , соответствующую аналитическому рассмотрению и рис. 4.21, б. Теперь точный захват возможен в окрестности собственной частоты второго осциллятора, равной при выбранных значениях параметров $\Omega_2 = \frac{\Delta}{4} = 0.4$. Область полной синхронизации имеет пороговый по амплитуде характер, величина которого определяется формулой (4.61).

Существенно изменились области трехчастотных торов. Теперь амплитудный порог возникновения таких торов исчез и в высокочастотной области. Таким образом, трехчастотные торы занимают всю нижнюю часть

плоскости параметров частота – амплитуда воздействия.

Область частичного захвата первого осциллятора $w = 0 : 1$ приобрела вид традиционного языка, погруженного в область трехчастотных торов. Острие языка отвечает собственной частоте первого осциллятора $\Omega_1 = -\frac{\Delta}{4}$. Эта область вытесняет режимы синхронизации относительной фазы.

Особенностью рассматриваемого режима является возможность двухчастотного тора типа $1:0$, фазовый портрет которого показан на рис. 4.24, *а*. В этом случае фаза второго осциллятора ψ_2 совершает колебания, в то время как фаза первого ψ_1 неограниченно нарастает. Таким образом, это режим *частичного захвата второго осциллятора*. Область существования этого режима имеет вид языка, который при уменьшении амплитуды сигнала продолжает область точного захвата P , а острие располагается на оси частот в точке собственной частоты второго осциллятора $\Omega_2 = \frac{\Delta}{4}$.

Таким образом, в рассматриваемом случае можно осуществить частичный захват второго осциллятора, непосредственно не возбуждаемого внешней силой. При этом может быть использована даже малая амплитуда сигнала. Это существенное отличие от случая, когда автономные осцилляторы демонстрируют взаимный захват. Тогда связь осцилляторов сильная, и при воздействии на частоте $\Omega \approx \Omega_2$ при малых амплитудах сигнала возможен только режим захвата относительной фазы. Если же частотная расстройка осцилляторов велика настолько, что автономные осцилляторы переходят в режим квазипериодических колебаний, то первый осциллятор не оказывает столь сильного воздействия на второй. При этом внешняя сила может захватить второй осциллятор на фоне фазового дрейфа первого.

Режим частичного захвата относительной фазы осцилляторов $w = 1:1$ сохраняется, но ему теперь отвечают две существенно неравноценные по размеру области. При $\Omega > 0$ первая из них на рис. 4.22, *в* теперь отделена от оси частот широкой областью трехчастотных торов. Второй области такого режима отвечает очень узкий язык с вершиной при $\Omega = 0$.

Имеется также множество языков других резонансных двухчастотных торов с основаниями на оси частот, погруженных в область трехчастотного режима. В качестве примера на рис. 4.24, *б* показан фазовый портрет режима, для которого $w = 2:1$.

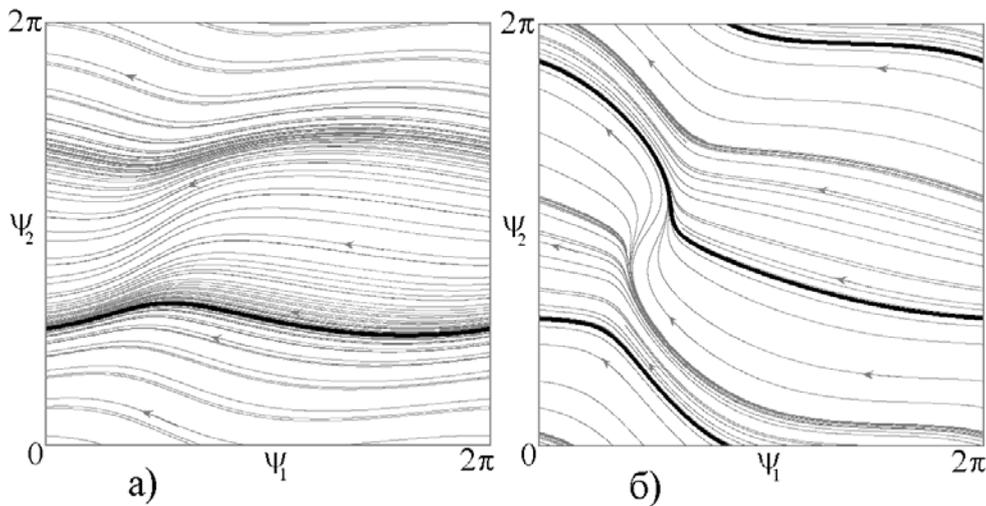


Рис. 4.24. Фазовые портреты в режиме биений автономных осцилляторов: частичный захват фазы второго осциллятора, $\Omega = 0.35$, $b = 0.45$ (а); резонансный двухчастотный тор с числом вращения $w = 2 : 1$, $\Omega = 0.22$, $b = 0.41$ (б). Значения остальных параметров $\mu = 0.3$ и $\Delta = 1.6$.

4.24. Карта торов двух возбуждаемых осцилляторов внешней силой.

Постройте карту торов двух возбуждаемых фазовых осцилляторов в режиме квазипериодических колебаний. Обсудите ее устройство.

Решение. На рис. 4.25 показана карта торов возбуждаемой системы (4.55), отвечающая режиму биений автономных осцилляторов. Цветовая палитра соответствует рис. 4.11 из задачи 4.9. Числа вращения некоторых основных языков указаны стрелками.

Можно отметить следующие наиболее существенные моменты в организации языков резонансных двухчастотных торов в режиме биений автономных осцилляторов. Самый широкий язык $w = 0 : 1$ отвечает частичному захвату первого осциллятора, а его вершина располагается на собственной частоте этого осциллятора $\Omega = \Omega_1 = -\frac{\Delta}{4}$. Язык $w = 1 : 0$, отвечающий частичному захвату второго осциллятора, продолжает область полного захвата осцилляторов. Его основание, как мы уже отмечали, отвечает собственной частоте второго осциллятора $\Omega = \Omega_2 = \frac{\Delta}{4}$.

В свою очередь, точка $\Omega = \Omega_2$ является центром целой системы языков двухчастотных торов более высокого порядка. При этом языки образуют пары с одинаковыми числами вращения, располагающиеся по разные стороны языка $w = 1 : 0$. Это хорошо видно на примере двух наиболее широких языков $w = 2 : 1$. Фазовые портреты для них отличаются наклоном инвариантных кривых в разные стороны.

Можно установить правило расположения оснований языков двухчастотных торов на оси частот. Пусть связь осцилляторов и амплитуда сигнала исчезающе малы. Тогда уравнения (4.55) описывают простое вращение осцилляторов с частотами

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_1 &= -\frac{\Delta}{4} - \Omega, \\ \dot{\psi}_2 &= \frac{\Delta}{4} - \Omega.\end{aligned}\tag{4.63}$$

Резонансу порядка $w = p : q$ отвечает условие $\frac{p}{q} = \pm \frac{\dot{\psi}_1}{\dot{\psi}_2}$. Тогда из (4.63) следует, что

$$\Omega = \frac{p+q}{p-q}\Omega_2 \quad \text{или} \quad \Omega = \frac{p-q}{p+q}\Omega_2.\tag{4.64}$$

В Таблице 4.1 приведены полученные с помощью (4.64) координаты острий некоторых основных языков двухчастотных торов. Можно видеть, что карта на рис. 4.25, *a* находится в хорошем соответствии с данной таблицей.

Таблица 4.1. Основания языков двухчастотных торов на оси частоты воздействия; $\Omega_2 = \Delta/4$ – собственная частота второго осциллятора.

$w = 0 : 1$	$w = 1 : 0$	$w = 1 : 1$	$w = 2 : 1$	$w = 3 : 1$	$w = 3 : 2$
$\Omega = -\Omega_2 = \Omega_1$	$\Omega = \Omega_2$	$\Omega = 0$	$\Omega = 3\Omega_2$	$\Omega = 2\Omega_2$	$\Omega = 5\Omega_2$
			$\Omega = \frac{1}{3}\Omega_2$	$\Omega = \frac{1}{2}\Omega_2$	$\Omega = \frac{1}{5}\Omega_2$

Отметим, что пары значений частот Ω в таблице для одного числа вращения отвечают двум разным знакам в соотношении $\frac{p}{q} = \pm \frac{\dot{\psi}_1}{\dot{\psi}_2}$. Поэтому для каждой пары потоки фазовых траекторий оказываются разнонаправленными.

Как можно видеть из рис. 4.25, наиболее сложно устроена нижняя граница области полной синхронизации, которая имеет протяженный «контакт» с областями с числами вращения 1:1, 2:1 и т.д. Однако наиболее характерным при выходе через нижнюю границу области полной синхронизации является возникновение режима частичной синхронизации второго осциллятора с числом вращения 1:0.

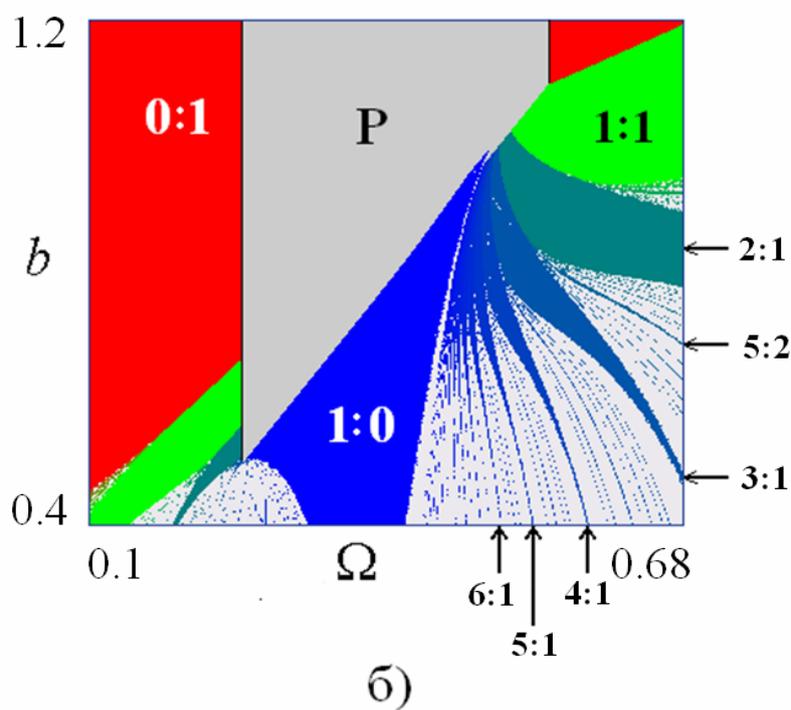
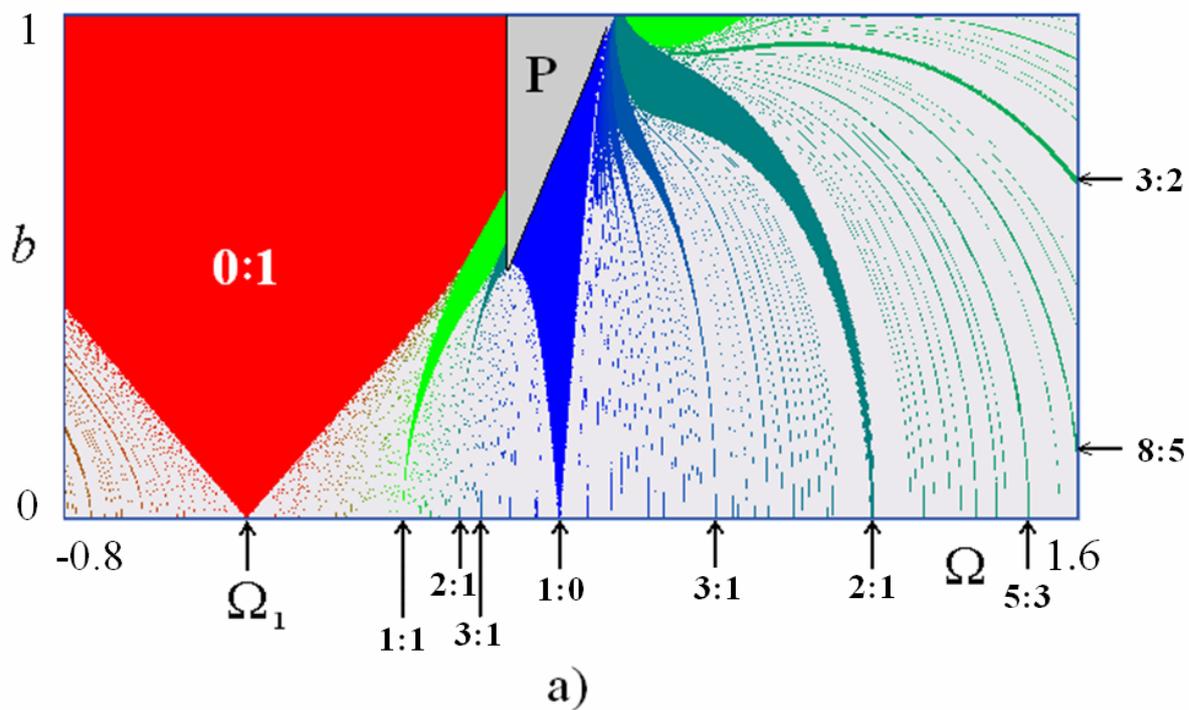


Рис. 4.25. Карта торов двух возбуждаемых фазовых осцилляторов в режиме биений автономных осцилляторов, $\mu = 0.3$ и $\Delta = 1.6$ (а). Увеличенный фрагмент карты торов, иллюстрирующий устройство нижней границы области полной синхронизации (б). Указаны числа вращения основных резонансных двухчастотных торов.

4.25. Плоскость частота – амплитуда воздействия исходной системы двух возбуждаемых осцилляторов Ван-дер-Поля. Постройте карты ляпуновских показателей для исходных возбуждаемых осцилляторов Ван-дер-Поля (4.46) на плоскости частота – амплитуда воздействия. Сравните их со случаем фазовых уравнений. Проиллюстрируйте основные режимы с помощью портретов осцилляторов в стробоскопическом сечении Пуанкаре.

Решение. Исходная система (4.46) по сравнению с фазовыми уравнениями (4.55) имеет дополнительный параметр – параметр возбуждения осцилляторов λ . Выберем его значение $\lambda = 1$, что отвечает случаю, когда фазовое приближение, вообще говоря, на количественном уровне не эффективно. Обсудим, какие особенности устройства плоскости параметров частота – амплитуда воздействия для возбуждаемых фазовых осцилляторов окажутся грубыми по отношению к случаю исходной системы осцилляторов Ван-дер-Поля.

На рис. 4.26 показаны карты ляпуновских показателей системы (4.46), причем рис. 4.26, *а* отвечает случаю захвата, а рис. 4.26, *б* – случаю биений автономных осцилляторов. Сравним их с рис. 4.22. Можно видеть, что, несмотря на значительную величину управляющего параметра $\lambda = 1$, картина имеет много общих черт со случаем фазовых уравнений. Прежде всего, это относится к конфигурации области полной синхронизации, которая по сравнению с рис. 4.22 лишь немного искажена по форме. В режиме захвата автономных осцилляторов можно четко видеть точку *saddle node fan* с характерной картиной трехчастотных и двухчастотных торов в ее окрестности, включая «веер» областей резонансных двухчастотных торов высокого порядка. А вот высокочастотная точка *saddle node fan* оказывается разрушенной по сравнению со случаем фазовых уравнений, и соответствующая область трехчастотных торов полностью исчезает. На ее месте реализуются двухчастотные торы, причем можно видеть систему очень узких языков периодических режимов более высокого порядка, которая также отсутствует в случае фазовых уравнений. Периоды некоторых режимов обозначены на рис. 4.26, *а* цифрами. Они определены численно как периоды циклов в стробоскопическом сечении системы (4.46) через период внешнего воздействия. (В этом случае области *P* отвечает режим периода 1.)

Вид карты для случая биений автономных осцилляторов на рис. 4.26, *б* также во многом отвечает случаю фазовых уравнений. Прежде всего, четко фиксируется амплитудный порог полной синхронизации квазипериодических

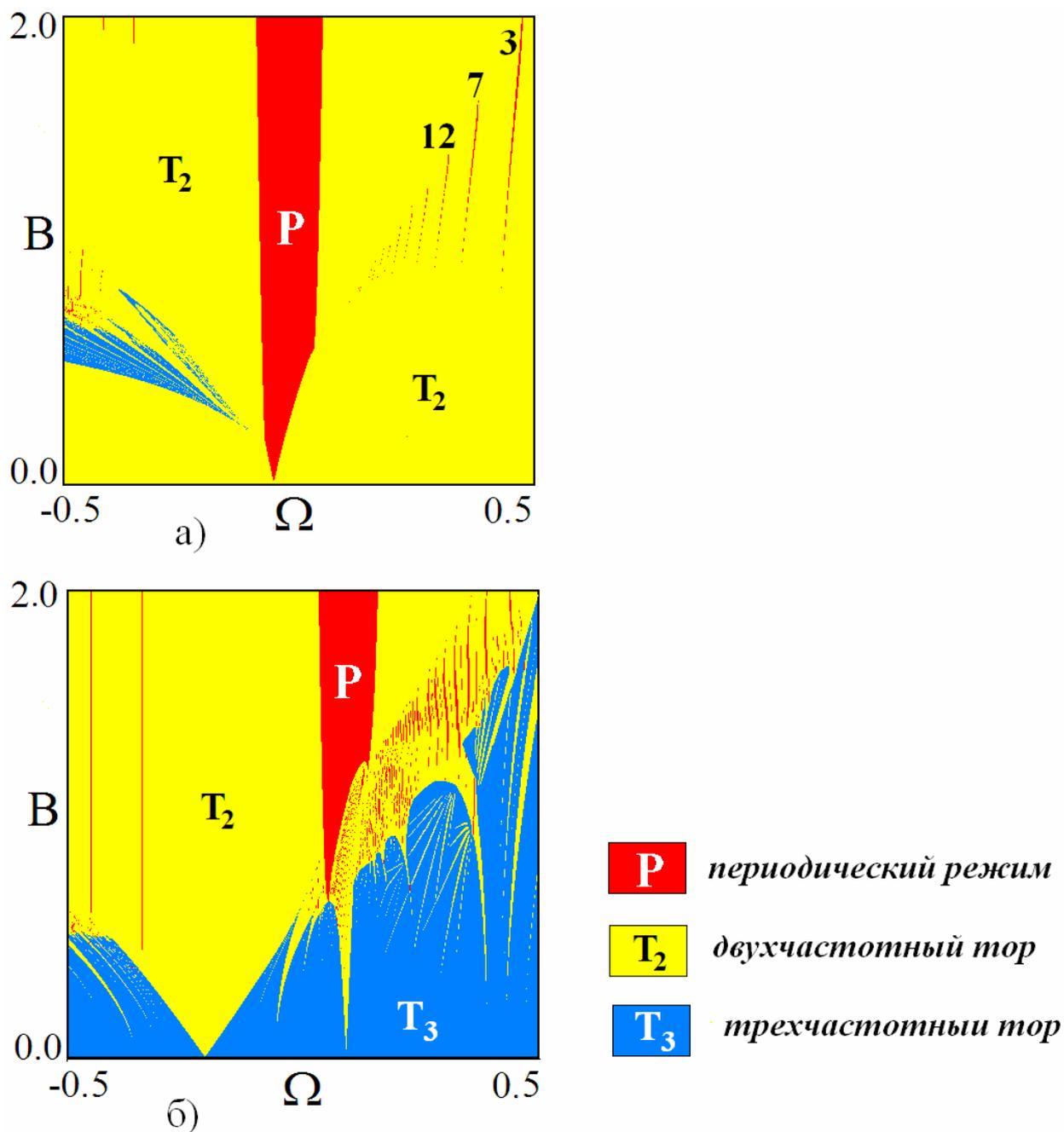


Рис. 4.26. Карты ляпуновских показателей возбуждаемой исходной системы связанных осцилляторов Ван-дер-Поля (4.46): режим захвата автономных осцилляторов, $\mu = 0.1$ и $\Delta = 0.1$ (а); режим биений автономных осцилляторов, $\mu = 0.1$ и $\Delta = 0.6$ (б).

колебаний. Так же хорошо видна примыкающая к оси частот область трехчастотных торов, внутри которой располагаются описанные в предыдущей задаче языки различных резонансных двухчастотных торов. Однако высокочастотная точка *saddle node fan* так же разрушена с образованием области двухчастотных торов со встроенными многочисленными узкими языками периодических режимов высоких периодов.

Еще один новый эффект по сравнению со случаем фазовых уравнений – возникновение на рис. 4.26, б нескольких дополнительных систем «вееров» языков двухчастотных торов в правой части карты, которые не связаны с областью полной синхронизации. Таких типов двухчастотных торов в фазовых уравнениях не наблюдается.

Дадим теперь иллюстрации в виде стробоскопических сечений. Для этого выполняются сечения Пуанкаре системы (4.46) через период внешнего воздействия. В результате, получим набор точек, вложенный в пространство динамических переменных системы (4.48) (x, \dot{x}, y, \dot{y}) . Для их визуализации используем проекции на плоскость переменных первого и второго осцилляторов (x, \dot{x}) и (y, \dot{y}) . Такие иллюстрации для режима захвата автономных осцилляторов даны в первых двух колонках на рис. 4.27. В третьей колонке даны аналогичные проекции на плоскость скоростей обоих осцилляторов (\dot{x}, \dot{y}) – своего рода фигуры Лиссажу.

Для того, чтобы более достоверно зафиксировать тип режима, необходимо также дать иллюстрации, аналогичные полученным с помощью фазовых уравнений. Воспользуемся результатом задачи 2.5, согласно которому траектория, даваемая укороченными уравнениями на плоскости «медленных переменных», фактически, дает сечение Пуанкаре исходной системы. Поэтому на траекториях в сечениях Пуанкаре в первых двух колонках рис. 4.27 определим фазы осцилляторов φ_1 и φ_2 как углы, под которыми изображающая точка видна из начала координат. Полученные таким образом траектории на плоскости фаз (φ_1, φ_2) представлены в четвертой колонке на рис. 4.27.

Первая серия рисунков относится к точке $B = 0.15$, $\Omega = 0.15$ на плоскости параметров рис. 4.26, а. В этом случае амплитуда сигнала невелика. При этом портреты обоих осцилляторов практически идентичны и демонстрируют замкнутые инвариантные кривые. Поскольку это стробоскопические сечения, то в исходной системе имеет место двухчастотный тор. Динамика фаз в правой колонке демонстрирует режим с числом вращения 1:1. Таким образом, наблюдается режим частичного захвата относительной фазы осцилляторов,

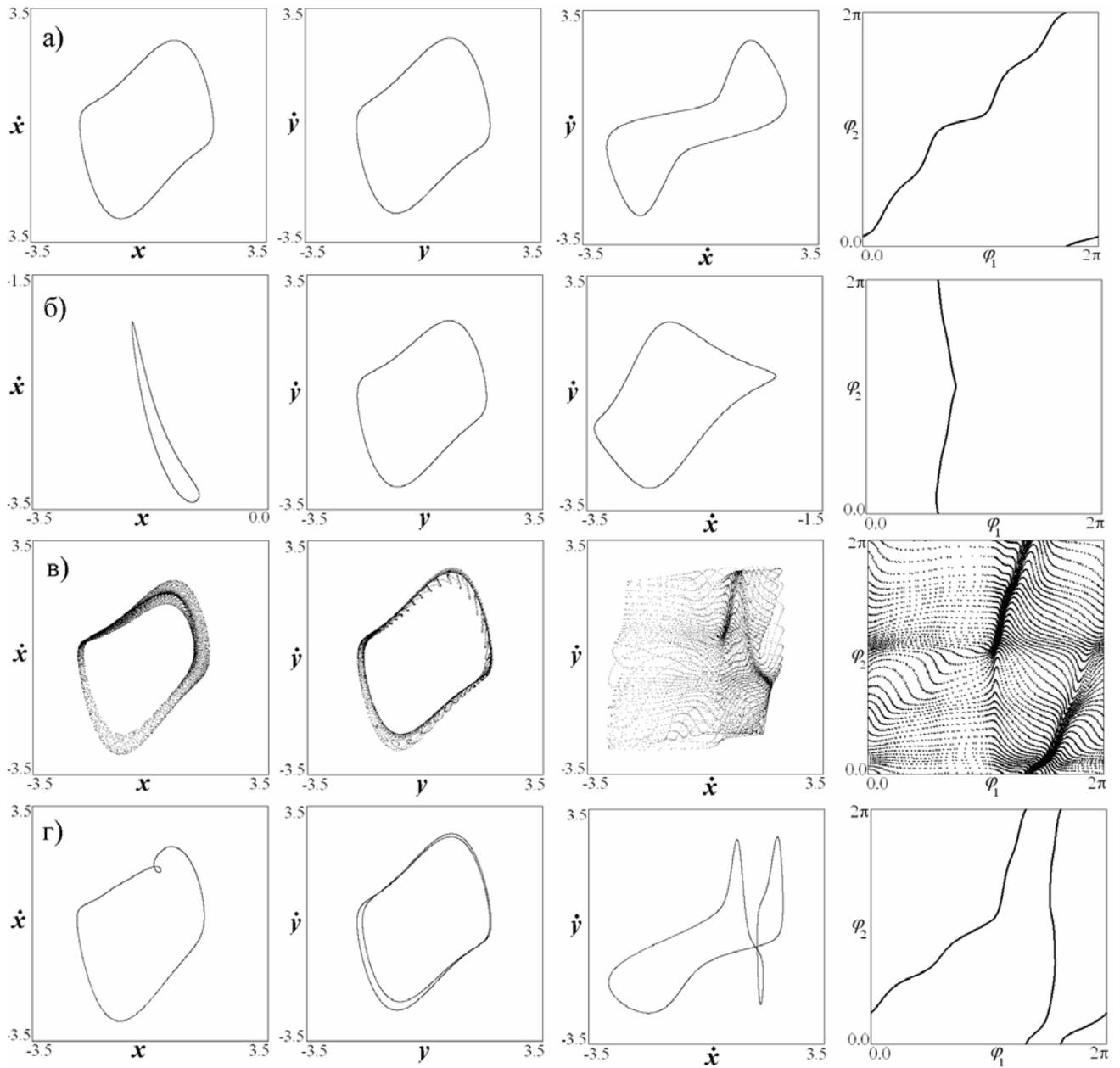


Рис. 4.27. Стробоскопические сечения возбуждаемой системы связанных осцилляторов Ван-дер-Поля (4.46) в проекции на плоскость переменных первого и второго осцилляторов; в виде фигур Лиссажу на плоскости скоростей осцилляторов; портреты на плоскости фаз осцилляторов в стробоскопическом сечении. Значения параметров $\lambda = 1$, $\Delta = 0.1$, $\mu = 0.1$; $B = 0.15$, $\Omega = 0.15$ (а), $B = 1.5$, $\Omega = 0.15$ (б), $B = 0.45$, $\Omega = -0.25$ (в), $B = 0.5$, $\Omega = -0.25$ (г).

который слабо возмущается внешним воздействием. По этой причине стробоскопические сечения близки к фазовым портретам автономных осцилляторов.

Следующий рисунок, рис. 4.27, б, отвечает тому же значению частоты воздействия, но существенно большей амплитуде $B = 1.5$. В этом случае портрет первого осциллятора в стробоскопическом сечении заметно возмущен, в отличие от второго. Фаза первого осциллятора совершает малые колебания, в то время как фаза второго неограниченно нарастает. Таким образом, с ростом амплитуды система переходит в режим частичного захвата первого осциллятора.

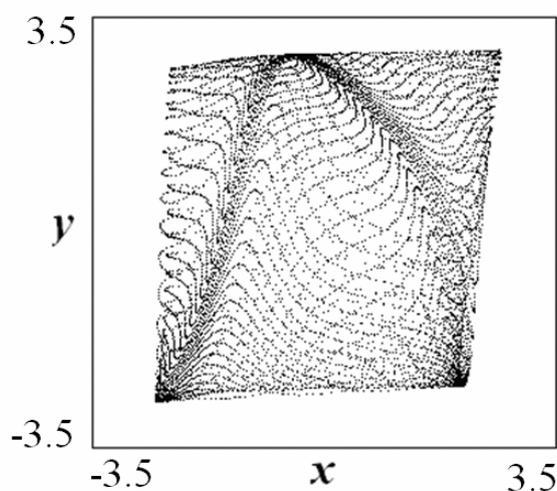


Рис. 4.28. Стробоскопическое сечение системы (4.46) в проекции на плоскость (x, y) в режиме трехчастотной квазипериодичности (трехчастотного тора). Параметры отвечают рис. 4.27, в.

Рис. 4.27, в отвечают значения амплитуды и частоты $B = 0.45$, $\Omega = -0.45$. В этом случае система демонстрирует трехчастотную квазипериодичность. Замкнутые инвариантные кривые в стробоскопическом сечении разрушаются, а на плоскости фаз наблюдается поток фазовых траекторий. При этом фигуры Лиссажу для данного режима оказываются не замкнутыми, что отвечает появлению третьей частоты, хотя на рисунке просматривается некоторая структура. На рис. 4.28 в качестве примера дан крупномасштабный портрет фигуры Лиссажу на плоскости (x, y) для режима трехчастотных колебаний, на котором хорошо видны многочисленные точки поворота как по вертикальной, так и по горизонтальной оси.

Наконец, рис. 4.27, г отвечает немного большей амплитуде $B = 5$. Можно видеть, что небольшое изменение амплитуды привело к резонансу на трехчастотном торе. Инвариантные кривые снова стали замкнутыми, и возник двухчастотный тор с числом вращения $1:2$. Этот факт хорошо виден как на

плоскости фаз, так и на фигуре Лиссажу в третьей колонке, которая демонстрирует две точки поворота по горизонтали и одну по вертикали.

Таким образом, картина, предсказанная на основе фазовых уравнений, является достаточно грубой: основные существенные ее элементы сохраняются для исходной системы вплоть до значения управляющего параметра $\lambda = 1$. С другой стороны, в области между узкими языками синхронизации периода 3, 7, 12 и т.д. на рис. 4.26, *a* имеют место режимы с числом вращения 1:1. Эти режимы возникают вместо трехчастотных торов, которые были характерны для фазовых уравнений.

4.26. Фазовые уравнения возбуждаемой системы трех диссипативно связанных осцилляторов Ван-дер-Поля. Получите укороченные и фазовые уравнения для возбуждаемой системы из трех диссипативно связанных осцилляторов Ван-дер-Поля:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \mu(\dot{x} - \dot{y}) &= B \sin \omega t, \\ \ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + (1 + \Delta_1)y + \mu(\dot{y} - \dot{x}) + \mu(\dot{y} - \dot{z}) &= 0, \\ \ddot{z} - (\lambda - z^2)\dot{z} + (1 + \Delta_2)z + \mu(\dot{z} - \dot{y}) &= 0. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Решение. Действуя аналогично задаче 4.19, нетрудно получить соответствующие укороченные уравнения

$$\begin{aligned} 2\dot{a} &= a - |a|^2 a - 2i\Omega - \mu(a - b) - \frac{B}{2\omega}, \\ 2\dot{b} &= b - |b|^2 b - i(2\Omega - \Delta_1)b - \mu(b - a) - \mu(b - c), \\ 2\dot{c} &= c - |c|^2 c - i(2\Omega - \Delta_2)c - \mu(c - b). \end{aligned} \quad (4.66)$$

Уравнения для фаз получаем, полагая в (4.66) $a = \text{Re}^{i\psi_1}$, $b = r e^{i\psi_2}$ и $c = v e^{i\psi_3}$. В этом случае фазы определены относительно внешнего сигнала. Считая, что осцилляторы движутся вблизи автономных орбит $R = r = v = 1$, для фаз осцилляторов получаем

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= -\Omega - \frac{\mu}{2} \sin \theta + b \sin \psi_1, \\ \dot{\psi}_2 &= -\Omega + \frac{\Delta_1}{2} + \frac{\mu}{2} \sin \theta - \frac{\mu}{2} \sin \varphi, \\ \dot{\psi}_3 &= -\Omega + \frac{\Delta_2}{2} + \frac{\mu}{2} \sin \varphi. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Здесь введены относительные фазы осцилляторов

$$\theta = \psi_1 - \psi_2, \quad \varphi = \psi_2 - \psi_3. \quad (4.68)$$

4.27. Режим полной синхронизации трех осцилляторов внешней силой.

Найдите условия точного захвата трех фазовых осцилляторов (4.67) внешней силой. Обсудите возможные особенности такого режима по сравнению со случаем двух возбуждаемых осцилляторов.

Решение. Найдем условие полной синхронизации трех осцилляторов внешней силой. Полагая в (4.67) $\dot{\psi}_1 = \dot{\psi}_2 = \dot{\psi}_3$, получаем

$$\begin{aligned}\Omega &= -\frac{\mu}{2} \sin \theta + b \sin \psi_1, \\ \Omega - \frac{\Delta_1}{2} &= \frac{\mu}{2} \sin \theta - \frac{\mu}{2} \sin \varphi, \\ \Omega - \frac{\Delta_2}{2} &= \frac{\mu}{2} \sin \varphi.\end{aligned}\tag{4.69}$$

Разрешим эти уравнения относительно синусов фаз:

$$\begin{aligned}3\Omega - \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} &= b \sin \psi_1, \\ 2\Omega - \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} &= \frac{\mu}{2} \sin \theta, \\ \Omega - \frac{\Delta_2}{2} &= \frac{\mu}{2} \sin \varphi.\end{aligned}\tag{4.70}$$

Отсюда легко находим условия седло-узловых бифуркаций:

$$\begin{aligned}b &= \pm 3\left(\Omega - \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{6}\right), \\ \Omega &= \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{4} \pm \frac{\mu}{4}, \\ \Omega &= \frac{\Delta_2}{2} \pm \frac{\mu}{2}.\end{aligned}\tag{4.71}$$

Входящие в эти уравнения значения частотных расстройок имеют простой физический смысл: $\Omega^* = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{6}$ – частота захвата трех автономных осцилляторов, равная среднему арифметическому собственных частот всех осцилляторов, $\Omega_{2-3} = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{4}$ – частота захвата второго и третьего при отключенном первом, а $\Omega_3 = \frac{\Delta_2}{2}$ – собственная частота третьего осциллятора.

Обратимся теперь к устройству плоскости параметров частота – амплитуда воздействия (Ω, b) . Первое условие (4.71) задает на ней язык с вершиной, отвечающей центральной частоте трех осцилляторов Ω^* , как показано на

рис. 4.29. Второе условие (4.71) определяет полосу, центр которой отвечает частоте взаимного захвата второго и третьего осцилляторов Ω_{2-3} , а ширина $\frac{\mu}{2}$ определяется величиной связи. Третье условие (4.71) также задает полосу, центр которой отвечает собственной частоте третьего осциллятора Ω_3 , а ширина равна точно константе связи μ .

При вариации параметров осцилляторов $(\Delta_1, \Delta_2, \mu)$ взаимное положение языка и двух указанных полос будет меняться. При этом реализуется достаточно большое количество вариантов. Они, однако, разбиваются на три характерные группы в соответствии с рис. 4.29:

а) полосы имеют общую область, которая захватывает вершину языка, рис. 4.29, а;

б) полосы имеют общую область, однако она не захватывает вершину языка, рис. 4.29, б;

в) обе полосы не имеют общей области, рис. 4.29, в.

Эти три ситуации определяют три типа динамики возбуждаемых осцилляторов. В случае а) в системе возможен полный захват трех осцилляторов внешней силой, причем амплитудный порог синхронизации отсутствует. В случае б) полный захват также возможен, но имеет место порог по амплитуде. В случае в) полный захват не возможен.

Отметим, что первые два случая имеют аналоги для задачи о возбуждении двух осцилляторов, а третий – нет. Итак, особенность системы из трех осцилляторов в том, что их можно «настроить» так, что полный захват внешней силой не возможен ни при каких значениях частоты и амплитуды сигнала.

Какой тип поведения из трех перечисленных реализуется, зависит от параметров автономных осцилляторов. Полезно указать конфигурацию соответствующих областей в пространстве этих параметров.

Из (4.71) нетрудно получить, что две полосы не имеют общей области, если $\mu < \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{3}$ или $\mu < \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{3}$. В свою очередь, первая полоса захватывает вершину языка, если $\mu > \frac{\Delta_1 - 2\Delta_2}{3}$. Если $\mu > \frac{2\Delta_2 - \Delta_1}{3}$, то вторая полоса захватывает вершину языка. Суммарный рисунок показан на рис. 4.30. На нем наиболее темным цветом выделена область, отвечающая ситуации а).

Замечательно, что она одновременно отвечает взаимному захвату трех осцилляторов в отсутствие внешнего сигнала. Светло-серым цветом показаны значения параметров, которые отвечают ситуации б), и белым – ситуации в).

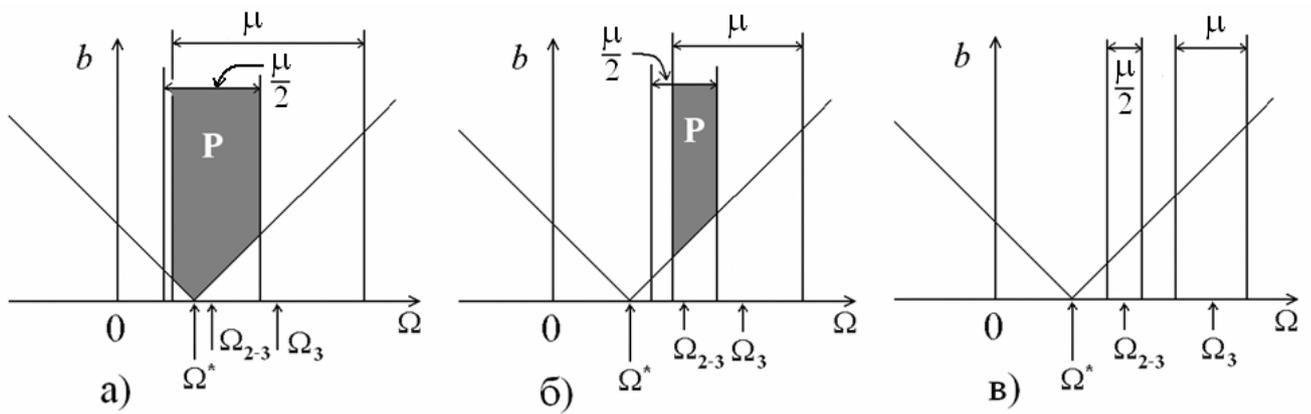


Рис. 4.29. Три основных типа устройства плоскости параметров частота – амплитуда воздействия системы трех возбуждаемых осцилляторов (4.67). Темно-серым цветом выделена область P полного захвата всех осцилляторов внешним сигналом.

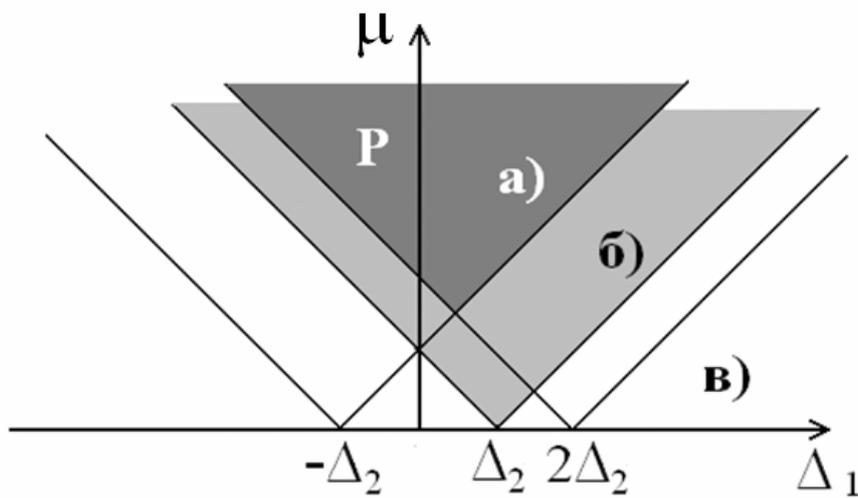


Рис. 4.30. Области на плоскости «внутренних» параметров системы трех осцилляторов, отвечающие трем типам а), б), в) устройства плоскости частота – амплитуда воздействия неавтономной системы на рис. 4.29.

4.28. Карты ляпуновских показателей трех возбуждаемых фазовых осцилляторов. Постройте карты ляпуновских показателей системы трех возбуждаемых фазовых осцилляторов (4.67) на плоскости частота – период воздействия.

Решение. Прежде всего, необходимо выбрать «внутренние» параметры системы осцилляторов. Выбираем их следующим образом. Фиксируем частотные расстройки осцилляторов $\Delta_1 = 0.3$, $\Delta_2 = 1$ и используем три значения величины связи: а) $\mu = 0.65$; б) $\mu = 0.4$; в) $\mu = 0.15$. В этом случае реализуются режимы, отвечающие трем ситуациям, показанным на рис. 4.29, а, б, в. На рис. 4.31 представлены полученные численно соответствующие карты ляпуновских показателей. Отметим, что размерность системы (4.67) равна трем,

поэтому она характеризуется тремя ляпуновскими показателями. Соответственно, на рисунке показаны области полной синхронизации P , двухчастотных торов T_2 , трехчастотных торов T_3 , четырехчастотных торов T_4 и хаоса C .

Если связь между осцилляторами велика, то вид карты на рис. 4.31, *а* аналогичен случаю возбуждения двух осцилляторов, рис. 4.22, *а*. При этом область полной синхронизации P имеет вид языка с острием точно на частоте взаимного захвата трех автономных осцилляторов Ω^* . Более детальный анализ типов двухчастотных торов выявляет определенные отличия, см. следующую задачу.

Ситуация существенным образом меняется при переходе к случаю «умеренной» связи, когда осцилляторы в отсутствие внешнего сигнала не захвачены, рис. 4.31, *б*. Появляются два новых типа режимов: четырехчастотные торы и хаос. Они приходят на смену областям трехчастотных торов и располагаются как раз в области их локализации. Кроме того, появляется амплитудный порог области полной синхронизации. В нижней части карты на смену двухчастотным торам на рис. 4.31, *а* приходят трехчастотные торы. Можно видеть еще одну область трехчастотных торов, пересекающую плоскость параметров сверху вниз.

Интересно обсудить полученную картину в контексте гипотезы Рюэля-Такенса³⁴. Подключение третьего осциллятора приводит к тому, что трехчастотные торы разрушаются, однако возникают области как хаоса, так и четырехчастотных торов. Области четырехчастотных торов и хаоса сосуществуют, при этом и тот, и другой режим являются типичными, ни один не превалирует над другим. Таким образом, картина вытеснения высокоразмерных торов хаотическими режимами не наблюдается.

Если еще больше уменьшить связь, то четырехчастотные торы начинают доминировать, рис. 4.31, *в*. Они вытесняют области хаоса, которые становятся очень незначительными. Четырехчастотные торы наблюдаются теперь и в области малых амплитуд. Режим полной синхронизации осцилляторов исчезает вообще. Вместо него наблюдается лишь узкая полоса двухчастотных торов в окрестности собственной частоты второго осциллятора Ω_2 . Имеются еще несколько очень узких окон двухчастотных торов в виде вертикальных полос, а также очень маленькие островки хаоса.

³⁴ Гипотеза Рюэля-Такенса предполагает вытеснение высоко размерных торов хаотическими режимами [9].

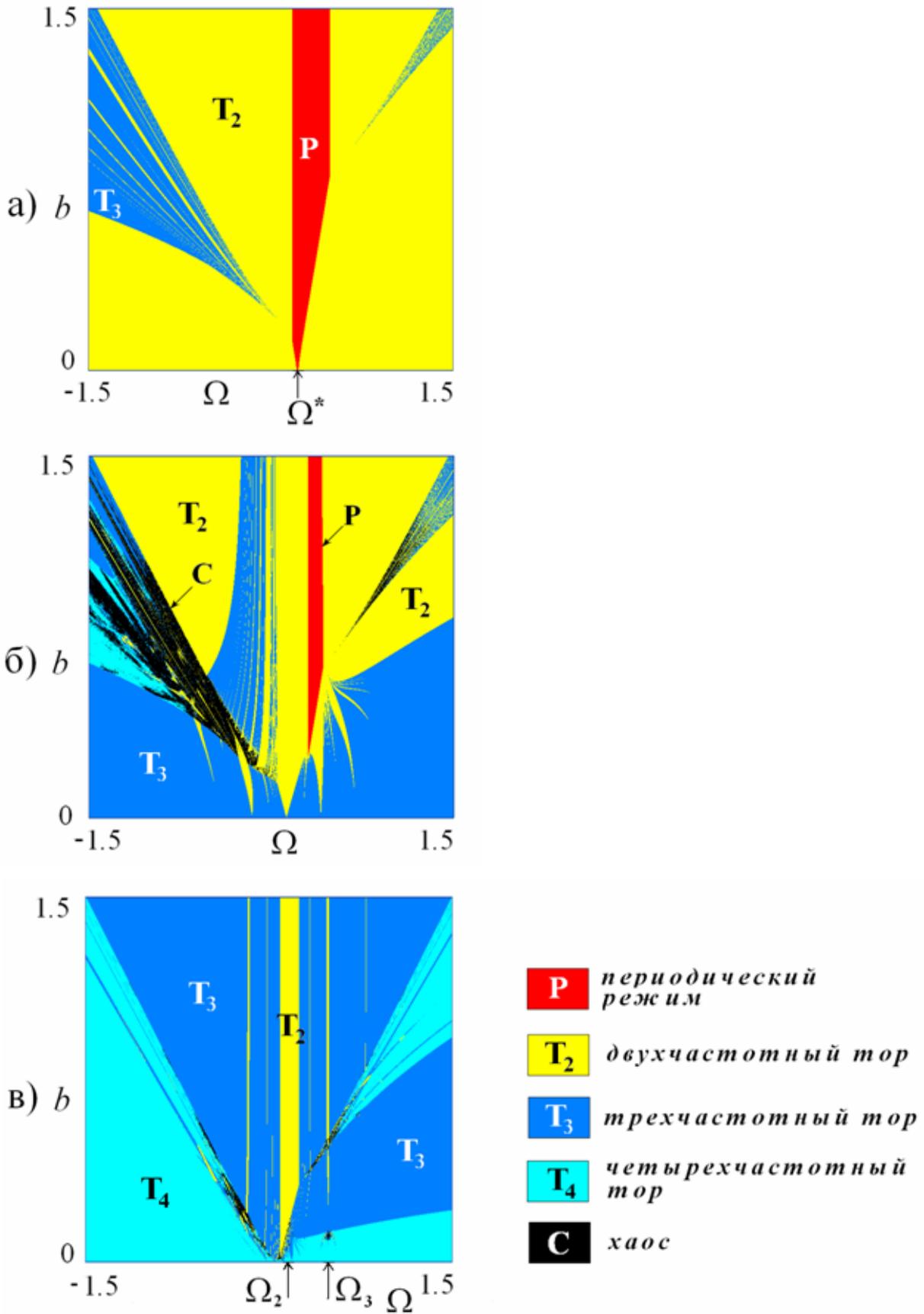


Рис. 4.31. Карты ляпуновских показателей системы трех возбуждаемых осцилляторов (4.67), $\Delta_1 = 0.3$, $\Delta_2 = 1$, $\mu = 0.65$ (а), $\mu = 0.4$ (б), $\mu = 0.15$ (в). Ω^* – частота взаимного захвата автономных осцилляторов, Ω_2 и Ω_3 – собственные частоты второго и третьего осцилляторов.

4.29. Карты торов трех возбуждаемых фазовых осцилляторов.

Постройте карты торов системы трех возбуждаемых осцилляторов на плоскости частота – период воздействия.

Решение. «Технология» построения карт торов и цветовая палитра для случая трех возбуждаемых осцилляторов такая же, как при решении задачи 4.16. Полученные для системы (4.67) карты представлены на рис. 4.32. Области трехчастотных, четырехчастотных торов и хаоса показаны светло-серым цветом. Внутренние параметры системы осцилляторов выбраны такими же, как и для рис. 4.31.

Сначала обсудим случай большой связи, рис. 4.32, *a*. В области малых амплитуд доминируют режимы типа $w = 1:1:1$. В этом случае первый, второй и третий осцилляторы демонстрируют частичный взаимный захват, т.е. их относительные фазы $\theta = \psi_1 - \psi_2$ и $\varphi = \psi_2 - \psi_3$ осциллируют, но система в целом внешней силой не захвачена.

В области больших амплитуд в левой части карты имеется область трехчастотных торов, которую пересекают языки резонансных двухчастотных торов. Основные типы резонансных торов характеризуются числами вращения $w = p:q:r$, где $q = r$. Это означает, что второй и третий осцилляторы взаимно (частично) захвачены.

Система в определенном смысле ведет себя как два осциллятора: первый и подсистема из взаимно захваченных второго и третьего осцилляторов. Именно поэтому карта ляпуновских показателей в этом случае на рис. 4.31, *a* так похожа на случай двух осцилляторов на рис. 4.22, *a*.

При увеличении частоты (движение слева направо на карте) из этих резонансов остается режим с числом вращения $w = 0:1:1$. Это означает, что внешняя сила произвела частичный захват первого осциллятора, а второй и третий по-прежнему взаимно захвачены, но их фазы относительно сигнала неограниченно нарастают. При дальнейшем увеличении частоты наступает момент, когда частично захваченным внешней силой оказывается и второй осциллятор, а фаза третьего неограниченно растет, так что теперь число вращения равно $w = 0:0:1$. Наконец, захватываются внешней силой все три осциллятора, при этом захват оказывается уже не частичным, а полным – область *P* на рис. 4.32, *a*.

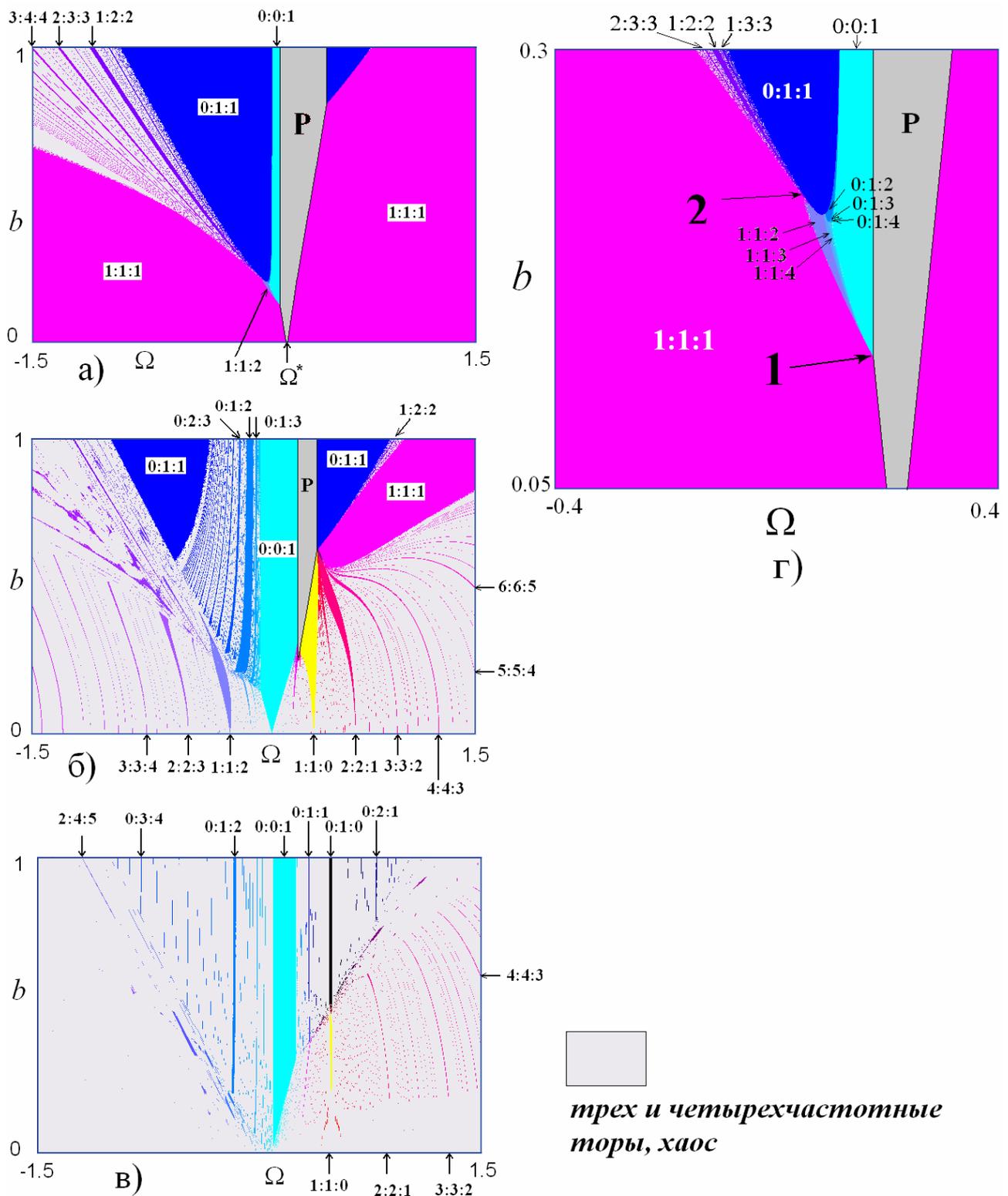


Рис. 4.32. Карты торов возбуждаемой системы трех связанных фазовых осцилляторов (4.67). Случаи а), б), в) относятся к соответствующим конфигурациям на рис. 4.29, а значения параметров выбраны, как для рис. 4.31. Рисунок г) представляет собой увеличенный фрагмент рис. а).

Случай умеренной связи на рис. 4.32, б наиболее богат различными резонансами. Значительная часть области $w = 0:1:1$ оказывается разрушенной. Ее пронизывает целая система областей, отвечающих частичному захвату внешним сигналом первого осциллятора при различном соотношении с частотой второго и третьего. Наиболее широкие окна отвечают резонансам $0:2:3$, $0:1:2$, $0:1:3$, которые окружены областями трехчастотных торов. При этом уже не наблюдается захват относительной фазы второго и третьего осцилляторов.

Область частичного захвата внешней силой первого и второго осцилляторов $w = 0:0:1$ заметно увеличилась по ширине, и практически исчез амплитудный порог возбуждения таких колебаний. Область же полного и точного захвата всех трех осцилляторов P , наоборот, уменьшилась в размере и приобрела конечный амплитудный порог.

В области малых амплитуд можно видеть систему языков двухчастотных торов, по виду аналогичную традиционным языкам Арнольда. Наиболее широкие из них отвечают резонансам типа $w = p:p:q$, так что взаимно захваченным является относительное движение первого и второго осцилляторов. Таким образом, первый и второй осцилляторы сильно связаны, и картина в области малых амплитуд также напоминает случай возбуждения двух связанных осцилляторов.

Случай малой связи представлен на рис. 4.32, в. В этом случае область полной синхронизации всех трех осцилляторов внешней силой исчезает вообще. Двухчастотные торы практически вытеснены более высокоразмерными. Резонансы типа $w = 0:1:1$ и $w = 1:1:1$, которым в предыдущих случаях отвечали самые большие области, практически полностью исчезают. Наиболее широкое оставшееся окно двухчастотных торов отвечает $w = 0:0:1$ – первый и второй осциллятор частично захвачены внешней силой. Эта область приходит на смену области полной синхронизации осцилляторов. Остальные резонансы, как правило, отвечают частичному захвату только первого осциллятора, им отвечают очень узкие области в виде вертикальных полос.

4.30. Точки коразмерности два в системе трех возбуждаемых осцилляторов. Обсудите возможные точки коразмерности два на плоскости параметров частота – амплитуда воздействия для трех возбуждаемых осцилляторов, отвечающих возникновению кластерных состояний.

Решение. Как мы видели, характерным «атрибутом» трехчастотной квазипериодичности являются точки *saddle node fan*. Для случая двух

возбуждаемых осцилляторов такие точки хорошо видны на карте ляпуновских показателей на рис. 4.22, а. Хотя, как мы отмечали, карта ляпуновских показателей в случае трех осцилляторов в случае сильной связи очень похожа на нее, карты торов выявляют существенные отличия. Обратимся к рис. 4.32, з, на котором показан в увеличенном виде соответствующий фрагмент карты. Первая ситуация коразмерности два отвечает характерному «углу» области полной синхронизации, образованному пересечением двух линий седло-узловых бифуркаций неподвижных точек – точка 1 на рис. 4.32, з. В ее окрестности наблюдаются режимы, для которых первый и второй осцилляторы взаимно захвачены, так что $w = p : p : r$, и система ведет себя аналогично случаю двух подсистем. Однако на «визуальном уровне» область трехчастотных торов не выявляется, а языки двухчастотных торов смыкаются краями.

Еще одна интересная точка обозначена на рис. 4.32, з цифрой 2. В ее окрестности имеются языки двухчастотных торов типа $w = p : q : q$, так что взаимно захвачены второй и третий осцилляторы. При этом система областей отвечает характерным для точки *saddle node fan* числам вращения $p : q$. Более того, в окрестности этой точки имеет место язык трехчастотных торов. Однако в отличие от точки *saddle node fan* в окрестности точки 2 нет области полной синхронизации. Вместо нее имеются две системы языков двухчастотных торов. Одна из них $1 : 1 : 2$, $1 : 1 : 3$ и т.д., отвечает взаимному захвату первого и второго осцилляторов, а вторая – $0 : 1 : 2$, $0 : 1 : 3$ и т.д., отвечает частичному захвату внешней силой первого осциллятора.

4.31. Возбуждение двух автоколебательных осцилляторов с реактивной связью. Получите укороченные и фазовые уравнения для возбуждаемых внешним сигналом двух связанных осцилляторов Ван-дер-Поля с реактивной связью.

Решение. Система двух возбуждаемых осцилляторов Ван-дер-Поля с реактивной связью имеет вид:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + \left(1 - \frac{\Delta}{2}\right)x + \varepsilon(x - y) &= B \sin(\omega t), \\ \ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + \left(1 + \frac{\Delta}{2}\right)y + \varepsilon(y - x) &= 0. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Здесь обозначения те же, что и в (4.46), а ε – коэффициент реактивной связи. Действуя аналогично задаче 4.19 с учетом решения задачи 3.28, получаем следующие укороченные уравнения для действительных амплитуд и фаз:

$$\begin{aligned}
2\frac{dR}{d\tau} &= R - R^3 - \varepsilon r \sin \theta - \frac{B}{2} \cos \psi_1, \\
2\frac{dr}{dt} &= r - r^3 + \varepsilon R \sin \theta, \\
2\frac{d\varphi_1}{dt} &= \varepsilon - \frac{r}{R} \varepsilon \cos \theta - \frac{\Delta}{2} + \frac{B}{2} \sin \psi_1, \\
2\frac{d\varphi_2}{dt} &= \varepsilon - \frac{R}{r} \varepsilon \cos \theta + \frac{\Delta}{2}.
\end{aligned}
\tag{4.73}$$

Здесь $\theta = \psi_1 - \psi_2$ – относительная фаза осцилляторов.

Получим теперь уравнения в фазовом приближении. Напомним, что особенность реактивной связи состоит в необходимости учета членов второго порядка по возмущениям и величине связи (задачи 3.30, 3.31). Считаем, что осцилляторы движутся в окрестности стационарных орбит, так что $R = 1 + \tilde{R}$ и $r = 1 + \tilde{r}$. Подставляя это в (4.73), получаем для возмущенных орбит

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{R}}{dt} &= -\tilde{R} - \frac{\varepsilon}{2} \sin \theta - \frac{B}{4} \sin \psi_1, \\
\frac{d\tilde{r}}{dt} &= -\tilde{r} + \frac{\varepsilon}{2} \sin \theta.
\end{aligned}
\tag{4.74}$$

Как и при решении задачи 3.30 о взаимно связанных осцилляторах с реактивной связью, отмечаем, что уравнения для возмущений орбит сильно протемпированы, так что они быстро выходят на стационарные значения

$$\begin{aligned}
\tilde{R} &= -\frac{\varepsilon}{2} \sin \theta - \frac{B}{4} \sin \psi_1, \\
\tilde{r} &= \frac{\varepsilon}{2} \sin \theta.
\end{aligned}
\tag{4.75}$$

Теперь подставляем $R = 1 + \tilde{R}$ и $r = 1 + \tilde{r}$ с учетом (4.75) в фазовые уравнения (4.73). Проводя преобразования, аналогичные задаче 3.31, получаем искомые фазовые уравнения возбуждаемых фазовых осцилляторов с реактивной связью:

$$\begin{aligned}
\frac{d\theta}{dt} &= -\frac{\Delta}{2} - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \sin 2\theta + b \sin \psi_1, \\
\frac{d\psi_1}{dt} &= -\Omega - \frac{\Delta}{4} + \frac{\varepsilon}{2} (1 - \cos \theta) - \frac{1}{4} \varepsilon^2 \sin 2\theta + b \sin \psi_1.
\end{aligned}
\tag{4.76}$$

Здесь $b = B/4$ – нормированная амплитуда воздействия, а $\Omega = \omega - 1$ – отстройка частоты сигнала от центральной частоты осцилляторов, принятой за единицу.

Отметим, что в отсутствие внешнего сигнала, если положить $b = 0$, $\Omega = 0$, то система (4.76) превращается в уравнения (3.107) для двух реактивно связанных фазовых осцилляторов.

4.32. Условия седло-узловых бифуркаций неподвижных точек для возбуждаемых реактивно связанных осцилляторов. Получите условия седло-узловых бифуркаций неподвижных точек фазовых уравнений возбуждаемых реактивно связанных осцилляторов (4.76).

Решение. Неподвижные точки системы уравнений (4.76) отвечают условию $\dot{\psi}_1 = \dot{\psi}_2 = 0$, так что имеем следующие уравнения для определения захваченных фаз осцилляторов:

$$\begin{aligned} -\frac{\Delta}{2} - \frac{1}{2}\varepsilon^2 \sin(2\theta) + b \sin \psi_1 &= 0, \\ -\Omega - \frac{\Delta}{4} + \frac{\varepsilon}{2}(1 - \cos \theta) - \frac{1}{4}\varepsilon^2 \sin(2\theta) + b \sin \psi_1 &= 0. \end{aligned} \quad (4.77)$$

Они определяют режим полной синхронизации осцилляторов внешним сигналом. Однако в случае реактивной связи границы области синхронизации не находятся столь же легко, как в диссипативном случае. Причина – появление дополнительного члена $\frac{\varepsilon}{2}(1 - \cos \theta)$, отвечающего, как мы видели при решении задачи 3.33, за зависимость частоты захвата автономных осцилляторов от параметра взаимной расстройки.

Найдем условия седло-узловых бифуркаций неподвижных точек системы (4.76). Для их поиска нужно записать матрицу возмущений системы (4.70):

$$\begin{pmatrix} -\varepsilon^2 \cos(2\theta), & b \cos \psi_1 \\ \frac{\varepsilon}{2} \sin \theta - \frac{\varepsilon^2}{2} \cos(2\theta), & b \cos \psi_1 \end{pmatrix}. \quad (4.78)$$

Условием седло-узловых бифуркаций является обращение в ноль якобиана этой матрицы, так что $\cos \psi_1 [\varepsilon \cos(2\theta) + \sin \theta] = 0$. Полученное уравнение распадается на два:

$$\varepsilon \cos(2\theta) + \sin \theta = 0, \quad \cos \psi_1 = 0. \quad (4.79)$$

Пусть сначала выполняется первое условие (4.79). Тогда, используя равенство $\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2 \theta$, находим

$$\sin \theta = \frac{1 \mp \sqrt{1 + 8\varepsilon^2}}{4\varepsilon}. \quad (4.80)$$

Нетрудно показать, что при $\varepsilon < 1$ уравнение (4.80) имеет решение, для которого

следует оставить верхний знак в (4.80). Тогда вычитая уравнения (4.77) друг из друга, приходим к следующему условию седло-узловой бифуркации:

$$\begin{aligned}\Omega &= \frac{\Delta}{4} + \frac{\varepsilon}{2}(1 - \cos \theta) + \frac{1}{4}\varepsilon^2 \sin(2\theta), \\ \sin \theta &= \frac{1 - \sqrt{1 + 8\varepsilon^2}}{4\varepsilon}.\end{aligned}\tag{4.81}$$

Второе уравнение (4.81) имеет два решения:

$$\theta_1 = \arcsin\left(\frac{1 - \sqrt{1 + 8\varepsilon^2}}{4\varepsilon}\right), \quad \theta_2 = \pi - \arcsin\left(\frac{1 - \sqrt{1 + 8\varepsilon^2}}{4\varepsilon}\right).\tag{4.82}$$

Если теперь подставить (4.82) в первое уравнение (4.81), то на плоскости (Ω, b) получим ограниченную двумя вертикальными линиями полосу захвата, так что $\Omega_{\min} < \Omega < \Omega_{\max}$. Ширина полосы захвата определяется величиной связи. Так при малой связи $\varepsilon \ll 1$ и из (4.82) получаем $\theta_1 \approx -\varepsilon$ и $\theta_2 \approx \pi + \varepsilon$, что при подстановке в (4.81) дает

$$\Omega_{\min} \approx \frac{\Delta}{4}, \quad \Omega_{\max} \approx \frac{\Delta}{4} + \varepsilon.\tag{4.83}$$

Интересно сопоставить эти значения с собственными частотами автономной системы. Как было отмечено при решении задачи 3.35, инерционная связь смещает частоты осцилляторов, так что частота второго осциллятора $\Omega_2 \approx \frac{\Delta}{4} + \frac{\varepsilon}{2}$. Таким образом, полоса захвата имеет ширину, примерно равную величине связи, и располагается симметрично относительно значения частоты второго осциллятора.

При большой связи из (4.81) получаем $\theta_1 \approx -\frac{\pi}{4}$ и $\theta_2 \approx \frac{5\pi}{4}$, так что

$$\Omega_{\min} \approx \frac{\Delta}{4} - \frac{\varepsilon^2}{4}, \quad \Omega_{\max} \approx \frac{\Delta}{4} + \frac{\varepsilon^2}{4}.\tag{4.84}$$

Следовательно, при большой связи ширина полосы захвата порядка $\frac{\varepsilon^2}{2}$, и она растет с ростом связи быстрее, чем в случае диссипативной связи.

Обратимся теперь ко второму условию (4.79) $\cos \psi_1 = 0$. Тогда $\sin \psi_1 = \pm 1$ и из (4.77) и (4.78) можно получить

$$\begin{aligned}2b &= \pm[\Delta + \varepsilon^2 \sin(2\theta)] \\ \Omega &= \frac{\Delta}{4} + \frac{\varepsilon}{2}(1 - \cos \theta) + \frac{1}{4}\varepsilon^2 \sin(2\theta).\end{aligned}\tag{4.85}$$

Линии седло-узловых бифуркаций системы (4.76) определяются

уравнениями (4.81) и (4.85).

4.33. Устройство области полной синхронизации возбуждаемых реактивно связанных осцилляторов в режиме биений. Обсудите устройство области полной синхронизации системы (4.76) на плоскости частота – амплитуда воздействия. Постройте фазовые портреты, иллюстрирующие сосуществование неподвижных точек разного типа. Рассмотрите случай биений автономных осцилляторов. Значения параметров $\varepsilon = 1$, $\Delta = 1.5$.

Решение. Не все найденные в предыдущей задаче линии седло-узловых бифуркаций отвечают за разрушение полной синхронизации. Обсудим этот вопрос подробнее.

На рис. 4.33, *a* показаны линии, заданные соотношениями (4.81) и (4.85). Линия (4.81), как мы отмечали выше, определяет частотную полосу захвата.

При $\varepsilon = 1$ из (4.82) получаем $\theta_1 = -\frac{\pi}{6}$ и $\theta_2 = \frac{7\pi}{6}$, так что $\Omega = \frac{\Delta}{4} + \frac{1}{2} \pm \frac{3}{8}\sqrt{3}$. Это отвечает полосе с центром в точке $\Omega = \frac{3\Delta}{4}$ и шириной $\frac{3}{2}\sqrt{3}$.

Уравнения (4.85) в параметрической форме задают на плоскости (Ω, b) некоторую кривую. Условие того, что автономные осцилляторы находятся в режиме биений, в соответствии с решением задачи 3.3, имеет вид $\Delta > \varepsilon^2$. В этом случае, как видно из первого уравнения (4.85), всегда $b \neq 0$. Поэтому кривая (4.85) не имеет «контакта» с осью частот. Таким образом, в режиме биений автономных осцилляторов область полной синхронизации будет иметь амплитудный порог, как и в случае диссипативной связи.

Как можно видеть из рис. 4.33, *a*, линия (4.85) образует замкнутую кривую в форме характерной «восьмерки». Нетрудно показать, что определяющие полосу частотного захвата вертикальные линии (4.81) будут касаться этой кривой.

На рис. 4.34 показаны фазовые портреты на плоскости фаз осцилляторов (ψ_1, ψ_2) , иллюстрирующие закономерности сосуществования неподвижных точек системы (4.76) внутри основных областей, на которые линии седло-узловых бифуркаций разбивают плоскость параметров (Ω, b) .

В области *a*) в системе имеется четыре неподвижные точки: устойчивый узел, неустойчивый узел и два седла, рис. 4.34, *a*. Устойчивая точка 1 определяет режим полной синхронизации. Если пресечь правую ветвь «восьмерки» и перейти в область *б*), то неустойчивый узел 3 и седло 4 сольются и исчезнут. В результате из их многообразий сформируется неустойчивая

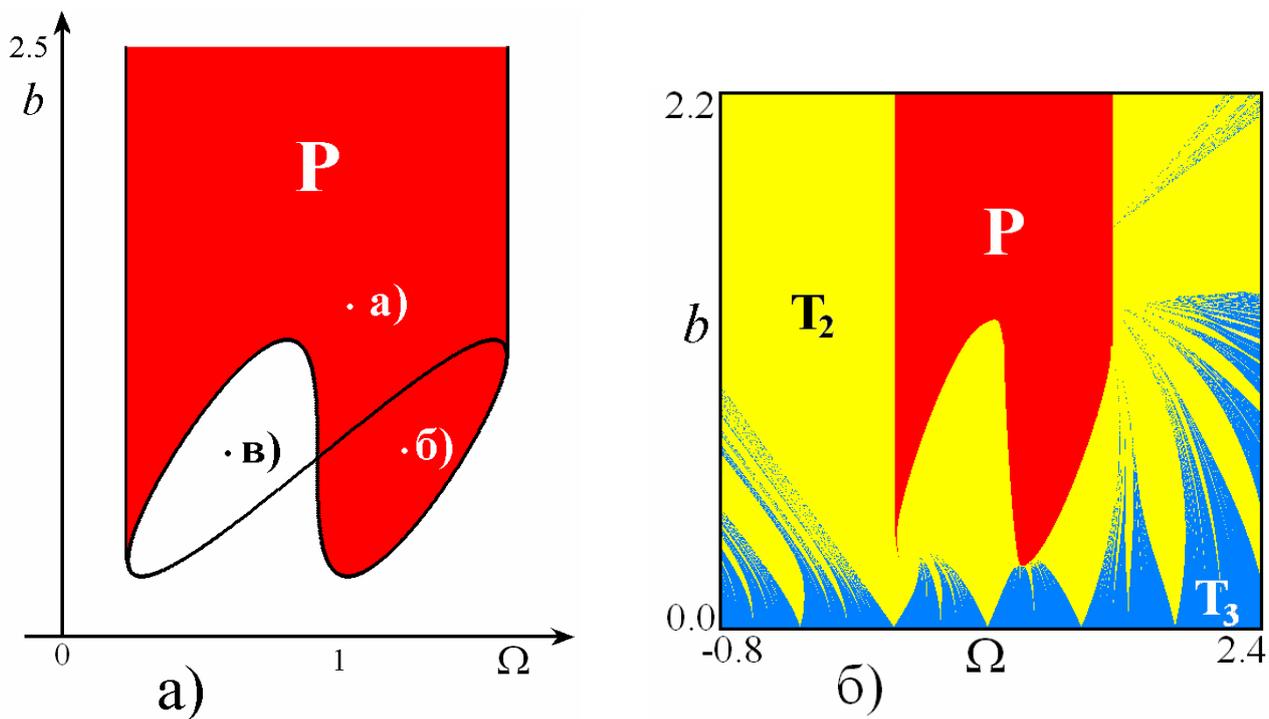


Рис. 4.33. Область точного захвата P осцилляторов с реактивной связью внешней силой на плоскости частота – амплитуда воздействия. Режим захвата автономных осцилляторов, $\varepsilon = 1$, $\Delta = 1.5$. Показаны линии (4.81) и (4.85) (а). Карта ляпуновских показателей для тех же значений параметров (б).

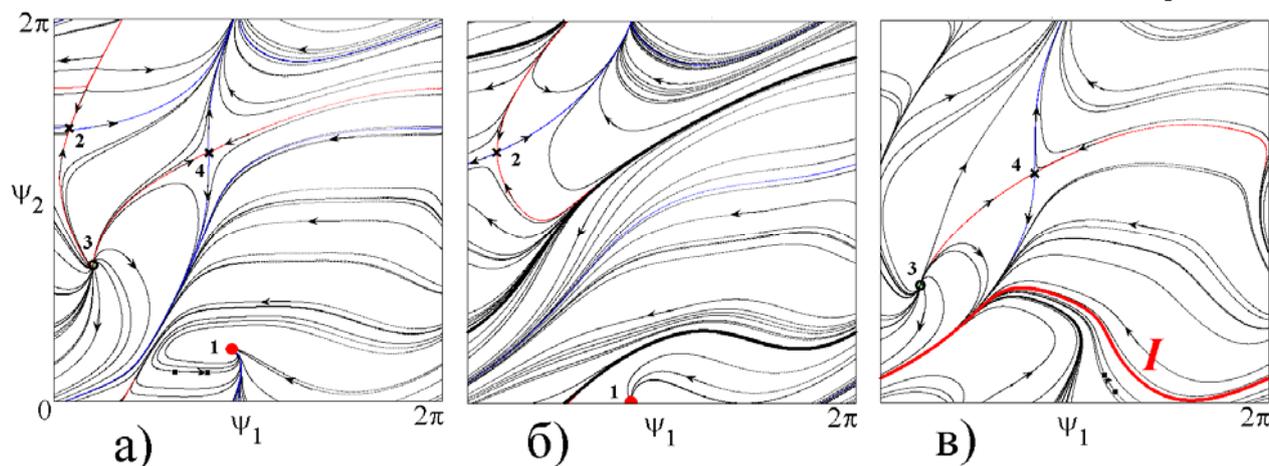


Рис. 4.34. Фазовые портреты системы возбуждаемых реактивно связанных осцилляторов. Буквы а)-в) отвечают соответствующим точкам и областям на плоскости параметров частота – амплитуда воздействия на рис. 4.33, а. Цифрами обозначены неподвижные точки, устойчивая точка выделена красным цветом. Устойчивая инвариантная кривая I показана жирной линией красного цвета.

инвариантная кривая, рис. 4.34, б). Таким образом, в области б) также будет иметь место полная синхронизация, за которую отвечает устойчивая неподвижная точка 1, но вместе с ней будет сосуществовать неустойчивый двухчастотный квазипериодический режим. При выходе через нижнюю границу области б) оставшиеся устойчивый узел и седло сливаются и исчезают, и режим полной синхронизации разрушается.

Если теперь пересечь левую ветвь восьмерки и перейти из области а) в область в), то сольются устойчивая точка 1 и седло 2. Из их многообразий возникнет устойчивая инвариантная кривая I , рис. 4.34, в). Нетрудно видеть, что она отвечает режиму частичного захвата второго осциллятора, фаза которого осциллирует около некоторого равновесного значения. Таким образом, режим полной синхронизации разрушается с возникновением двухчастотной квазипериодичности. Если теперь еще больше уменьшить связь, то на нижней ветви восьмерки сольются неустойчивый узел 3 и седло 4. Эта бифуркация приводит к возникновению неустойчивой инвариантной кривой, но не меняет характер устойчивого режима.

Объединенная область полной синхронизации для возбуждаемых осцилляторов с реактивной связью показана на рис. 4.33, а). Отметим, что наблюдается отличие от случая диссипативной связи, для которого за разрушение полной синхронизации отвечает специфический вариант седло-узловой бифуркации, связанный с одновременным слиянием всех четырех неподвижных точек, задача 4.6.

4.34. Карта ляпуновских показателей возбуждаемых реактивно связанных осцилляторов в режиме биений. Постройте карту ляпуновских показателей возбуждаемых реактивно связанных осцилляторов в режиме биений. Обсудите ее устройство. Значения параметров $\varepsilon = 1$, $\Delta = 1.5$.

Решение. Соответствующая карта ляпуновских показателей показана на рис. 4.33, б). Можно видеть область полной синхронизации, имеющую амплитудный порог и отвечающую аналитическому рассмотрению. Области резонансных двухчастотных торов образуют погруженную в область трехчастотных торов систему языков, основания которых расположены на оси частот. Трехчастотные торы можно видеть и в небольшой характерной «веерообразной» области при достаточно большой амплитуде сигнала, но только вблизи высокочастотной границы области полной синхронизации.

4.35. Устройство области полной синхронизации возбуждаемых реактивно связанных осцилляторов в режиме захвата. Обсудите, как устроена область полной синхронизации системы (4.76) в режиме захвата автономных осцилляторов. Постройте фазовые портреты, иллюстрирующие сосуществование неподвижных точек разного типа. Используйте значения параметров $\varepsilon = 1$, $\Delta = 0.5$. Постройте карту ляпуновских показателей в этом случае.

Решение. В случае захвата автономных осцилляторов, в соответствии с решением задачи 3.33, выполняется условие $\Delta < \varepsilon^2$. Из (4.85) видно, что в этом случае кривая линий седло-узловых бифуркаций пересекает ось частот.

Найдем соответствующие точки. Из первого уравнения (4.85) получаем $\Delta + \varepsilon^2 \sin(2\theta) = 0$, а из второго – $\Omega = \frac{\varepsilon}{2}(1 - \cos\theta)$. В соответствии с формулой (3.108), полученные соотношения задают частоты захвата синфазной и противофазной мод системы Ω_{in}^* и Ω_{out}^* . Таким образом, область полной синхронизации на плоскости частота – амплитуда воздействия будет иметь острия, расположенные в точках захвата автономных осцилляторов в режиме синфазных и противофазных колебаний.

Конфигурация линий седло-узловых бифуркаций (4.81) и (4.85) в рассматриваемом случае показана на рис. 4.35, а. В данном случае линия (4.85) представлена уже двумя замкнутыми кривыми, чему отвечают разные знаки в первом уравнении (4.85).

Эти линии разбивают плоскость параметров на достаточно большое число областей. Основные из них обозначены буквами а)-е), а соответствующие фазовые портреты представлены на рис. 4.36. При большой амплитуде и частоте сигнала, близкой к частоте синфазной моды, в области а) фазовый портрет содержит устойчивый и неустойчивый узлы и два седла, рис. 4.36, а. Это означает, что имеет место режим полной синхронизации осцилляторов относительно внешней силы, обусловленный устойчивой точкой 1. При этом захваченные фазы осцилляторов ψ_1 и ψ_2 близки друг к другу, так что осцилляторы колеблются в фазе друг с другом.

Если уменьшить амплитуду сигнала, то при переходе в область б) неустойчивый узел 3 и седло 4 сливаются, и возникает неустойчивая инвариантная кривая. При переходе в точку б) имеет место еще одна бифуркация – седло-узловая бифуркация инвариантных кривых, в результате которой рождается пара: неустойчивая и устойчивая инвариантные кривые. Последняя на рис. 4.36, б обозначена как I_2 . Таким образом, в точке б) в

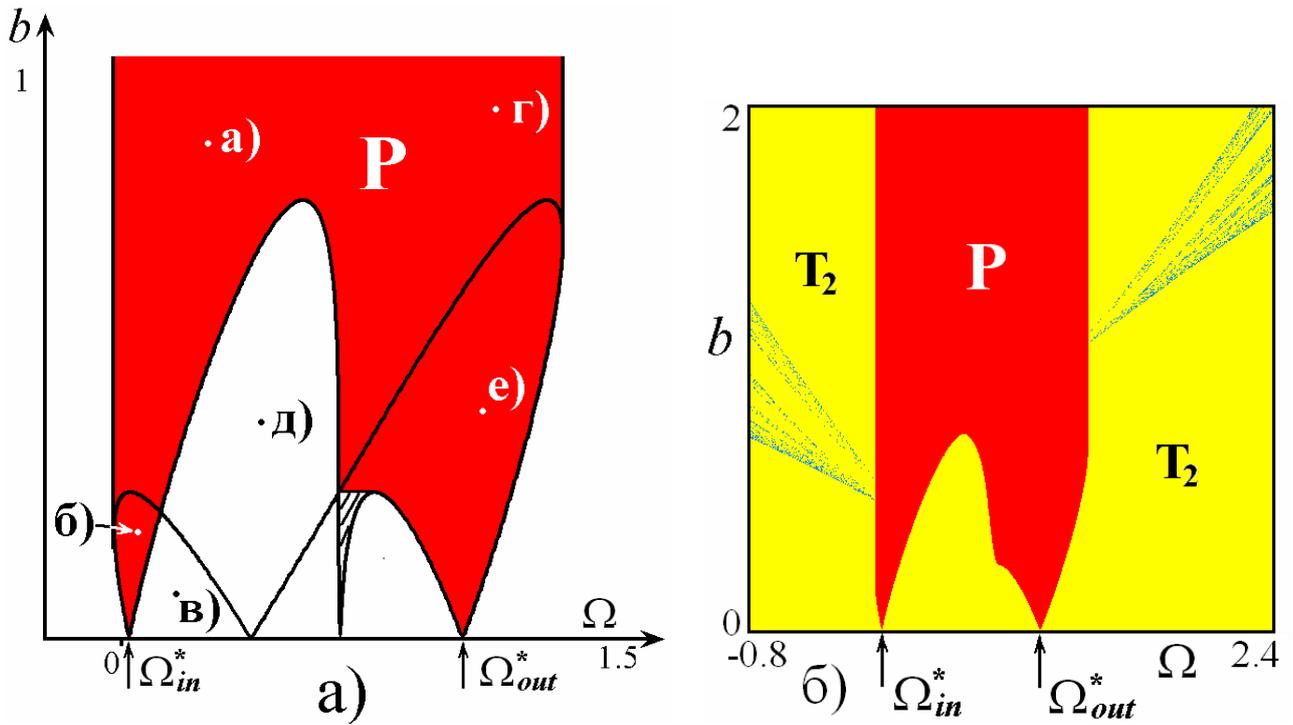


Рис. 4.35. Область точного захвата P осцилляторов с реактивной связью внешней силой, режим захвата автономных осцилляторов, $\varepsilon=1$, $\Delta=0.5$; Ω_{in}^* и Ω_{out}^* – частоты захвата синфазной и противофазной мод автономных осцилляторов (а). Карта ляпуновских показателей для тех же значений параметров (б).

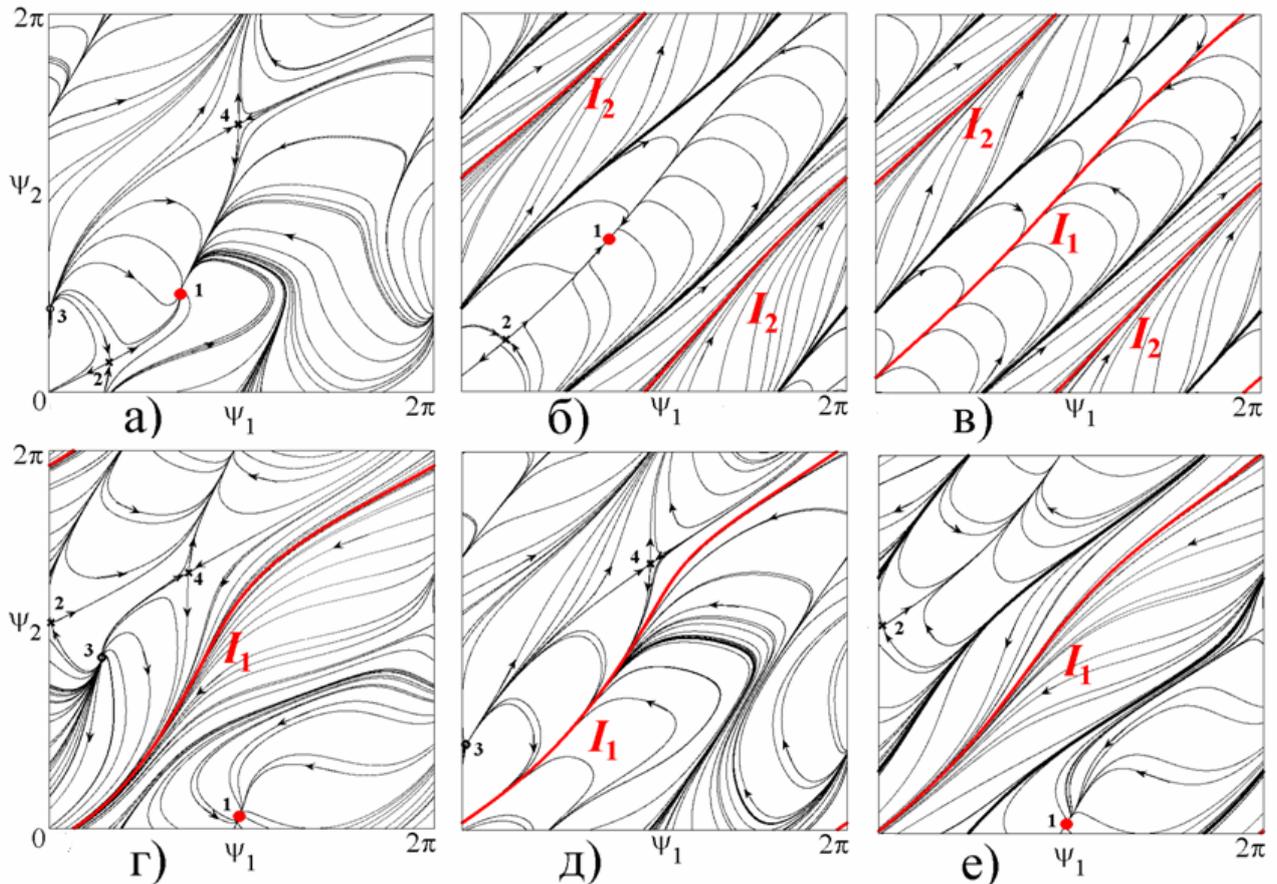


Рис. 4.36. Фазовые портреты в режиме захвата. Буквы а)-е) отвечают соответствующим точкам и областям на плоскости параметров частота – амплитуда воздействия на рис. 4.35, а.

системе наблюдается *бистабильность* такого типа, что сосуществует режим полного захвата обоих осцилляторов внешним сигналом и устойчивый двухчастотный квазипериодический режим. Какой из них реализуется, зависит от начальных фаз осцилляторов.

Если теперь перейти в точку в), то на линии седло-узловой бифуркации сольются устойчивый узел 1 и седло 2, в результате чего возникает еще одна устойчивая инвариантная кривая I_1 , рис. 4.36, в. Следовательно, в точке в) сосуществуют два устойчивых двухчастотных квазипериодических режима. Их физическая природа ясна из рис. 4.36, в. Действительно, кривая I_1 лежит на фазовой плоскости вблизи диагонали. Поэтому ей отвечает квазипериодический режим *частичного синфазного взаимного захвата осцилляторов*. На рис. 4.36, в хорошо видно, что бассейн притяжения этой инвариантной кривой отвечает достаточно близким значениям фаз осцилляторов. При этом границей бассейна служит неустойчивая инвариантная кривая. В свою очередь, вторая устойчивая инвариантная кривая I_2 отвечает значениям фаз осцилляторов, отличающихся примерно на π . Это режим *частичного противофазного взаимного захвата осцилляторов*.

Отметим, что режимы представленного на рис. 4.35, в типа имеют место во всей области малых амплитуд, кроме языков полной синхронизации, что физически понятно: слабый сигнал лишь немного возмущает взаимно синфазно или противофазно захваченные осцилляторы.

Если вернуться теперь к точке б) и рис. 4.35, б, то становится понятно, что она отвечает полному захвату синфазных колебаний и квазипериодическим колебаниям на основе противофазного вида.

Снова выберем большие амплитуды и перейдем из точки а) в точку г). В этом случае все четыре неподвижные точки сохраняются, так что возможен режим полной синхронизации, рис. 4.36, г. Однако происходит седло-узловая бифуркация инвариантных кривых, в результате которой рождаются устойчивая и неустойчивая инвариантные кривые. В системе возникает бистабильность в форме сосуществования режима полного захвата и двухчастотной квазипериодичности. При этом фаза первого осциллятора ψ_1 примерно равна π , а фаза второго ψ_2 располагается вблизи нуля. Таким образом, друг относительно друга осцилляторы находятся в противофазе. В свою очередь, устойчивый квазипериодический режим отвечает частичному захвату осцилляторов примерно с равными фазами.

Если теперь перейти в точку д), то устойчивый узел 1 и седло 2 сольются, полная синфазная синхронизация разрушится, и сохранится только режим

двухчастотной квазипериодичности, рис. 4.36, *д*.

Если перейти в точку *е*), то сливаются неустойчивый узел 3 и седло 4, в результате чего появляется дополнительная неустойчивая инвариантная кривая, но характер устойчивых режимов сохраняется.

Отметим, что при уменьшении амплитуды и переходе на рис. 4.35, *а* в заштрихованную область, наблюдается следующее. Сначала устойчивый узел становится устойчивым фокусом. Затем в результате нелокальной бифуркации рождается неустойчивый предельный цикл, охватывающий этот фокус. При дальнейшем уменьшении амплитуды неустойчивый цикл «стягивается» к фокусу, сливается с ним и исчезает, а фокус становится неустойчивым. В результате режим полной синхронизации разрушается, но за счет другого механизма, связанного с бифуркацией Андронова-Хопфа, проходимой в «обратном» порядке. Отметим, что характер наблюдаемых бифуркаций (см. задачу 1.4) «сигнализирует» о наличии в этой окрестности точки Богданова-Такенса.

Таким образом, особенность реактивной связи состоит в возможности точного захвата внешней силой обоих осцилляторов как в фазе, так и в противофазе друг относительно друга. Этому отвечают два острия области полной синхронизации на оси частот, расположенных в точках взаимного захвата синфазной Ω_{in}^* и противофазной Ω_{out}^* мод автономной системы. Вне этих языков при малой амплитуде сигнала сосуществуют две устойчивые инвариантные кривые. При произвольных амплитуде и частоте сигнала могут возникать режимы, когда тот или иной тип полной синхронизации сосуществует с устойчивой двухчастотной квазипериодичностью.

Интересно отметить, что эти особенности проявляются, в первую очередь, в случае захвата автономных осцилляторов, что физически понятно: в режиме биений фаза «бежит» и бистабильность не возникает.

На рис. 4.35, *а* показана карта ляпуновских показателей системы в режиме захвата автономных осцилляторов. Можно видеть область полной синхронизации, отвечающую проведенному обсуждению и погруженную в область двухчастотных торов. При больших амплитудах у вертикальных границ области полной синхронизации возникают характерные «вееры» областей трехчастотных торов со встроенными областями резонансных двухчастотных торов.

Автономная квазипериодическая динамика

4.36. Автономный генератор квазипериодических колебаний. На рис. 4.37 показана функциональная схема известного релаксационного автогенератора, содержащая накопительный элемент, который постепенно заряжается через сопротивление от источника напряжения, а затем быстро разряжается через «пороговый» элемент, типа неоновой лампы.

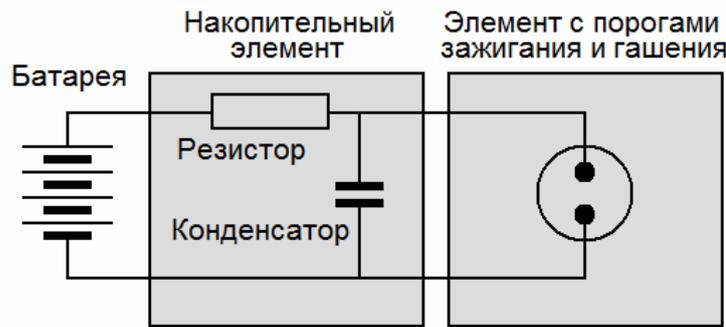


Рис. 4.37. Схема генератора релаксационных колебаний, содержащая накопительный элемент (цепочка RC) и элемент, имеющий порог возбуждения и срыва активности (например, неоновая лампа).

Используем в качестве порогового элемента автогенератор с жестким возбуждением, для которого управляющим параметром выступает выходная переменная накопительного элемента. Модельная система, которая реализует такой физический механизм, имеет вид

$$\ddot{x} - \left(\lambda + z + x^2 - \frac{1}{2}x^4 \right) \dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (4.86)$$

$$\dot{z} = \mu - x^2.$$

Здесь x – переменная, относящаяся к автоколебательному элементу, λ – его управляющий параметр, ω_0 – частота собственных колебаний, z – переменная, характеризующая запасенную накопительным элементом энергию, μ характеризует скорость восполнения энергии от источника, а член x^2 во втором уравнении отвечает за ее расход автоколебательным элементом. Постройте временные реализации системы (4.86), портрет аттрактора в трехмерном фазовом пространстве и спектр Фурье, иллюстрирующие возможность автономных квазипериодических колебаний в такой системе. Обсудите физическую природу возникающих квазипериодических колебаний³⁵.

³⁵ Представленная модель автономного генератора квазипериодических колебаний предложена С.П. Кузнецовым. При решении соответствующих задач использованы результаты, полученные Н.В. Станкевич.

Решение. Система (4.86) имеет два независимых временных масштаба. В качестве одного выступает характерное время восстановления состояния накопительного элемента $\tau \sim \mu^{-1}$, а в качестве второго – основной период колебаний автогенератора, $T = 2\pi/\omega_0$. Эти масштабы могут находиться в произвольном, в частности, иррациональном соотношении, что определяет возможность квазипериодических колебаний в системе.

Рассмотрим сначала ситуацию, когда собственный период автогенератора много меньше характерного времени релаксационного процесса $T \ll \tau$. Тогда система должна совершать быстрые осцилляции с периодом $T = 2\pi/\omega_0$ на фоне медленных процессов накопления энергии со временем $\tau \sim \mu^{-1}$. На рис. 4.38, *a* представлены соответствующие временные реализации переменных $x(t)$ и $z(t)$. Действительно, можно видеть характерные быстрый и медленный процессы. Генерация носит характер сравнительно редких всплесков с быстро осциллирующим заполнением. Такой вид колебаний позволяет охарактеризовать обсуждаемый режим как режим пульсирующей генерации.

В этом случае на графике временных зависимостей на рис. 4.38, *a* можно различить четыре периодически повторяющиеся стадии процесса. Интервал *A* соответствует стадии зарядки накопительного элемента. Переменная z увеличивается (будучи отрицательной), в то время как колебания в автогенераторе затухают. Когда величина z становится положительной, перейден порог самовозбуждения, и система вступает в стадию *B*. Здесь амплитуда в автоколебательном элементе нарастает и достигает наивысшего уровня, соответствующего предельному циклу, который имел бы место в системе со стационарным источником энергии. Отметим, что процесс начинается не с нулевой амплитуды, а с остаточных колебаний, сохранившихся от предыдущей стадии затухания. В интервале *C* имеет место уменьшение переменной z из-за относительно большого среднего значения члена x^2 во втором уравнении. В некоторый момент переменная z становится отрицательной, но за счет жесткой природы возбуждения осциллятора автоколебания продолжают до тех пор, пока не будет достигнут порог гашения колебаний. Тогда система переходит в стадию *D*, где имеет место срыв автоколебаний и быстрое уменьшение амплитуды. Далее процесс, состоящий из таких же стадий *A, B, C, D*, повторяется снова и снова.

Если постепенно увеличивать управляющий параметр релаксационного процесса μ , то временные масштабы $T = 2\pi/\omega_0$ и $\tau \sim \mu^{-1}$ сближаются. При этом период биений уменьшается, и вид временных реализаций все более

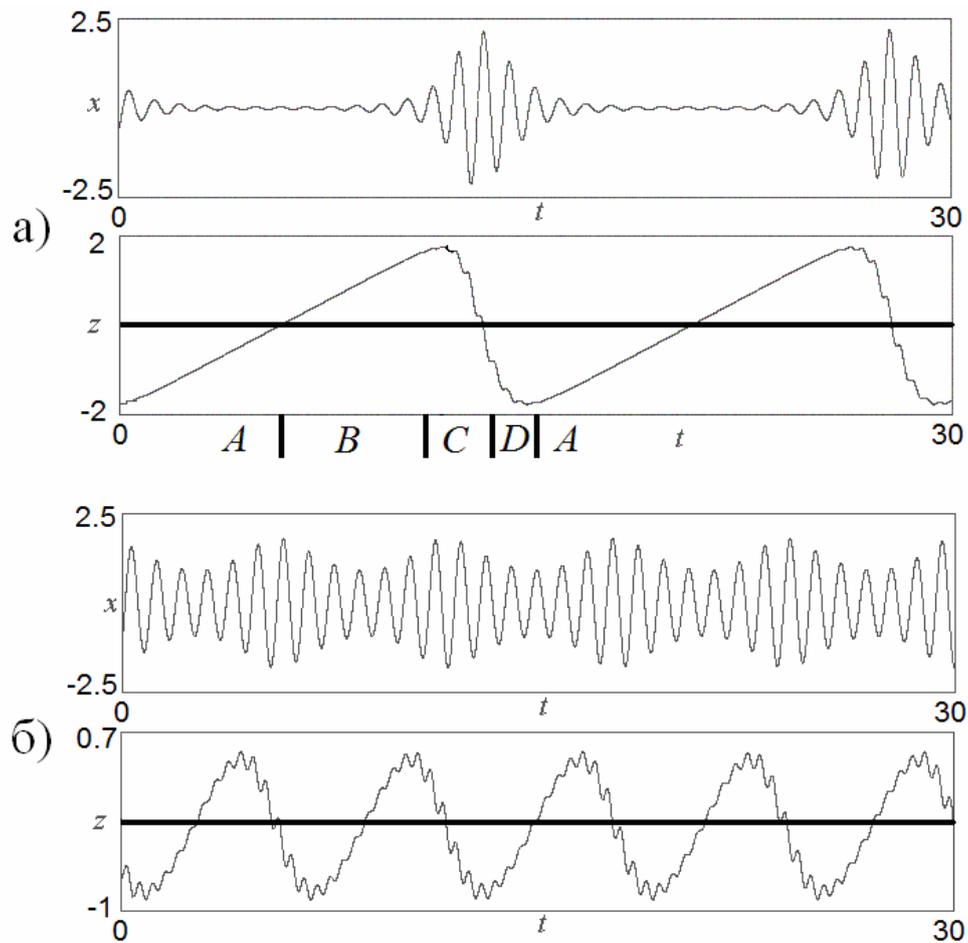


Рис. 4.38. Реализации автономного генератора квазипериодических колебаний (4.86); значения параметров $\lambda = 0$, $\omega_0 = 2\pi$, $\mu = 0.3$ (а), $\mu = 0.9$ (б).

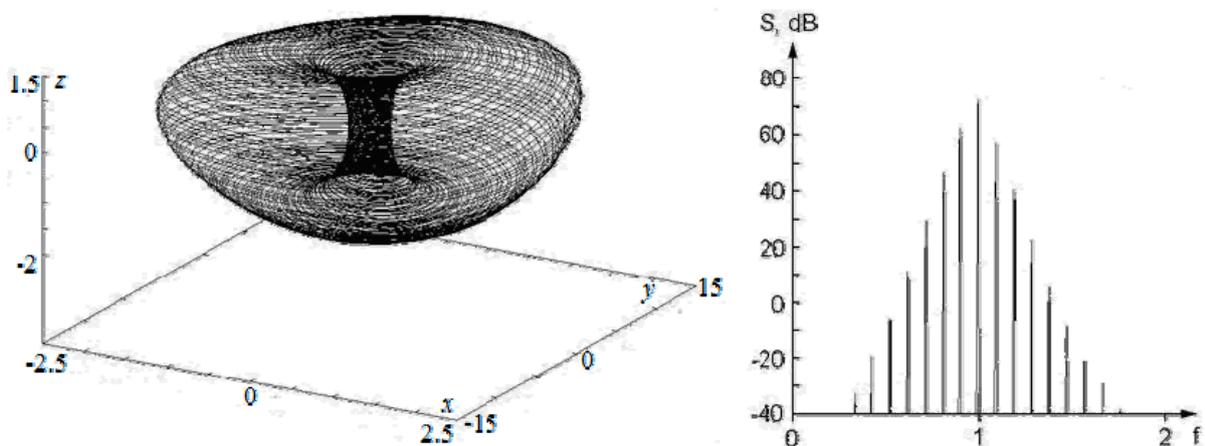


Рис. 4.39. Двухчастотный тор в фазовом пространстве автономного генератора квазипериодических колебаний (4.86) и спектр Фурье при $\lambda = 0$, $\omega_0 = 2\pi$, $\mu = 0.5$.

приближается к традиционному для квазипериодических колебаний виду, рис. 4.38, б.

В трехмерном фазовом пространстве (x, \dot{x}, z) системы при соответствующем выборе параметров наблюдаются аттракторы в виде торов. На рис. 4.39 представлен пример такого аттрактора.

Рядом с портретом аттрактора представлен спектр Фурье генерируемого сигнала. Спектр Фурье содержит дискретное множество равноудаленных друг от друга частотных компонент. Амплитуда компонент уменьшается вправо и влево от главной спектральной составляющей, которая соответствует основной частоте автоколебательного элемента. Расстояние между соседними компонентами определяется частотой релаксационных колебаний, т.е. циклами заряда и разряда накопительного элемента.

4.37. Внутренняя синхронизация в автогенераторе квазипериодических колебаний. Постройте карту динамических режимов автономного генератора квазипериодических колебаний (4.86) на плоскости параметров (ω_0, μ) , определяющих характерные временные масштабы системы. Покажите, что в системе возможны внутренние резонансы, приводящие к системе языков Арнольда, встроенных в область квазипериодических колебаний. Решение проиллюстрируйте фазовыми портретами и портретами аттракторов в сечении Пуанкаре.

Решение. Карта динамических режимов системы (4.86) на плоскости параметров (ω_0, μ) показана на рис. 4.40. При ее построении использовались сечения Пуанкаре плоскостью $x = 0$, и определялось количество точек пересечения фазовой траектории с этой плоскостью³⁶. Полученное число интерпретировалось как период режима. Таким образом, простому предельному циклу отвечает период 1, двухоборотному – период 2 и т.д. Внизу карты приведена соответствующая цветовая палитра. Непериодические режимы (включая квазипериодическую динамику и хаос) показаны черным цветом.

По периферии рис. 4.40 представлены примеры аттракторов разного типа в трехмерном фазовом пространстве, наблюдаемые в соответствующих точках плоскости параметров. В области $\omega_0 > 1$ при $\mu > 1$ существует единственный устойчивый режим в виде предельного цикла, фазовый портрет которого

³⁶ Подчеркнем, что это сечение отвечает переменной уравнений (4.86), а не стробоскопическому сечению, как для неавтономных систем.

показан на рис. 4.40, *а*. Это «базовый» предельный цикл системы, на основе которого возникают все характерные типы динамики.

При уменьшении параметра μ при $\mu = 1$ указанный цикл теряет устойчивость в результате бифуркации Неймарка-Сакера, и от него отделяется устойчивый тор. За порогом бифуркации Неймарка-Сакера при $\mu < 1$ в системе возможны периодические, квазипериодические и хаотические режимы. Замечательно, что области существования периодических режимов имеют вид языков Арнольда. Внутри таких языков реализуются предельные циклы, которые являются резонансными и лежат на поверхности тора. На рис. 4.40, *б-г* в качестве примеров показаны резонансные циклы в трехмерном фазовом пространстве, отвечающие периодам 5, 3 и 7. Подчеркнем, что эти циклы отвечают *внутренним резонансам* системы (4.86), поскольку рассматриваемая система автономна. Языки Арнольда погружены в область квазипериодических колебаний, соответствующие примеры квазипериодических аттракторов даны на рис. 4.40, *е, ж*.

При уменьшении собственной частоты автоколебательного осциллятора ω_0 внутри языков наблюдаются удвоения периода резонансных циклов и переход к хаосу на базе циклов удвоенного периода (движение «справа налево» на карте). На карте также хорошо просматривается линия начала перекрытия языков Арнольда, слева и ниже которой лежит область хаоса. В этом случае наблюдаются хаотические аттракторы, пример такого аттрактора дан на рис. 4.40, *д*.

В области значений собственной частоты осциллятора $1 < \omega_0 < 3$ с уменьшением μ наблюдается переход к хаосу через разрушение квазипериодических колебаний. На рис. 4.41 в левой колонке приводятся двумерные проекции аттракторов системы (4.86) на плоскость (x, \dot{x}) для различных значений параметра μ , которые возникают по ходу реализации такого сценария. В правой колонке даны соответствующие портреты аттракторов в сечении Пуанкаре поверхностью $x = 0$. При больших μ наблюдаются квазипериодические колебания, которым отвечает тор в фазовом пространстве или замкнутая инвариантная кривая в сечении Пуанкаре, рис. 4.41, *а*. При уменьшении параметра μ имеет место потеря гладкости эргодического тора, а затем его разрушение, в результате которого в системе устанавливаются хаотические колебания, рис. 4.41, *в*. При этом в промежуточной области могут возникать и различные резонансные циклы (рис. 4.41, *б*) в соответствии с картой рис. 4.40.

При увеличении собственной частоты ω_0 хаотические режимы вытесняются квазипериодическими. В этом случае в сечении Пуанкаре наблюдается замкнутая инвариантная кривая. С физической точки зрения (см. обсуждение в предыдущей задаче) это область, в которой реализуются режимы пульсирующей генерации с разным соотношением частоты следования всплесков колебаний и частоты их внутреннего заполнения.

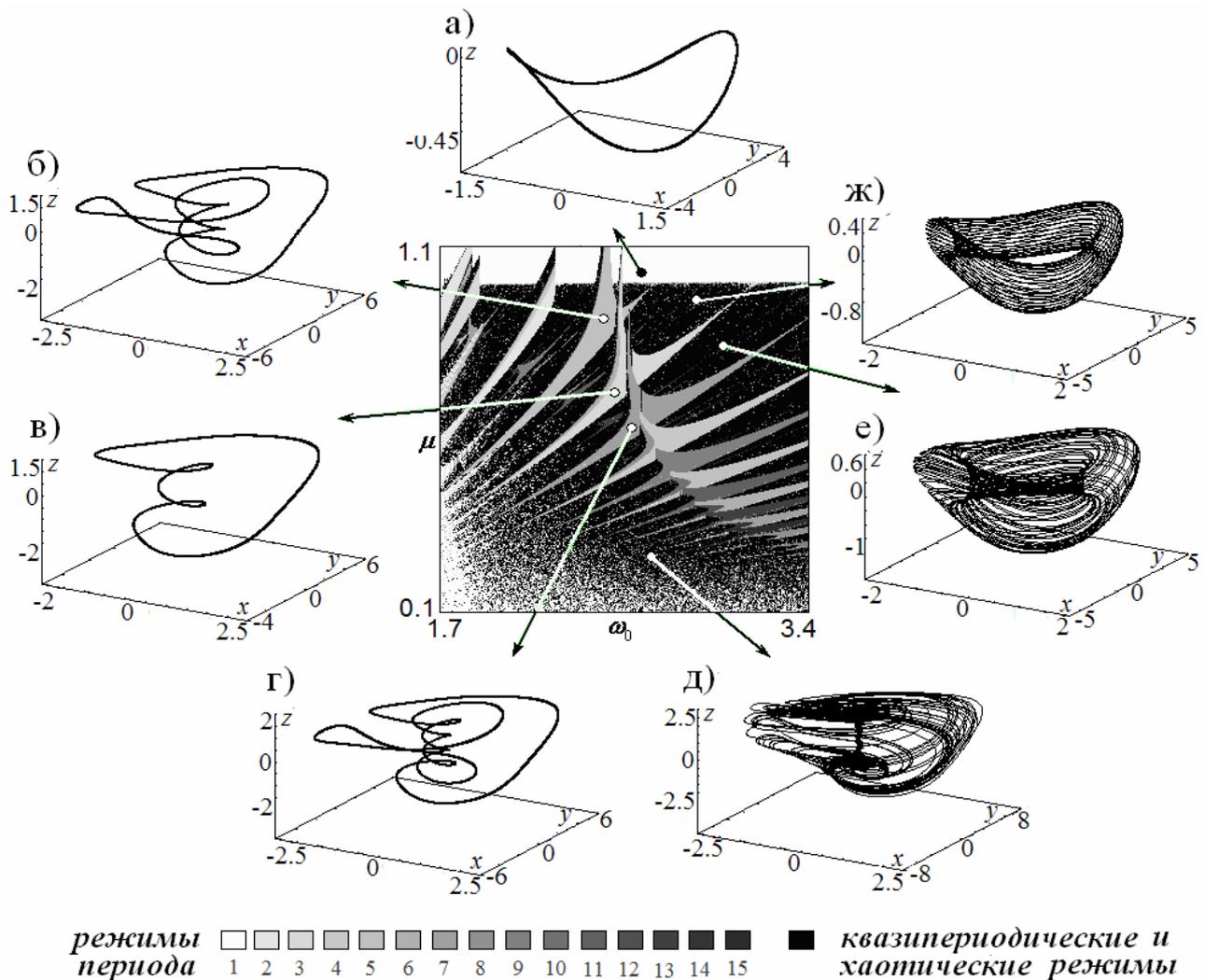


Рис. 4.40. Карта динамических режимов автономного генератора квазипериодических колебаний (4.86). Внизу показаны правила соответствия цветов на карте и периодов циклов в сечении Пуанкаре. Примеры аттракторов: базовый предельный цикл периода 1 (а), резонансные циклы периода 5, 3 и 7 (б)-(г), хаотический аттрактор – разрушенный тор (д), двухчастотные торы (е)-(ж).

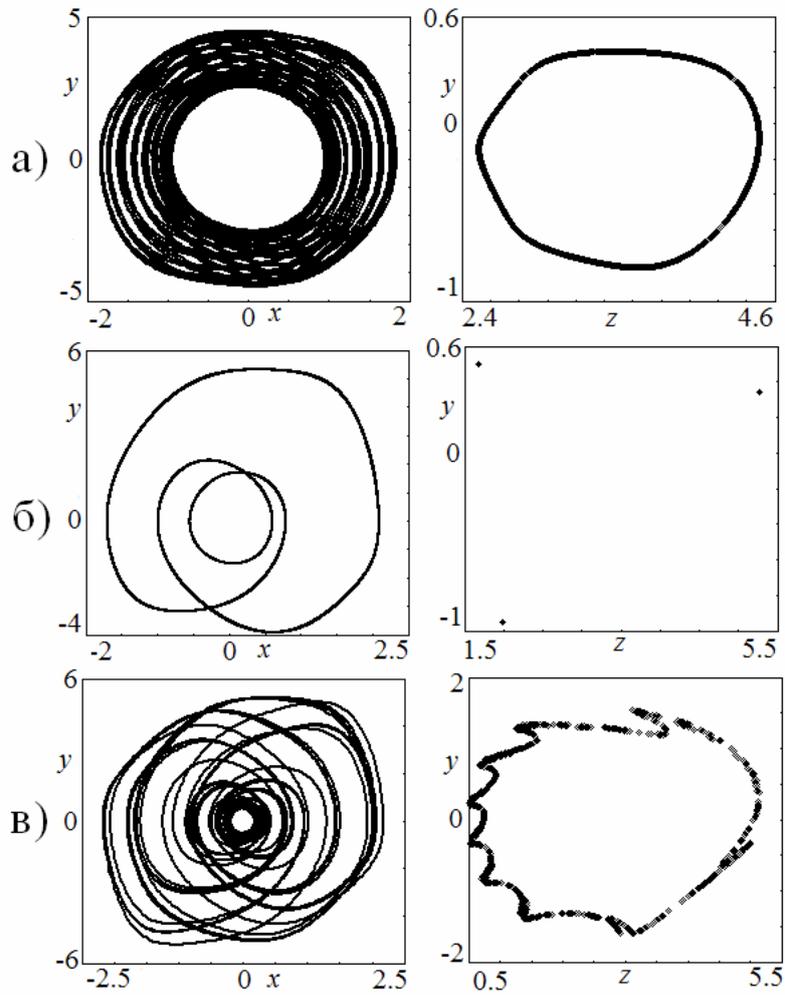


Рис. 4.41. Проекция аттракторов автономного генератора квазипериодических колебаний (4.86) на плоскость (x, y) (левая колонка) и аттракторы в сечении Пуанкаре плоскостью $x = 0$ (правая колонка): двухчастотный тор, $\mu = 0.9$ (а); резонансный цикл периода 3 на торе, $\mu = 0.8$ (б); разрушенный тор, $\mu = 0.5$ (в). Значения остальных параметров $\lambda = 0$, $\omega_0 = 2.7$.

Библиографические комментарии

Мы представляем очень краткий список литературы, подобранный по принципам «минимальности» в учебных целях в контексте настоящего издания и с точки зрения более глубокого знакомства с некоторыми вопросами. При этом не ставилась ни цель дать полный обзор, ни тем более отразить приоритет тех или иных работ.

Фундаментальное изложение проблем синхронизации в различных контекстах, включая примеры из разных областей естествознания, анализ фазовых и укороченных уравнений и т.д. можно найти в монографиях [1,2]. Также можно рекомендовать и монографию [3]. Метод медленно меняющихся амплитуд излагается практически в любом учебнике по теории колебаний в различных версиях. Используемый нами вариант можно найти в [4], где также обсуждаются основные вопросы вынужденной синхронизации осциллятора Ван-дер-Поля. Для более широкого и глубокого знакомства со многими вопросами не только теории синхронизации, но и теории динамических систем рекомендуем Интернет-ресурс Encyclopedia of dynamical systems [5]. Общее описание и классификацию бифуркаций можно найти в монографиях [6,7] и на интернет-странице [8].

Метод карт динамических режимов описан в [9], различные примеры можно найти также на интернет-ресурсе [10]. Примеры карт ляпуновских показателей имеются на интернет-ресурсе [11].

Уравнение Адлера обсуждается в большинстве учебников по теории колебаний, мы также рекомендуем [1-4]. Анализ бифуркаций в укороченных уравнениях возбуждаемой системы Ван-дер-Поля представлен в [3,4,6]. Аналогичный анализ для неавтономной системы Ван-дер-Поля-Дуффинга – в [12]. Бифуркации в исходной неавтономной системе Ван-дер-Поля, включая резонансы на гармониках и субгармониках, обсуждаются в [13]. Укороченные уравнения для основных резонансов в возбуждаемой системе в обобщенной форме представлены в [14]. Там же обсуждаются бифуркации для основных

сильных и слабых резонансов. В математическом контексте уравнения для основных резонансов, как и уравнения бифуркаций векторных полей на плоскости с симметрией, а также соответствующие иллюстрации даны в [15]. Общая организация языков синхронизации для основных резонансов неавтономных систем обсуждается также в [16,17]. Бифуркации в неавтономном брюсселяторе обсуждаются в [18].

Симметричные и несимметричные решения для диссипативно связанных осцилляторов Ван-дер-Поля в рамках укороченных уравнений обсуждаются в [19]. Там же рассматривается эффект «гибели колебаний». Укороченные уравнения для системы с комбинированной связью – диссипативной и реактивной – и устройство пространства параметров соответствующего фазового уравнения обсуждаются в [20]. Обобщенное уравнение Адлера, учитывающее неидентичность, неизохронность и возможность диссипативной и реактивной связи выводится и анализируется в [21,22]. Там же представлены карты динамических режимов для исходных уравнений в различных ситуациях. Бифуркационный анализ для укороченных уравнений с учетом большинства перечисленных факторов дан в [23].

Случай неидентичных по управляющим параметрам осцилляторов (широкополосная синхронизация) и параметрам нелинейной диссипации обсуждается в [24-26] с применением фазового приближения и метода карт динамических режимов. В [27] дан анализ бифуркаций для неидентичных по управляющему параметру диссипативно связанных автоколебательных систем.

Условия полной синхронизации трех взаимно связанных осцилляторов на плоскости их частотных расстроек в рамках фазовых уравнений обсуждаются в [2]. Экспериментальные карты для трех осцилляторов, включающие двухчастотную и трехчастотную квазипериодичность, представлены в [28]. Точки SNF (правда, не для потоковых уравнений для фаз, а для модельных отображений) описаны в [29]. В [30] представлены некоторые иллюстрации для связанных систем, в которых при вариации параметров возможны многочастотные режимы и их превращения в периодические и хаотические.

Седло-узловая бифуркация инвариантных торов, приводящая к трехчастотной квазипериодичности, обсуждается в [31], а также в [32,33]. Обсуждение вынужденной синхронизации двух связанных фазовых осцилляторов в режиме захвата представлено в [32,33]. Переход от режима захвата к режиму биений автономных осцилляторов обсуждается в [34], включая ляпуновские карты на плоскости частота – амплитуда воздействия. Обсуждение ряда вопросов вынужденной синхронизации двухчастотных колебаний, в первую очередь, синхронизации резонансного предельного цикла на торе, представлено в [35-37] и цитированной там литературе.

Автономный генератор квазипериодических колебаний с трехмерным фазовым пространством предложен и описан в [38,39]. Еще один пример автономного генератора квазипериодических колебаний, но с четырехмерным фазовым пространством представлен в [40,41].

Литература

1. Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003, 494 с.
2. Ланда П.С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980, 360 с.
3. Balanov A.G., Janson N.B., Postnov D.E., Sosnovtseva O. Synchronization: from simple to complex. Springer, 2009, 437 p.
4. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М. Нелинейные колебания. М.: Физматлит, 2002, 292 с.
5. Encyclopedia of dynamical systems, <http://www.scholarpedia.org>
6. Гукенхеймер Дж., Холмс П. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. Ижевск: РХД, 2002, 560 с.
7. Kuznetsov Y.A. Elements of applied bifurcation theory. New York: Springer, 1998, 593 p.
8. Интернет-страница Кузнецова Ю.А. (Kuznetsov Y.A.), www.math.uu.nl/people/kuznet/
9. Кузнецов С.П. Динамический хаос. М: Физматлит, 2001, 296 с.

10. Карты динамических режимов, <http://sgtnd.narod.ru/science/atlas/rus/index.htm>
11. Карты ляпуновских показателей», <http://sgtnd.narod.ru/chair/rus/index.htm>
12. Glenndinning P., Proctor M. Travelling waves with spatially resonant forcing: bifurcations of a modified Landau equation. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 1993, vol. 3, № 6, pp. 1447-1455.
13. Mettin R., Parlitz U., Lauterborn W. Bifurcation Structure of the Driven Van der Pol Oscillator. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 1993, vol. 3, №.6, pp. 1529-1555.
14. Noris J. The closing of Arnold tongues for periodically forced limit cycle. *Nonlinearity*, 1993, vol. 6, pp. 1093-1114.
15. Ван Д., Ли Ч., Чоу Ш.-К. Нормальные формы и бифуркации векторных полей на плоскости. М: МЦНМО, 2005, 416 с.
16. Vance W., Ross J. A detailed study of forced chemical oscillator: Arnold tongues and bifurcation sets. *J. Chem. Phys.* 1989, vol. 91, № 12, pp. 7654-7670.
17. Farjas J., Herrero R., Orriols F. Experimental analysis of codimensional-2 bifurcations in a periodically-forced opto-thermal oscillator. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 1998, vol. 38, № 7, pp. 1413-1435.
18. Olesen M.W., Knudsen C. Destruction of dominant Arnold's tongues in forced oscillators. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 1994, vol. 4, № 3, pp. 737-739.
19. Aronson D.G., Ermentrout G.B., Kopell N. Amplitude response of coupled oscillators. *Physica D*, 1990, vol. 41, pp. P. 403-449.
20. Rand R., Holmes P.J. Bifurcation of periodic motions in two weakly coupled van der Pol oscillators. *Int. J. Non-Linear Mechanics*, 1980, vol. 15, pp. 387-399.
21. Kuznetsov A.P., Stankevich N.V., Turukina L.V. Coupled van der Pol–Duffing oscillators: Phase dynamics and structure of synchronization tongues. *Physica D*, 2009, vol. 238, № 14, pp. 1203-1215.
22. Кузнецов А.П., Станкевич Н.В., Тюрюкина Л.В. Связанные осцилляторы ван дер Поля и ван дер Поля–Дуффинга: Фазовая динамика и компьютерное

- моделирование. Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика, 2008, т. 16, № 4, сс. 101-136.
23. Ivanchenko M., Osipov G., Shalfeev V., Kurths J. Synchronization of two non-scalar-coupled limit-cycle oscillators. *Physica D*, 2004, vol. 189, № 1-2, pp. 8-30.
24. Кузнецов А.П., Паксютов В.И., Роман Ю.П. Особенности синхронизации в системе неидентичных связанных осцилляторов ван дер Поля и ван дер Поля–Дуффинга. Широкополосная синхронизация. Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика, 2007, т. 15, № 4, сс. 3-15.
25. Kuznetsov A.P., Roman Ju. P. Properties of synchronization in the systems of non-identical coupled van der Pol and van der Pol–Duffing oscillators. Broadband synchronization, *Physica D*, 2009, vol. 238, № 16, pp. 1499-1506.
26. Кузнецов А.П., Емельянова Ю.П., Селезнев Е.П.. Синхронизация связанных автоколебательных осцилляторов с неидентичными параметрами. Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика, 2010, т. 18, № 2, сс. 62-78.
27. Астахов В.В, Коблянский С.А, Шабунин А.В. Бифуркационный анализ режимов синхронизации и гашения колебаний в связанных генераторах с реактивной нелинейностью. Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика, 2010, т. 18, № 2, сс. 79-97.
28. Linsay P.S., Cumming A.W. Three-frequency quasiperiodicity, phase locking, and the onset of chaos. *Physica D*, 1989, vol. 40, pp. 196-217.
29. Baesens C, Guckenheimer J., Kim S., MacKay R.S. Three coupled oscillators: mode locking, global bifurcations and toroidal chaos. *Physica D*, 1991, vol. 49, pp. 387-475.
30. Buskirk R.V., Jeffries C. Observation of chaotic dynamics of coupled nonlinear oscillators. *Phys. Rev. A*, 1985, vol. 31, pp. 3332-3357.
31. Peter Ashwin P. Boundary of Two Frequency Behaviour in a System of Three Weakly Coupled Electronic Oscillators. *Chaos, Solitons & Fractals*, 1998, vol. 9, № 8, pp. 1279-1287.

32. Анищенко В.С, Астахов С.В, Вадивасова Т.Е, Феоктистов А.В. Численное и экспериментальное исследование внешней синхронизации двухчастотных колебаний. *Нелинейная динамика*, 2009, т. 5, № 2, сс. 237-252.
33. Anishchenko V., Astakhov S., Vadivasova T. Phase dynamics of two coupled oscillators under external periodic force. *Europhysics Letters*, 2009, vol. 86, p. 30003.
34. Кузнецов А.П., Сатаев И.Р., Тюрюкина Л.В. Синхронизация квазипериодических колебаний связанных фазовых осцилляторов. *Письма в ЖТФ*, 2010, т. 36, № 10, сс.73-80.
35. Anishchenko V., Nikolaev S., Kurths J. Bifurcational mechanisms of synchronization of a resonant limit cycle on a two-dimensional torus. *CHAOS*, 2008, vol. 18, 037123.
36. Анищенко В.С., Николаев С.М. Механизмы синхронизации резонансного предельного цикла на двумерном торе. *Нелинейная динамика*, 2008, т. 4, № 1, сс. 39-55.
37. Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е. Регулярные и хаотические автоколебания. Синхронизация и влияние флуктуаций. Учебник-монография. Долгопрудный: Издательский Дом «Интеллект», 2009, 312 с.
38. Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Stankevich N.V. A simple autonomous quasiperiodic self-oscillator. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2010, vol. 15, pp. 1676-1681.
39. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Станкевич Н.В. Автономный генератор квазипериодических колебаний. *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*, 2010, т. 18, № 2, сс. 51-61.
40. Anishchenko V., Nikolaev S., Kurths J. Winding number locking on a two-dimensional torus: Synchronization of quasiperiodic motions. *Phys. Rev. E*, 2006, vol. 73, 056202.
41. Анищенко В.С, Николаев С.М. Генератор квазипериодических колебаний. Бифуркация удвоения двумерного тора. *Письма ЖТФ*, 2005, т. 31, вып. 19, сс. 88-94.

Учебно-научное издание

Кузнецов Александр Петрович

Емельянова Юлия Павловна

Сатаев Игорь Рустамович

Тюрюкина Людмила Владимировна

СИНХРОНИЗАЦИЯ В ЗАДАЧАХ

Пособие издано в авторской редакции
Ответственный за выпуск Л.В. Тюрюкина

Подписано в печать 11.06..2010 г.

Формат 60x84 1/16. Бумага Снегурочка. Гарнитура Times New Roman.

Усл. печ. л. 15,84. Тираж 100 экз.

ООО Издательский центр «Наука»
410600, г. Саратов, ул. Пугачевская, 117, кв. 50