

БИФУРКАЦИИ И СИНХРОНИЗАЦИЯ В ОСЦИЛЛЯТОРАХ ВАН-ДЕР-ПОЛЯ С ПОТЕНЦИАЛОМ, ЗАДАННЫМ КАТАСТРОФАМИ Р.ТОМА

А.П. Кузнецов¹, И.Р. Сатаев², Ю.В. Седова³

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН

E-mail: 1alkuz@sgu.ru, 2sataevir@rambler.ru, 3sedovayv@rambler.ru

1. СИСТЕМА МОДЕЛЕЙ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ С КАТАСТРОФАМИ

1.1. КЛАССИФИКАЦИОННАЯ ТЕОРЕМА ТОМА [1,2]

Каспоидные катастрофы:

- ✓ Складка: $U(x) = \frac{x^3}{3} + ax$
- ✓ Сборка: $U(x) = \frac{x^4}{4} + a\frac{x^2}{2} + bx$
- ✓ Ласточкин хвост: $U(x) = \frac{x^5}{5} + a\frac{x^3}{3} + b\frac{x^2}{2} + cx$

Омбилические катастрофы:

- ✓ Эллиптическая омбилика: $U(x, y) = x^2y - \frac{y^3}{3} + a(y^2 + x^2) + bx + cy$
- ✓ Гиперболическая омбилика: $U(x, y) = x^2y + \frac{y^3}{3} + a(y^2 - x^2) + bx + cy$

[1] Арнольд В.И. Теория катастроф. М.: Наука, 1990.

[2] Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения. М.: Мир, 1980.

1.2. АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ОСЦИЛЛЯТОРЫ ТИПА ВАН-ДЕР-ПОЛЯ С ПОТЕНЦИАЛОМ, ЗАДАННЫМ КАТАСТРОФАМИ

Общий вид автоколебательного осциллятора с каспоидной катастрофой $U(x)$:

$$\ddot{x} - g(x)\dot{x} + \frac{dU(x)}{dx} = 0$$

$U(x)$ - потенциал, заданный соответствующей катастрофой

$g(x)$ - отрицательное трение и нелинейная диссипация

- ✓ Осциллятор типа ВдП: $g(x) = \lambda - x^2$
- ✓ Осциллятор с несимметричной диссипацией; $g(x) = \lambda - (\varepsilon - x)^2$
- ✓ Осциллятор типа автогенератора с жестким возбуждением: $g(x) = \lambda - x^2 + kx^4$

1.3. СВЯЗАННЫЕ ОСЦИЛЛЯТОРЫ

- ✓ Связанные осцилляторы с каспоидными катастрофами
- ✓ Омбилические катастрофы: эллиптическая омбилика
 - осцилляторы с разными частотами, связь через росток эллиптической омбилики (автоколебательная модель Хенона-Хейлеса)
 - осцилляторы с потенциалом эллиптической омбилики
- ✓ Омбилические катастрофы: гиперболическая омбилика

2. ОСЦИЛЛЯТОРЫ С КАСПОИДНЫМИ КАТАСТРОФАМИ

2.1. АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР С КАТАСТРОФЕЙ СБОРКА

Уравнение

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x^3 + ax + b = 0$$

Параметры катастрофы: (a, b)

Связь с уравнением *Бонхоффера–Ван-дер-Поля* (*Фитц Хью–Нагумо*)

Заменой переменной и параметров $\lambda = 3\frac{1-B\varepsilon}{B\varepsilon}$, $a = 9\frac{1-B}{B^2\varepsilon}$, $b = \frac{9\sqrt{3}}{B^2\varepsilon\sqrt{\varepsilon B}}A$ осциллятор с

катастрофой сборки приводится к системе *Бонхоффера–Ван-дер-Поля*, простейшей модели нейрона [3,4]:

$$\varepsilon\dot{x} = x - \frac{x^3}{3} - y,$$

$$\dot{y} = x + A - By.$$

[3] Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны, М.: Наука, 1997.

[4] Rajasekar S., Lakshmanan M., Physica D, 1988, vol. 32, p.146 – 152.

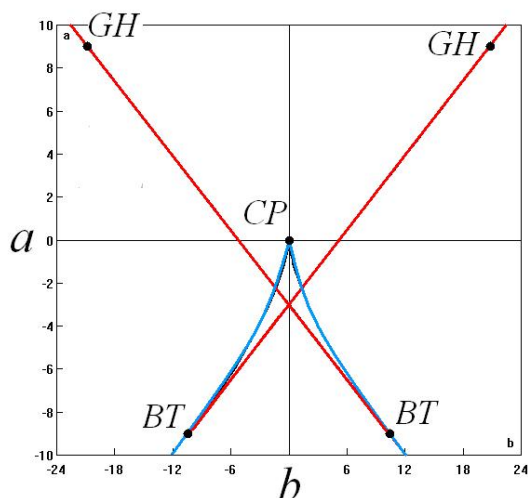
[5] Волков Е.И., Изв. Вузов - ПНД, 2004, № 6, с.60-78.

Таким образом:

- Модель *Бонхоффера–Ван-дер-Поля* может интерпретироваться не только как биофизическая система, но и как каноническая модель теории колебаний, получаемая в рамках классификационной схемы теории катастроф.
- В рамках биофизической интерпретации рассматриваются очень малые значения параметра ε , например, 0.001-0.01 [5] ($\lambda \cong 100-1000$), что отвечает сильно релаксационным режимам. В рамках интерпретации осциллятора с катастрофой сборки адекватным является анализ в области управляющих параметров, представленных в канонической форме, порядка единицы.

Бифуркационный анализ

✓ **Локальные бифуркации**



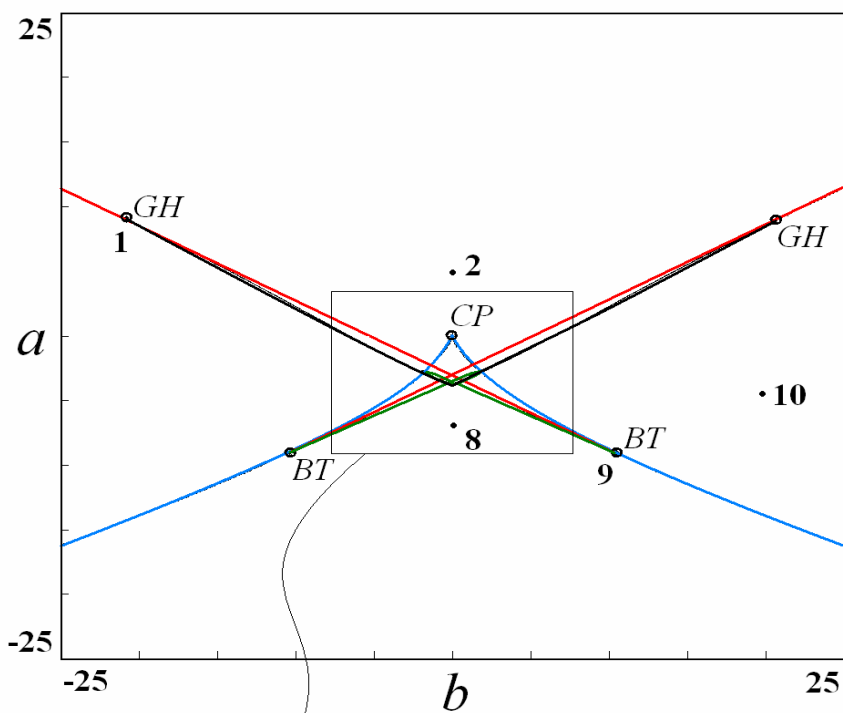
$$\lambda = 3$$

- **Линии складок:** $b = \pm \frac{2}{3\sqrt{3}}(-a)^{3/2}$,
- точка сборки *CP*: $a = b = 0$,
- **линия бифуркации Андронова-Хопфа:** $b = \mp(\lambda + a)\sqrt{\lambda}$,
- точки Богданова-Тakensа *BT*:
 $a = -3\lambda$, $b = \pm 2\lambda\sqrt{\lambda}$.

Локальный бифуркационный анализ осциллятора *Бонхоффера–Ван-дер-Поля* можно найти в [6].

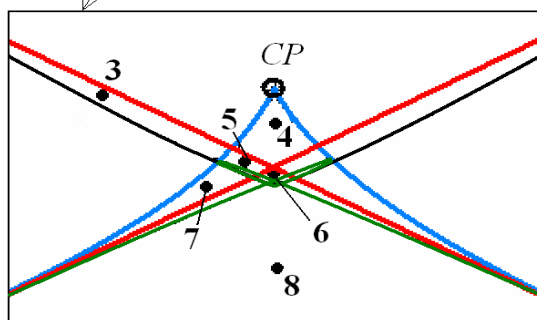
[6] Barnes B., Grimshaw R. J. Austral. Math. Soc., Ser. B, vol. 38, 1997, p. 427-453.

✓ Нелокальные бифуркации

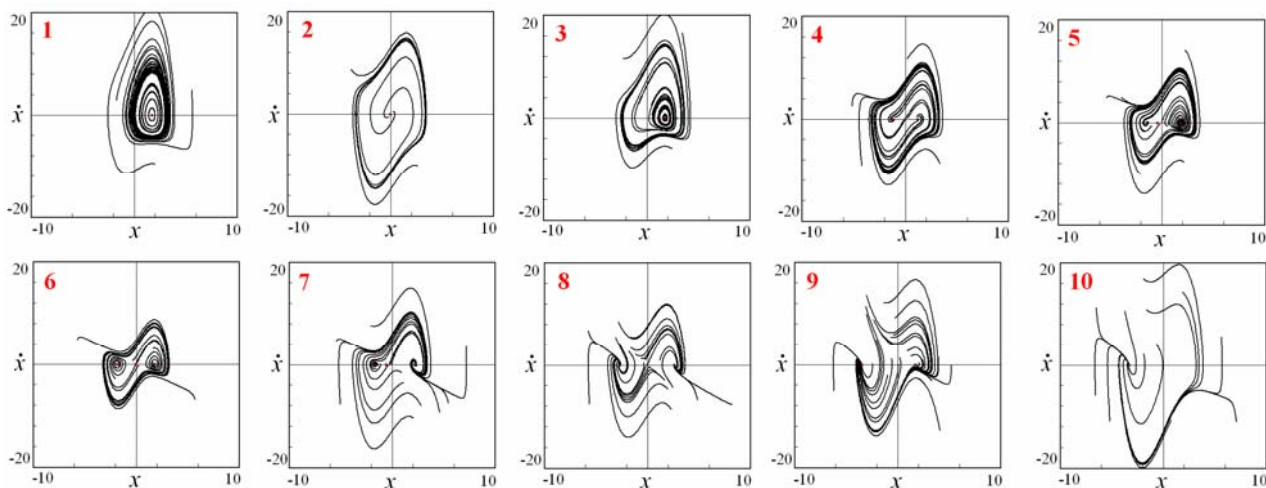


Зеленая линия – линия нелокальной бифуркации (линия влипания предельного цикла в петлю сепаратрисы)

Черная линия - линия fold-бифуркации предельного цикла



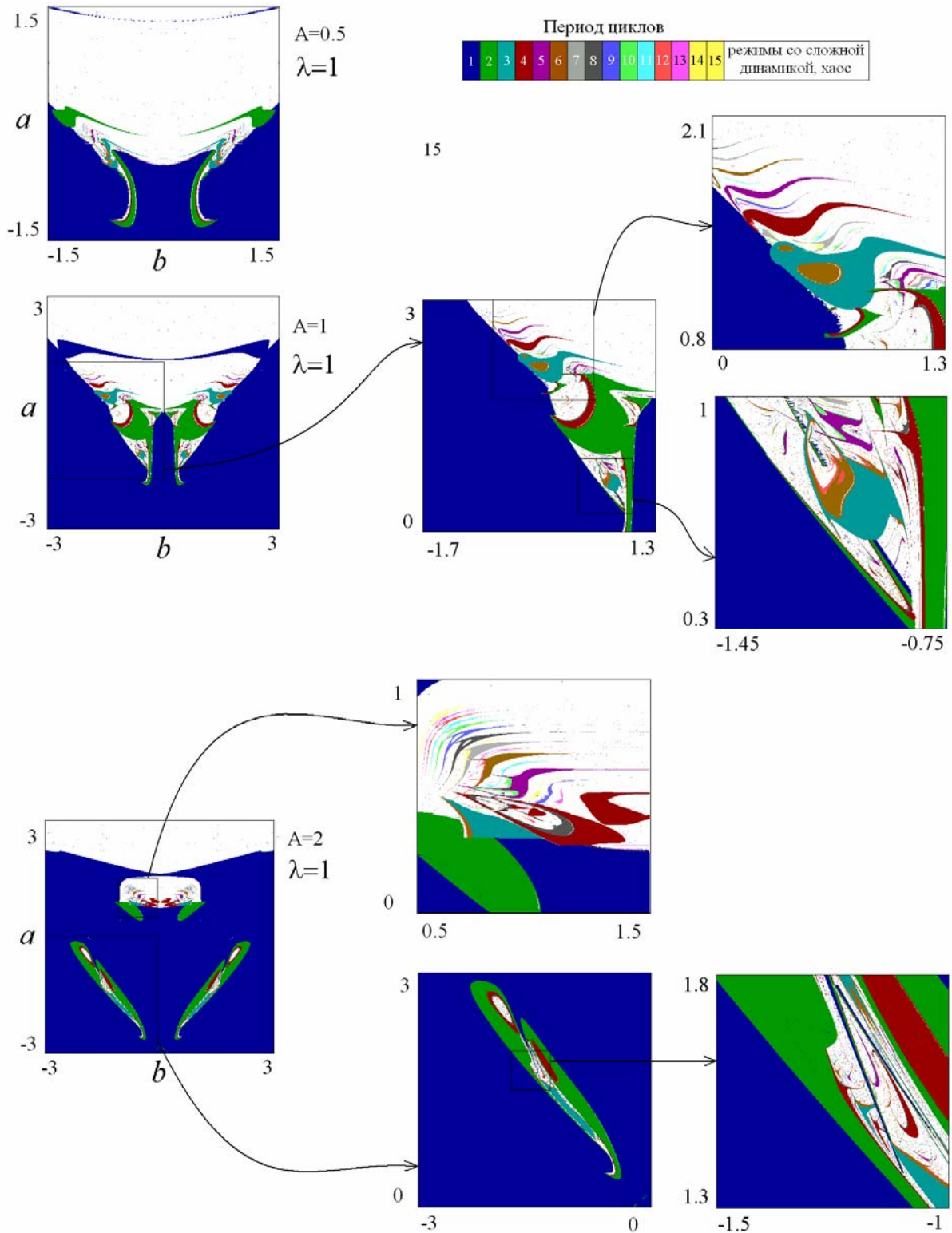
Фазовые портреты в выделенных точках



Анализ неавтономной системы в пространстве параметров катастрофы

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x^3 + ax + b = A \cos \omega t$$

При изучении неавтономных автоколебательных систем традиционным является подход, основанный на выявлении типов режимов и бифуркаций на плоскости параметров воздействия (частота и амплитуда). При обсуждении синхронизации в системе, автономная динамика которой регулируется набором некоторых канонических параметров, можно предложить подход, основанный *на выявлении устройства пространства именно этих параметров*.



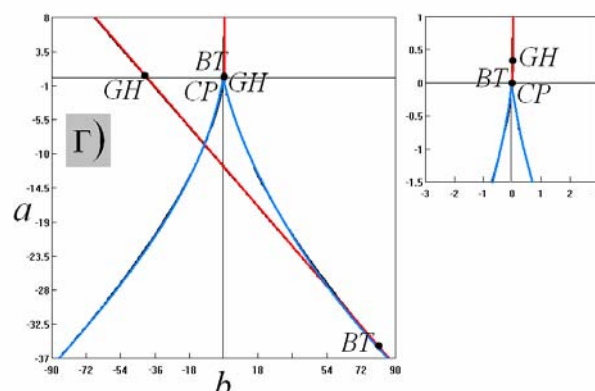
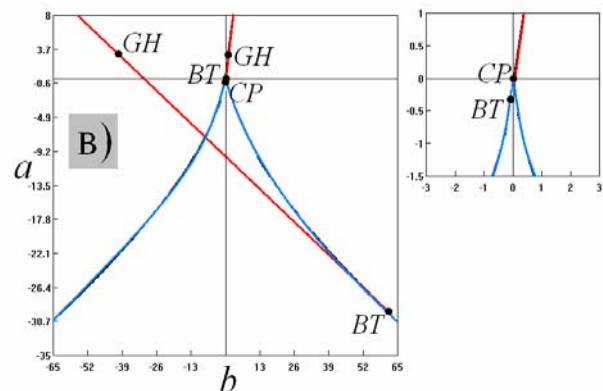
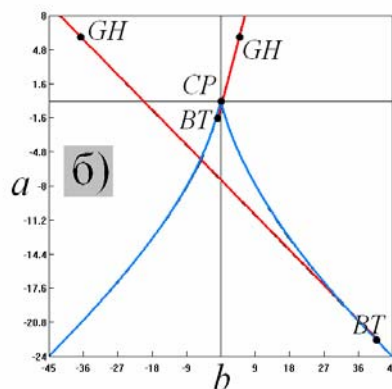
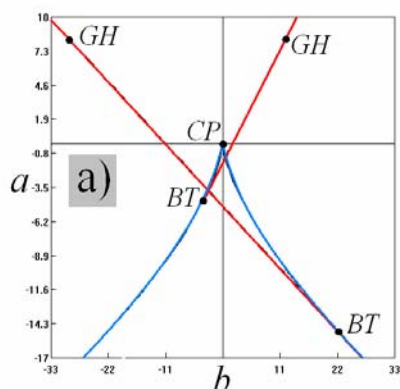
2.2. ОСЦИЛЛЯТОР С НЕСИММЕТРИЧНОЙ ДИССИПАТИВНОЙ ФУНКЦИЕЙ С КАТАСТРОФой СБОРКА

Уравнение

$$\ddot{x} - (\lambda - (\varepsilon - x)^2)\dot{x} + x^3 + ax + b = 0$$

Локальные бифуркации

- **поверхность складок:** $b = \pm \frac{2}{3\sqrt{3}}(-a)^{3/2}$,
- линии сборки CP : $a = b = 0$,
- **поверхности бифуркации Андронова-Хопфа:**
 $b = -(\varepsilon \pm \sqrt{\lambda})(a + (\varepsilon \pm \sqrt{\lambda})^2)$,
- линии Богданова-Тakensа BT : $a = -3(\varepsilon \pm \sqrt{\lambda})^2, b = -2(\varepsilon \pm \sqrt{\lambda})^3$.



$\lambda = 3$, параметр ε меняется от рисунка к рисунку: а) $\varepsilon = 0.5$, б) $\varepsilon = 1.0$, в) $\varepsilon = 1.4$, г) $\varepsilon = 1.7 \approx \sqrt{\lambda}$.

Особенности задачи:

- В системе имеет место бифуркация коразмерности три: точка сборки в точке Богданова-Тakensа: $a = b = 0, \varepsilon = \sqrt{\lambda}$.
- Аналогичная бифуркация наблюдается, например, в укороченном уравнении Ван-дер-Поля-Дуффинга под внешним гармоническим воздействием при увеличении параметра нелинейности, введенной по типу осциллятора Дуффинга) [7]

[7] Glenndinning P., Proctor M., Int.l Journal of Bifurcation and Chaos, 1993, vol.3, no.6.

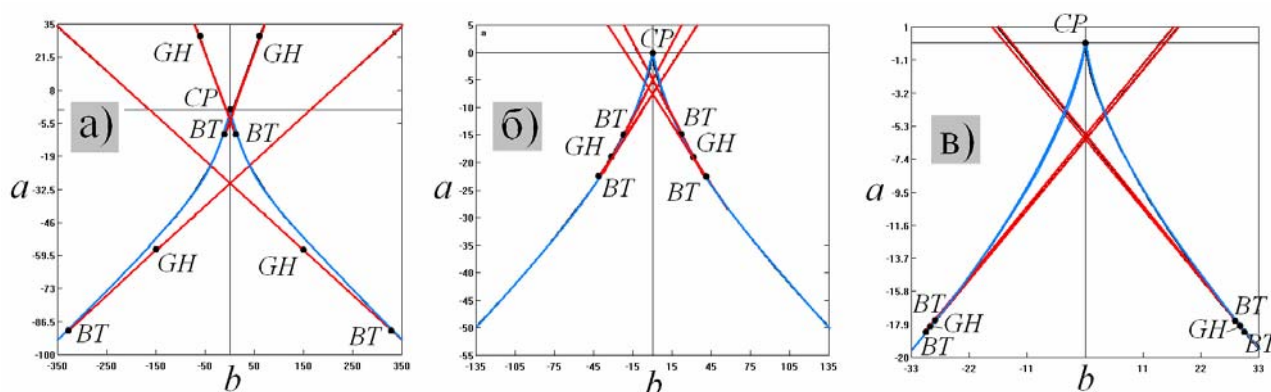
2.3. ОСЦИЛЛЯТОР ТИПА АВТОГЕНЕРАТОРА С ЖЕСТКИМ ВОЗБУЖДЕНИЕМ С КАТАСТРОФЕЙ СБОРКА

Уравнение

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2 + kx^4)\dot{x} + x^3 + ax + b = 0$$

Локальные бифуркации

- **поверхность складок:** $b = \pm \frac{2}{3\sqrt{3}}(-a)^{3/2}$,
- линии сборки: $a = b = 0$,
- **поверхности бифуркации Андронова-Хопфа:** $b = -x^3 - ax$,
 $x = \pm \sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{1 - 4k\lambda}}{2k}}$
- линии Богданова-Тakensа: $a = -3x^2$, $b = -2x^3$, где $x = \pm \sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{1 - 4k\lambda}}{2k}}$



а) $k = 0.05$, б) $k = 0.08$, в) $k = 0.0833 \approx 1/4\lambda$

Особенности задачи:

- С ростом параметра k линии бифуркации Андронова-Хопфа на плоскости параметров катастрофы (a, b) сближаются и при $k = 1/4\lambda$ сливаются и исчезают, одновременно с точками Богданова-Тakensа
- Аналогичная бифуркационная ситуация ответственна за исчезновение квазипериодических режимов в укороченных уравнениях возбуждаемого гармоническим сигналом автогенератора с жестким возбуждением при слиянии устойчивого и неустойчивого циклов в автономной системе [8]

[8] Кузнецов А.П., Милованов С.В. // Известия ВУЗов. ПНД, 2003, № 4-5, с. 16-30.

2.4. АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР С КАТАСТРОФЕЙ ЛАСТОЧКИН ХВОСТ

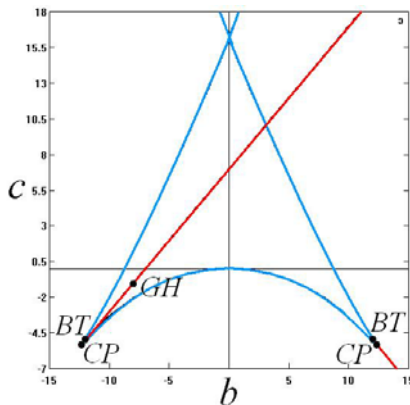
Уравнение

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x^4 + ax^2 + bx + c = 0$$

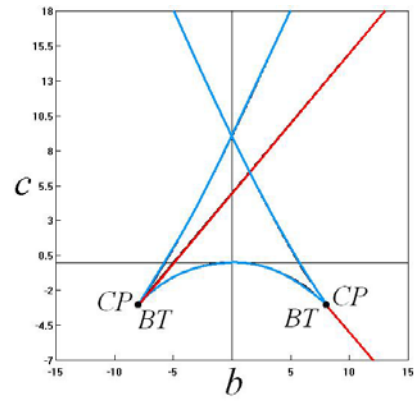
Параметры катастрофы: (a, b, c)

Локальные бифуркации

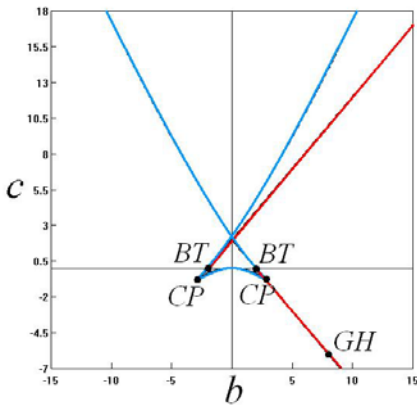
- **поверхности складок:** $c = 3x^4 + ax^2$, $b = -4x^3 - 2ax$
- **линии сборки CP:** $b = \pm(-\frac{2}{3}a)^{3/2}$, $c = -\frac{a^2}{12}$
- **точка ласточкин хвост:** $a = b = c = 0$
- **поверхность бифуркации Андронова-Хопфа:** $c = -\lambda^2 - a\lambda \mp b\sqrt{\lambda}$,
- **линии Богданова-Тakensа BT:** $c = 3\lambda^2 + a\lambda$, $b = \mp 2(2\lambda + a)\sqrt{\lambda}$.



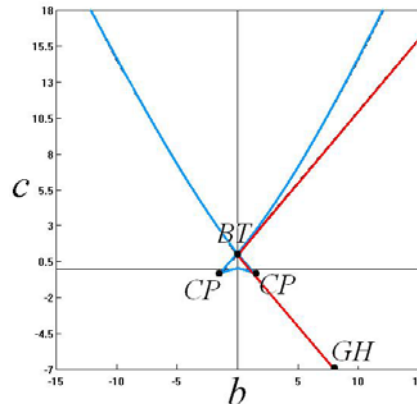
а)



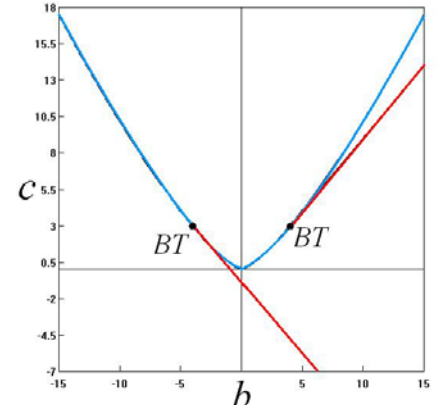
б)



в)



г)



д)

Значения параметров: $\lambda = 1$, а) $a = -8$, б) $a = -6$, в) $a = -3$, г) $a = -2$, д) $a = 0$.

Особенности задачи:

- Первоначально точки Богданова-Тakensа располагаются симметричным образом на «нижней» ветви линии складок (а)
- При $c = 3\lambda^4$, $b = \pm 8\lambda\sqrt{\lambda}$, $\lambda = \sqrt{-a/6}$ в системе имеет место бифуркация коразмерности три: обе точки Богданова-Тakensа одновременно проходят через сборки (б) и приходят на другие ветви линий складок (в)
- При $2\lambda + a = 0$ точки Богданова-Тakensа визуальнo сливаются друг с другом и с точкой самопересечения линий складок на вертикальной оси (г)
- При $a = 0$. происходит катастрофа ласточкин хвост, сборки сливаются и исчезают, а точки Богданова-Тakensа оказываются на одной линии (д)

3. СВЯЗАННЫЕ ОСЦИЛЛЯТОРЫ

3.1. СВЯЗАННЫЕ ОСЦИЛЛЯТОРЫ ВБЛИЗИ ТОЧКИ «ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА» ОТ ОДНОЯМНОГО К ДВУХЯМНОМУ ПОЕНЦИАЛУ

Уравнения. Общий случай неидентичных осцилляторов

$$\begin{aligned}\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + \mu(\dot{x} - \dot{y}) + x^3 + a_1x + b_1 &= 0, \\ \ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + \mu(\dot{y} - \dot{x}) + y^3 + a_2y + b_2 &= 0\end{aligned}$$

- Конфигурация потенциала в осцилляторах регулируется параметрами (a_1, b_1) и (a_2, b_2) .
- Представленная модель может описывать ситуации, когда взаимодействуют между собой осцилляторы с одноямным потенциалом и с двухямным потенциалом.
- Особой является ситуация, когда в одном из осцилляторов реализуется «фазовый переход» от одноямного к двухямному потенциалу.

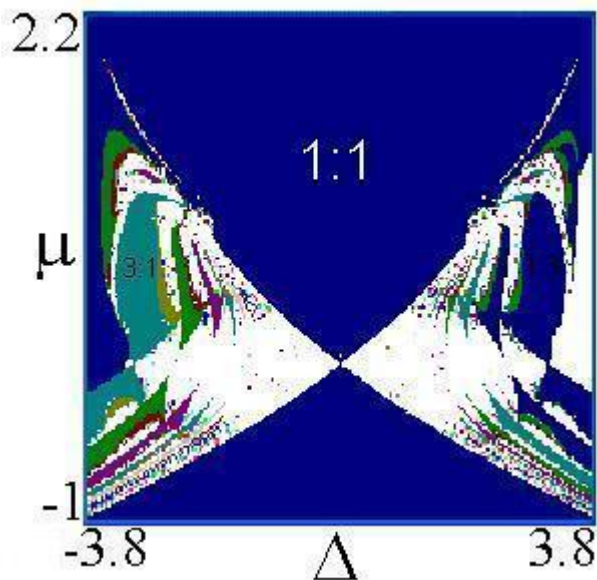
$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + \mu(\dot{x} - \dot{y}) + (1 - \frac{\Delta}{2})x + \beta x^3 = 0$$

$$\ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + \mu(\dot{y} - \dot{x}) + (1 + \frac{\Delta}{2})y + \beta y^3 = 0$$

Здесь использована нормировка, более традиционная для задачи о связанных осцилляторах Ван-дер-Поля:

параметр Δ играет роль частотной расстройки.

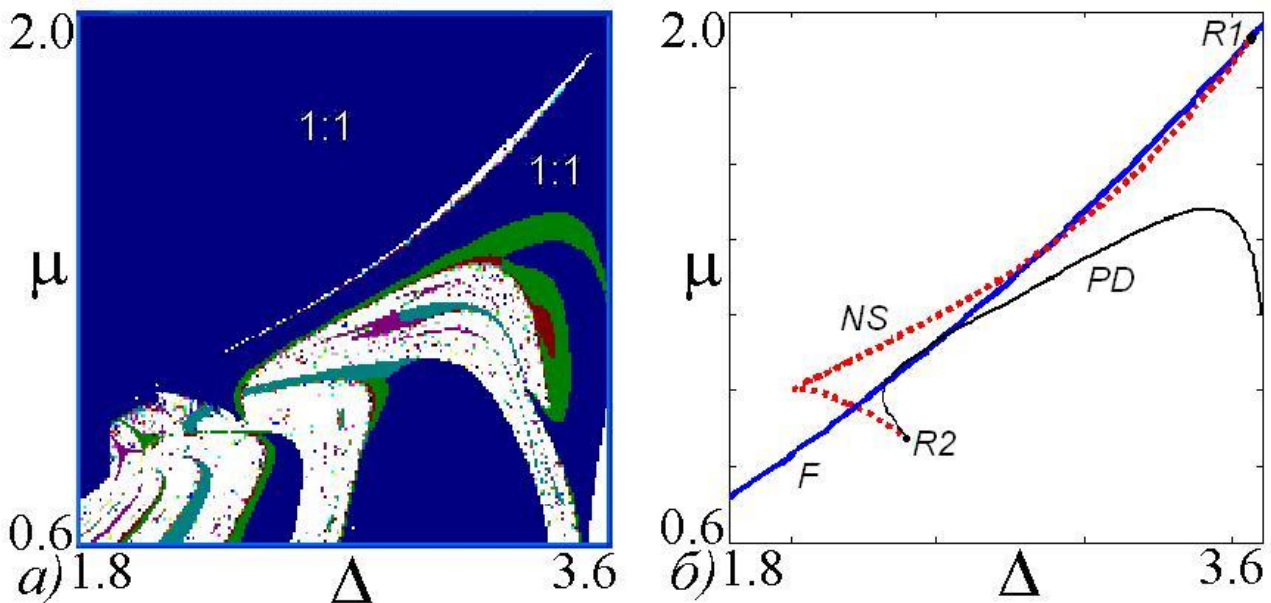
при переходе через значение $\Delta = 2$ в первом осцилляторе происходит переход от одноямного к двухямному потенциалу.



$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1.0, \beta_1 = \beta_2 = 0.5.$$

Карта динамических режимов связанных осцилляторов на плоскости (расстройка Δ , величина связи μ). Цветом показаны языки кратной синхронизации: синий цвет обозначает основной язык синхронизации 1:1 и т.д.

Окрестность точки «фазового перехода» от одноявному к двухявному потенциалу.



а) Фрагмент карты в окрестности точки $\Delta=2$, б) Линии и точки бифуркаций,

- **NS** – линии бифуркации Неймарка-Сакера,
- **F** – линия седло-узловой бифуркации,
- **PD** – линия бифуркации удвоения периода,
- **R1** – точка резонанса 1:1,
- **R2** – точка резонанса 1:2.

Особенности задачи:

- Край основного, традиционного языка синхронизации 1:1 образован линией седло-узловой бифуркации. При приближении к точке $\Delta=2$ имеет место жесткий переход
- На линии седло-узловой бифуркации имеет место также точка резонанса 1:1, от которой отходит линия бифуркации Неймарка-Сакера
- Наряду с «традиционным» языком синхронизации 1:1, при $\Delta > 2$ имеется дополнительная область синхронизации 1:1, смыкающаяся с ним своим краем, который, однако, образован линией бифуркации Неймарка-Сакера.
- В этой дополнительной области синхронизации наблюдаются удвоения периода и переход к хаосу при движении по карте «сверху вниз», т.е. при уменьшении уровня связи
- Две линии бифуркации Неймарка-Сакера сходятся в некоторой особой точке при $\Delta=2$, причем вторая линия Неймарка-Сакера обрывается в точке резонанса 1:2

Таким образом, окрестность точки перехода одного из осцилляторов к двухявному потенциалу демонстрирует своеобразное устройство бифуркационных линий и структуру карт динамических режимов

3.2. СВЯЗАННЫЕ ОСЦИЛЛЯТОРЫ С КАТАСТРОФЕЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ ОМБИЛИКА

Уравнения осцилляторов с омбилическими катастрофами. Общий случай

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} = 0, \quad \ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = 0$$

Здесь $U(x, y)$ - потенциал, заданный одной из омбилических катастроф

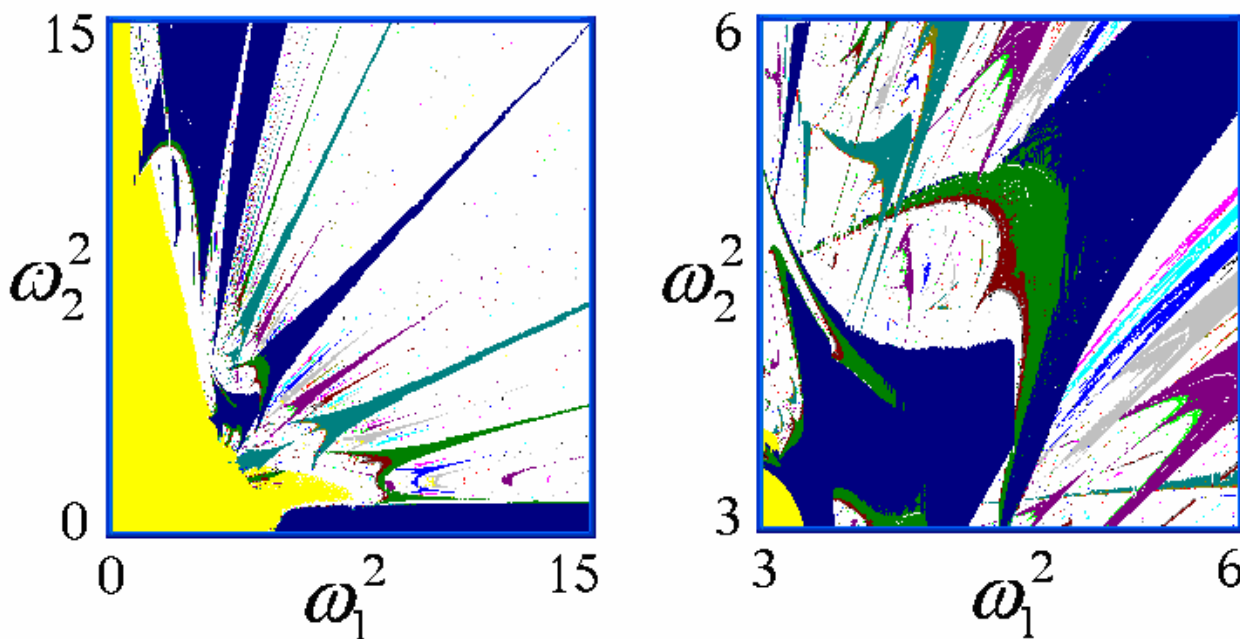
Связь через росток омбилической катастрофы

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + \omega_1^2 x + \frac{\partial U_p(x, y)}{\partial x} = 0, \quad \ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + \frac{\partial U_p(x, y)}{\partial y} = 0$$

Здесь ω_1 и ω_2 - собственные частоты осцилляторов, $U_p(x, y) = x^2 y - y^3/3$ - потенциал, отвечающий ростку катастрофы эллиптическая омбилика.

Потенциал такого вида используется в классической для теории консервативного хаоса модели Хенон-Хейлеса [9]. Таким образом, данную систему можно рассматривать, как обобщение модели Хенон-Хейлеса на диссипативную автоколебательную систему

[9] Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика, 1984, 528 с.



Карта динамических режимов на плоскости (ω_1, ω_2) и ее выделенный фрагмент вблизи границы разбегания

Особенности задачи:

- Наблюдается область разбегания траекторий (желтый цвет на карте), которая отвечает небольшим значениям собственных частот ω_1 и ω_2
- Возникает система языков разной кратности, «раскрытых» в сторону области разбегания. Внутри языков имеют место области удвоенного периода
- Наблюдается перекрытие языков синхронизации вблизи границы области разбегания
- Вблизи области разбегания такая структура языков разрушается и возникает некоторая «переходная» область, заполненная островами различных периодов разнообразной формы

Связанные системы с канонической формой катастрофы эллиптическая омбилика

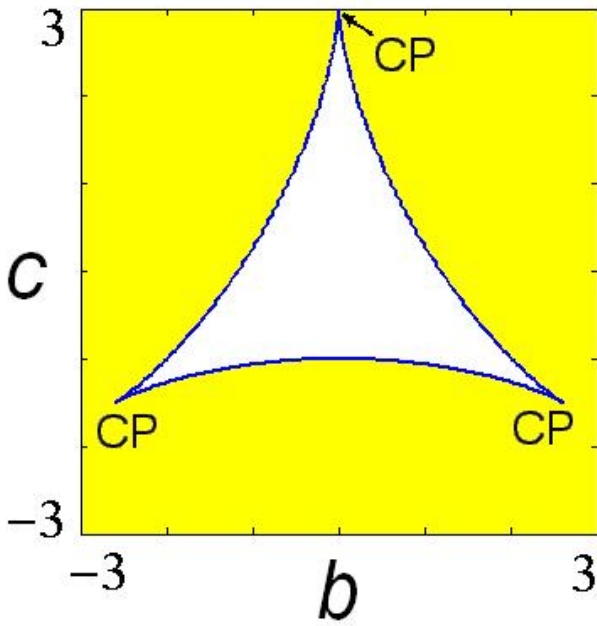
Потенциал: $U(x, y) = x^2 y - \frac{y^3}{3} + a(y^2 + x^2) + bx + cy$

Уравнения:

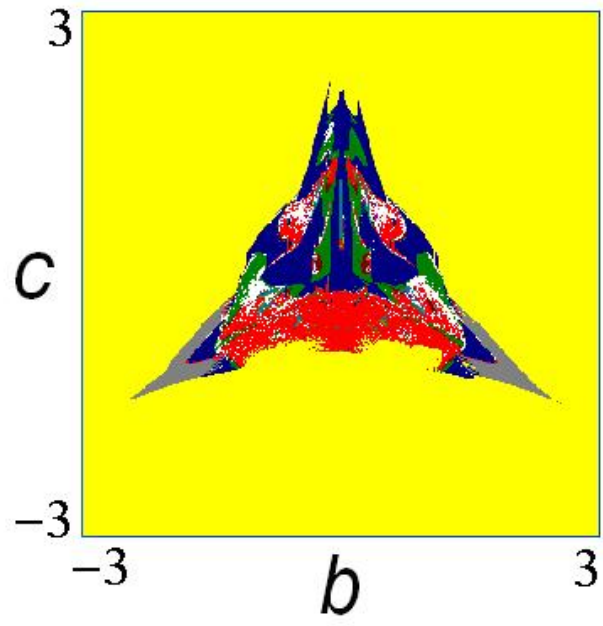
$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + 2xy + 2ax + b = 0, \quad \ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} - y^y + 2ay + c = 0$$

Параметры катастрофы: (a, b, c)

- **Поверхности складок:** $b = a^2(\sin 2\theta - 2\sin \theta), c = a^2(\cos 2\theta + 2\cos \theta)$.
- Линии сборок CP



а)



б)

а) Каноническое сечение бифуркационного множества эллиптической омбилики плоскостью $a=1$ [1,2],

б) соответствующая карта динамических режимов для связанных осцилляторов, $\lambda = 0.2$

Синий, зеленый цвет и др. – периодические режимы

Красный – хаос

Желтый – разбегание

Серый - гибель колебаний

- **В автоколебательной системе такого типа область существования устойчивой неподвижной точки заполнена различными хаотическими и периодическими режимами, однако, их форма весьма своеобразна и классические языки синхронизации не выявляются**

ВЫВОДЫ

- Автоколебательные осцилляторы с потенциалом, заданным катастрофами Р.Тома, образуют самосогласованную систему моделей, охватывающую в рамках единой методологии как многие известные системы (осциллятор Бонхоффера–Ван-дер-Поля или Фитц Хью–Нагумо, автоколебательная система Хенона-Хейлеса), так и существенные для теории колебаний бифуркационные ситуации (линии Андронова-Хопфа и точки Богданова-Такенса в окрестности точки сборки, точка сборки в точке Богданова-Такенса, слияние точек Богданова-Такенса и линий Андронова-Хопфа) и др.
- Синхронизация в таких автоколебательных системах может быть изучена в каноническом пространстве параметров катастроф, что позволяет выяснить, как новые бифуркации дополняют известные бифуркационные множества катастроф.
- Система связанных автоколебательных осцилляторов, в случае, когда в одном из них наблюдается переход от одноячного к двухячному потенциалу, характеризуется своеобразным устройством областей периодических режимов и картиной бифуркаций.
- Двумерные (омбилические) катастрофы позволяют ввести в рассмотрение новый тип связанных осцилляторов, которые демонстрируют интересные особенности устройства пространства параметров (перекрывание языков синхронизации при приближении к области разбегания, своеобразные области периодических режимов и др.)