Синхронизация и бистабильность в системе спин-трансферных осцилляторов с полевой связью

XVIII Всероссийская научная конференция молодых ученых «n^3_{ph}: наноэлектроника, нанофотоника и нелинейная физика»

Саратов, 12-13 сентября 2023 г.

П. В. Купцов
kupav@mail.ru

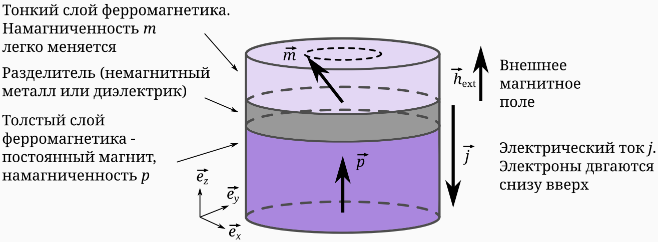
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники
им. В.А. Котельникова Российской академии наук

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №21-12-00121
https://rscf.ru/project/21-12-00121/

Спин-трансферный осциллятор и уравнение Ландау-Лифшица-Гильберта-Слончевского

Спин-трансферный осциллятор (СТО)

Это наноразмерное автоколебательное устройство



Сопротивление СТО r зависит от косинуса угла между $\vec{m}$ и $\vec{p}$ (эффект гигантского магнитосопротивления, ГМС)

$$r = \frac{r_{\text{p}} + r_{\text{ap}}}{2} \left(1 - (\vec{m} \cdot \vec{p}) \left(\frac{r_{\text{ap}} - r_{\text{p}}}{r_{\text{ap}} + r_{\text{p}}} \right) \right)$$

Здесь r_{p} и r_{ap} — минимальное и максимальное значения сопротивления, $\|\vec{m}\| = \|\vec{p}\| = 1$

Уравнение Ландау-Лифшица-Гильберта-Слончевского

При пропускании через СТО тока, намагниченность $\vec{m}$ прецессирует.

Обезразмеренное уравнение ЛЛГС:

$$\dot{\vec{m}} - \alpha\vec{m} \times \dot{\vec{m}} = -\vec{m} \times \vec{h}_{\text{eff}} + \beta'\vec{m} \times (\vec{m} \times \vec{p})$$

$$\vec{h}_{\text{eff}} = \vec{h}_{\text{ext}} - \mathcal{D}\vec{m}$$

- $(\dot{\vec{m}} \cdot \vec{m}) = 0$ и $\|\vec{m}\| = 1$ — динамика на единичной сфере
- α — коэффициент затухания прецессии
- β' проп. току j, контролирует частоту прецессии
- $\mathcal{D}$ — диаг. тензор, материал, геометрия
- $\|\vec{p}\| = 1$

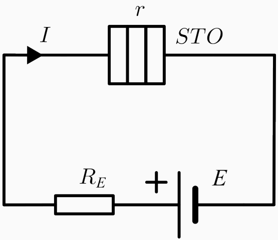
Mayergoyz, I. D., Bertotti, G., & Serpico, C. (2009). Elsevier

Варианты включения СТО

- Источник ЭДС E с внутренним сопротивлением R_E
- R_E сравнимо с сопротивлением STO r

$$\dot{\vec{m}} - \alpha \vec{m} \times \dot{\vec{m}} = -\vec{m} \times \vec{h}_{\text{eff}} + \frac{\beta}{1 + c_p(\vec{m} \cdot \vec{p})} \, \vec{m} \times (\vec{m} \times \vec{p})$$

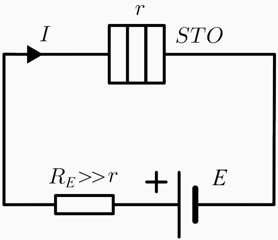
В знаменателе $(\vec{m} \cdot \vec{p})$ — это из-за зависимости r от $\vec{m}$



Приближение идеального источника тока

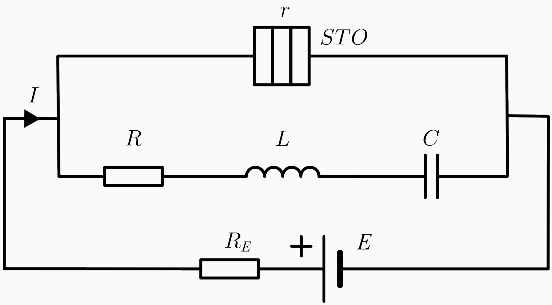
- Идеальный источник тока: $R_E \gg r$

$$\dot{\vec{m}} - \alpha \vec{m} \times \dot{\vec{m}} = -\vec{m} \times \vec{h}_{\text{eff}} + \beta \vec{m} \times (\vec{m} \times \vec{p})$$



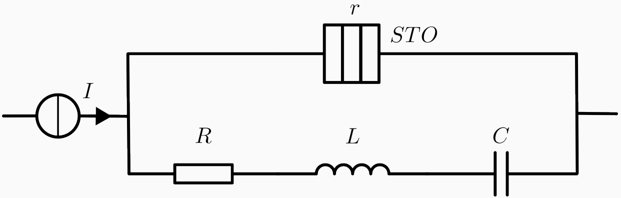
Общий случай:

- RLC цепочка
- источник Э.Д.С. E с внутренним сопротивлением R_E



Мы рассматриваем приближение идеального источника тока плюс нагрузка:

1. Нагрузка отсутствует
2. RLC цепочка
3. Один конденсатор



Одноосный СТО с идеальным источником тока

Спин-трансферный осциллятор с одноосной симметрией относительно оси Z и идеальным источником тока

$$\dot{m}_x = m_z A m_x + B m_y$$
$$\dot{m}_y = -B m_x + m_z A m_y$$
$$\dot{m}_z = A(m_z^2 - 1)$$

где $A = (m_z - h_z + \beta/\alpha)\alpha$, $B = m_z - h_z - \beta\alpha$

Уравнения для m_x и m_y линейные, m_z монотонно выходит на неподвижную точку

Mayergoyz, I. D., Bertotti, G., & Serpico, C. (2009). Elsevier

Решения: неподвижные точки и колебания

Уравнение для m_z имеет три неподвижные точки. Соответственно, имеем три решения:

- Фокусы на полюсах. Условия устойчивости:

$$h_z - \beta/\alpha < -1 \text{ уст. фокус } m_z = -1, m_x = m_y = 0$$
$$h_z - \beta/\alpha > 1 \quad \text{уст. фокус } m_z = 1, m_x = m_y = 0$$

- Предельный цикл на параллели

$$-1 < h_z - \beta/\alpha < 1 \; m_x = r\cos(\omega t + f), m_y = r\sin(\omega t + f)$$
$$m_z = h_z - \beta/\alpha, r = \sqrt{1 - m_z^2}$$
$$\omega = \beta/\alpha + \beta\alpha, f - \text{произв.}$$

Колебательное решение: приближение к предельному циклу

Вблизи неподвижной точки $h_z - \beta/\alpha$ компонента m_z меняется медленно. Поэтому

$$m_x = r\mathrm{e}^{m_z A t} \cos Bt, \;\; m_y = -r\mathrm{e}^{m_z A t} \sin Bt$$

где $A = (m_z - h_z + \beta/\alpha)\alpha$, $B = m_z - h_z - \beta\alpha$

Выход на предельный цикл:

- Всегда $A < 0$, поэтому $\mathrm{e}^{m_z A t}$ убывает
- При этом $A \to -0$, поэтому в асимптотике $\mathrm{e}^{m_z A t} \to 1$

Колебательное решение: чистая синусоида

Передельный цикл, устойчив при $-1 < h_z - \beta/\alpha < 1$,

$$m_x = \sqrt{1 - m_z^2}\,\cos(\omega t + f),$$
$$m_y = \sqrt{1 - m_z^2}\,\sin(\omega t + f),$$
$$m_z = h_z - \beta/\alpha$$

где f — произв. начальная фаза, $\omega = \beta/\alpha + \beta\alpha \approx \beta/\alpha$ (т. к. $\beta\alpha$ мало).

Нет нелинейности по $m_{x,y}$:

- В решении нет высших гармоник
- При внешнем воздействии и взаимодействии нет резонансов на гармониках

Роль RLC нагрузки для одноосного СТО

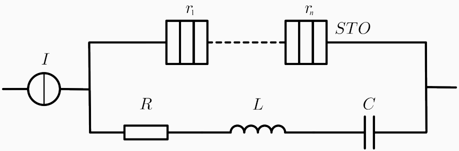
- На предельном цикле.
  $m_z = \mathrm{const}$:
  $$m_x = \sqrt{1-m_z^2}\ \cos(\omega t + f), m_y = \sqrt{1-m_z^2}\ \sin(\omega t + f), m_z = h_z - \beta/\alpha$$
  Значит сопротивление постоянно:
  $$r = \frac{r_\mathrm{p} + r_\mathrm{ap}}{2}\left(1 - m_z\left(\frac{r_\mathrm{ap} - r_\mathrm{p}}{r_\mathrm{ap} + r_\mathrm{p}}\right)\right)\ (\vec{p} = \vec{e}_z \text{ и } (\vec{m}\cdot\vec{p}) = m_z)$$
  Значит RLC цепочка не работает.
- До выхода на предельный цикл.
  Частота прецессии $\vec{m}$ — гигагерцы. Резонанса нет.

  Ток через RLC корректирует эффективное значение β.
  Значит можно использовать для управления переходным процессом.

Способы организации связи между СТО

Связанные осцилляторы: связь по току

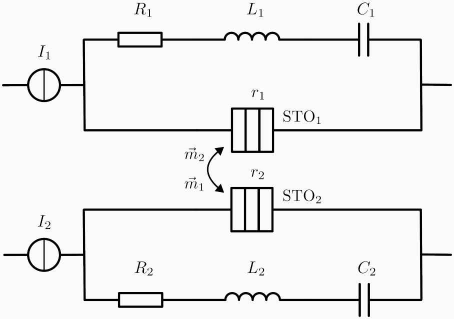
- Связь через общий ток: из-за ГМС электрическое сопротивление осциллятора зависит от $(\vec{m} \cdot \vec{p})$. Включаем осцилляторы последовательно или параллельно друг другу.



Pikovsky, A. (2013). *Phys. Rev. E*, *88*, 032812 ◇ Zaks, M., & Pikovsky, A. (2017). *Scientific Reports*, *7*(1), 4648 ◇ Zaks, M. A., & Pikovsky, A. (2016). *Physica D: Nonlinear Phenomena*, *335*, 33—44 ◇ Zaks, M. A., & Pikovsky, A. (2019). *The European Physical Journal B*, *92*(7), 160

Связанные осцилляторы: связь по полю

- Связь через магнитные поля осцилляторов. Дипольное приближение: $\vec{h} \propto \vec{m}$. Коррекция эффективного поля: $\vec{h}_{\text{eff}} \to \vec{h}_{\text{eff}} + \epsilon \sum_{j=1, j\neq n}^{N} a_{n,j} \vec{m}_j$



Kuptsov, P. V. (2022). *Regular and Chaotic Dynamics*, *27*(6), 697—712 ◇ Купцов, П. В. (2023). *Физика твердого тела*, *65*(6), 943—950

Два СТО с полевой связью без нагрузки

Два СТО, нагрузки нет

У одиночного одноосного СТО m_z на цикле не меняется.

Численная проверка связанных осцилляторов с RLC нагрузкой: m_z либо постоянны (синхронизация) либо почти постоянны (меняются очень малой амплитудой)

Значит ток через RLC будет малым.

Значит имеет смысл сначала подробнее рассмотреть случай:

- RLC отсутствует
- источник тока идеальный

Все параметры СТО берём одинаковыми за исключением β.

Уравнения

$$
\begin{aligned}
\dot{m}_{i,x} =& m_{i,z} A_i m_{i,x} + B_i m_{i,y} + \tfrac{\epsilon}{1+\alpha_i^2} \left\{ \alpha_i [m_{j,x} - (\vec{m}_i \cdot \vec{m}_j) m_{i,x}] - m_{i,y} m_{j,z} + m_{j,y} m_{i,z} \right\}, \\
\dot{m}_{i,y} =& - B_i m_{i,x} + m_{i,z} A_i m_{i,y} + \tfrac{\epsilon}{1+\alpha_i^2} \left\{ \alpha_i [m_{j,y} - (\vec{m}_i \cdot \vec{m}_j) m_{i,y}] + m_{i,x} m_{j,z} - m_{j,x} m_{i,z} \right\}, \\
\dot{m}_{i,z} =& A_i (m_{i,z}^2 - 1) + \tfrac{\epsilon}{1+\alpha_i^2} \left\{ \alpha_i [m_{j,z} - (\vec{m}_i \cdot \vec{m}_j) m_{i,z}] - m_{i,x} m_{j,y} + m_{j,x} m_{i,y} \right\}, \\
A_i =& \alpha_i \tfrac{m_{i,z} - h_z + \beta_i / \alpha_i}{1+\alpha_i^2}, \; B_i = \tfrac{m_{i,z} - h_z - \beta_i \alpha_i}{1+\alpha_i^2}.
\end{aligned}
$$

Здесь $i = 1, 2$, а j — другой осциллятор, т. е. $i = 1$, $j = 2$ и наоборот.

Общая картина

Численные решения: слабая связь ϵ — осцилляторы колеблются на собственных частотах, близких к $\omega_1 = \frac{\beta_1}{\alpha}$ и $\omega_2 = \frac{\beta_2}{\alpha}$.

Увеличение силы связи — осцилляторы синхронизируются: $\omega_S = \frac{\beta_1+\beta_2}{2\alpha}$, $m_{1,z} = m_{2,z} = h_z - \frac{\beta_1+\beta_2}{2\alpha}$.

Переход к синхронному режиму происходит через бистабильность — в зависимости от выбора начальных условий осцилляторы либо синхронизируются, либо нет.

Бистабильность

При одних и тех же параметр в зависимости от н. у. система выходит либо на синхронное, либо на несинхронное решение.

На рисунках ниже используется два н. у.

$$\vec{v}_1 = (0.1, -0.1, 0.9), \quad \vec{v}_2 = (-0.2, 0.2, 0.8) \tag{1}$$

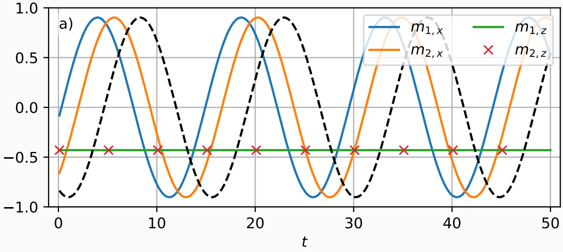
$$\vec{v}_1 = (0.1, -0.2, 0.001), \quad \vec{v}_2 = (-0.1, 0.3, -0.002) \tag{2}$$

Начальные условия задаются через вектора $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ как

$$\vec{m}_{1,2}(0) = \vec{v}_{1,2} / \|\vec{v}_{1,2}\|$$

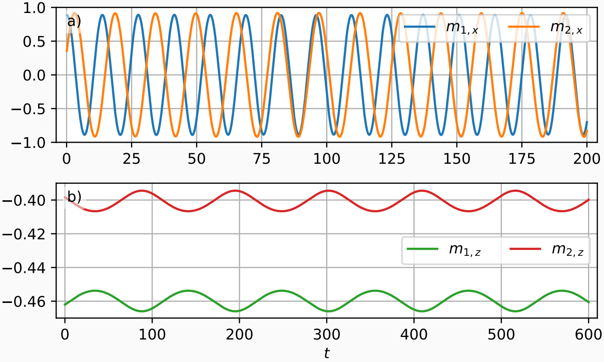
Синхронное решение, н.у. (1)

$\alpha = 0.01$, $\beta_1 = 0.0046$, $\beta_2 = 0.004$ $\epsilon = 0.00045$, $h_z = 0$.



- $m_{1,2,x}$ синхронизированы, $m_{1,2,z}$ не колеблются, $m_{1,2,z} = a = -0.43$ (соотв. формуле $m_{1,2,z} = h_z - \frac{\beta_1+\beta_2}{2\alpha}$)
- Штриховая линия — синусоида $\sqrt{1-a^2}\sin(\omega_s t)$ где $\omega_s = 0.43$ (формула $\omega_s = (\beta_1 + \beta_2)/(2\alpha)$)

Несинхронное решение, н.у. (2)



- $m_{1,2,x}$ не синхронизированы
- $m_{1,2z}$ очень медленно осциллируют

Амплитуды $\vec{m}$ сохраняются и в силу нормировки $\|\vec{m}\| = 1$.

Уравнения можно переписать в сферических координатах для азимутальных $\phi_{1,2}$ и полярных $\theta_{1,2}$ углов.

$$m_{1,2,x} = \sin\theta_{1,2}\cos\phi_{1,2}, \quad m_{1,2,y} = \sin\theta_{1,2}\sin\phi_{1,2}, \quad m_{1,2,z} = \cos\theta_{1,2}.$$

Колебания происходят вдоль «широт» — углы $\phi_{1,2}$ играют роль фаз.

Колебания синусоидальные, следовательно

$$\phi_{1,2}(t) = \omega_{1,2}t + f_{1,2}$$

Полярные углы $\theta_{1,2}$ слабо осциллируют и играют роль амплитуд.

Границы бистабильности в фазовом приближении

Считаем, что собственные частоты близки, т. е. $\beta_1 - \beta_2$ мало.

Синхронное решение существует при условии

$$\epsilon \geq |\beta_1 - \beta_2|/2$$

Несинхронное решение существует при условии

$$\epsilon < |\beta_1 - \beta_2| + 8|\beta_1 - \beta_2|^3 \, \frac{\alpha^2(1-4h_z^2)+4\alpha(\beta_1+\beta_2)h_z-(\beta_1+\beta_2)^2+1}{[(2\alpha h_z-\beta_1-\beta_2)^2-4\alpha^2]^2}$$

Бистабильность, когда эти условия выполняются одновременно

Kuptsov, P. V. (2022). *Regular and Chaotic Dynamics*, *27*(6), 697—712

Построение карты режимов, проверка формул

Задаём $\beta_2 = 0.005$. Меняем β_1 и ϵ.

Пара β_1 и ϵ — это точка на плоскости параметров.

В каждой точке вычисляем $N = 100$ траекторий стартуя со случайных н. у.

Для каждой траектории вычисляем $\phi_{1,2}(t)$.

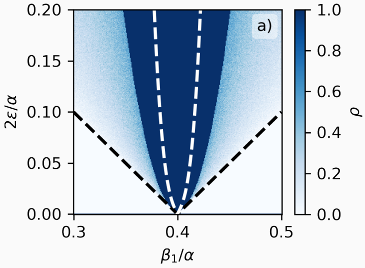
Имея ввиду что должно быть $\phi_{1,2}(t) = \omega_{1,2} t + f_{1,2}$, вычисляем $\omega_{1,2}$ по методу наименьших квадратов.

Подсчитываем N_s — количество траекторий для которых $|\omega_1 - \omega_2| \approx 0$.

На плоскости параметров в точке (β_1, ϵ) закрашиваем пиксель пропорционально относительной частоте синхронизации $\rho = N_s / N$.

Карта режимов

Относительная частота выхода на синхронный режим при старте со случайных н. у. Пунктиры — аналитические оценки грани бистабильности. $\alpha = 0.01$



Верхняя граница завышена из-за использования первого приближение по малым возмущениям амплитуды.

Два СТО с RLC нагрузкой: управление бистабильностью

$$
\begin{aligned}
\dot m_{i,x} =& m_{i,z}A_i m_{i,x} + B_i m_{i,y} + \tfrac{\epsilon}{1+\alpha_i^2}\left\{\alpha_i[m_{j,x} - (\vec m_i\cdot\vec m_j)m_{i,x}] - m_{i,y}m_{j,z} + m_{j,y}m_{i,z}\right\},\\
\dot m_{i,y} =& - B_i m_{i,x} + m_{i,z}A_i m_{i,y} + \tfrac{\epsilon}{1+\alpha_i^2}\left\{\alpha_i[m_{j,y} - (\vec m_i\cdot\vec m_j)m_{i,y}] + m_{i,x}m_{j,z} - m_{j,x}m_{i,z}\right\},\\
\dot m_{i,z} =& A_i(m_{i,z}^2 - 1) + \tfrac{\epsilon}{1+\alpha_i^2}\left\{\alpha_i[m_{j,z} - (\vec m_i\cdot\vec m_j)m_{i,z}] - m_{i,x}m_{j,y} + m_{j,x}m_{i,y}\right\},\\
\dot u_i =& \chi_i\, w_i,\\
\dot w_i =& \frac{\Omega_i^2}{\chi_i}\left((1-\kappa_i m_{i,z})(1-w_i) - u_i - \rho_i w_i\right),\\
A_i =& \alpha_i\frac{m_{i,z} - h_z + \beta_i(1-w_i)/\alpha_i}{1+\alpha_i^2},\ B_i = \frac{m_{i,z} - h_z - \beta_i(1-w_i)\alpha_i}{1+\alpha_i^2}.
\end{aligned}
$$

Здесь $i = 1, 2$, а j — другой осциллятор, т. е. $i = 1$, $j = 2$ и наоборот.

$$
w_i = \frac{\dot U_i C_i \Gamma}{I_i},\ u_i = \frac{2U_i}{I_i(r_{i,\text{ap}} + r_{i,\text{p}})},\ \rho_i = \frac{2R_i}{r_{i,\text{ap}} + r_{i,\text{p}}},\ \Omega_i = \frac{1}{\Gamma\sqrt{L_i C_i}},\ \chi_i = \frac{2}{C_i\Gamma(r_{i,\text{ap}} + r_{i,\text{p}})},\ \kappa_i = \frac{r_{i,\text{ap}} - r_{i,\text{p}}}{r_{i,\text{ap}} + r_{i,\text{p}}}.
$$

Общая картина

Численное моделирование — в установившемся режиме динамика качественно мало отличается от случая без RLC.

Наблюдаем режимы без синхронизации, синхронизацию.

Имеется область бистабильности.

Ток и напряжение в RLC цепочке колеблются с очень малой амплитудой.

Управление бистабильностью

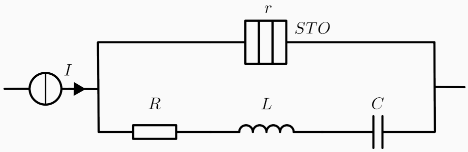
Кроме колебательного решения СТО имеют неподвижные точки на северном и южном полюсах.

Неподвижные точки устойчивы когда токи через СТО очень малы или очень велики (токи учитываются через $\beta_{1,2}$).

Цепочки подключены параллельно СТО — контролируя ток через них, можно управлять возникновением колебаний.

Управление бистабильностью

Задаём н.у. в RLC так, чтобы через них тёк большой ток — предварительно заряжаем конденсаторы.



Общий ток постоянный — ток через STO будет либо мал, либо велик (зависит от направления стартового тока в RLC).

Значит сразу после включения колебаний не будет — будут устойчивыми неподвижные точки.

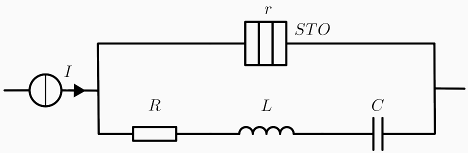
Осцилляторы будут «забывать» свои произвольные начальные состотяния, выходя на неподвижные точки.

Управление бистабильностью

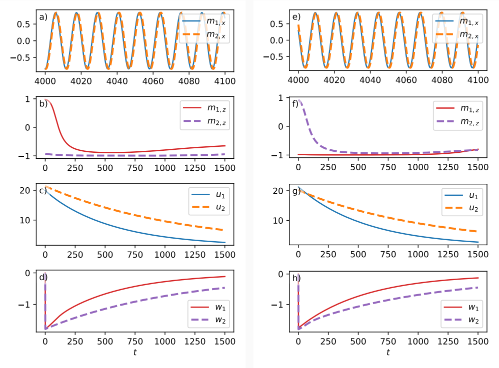
Затем конденсаторы потеряют свой первоначальный заряд и токи через СТО примут свои номинальные значения.

Затухание в RLC должно быть малым, чтобы СТО успели подойти к неподвижным точкам — медленные RLC.

Когда токи примут номинальные значения, в СТО начнутся колебания, стартующие всегда с одних и тех же начальных условий.



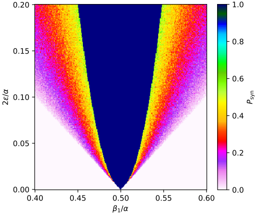
Колонки слева и справа — старт с н. у. (1) и (2), как на рисунках выше. Теперь всегда синхронизация



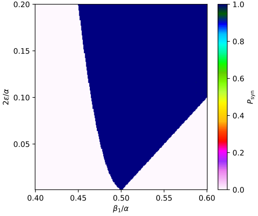
Карты режимов

Картина зависит от того, в каком из контуров затухание быстрее

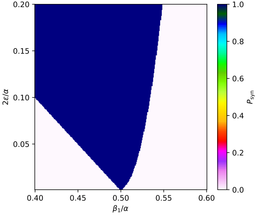
быстрый RLC



медленный RLC, $C_1 < C_2$



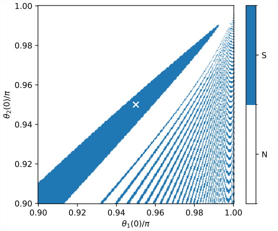
медленный RLC, $C_1 > C_2$



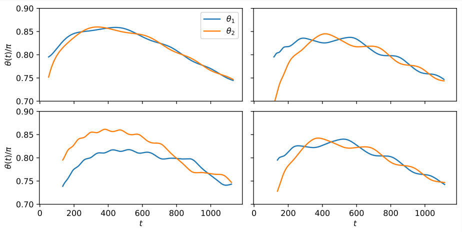
Медленный контур, $C_1 > C_2$. $\beta_1 = 0.004$, $\epsilon = 0.001$, $\alpha = 0.01$.

Контур «приводит» все траектории СТО в синюю область вблизи полюса, отмеченную «X».

Бассейны режимов. Синий — синхронизация, белый — нет. $\phi_1(0) = \phi_2(0) = 0$



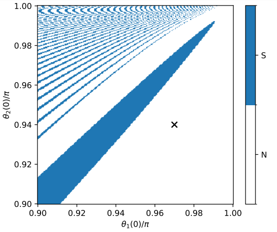
Примеры поведения траекторий вблизи полюса. Траектории уходят от полюса имея $\theta_1 \approx \theta_2$



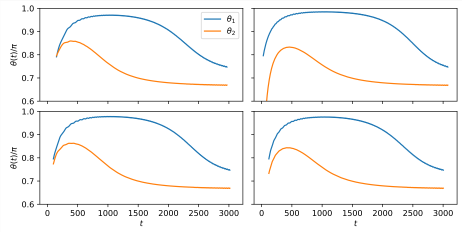
Медленный контур, $C_1 > C_2$. $\beta_1 = 0.006$, $\epsilon = 0.001$, $\alpha = 0.01$.

Контур «приводит» все траектории СТО в белую область вблизи полюса, отмеченную «X».

Бассейны режимов. Синий — синхронизация, белый — нет. $\phi_1(0) = \phi_2(0) = 0$



Примеры поведения траекторий вблизи полюса. Траектории уходят от полюса имея $\theta_1 > \theta_2$

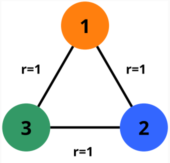


Управление мультистабильностью в системе нескольких СТО

Вспомним: связь вводится как $\epsilon \sum_{j=1, j \neq n}^{N} a_{n,j} \vec{m}_j$

Зададим $N = 3$, $r = 1$ (попарные расстояния).

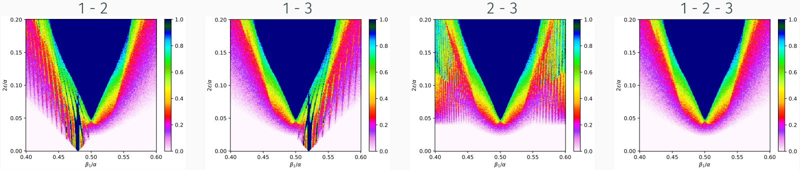
$a_{1,2} = a_{2,1} = a_{1,3} = a_{3,1} = a_{2,3} = a_{3,2} = 1$



Более богатая мультистабильность — возможность попарной синхронизации 1-2, 1-3 и 2-3

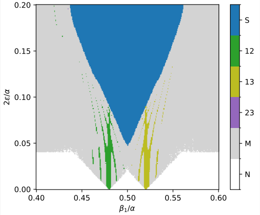
Быстрые контуры, $\beta_2 = 0.0048$, $\beta_3 = 0.0052$, $\alpha = 0.01$

Вероятность попарной синхронизации P_{syn}



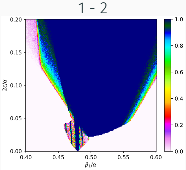
Области частичной и полной синхронизации

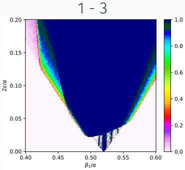
- Область S — полная синхронизация
- Области 12, 13 — $P_{\text{syn12}} = 1$, $P_{\text{syn13}} = 1$, соответственно
- Область 23 — $P_{\text{syn23}} = 1$ (на рисунке такие области отсутствуют)
- Область M — мультистабильность
- Область N — нет синхронизации

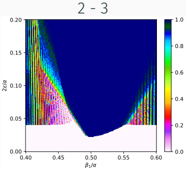


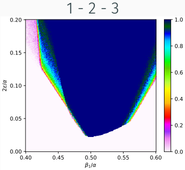
Медленные контуры, $C_2 > C_1 > C_3$

Вероятность попарной синхронизации P_{syn}



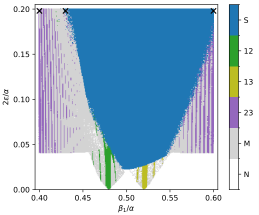






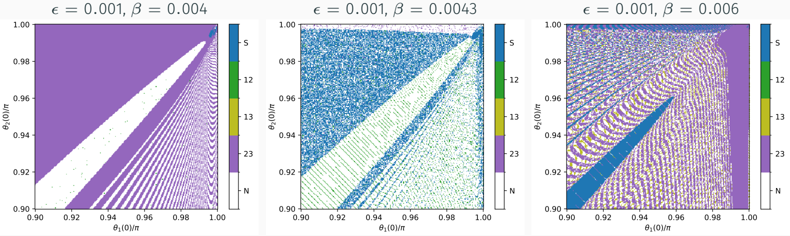
Области частичной и полной синхронизации

- Область S — полная синхронизация
- Области 12, 13, 23 — $P_{\text{syn}12} = 1$, $P_{\text{syn}13} = 1$, $P_{\text{syn}23} = 1$, соответственно
- Область M — мультистабильность
- Область N — нет синхронизации
- Крестики — точки, где построены бассейны на сл. слайде



Бассейны режимов на границе области синхронизации

- Бассейны значительно сложнее чем у двух СТО
- Нет крупных областей выхода на полную синхронизацию



У трёх СТО медленные контуры заметно уменьшают области мультистабильности, но не подавляют её полностью.

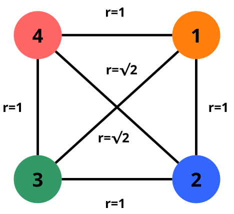
Четыре СТО на сторонах квадрата

Связь в дипольном приближении: $\vec{h}_j \propto \vec{m}_j, \epsilon \sum_{j=1, j\neq n}^{N} a_{n,j}\vec{m}_j$

Поле убывает как квадрат расстояния.

$N = 4, a = 1/r^2$

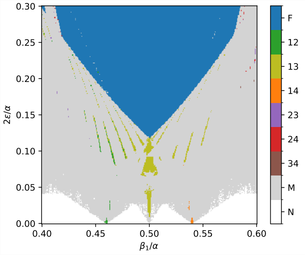
$a_{1,2} = a_{1,4} = 1, a_{1,3} = 1/r_{1,3}^2 = 1/2$



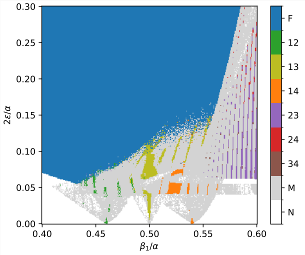
Карты режимов

$\beta_2 = 0.0046$, $\beta_3 = 0.005$, $\beta_4 = 0.0054$, $\alpha = 0.01$

Быстрые контуры



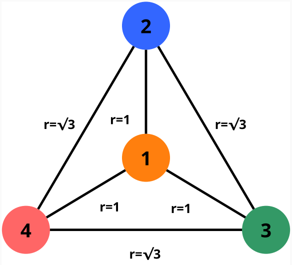
Медленные контуры $C_1 > C_2 > C_3 > C_4$



Область мультистабильности для медленного контура стала меньше, но не исчезла

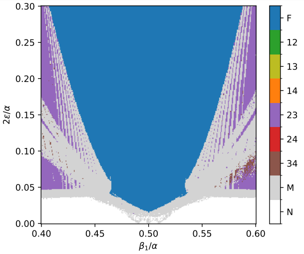
Четыре СТО в виде звезды

$N = 4$, $a_{2,1} = 1$, $a_{2,3} = a_{2,4} = 1/r^2 = 1/3$

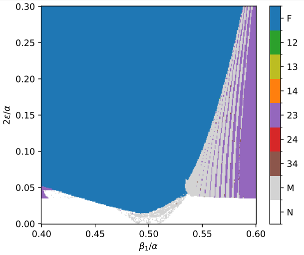


$\beta_2 = 0.0049,\ \beta_3 = 0.005,\ \beta_4 = 0.0051,\ \alpha = 0.01$

Быстрые контуры



Медленные контуры $C_1 > C_2 > C_3 > C_4$



Картина в целом: при помощи медленных контуров можно подавить мультистабильность в ограниченной области пространства параметров

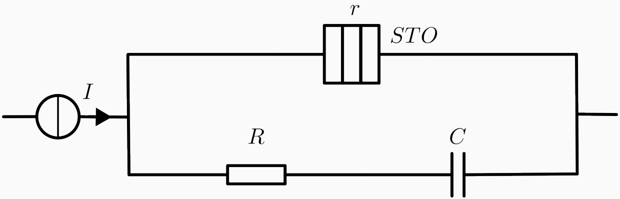
СТО с RC нагрузкой

Минимально достаточная нагрузка

Вспомним что мы делам для управления запуском осцилляций

1. Предварительно заряжаем конденсатор
2. Затухание слабое и поэтому ток через нагрузку сохраняется большим достаточно долго

Эти условия можно выполнить, исключив индуктивность. Также можно положить $R = 0$ — качественно уравнения не изменятся



Связанные СТО с RC нагрузкой

$$
\begin{aligned}
\dot{m}_{i,x} =& m_{i,z}A_i m_{i,x} + B_i m_{i,y} + \tfrac{\epsilon}{1+\alpha_i^2}\left\{\alpha_i[m_{j,x} - (\vec{m}_i\cdot\vec{m}_j)m_{i,x}] - m_{i,y}m_{j,z} + m_{j,y}m_{i,z}\right\},\\
\dot{m}_{i,y} =& -B_i m_{i,x} + m_{i,z}A_i m_{i,y} + \tfrac{\epsilon}{1+\alpha_i^2}\left\{\alpha_i[m_{j,y} - (\vec{m}_i\cdot\vec{m}_j)m_{i,y}] + m_{i,x}m_{j,z} - m_{j,x}m_{i,z}\right\},\\
\dot{m}_{i,z} =& A_i(m_{i,z}^2 - 1) + \tfrac{\epsilon}{1+\alpha_i^2}\left\{\alpha_i[m_{j,z} - (\vec{m}_i\cdot\vec{m}_j)m_{i,z}] - m_{i,x}m_{j,y} + m_{j,x}m_{i,y}\right\},\\
\dot{u}_i =& \chi_i\left(\frac{1-\kappa_i m_{i,z} - u_i}{1-\kappa_i m_{i,z} + \rho_i}\right),\\
A_i =& \alpha_i\tfrac{m_{i,z}-h_z+\beta_i(1-\dot{u}_i/\chi_i)/\alpha_i}{1+\alpha_i^2},\ B_i = \tfrac{m_{i,z}-h_z-\beta_i(1-\dot{u}_i/\chi_i)\alpha_i}{1+\alpha_i^2}.
\end{aligned}
$$

Здесь $i = 1, 2$, а j — другой осциллятор, т. е. $i = 1$, $j = 2$ и наоборот.

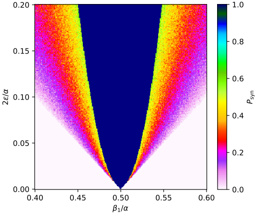
$u_i = \frac{2U_i}{I_i(r_{i,\text{ap}}+r_{i,\text{p}})}$, $\rho_i = \frac{2R_i}{r_{i,\text{ap}}+r_{i,\text{p}}}$, $\chi_i = \frac{2}{C_i\Gamma(r_{i,\text{ap}}+r_{i,\text{p}})}$, $\kappa_i = \frac{r_{i,\text{ap}}-r_{i,\text{p}}}{r_{i,\text{ap}}+r_{i,\text{p}}}$.

В отличие от RLC здесь на контур приходится только одно уравнение.

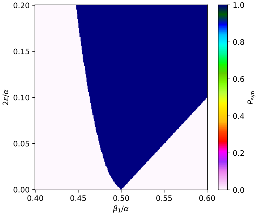
Карты режимов, два СТО с ёмкостной нагрузкой, $R = 0$

Параметры СТО те же, что и для RLC

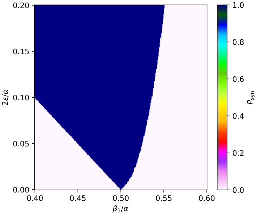
Малая ёмкость



Большая ёмкость, $C_1 < C_2$



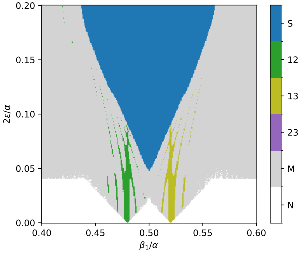
Большая ёмкость, $C_1 > C_2$



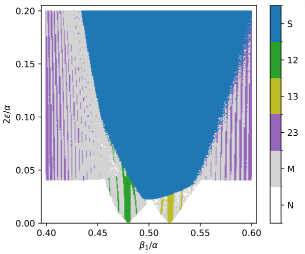
Карты режимов, три СТО с ёмкостной нагрузкой, $R = 0$

Параметры СТО те же, что и для RLC

Малая ёмкость



Большая ёмкость, $C_2 > C_1 > C_3$



Ёмкостная нагрузка действует качественно также как RLC

Выводы

- СТО с одноосной симметрией интересен тем, что генерирует узкополосные колебания без старших гармоник. В теории — просто синусоида.
- Рассмотрены системы СТО с полевой связью.
- Численный анализ выявил наличие областей мультистабильности — полная синхронизация, частичная (попарная) синхронизация, отсутствие синхронизации.
- Для системы двух СТО получены аналитические оценки границ области бистабильности в фазовом приближении.
- Для систем СТО с RLC и RC нагрузкой показана возможность подавления мультистабильности посредством задания начальных зарядов на конденсаторах.
- Лучше всего это работает для двух СТО — в широком диапазоне изменения частот СТО.
- В системе с бо́льшим числом осцилляторов бассейны режимов усложняются и для подавления мультистабильности нужно подбирать параметры нагрузки для разных значений частот.