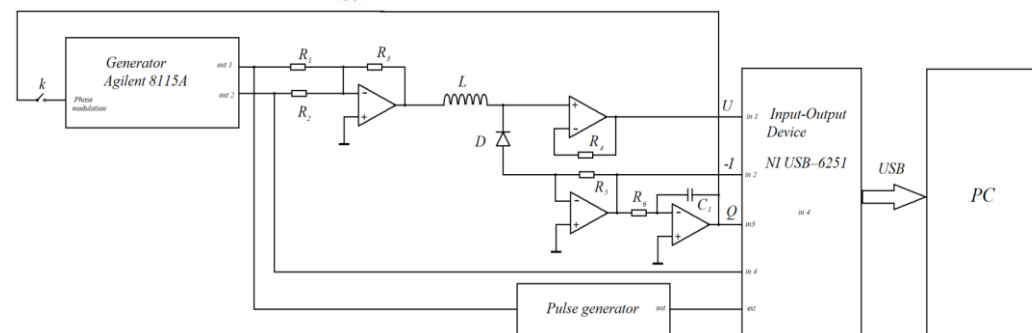
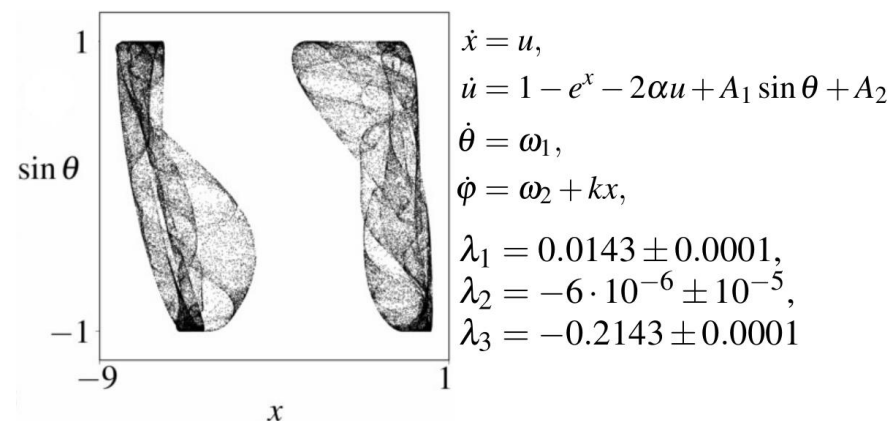


## РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ ЛАБОРАТОРИИ СФ7 ЗА 2021 ГОД

- **Свойства квазипериодических колебаний.**  
*4 статьи (Q1, 2 Q3, Q4). Совместно с СГТУ им. Гагарина Ю.А. и НИУ Высшая школа экономики*
- **Сценарии перехода к гиперхаосу**  
*2 статьи (2 Q1). Совместно с СГТУ им. Гагарина Ю.А. и НИУ Высшая школа экономики*
- **Динамика сетей спин-трансферных осцилляторов с полевой связью**  
*1 статья (Q3). Совместно с СГТУ имени Гагарина Ю. А.*
- **Поиск гиперболических аттракторов**  
*1 статья (Q1).*
- **Обзорные работы для сборник памяти С. П. Кузнецова**  
*2 статьи (Q3).*

## СВОЙСТВА КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

Изучен переход к хаосу через разрушение квазипериодического аттрактора (двумерный тор) численно на примерах отображения Эно под квазипериодическим воздействием и осциллятора Тоды под квазипериодическим воздействием, а также экспериментально в квазипериодически возбуждаемом RL-диодном контуре. Эти модели имеют дополнительный нулевой показатель Ляпунова, его существование строго объясняется структурой математических моделей. Изучено влияние адаптивной обратной связи (одна из частот воздействия становится зависимой от динамической переменной), выводящей систему из класса квазипериодически возбуждаемых. Показано, что помимо тривиального нулевого показателя Ляпунова (который всегда имеется в автономных системах), в моделях с адаптивной связью сохраняется показатель Ляпунова, близкий к нулю.

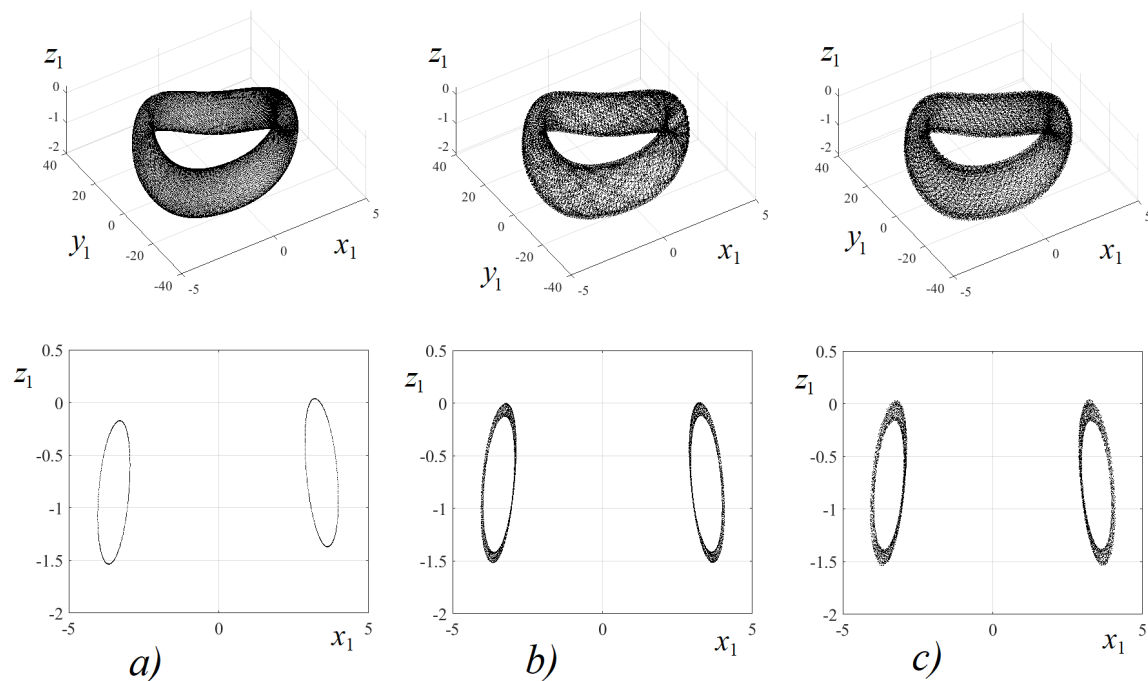


Фазовый портрет аттрактора, уравнения, показатели Ляпунова и экспериментальная система

Kruglov V.P., Krylosova D.A., Sataev I.R., Seleznev E.P., Stankevich N.V. Features of a chaotic attractor in a quasiperiodically driven nonlinear oscillator. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 31, 2021, 073118. <https://doi.org/10.1063/5.0055579> Q1, WoS  
 НИИР «Волна», РНФ № 21-12-00121. Совместно с СГТУ им. Гагарина Ю.А. и НИУ Высшая школа экономики

Исследована возбуждаемая гармоническим сигналом система двух диссипативно связанных генераторов, способных демонстрировать автономные квазипериодические колебания. Представлены ляпуновские карты, выявляющие режимы инвариантных торов разной размерности и хаоса. Наблюдается система языков инвариантных торов, погруженных в область торов более высокой размерности. Границами языков являются седло-узловые бифуркации торов соответствующей размерности. Внутри языков наблюдаются бифуркации удвоения торов. Представлены фазовые портреты в стробоскопическом сечении и двойном сечении Пуанкаре. Внешний сигнал может инициировать квазипериодичность разной размерности в случае хаотической динамики автономной системы. Возможно управление хаосом: его стабилизация или развитие в гиперхаотический режим.

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 - (\lambda_1 + z_1 + x_1^2 - \beta x_1^4)\dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 \\ + M_c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = a \cos \omega t, \\ \dot{z}_1 = b(\varepsilon - z_1) - kx_1^2, \\ \ddot{x}_2 - (\lambda_2 + z_2 + x_2^2 - \beta x_2^4)\dot{x}_2 + (\omega_0 + \Delta)^2 x_2 \\ + M_c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = 0, \\ \dot{z}_2 = b(\varepsilon - z_2) - kx_2^2, \end{aligned}$$



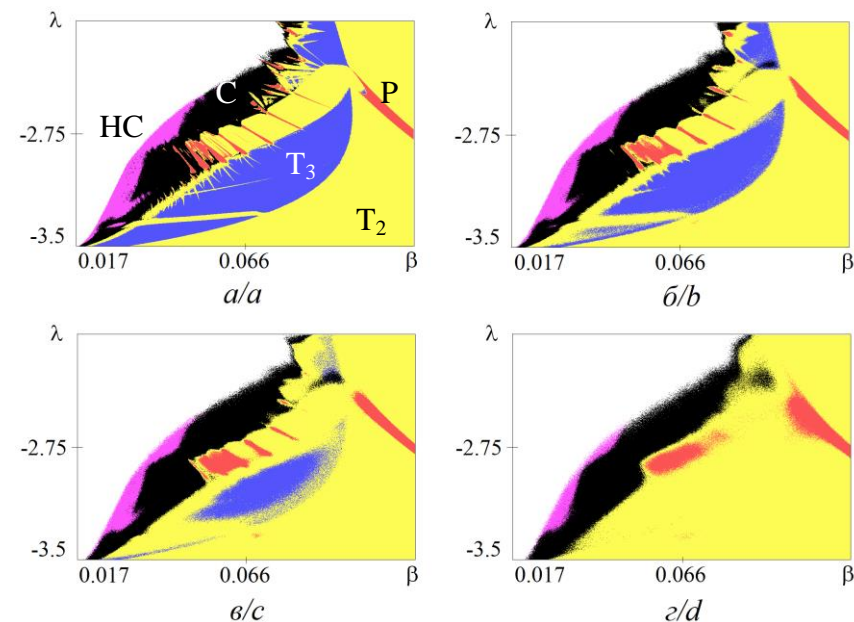
Уравнения и проекции фазовых портретов (верхний ряд) и двойные сечения Пуанкаре (нижний ряд) для трех-, четырех- и пятичастотных торов

Кузнецов А.П., Седова Ю.В., Станкевич Н.В. Два связанных квазипериодических генератора, возбуждаемых гармоническим сигналом Журнал технической физики, т. 91, вып. 11, 2021, с. 1619. DOI: 10.21883/JTF.2021.11.51519.145-21 , WoS, Q3

НИИР «Волна», РФФ № 21-12-00121. Совместно с СГТУ им. Гагарина Ю.А. и НИУ Высшая школа экономики

Исследовано воздействие аддитивного шума на дискретную систему, в которой реализуются двух- и трёх-частотный квазипериодические режимы. Рассматривается модификация режимов, наблюдаемых в отображении при введении шума, с помощью метода карт ляпуновских показателей. Численно получена серия спектров Фурье в точке, соответствующей трехчастотному тору. Обсуждается вид графиков ляпуновских показателей, характерных для квазипериодической бифуркации Хопфа рождения 3-тора при добавлении шума. Трехчастотная квазипериодичность сохраняется при некоторых амплитудах шума, но затем превращается в двухчастотную. В Фурье-спектрах этот процесс развивается по сценарию «замазывания» шумовыми составляющими соответствующих спектральных компонент. Квазипериодические бифуркации при воздействии шума занимают определённые интервалы по параметру, но основные их классификационные признаки (равенство или неравенство соответствующих ляпуновских показателей) на качественном уровне сохраняются.

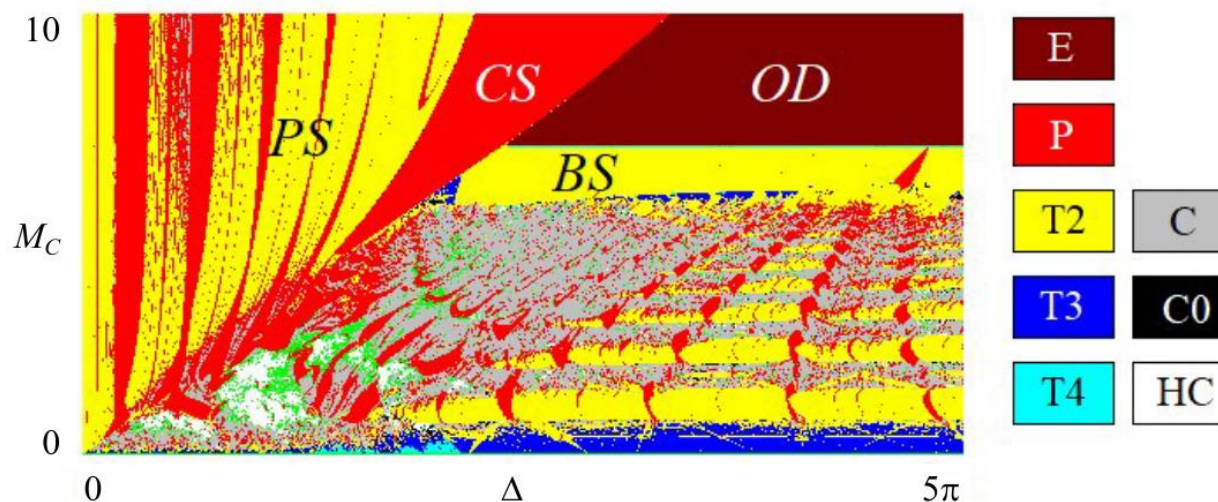
$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + h \cdot y_{n+1}, \\y_{n+1} &= y_n + h \cdot ((\lambda + z_n + x_n^2 - \beta x_n^4)y_n - \omega_0^2 x_n), \\z_{n+1} &= z_n + h \cdot (b(\varepsilon - z_n) - ky_n^2).\end{aligned}$$



Ляпуновские карты системы с квазипериодичностью под действием шума. Амплитуда шума нарастает слева направо, сверху вниз.

Исследована синхронизация двух связанных генераторов квазипериодических колебаний, выполнена классификация различных типов синхронизации, изучены особенности возникновения и разрушения многочастотных квазипериодических колебаний. Выявлены режимы фазовой синхронизации, широкополосной синхронизации, явление гибели колебаний. Обнаружено, что выход из области широкополосной синхронизации с уменьшением силы связи сопровождается квазипериодической бифуркацией Хопфа и рождением трёхчастотного тора.

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 - (\lambda + z_1 + x_1^2 - \beta x_1^4)x_1 + \omega_0^2 x_1 + M_C(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) &= 0, \\ \dot{z}_1 &= b(\varepsilon - z_1) - \kappa \dot{x}_1^2, \\ \ddot{x}_2 - (\lambda + z_2 + x_2^2 - \beta x_2^4)x_2 + (\omega_0 + \Delta)^2 x_2 + M_C(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) &= 0, \\ \dot{z}_2 &= b(\varepsilon - z_2) - \kappa \dot{x}_2^2, \end{aligned}$$



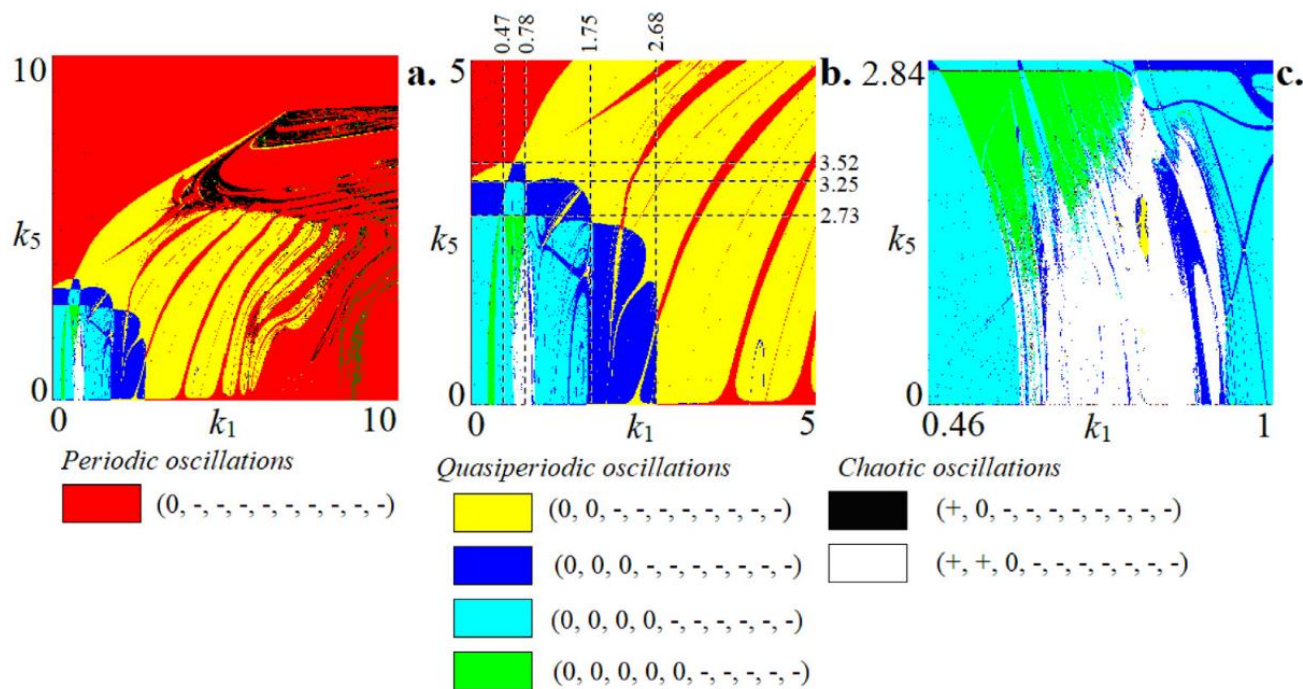
Карта показателей Ляпунова двух связанных квазипериодических генераторов на плоскости частотная расстройка-сила связи. PS – область фазовой синхронизации, CS – полной синхронизации, BS – квазипериодической широкополосной синхронизации (широкополосной квазипериодичности), OD – область гибели колебаний.

Кузнецов А.П., Станкевич Н.В., Щеголева Н.А. Синхронизация связанных генераторов квазипериодических колебаний при разрушении инвариантной кривой // Известия вузов. ПНД. 2021. Т. 29, № 1. С. 136–159. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-1-136-159, WoS, Q3  
Госзадание ИРЭ РАН НИР «Союз». Совместно с СГТУ им. Гагарина Ю.А. и НИУ Высшая школа экономики

## **СЦЕНАРИИ ПЕРЕХОДА К ГИПЕРХАОСУ**

На основе ансамбля осцилляторов Ван дер Поля разработана модель многоконтурного генератора, представляющего собой ансамбль осцилляторов, связанных через общее среднее поле. Для системы с помощью спектра показателей Ляпунова проанализировано многообразие динамических режимов, которое включает периодические колебания, четыре типа многочастотных квазипериодических режимов, хаос и гиперхаос. Проведён анализ бифуркаций, сценариев развития хаотического поведения. Выявлены особенности, характерные для каждого типа хаотических аттракторов, в том числе с перспективой использования для систем связи.

$$\ddot{x}_i - (\lambda k_i - x_i^2)\dot{x}_i + \Delta_i x_i + \sum_{i=1}^n k_i \dot{x}_i - k_i \dot{x}_i = 0$$



Карты показателей Ляпунова

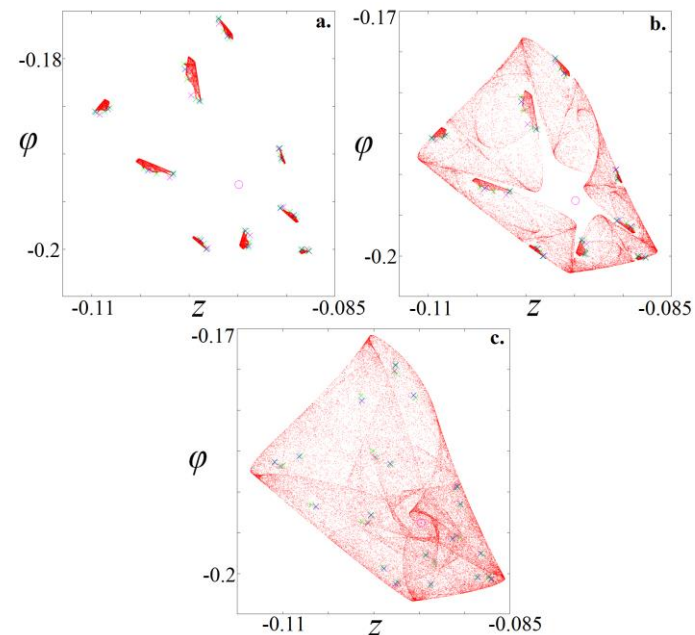
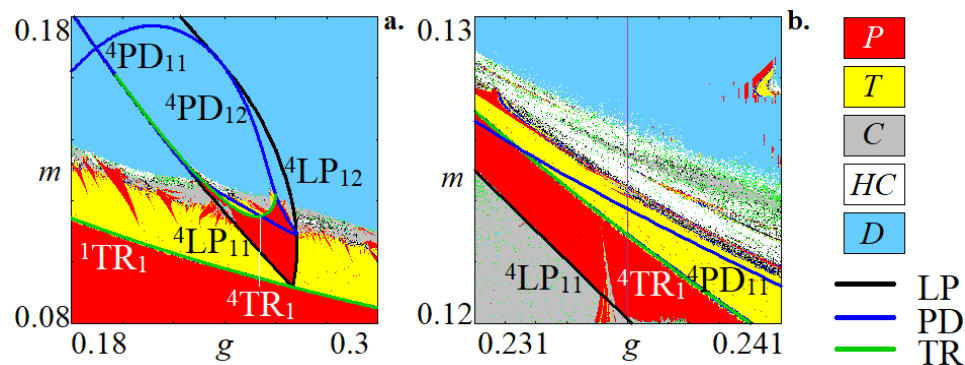
Stankevich N.V., Kuznetsov A.P., Seleznev E.P. Chaos and hyperchaos arising from the destruction of multifrequency tori. *Chaos, Solitons & Fractals* 147 2021, 110998. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2021.110998>, WoS, Q1

НИИР «Волна», РФФ № 21-12-00121. Совместно с СГТУ им. Гагарина Ю.А. и НИУ Высшая школа экономики



Предложен механизм возникновения гиперхаотического аттрактора в системах с вторичной бифуркацией Неймарка-Сакера в резонансных языках. Для модели радиотехнического генератора Анищенко-Астахова продемонстрировано существование каскада бифуркаций Неймарка-Сакера на пороге возникновения гиперхаоса и обратного каскада бифуркаций поглощения множества седло-фокусных циклов и гиперхаотических седловых множеств, возникающих в результате каскадов бифуркаций удвоения периода седловых резонансных циклов.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= mx + y - x\varphi - dx^3, \\ \dot{y} &= -x, \\ \dot{z} &= \varphi, \\ \dot{\varphi} &= -\gamma\varphi + \gamma\Phi(x) - gz. \end{aligned} \quad \Phi(x) = I(x)x^2, \quad I(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$



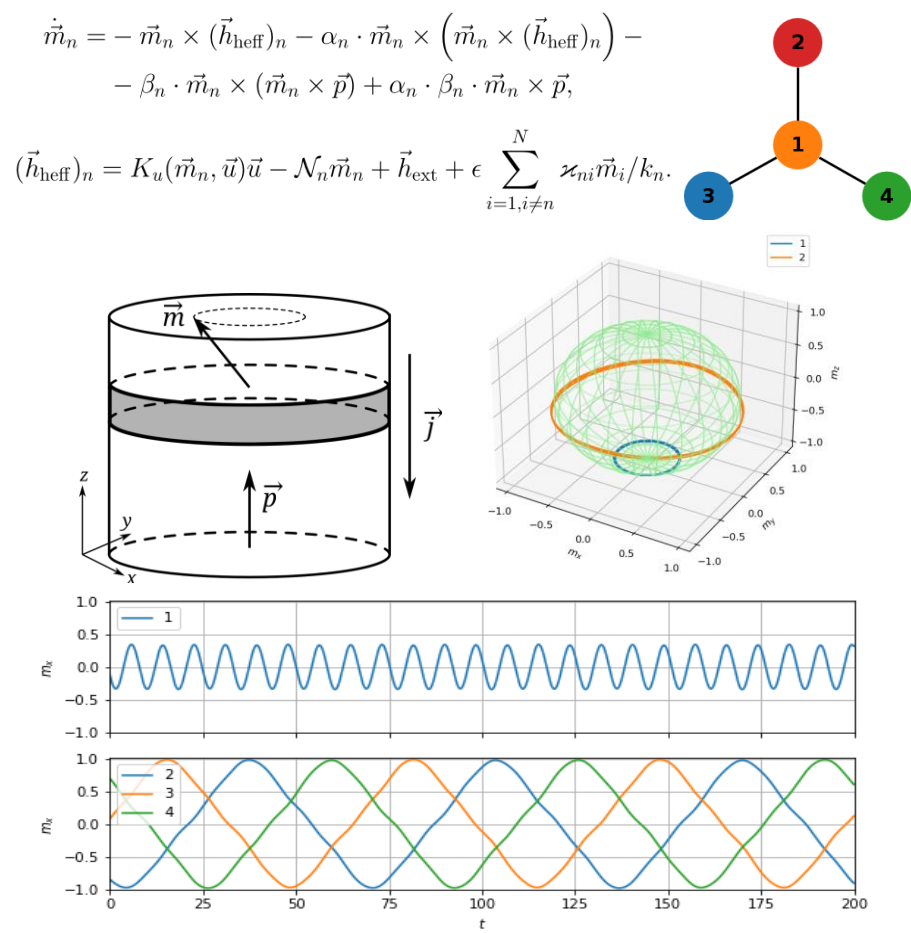
Уравнения, карты показателей Ляпунова, трансформация аттрактора изначально содержащего 252 компоненты в 28-компонентный аттрактор

Sataev I.R., Stankevich N.V. Cascade of torus birth bifurcations and inverse cascade of Shilnikov attractors merging at the threshold of hyperchaos. // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 31, 2021, №2, 023140. <https://doi.org/10.1063/5.0038878> WoS, Q1

Госзадание СФ ИРЭ РАН НИИР «Союз». Совместно с СГТУ им. Гагарина Ю.А. и НИУ Высшая школа экономики

# ДИНАМИКА СЕТЕЙ СПИН-ТРАНСФЕРНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ С ПОЛЕВОЙ СВЯЗЬЮ

Исследована модель сети спин-трансферных осцилляторов с полевой связью. Модель задаётся системой уравнений Ландау-Лифшица-Гильберта-Слончевского между которыми введена связь через магнитные поля в виде добавки к эффективному полю. В отличие от наиболее часто рассматриваемой связи через общий ток, такой тип связи допускает создание сложных конфигураций связей осцилляторов. Для такой сети в общем виде записано аналитическое выражение для матрицы Якоби. Для случая, когда сеть имеет структуру малой звезды – один центральный осциллятор связан с тремя другим которые не имеют связей друг с другом – построена карта показателей Ляпунова и показано существование областей в пространстве параметров, где реализуется режим синхронизации через посредника. В этом режиме периферийные осцилляторы синхронизированы друг с другом, но не синхронизированы с центральным осциллятором. Система может быть использована как маломощный источник СВЧ излучения с возможностью реализации сложных колебательных режимов. В силу того, что взаимодействие осуществляется только посредством магнитного поля при отсутствии электрического контакта, такую систему можно применять для реализации трансформаторной связи между узлами наноразмерных СВЧ устройств.



Звездчатая сеть. Схема осциллятора и динамика на сфере: синим показана орбита центрального осциллятора, оранжевый – совпадающие траектории трёх лучевых осцилляторов. Внизу зависимость от времени компонент  $x$  осцилляторов: центрального на верхнем графике и лучевых на нижнем.

Купцов П. В., Круглов В. П. Синхронизация через посредника в малой звездчатой сети спин-трансферных осцилляторов // Дифференциальные уравнения и процессы управления, №4, 2021. Scopus, Q3

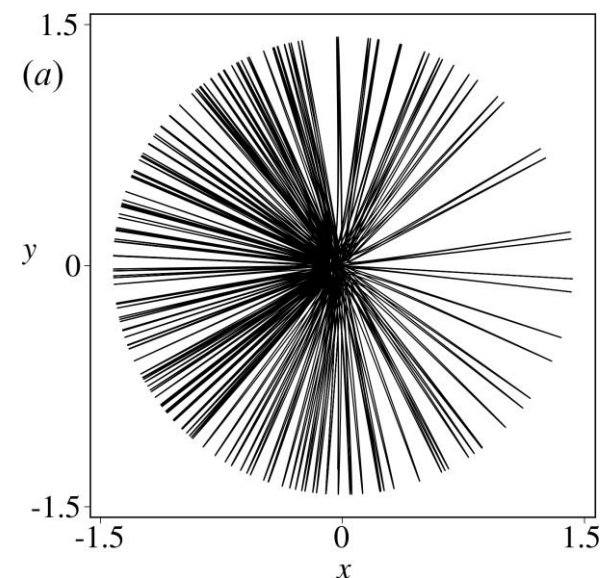
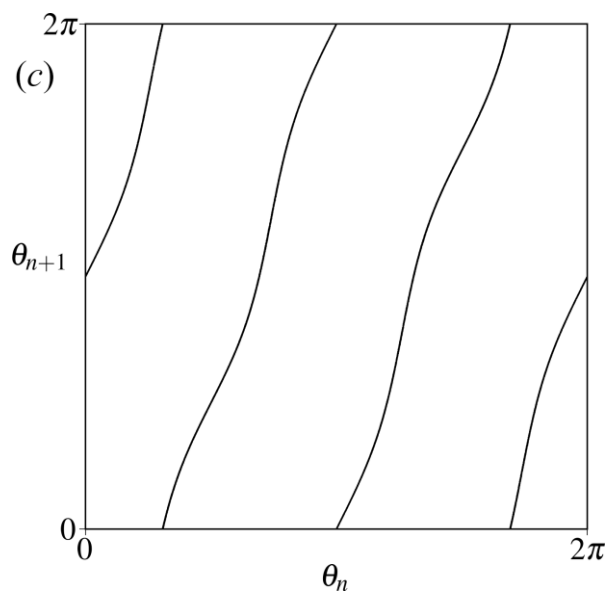
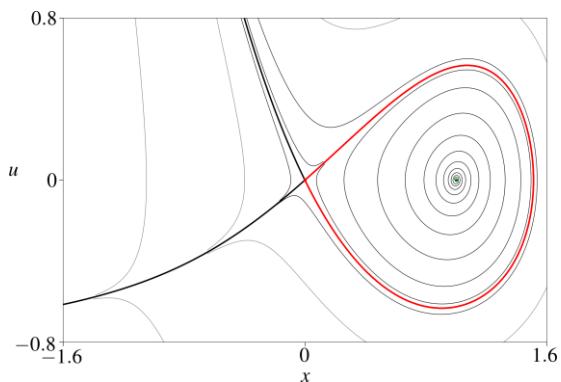
НИИР «Волна», РНФ № 21-12-00121. Совместно с СГТУ имени Гагарина Ю. А.

## ПОИСК ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ АТТРАКТОРОВ

Предложен метод конструирования автономных моделей с гиперболическим аттрактором типа Смейла – Вильямса в сечении Пуанкаре, основанный на комплексификации двумерных потоковых систем, демонстрирующих гомоклиническую бифуркацию петли сепаратрисы седла. Фазовое пространство построенной системы состоит из двух частей, в одной из частей содержится седловое положение равновесия, в окрестности которого происходит «рассеяние» траекторий с изменением аргументов комплексных переменных в соответствии с отображением, близким к отображению Бернулли. Для этой области предложен качественный анализ, основанный на теории возмущений. На значительном расстоянии от седла аргументы комплексных переменных практически не меняются, однако рост их амплитуд ограничивается, что позволяет траекториям возвращаться в окрестность седла. В сечении Пуанкаре, установленным при достижении амплитудой одной из переменных заданного значения, возникает аттрактор, топологически схожий с соленоидом Смейла-Вильямса.

$$\dot{z} = w,$$

$$\dot{w} = (1 - |z|^2)z + \left[ L - (1 - |z|^2)^2 \right] w + \varepsilon w^M$$



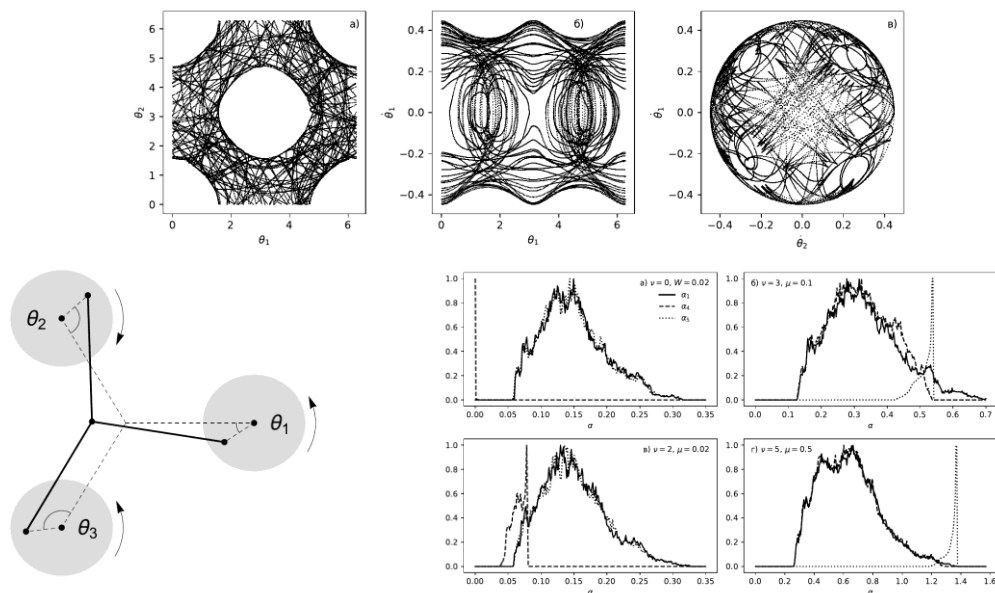
Уравнение, петля сепаратрисы седла, отображение для фаз комплексной переменной и проекция вещественной и мнимой частей  $z$

S.P. Kuznetsov, V.P. Kruglov, I.R. Sataev. Smale - Williams solenoids in autonomous system with saddle equilibrium. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 31, 2021, No.1, pp. 013140. <https://doi.org/10.1063/5.0028921> . Q1, WoS

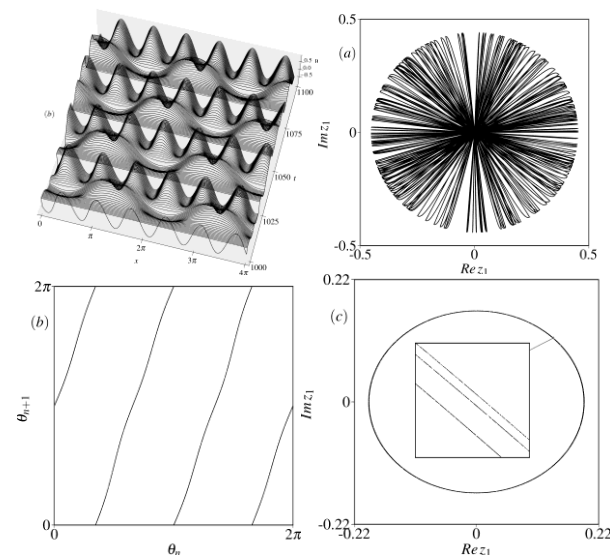
Госзадание ИРЭ РАН НИИР «Союз».

## **ОБЗОРНЫЕ РАБОТЫ ДЛЯ СБОРНИКА ПАМЯТИ С. П. КУЗНЕЦОВА**

Подготовлен обзор новых результатов по математическому моделированию грубого гиперболического хаоса в системах различной физической природы. Описаны математические модели механических систем, в которых конфигурационное пространство представляет собой поверхность отрицательной кривизны, и модели распределенных систем различной природы (химической, механической, гидродинамической), в которых фаза пространственных гармоник изменяется хаотически. Для рассмотренных моделей представлены результаты численного моделирования, подтверждающие наличие грубого хаоса.



Шарнирный механизм Трестона-Уикса, проекции его аттрактор и распределения углов между устойчивыми и неустойчивыми многообразиями, подтверждающие свойство гиперболичности.



Пространственно-временная реализация решения уравнения Свифта-Хохенберга с периодическим переключением между пространственными гармониками, проекция решения на плоскость вещественной и мнимой частей первой гармоники, итерации фаз первой гармоники за период переключения и портрет аттрактора в стробоскопическом сечении Пуанкаре.

Подготовлен обзор работ, в которых проводились экспериментальные исследования закономерностей хаотической динамики, выявленные в теоретически в работах С.П. Кузнецова.

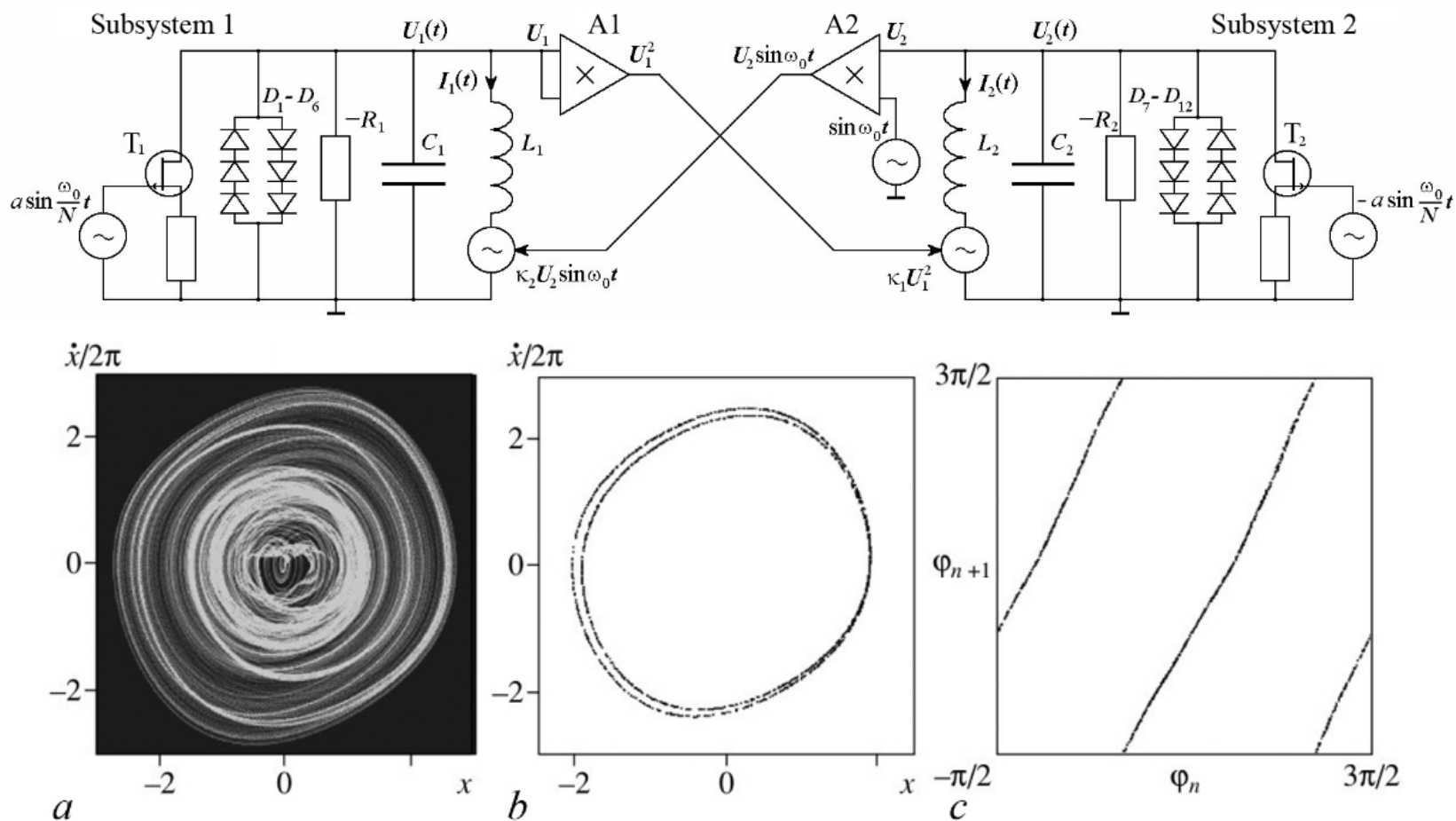


Схема генератора гиперболического хаоса на основе двух генераторов ван дер Поля с периодически меняющимся параметром возбуждения

Б. П. Безручко, В. И. Пономаренко, Е. П. Селезнев. Экспериментальные исследования хаотической динамики рядом с Теоретиком. Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика, 29, 2021, №1, 88-135. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-1-88-135, WoS, Q3