

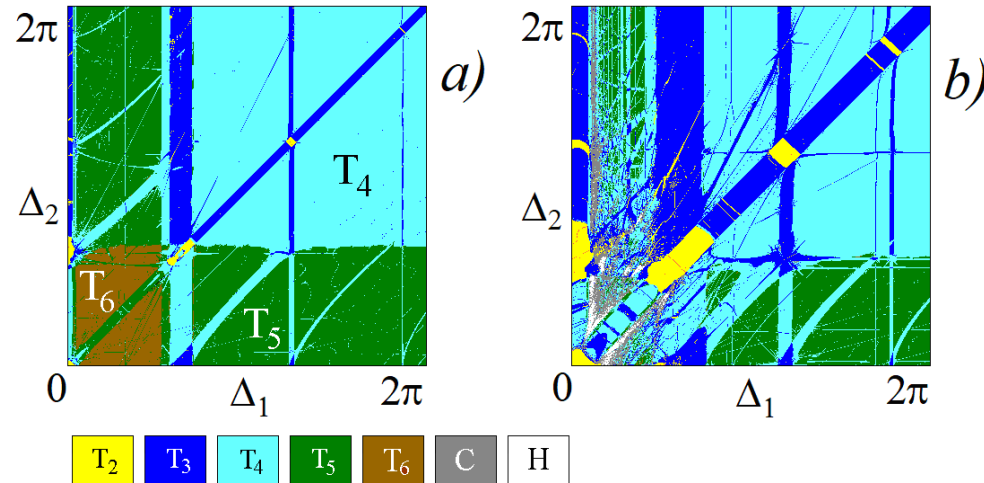
Результаты исследований лаборатории СФ7 за 2022 год

- **Многочастотная квазипериодичность**
(три статьи: Q3, Q3, Q4; РНФ, Госзадание)
- **Спин-трансферные осцилляторы**
(одна статья Q2, РНФ)
- **Параметрическое взаимодействие трёх волновых мод**
(две статьи Q3, РНФ)
- **Хаотический аттрактор с дополнительным нулевым показателем**
(одна статья Q2, Госзадание)
- **Хаотическая динамика численных алгоритмов**
(одна статья, сборник Springer, РНФ)

Многочастотная квазипериодичность

Изучена система трёх связанных квазипериодических генераторов

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 - (\lambda_1 + z_1 + x_1^2 - \beta x_1^4) \dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 + M_c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) &= 0, \\ \dot{z}_1 = b(\varepsilon - z_1) - k\dot{x}_1^2, \\ \ddot{x}_2 - (\lambda_2 + z_2 + x_2^2 - \beta x_2^4) \dot{x}_2 + (\omega_0 + \Delta_1)^2 x_2 + M_c(2\dot{x}_2 - \dot{x}_1 - \dot{x}_3) &= 0, \\ \dot{z}_2 = b(\varepsilon - z_2) - k\dot{x}_2^2, \\ \ddot{x}_3 - (\lambda_3 + z_3 + x_3^2 - \beta x_3^4) \dot{x}_3 + (\omega_0 + \Delta_2)^2 x_3 + M_c(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) &= 0, \\ \dot{z}_3 = b(\varepsilon - z_3) - k\dot{x}_3^2. \end{aligned}$$



Ляпуновские карты на плоскости частотных расстройек генераторов для разных уровней связи, T_n – n -частотные торы, C – хаос, H – гиперхаос.

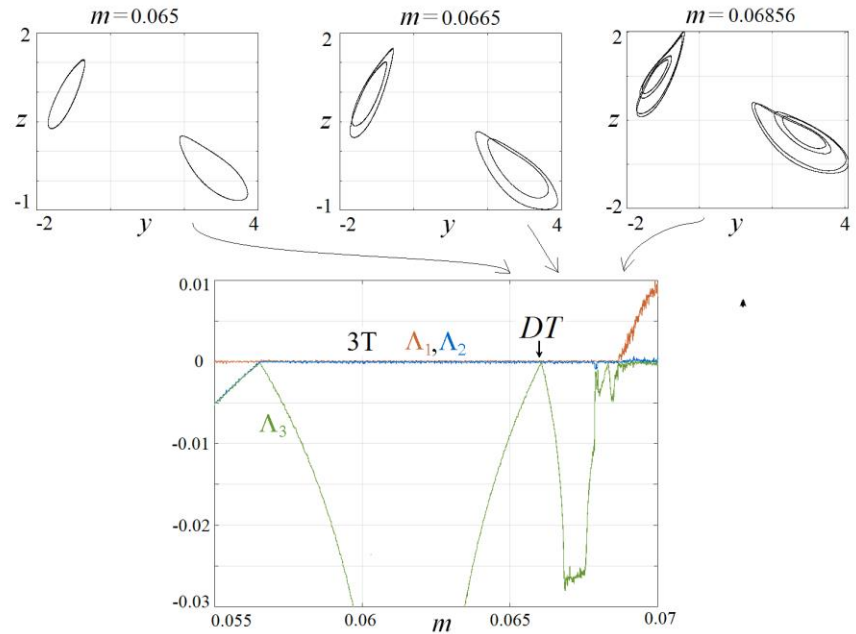
Изучена система трёх связанных квазипериодических генераторов. Показано, что в случае квазипериодических колебаний в одном индивидуальном генераторе картина оказывается иной, чем в случае трёх связанных генераторов ван дер Поля: наблюдаются квазипериодические бифуркации Хопфа, седло-узловые бифуркации инвариантных торов и резонансная паутина Арнольда. Четырёхчастотные торы возникают и в случае, когда все три индивидуальных генератора находятся в режиме предельных циклов, что является ещё одним отличием от случая осцилляторов ван дер Поля. В случае квазипериодических колебаний в каждом индивидуальном генераторе наблюдается возникновение торов высокой размерности и резонансная паутина Арнольда на базе торов разной размерности. Результаты работы могут быть использованы для создания широкополосных радиофизических генераторов.

А.П. Кузнецов, Ю.В. Седова, Н.В. Станкевич. Различные режимы трех связанных генераторов, способных демонстрировать квазипериодические колебания. Письма в Журнал технической физики. 2022. Т. 48. №. 24. С. 19-22. WoS, Q3.

Рассмотрено гармоническое воздействие на модифицированный генератор Анищенко-Астахова, способный демонстрировать в автономном режиме двухчастотные квазипериодические колебания.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= mx + y - x\varphi - dx^3 + a \cos \omega t, \\ \dot{y} &= -x, \\ \dot{z} &= \varphi, \\ \dot{\varphi} &= -\gamma\varphi + \gamma\Phi(x) - gz,\end{aligned}$$

$$\Phi(x) = I(x)x^2, I(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$



Портреты в двойном сечении Пуанкаре трехчастотных торов $3T$ и графики ляпуновских показателей Λ в зависимости от параметра возбуждения m ; DT – точка удвоения трехчастотного тора.

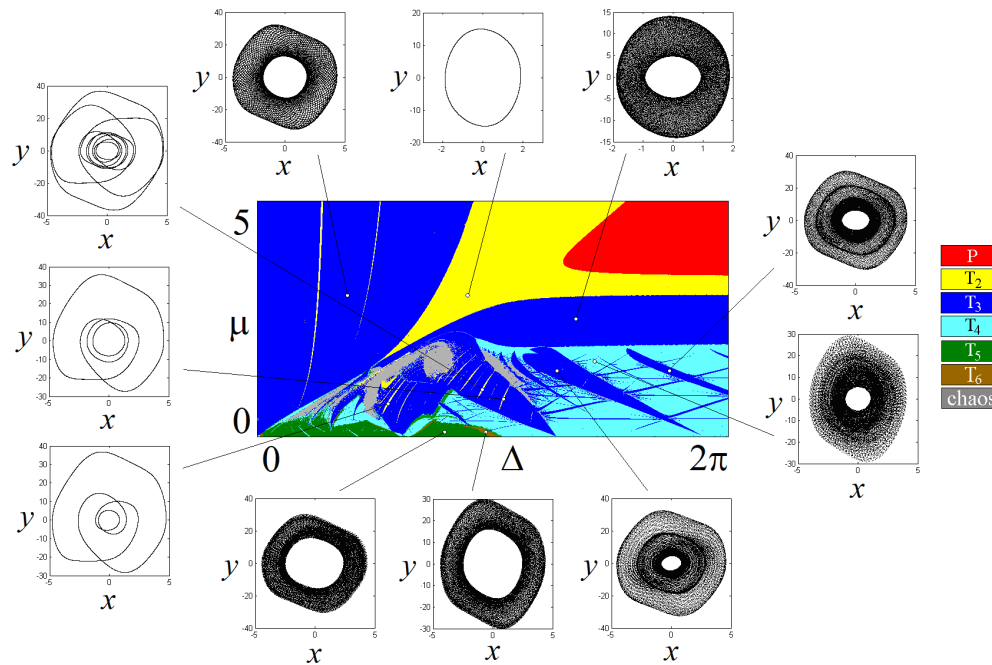
Рассмотрено гармоническое воздействие на модифицированный генератор Анищенко-Астахова, способный демонстрировать в автономном режиме двухчастотные квазипериодические колебания. Показана возможность удвоения трёхчастотных торов в не-автономной системе. Продемонстрирован эффект подавления хаоса внешним сигналом, приводящий не только к периодическим, но и к квазипериодическим режимам при превышении амплитудой воздействия некоторого порога. Результаты работы могут быть использованы в системах телекоммуникации при разработке новых принципов модуляции.

Кузнецов А.П., Седова Ю.В. Воздействие гармонического сигнала на генератор квазипериодических колебаний Анищенко– Астахова // Письма в Журнал технической физики. 2022. Т. 48. №. 4. С. 48-50. WoS, Q3.

РНФ № 21-12-00121

Методом дискретизации уравнений двух связанных квазипериодических генераторов получено новое высокоразмерное отображение

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} &= x_n + h \cdot y_{n+1}, \\
 y_{n+1} &= y_n + h \cdot \left((\lambda_1 + z_n + x_n^2 - \beta x_n^4) y_n - \omega_0^2 x_n - \mu(y_n - v_n) \right), \\
 z_{n+1} &= z_n + h \cdot \left(b(\varepsilon - z_n) - k y_n^2 \right), \\
 u_{n+1} &= u_n + h \cdot v_{n+1}, \\
 v_{n+1} &= v_n + h \cdot \left((\lambda_2 + w_n + u_n^2 - \beta u_n^4) v_n - (\omega_0 + \Delta)^2 u_n - \mu(v_n - y_n) \right), \\
 w_{n+1} &= w_n + h \cdot \left(b(\varepsilon - w_n) - k v_n^2 \right)
 \end{aligned}$$



Карта ляпуновских показателей отображения и фазовые портреты в характерных точках, P – периодический режим, T_n – n -частотные торы

Методом дискретизации уравнений двух связанных квазипериодических генераторов получено новое высокоразмерное отображение. Проведён двухпараметрический ляпуновский анализ, выявляющий различные типы колебательных режимов в системе. Отображение демонстрирует характерные для квазипериодичности возрастающей размерности фурье-спектры. Наблюдаются квазипериодические бифуркации инвариантных торов и резонансная паутина Арнольда. С ростом параметра дискретизации происходит разрушение высокоразмерных торов. Изучено влияние шума на динамику системы. При малых параметрах дискретизации шум мало влияет на вид ляпуновских карт. Увеличение параметра дискретизации приводит к исчезновению высокоразмерных торов с ростом интенсивности шума. Практическая значимость работы — возможность упрощения многопараметрического анализа инвариантных торов высокой размерности в потоковых системах посредством перехода к модели с дискретным временем, а также возможность выявления новых особенностей, характерных для квазипериодической динамики, демонстрируемых предложенным отображением.

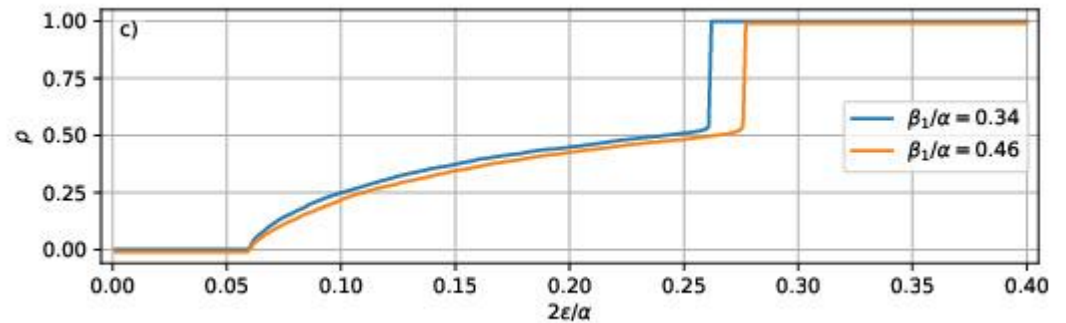
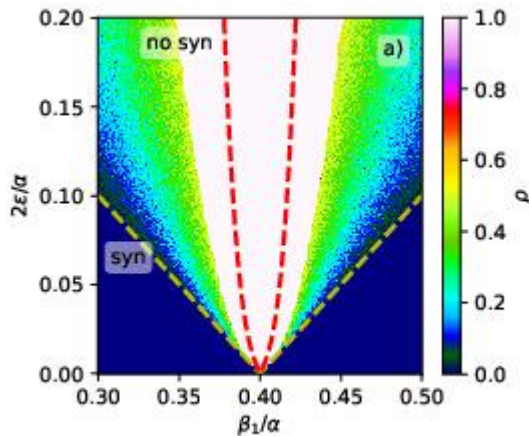
Кузнецов А.П., Седова Ю.В. Высокразмерное дискретное отображение на базе связанных квазипериодических генераторов. Известия Саратовского университета - Новая серия. Серия Физика. 2022. Т. 22. № 4. С. 328-337. Scopus, Q4.

Госзадание СФ ИРЭ РАН

Спин-трансферные осцилляторы

Исследованы эффекты синхронизации и бистабильность в системе двух связанных спин-трансферных осцилляторов с одноосной симметрией

$$\begin{aligned}
 (1 + \alpha^2)\dot{m}_{1,x} &= m_{1,z}A_1m_{1,x} + B_1m_{1,y} + \\
 &\quad \epsilon \{ \alpha[m_{2,x} - (\vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2)m_{1,x}] - m_{1,y}m_{2,z} + m_{2,y}m_{1,z} \}, \\
 (1 + \alpha^2)\dot{m}_{1,y} &= -B_1m_{1,x} + m_{1,z}A_1m_{1,y} + \\
 &\quad \epsilon \{ \alpha[m_{2,y} - (\vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2)m_{1,y}] + m_{1,x}m_{2,z} - m_{2,x}m_{1,z} \}, \\
 (1 + \alpha^2)\dot{m}_{1,z} &= A_1(m_{1,z}^2 - 1) + \\
 &\quad \epsilon \{ \alpha[m_{2,z} - (\vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2)m_{1,z}] - m_{1,x}m_{2,y} + m_{2,x}m_{1,y} \}, \\
 A_1 &= (m_{1,z} - h_z + \beta_1/\alpha)\alpha, \quad B_1 = m_{1,z} - h_z - \beta_1\alpha.
 \end{aligned}$$



Относительная частота появления синхронного решения при старте со случайной точки на плоскости частота-сила связи. Прерывистые линии – теоретические оценки границ области бистабильности.

Исследованы эффекты синхронизации и бистабильность в системе двух связанных спин-трансферных осцилляторов. Рассмотрен случай когда осцилляторы симметричны относительно оси электрического тока, а связь осуществляет посредством магнитных полей. Обнаружен эффект бистабильности, когда сосуществуют синхронные и асинхронные колебания. Показано что в при описании осцилляторов в фазовом приближении синхронный режим соответствует неподвижной точке уравнений, а асинхронному отвечает колебательное решение. Получены аналитические оценки для границ области бистабильности в пространстве параметров. Эти оценки сопоставлены с результатами численного анализа. Результаты работы могут быть использованы для создания новой элементарной электронных и спинтронных устройств.

P.V. Kuptsov Synchronization and bistability of two uniaxial spin transfer oscillators with field coupling. Regular and Chaotic Dynamics. 2022. Vol. 27, No. 6, pp. 697-712. DOI: 10.1134/S1560354722060077. Quartile in JCR:Q2.

РНФ № 21-12-00121

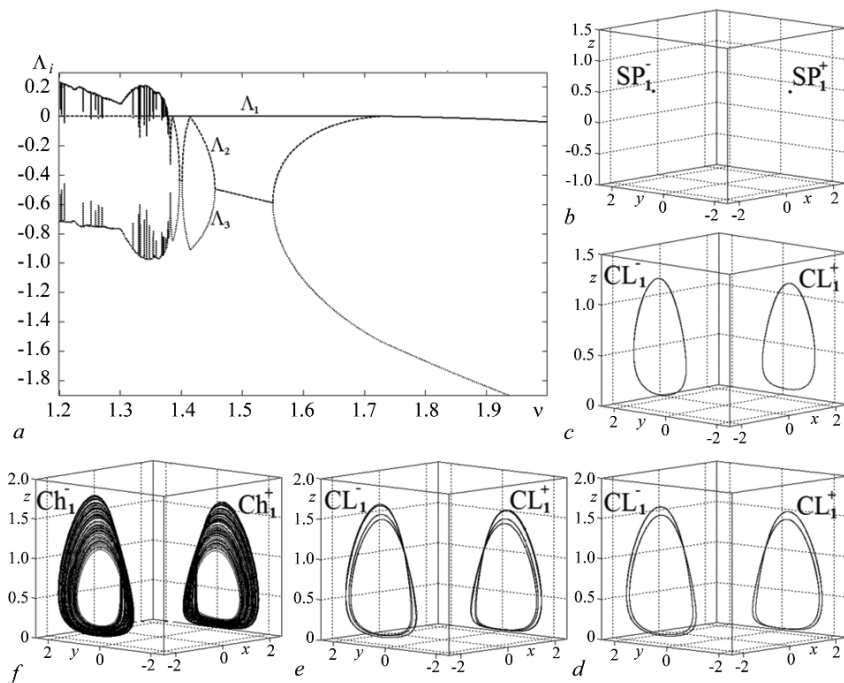
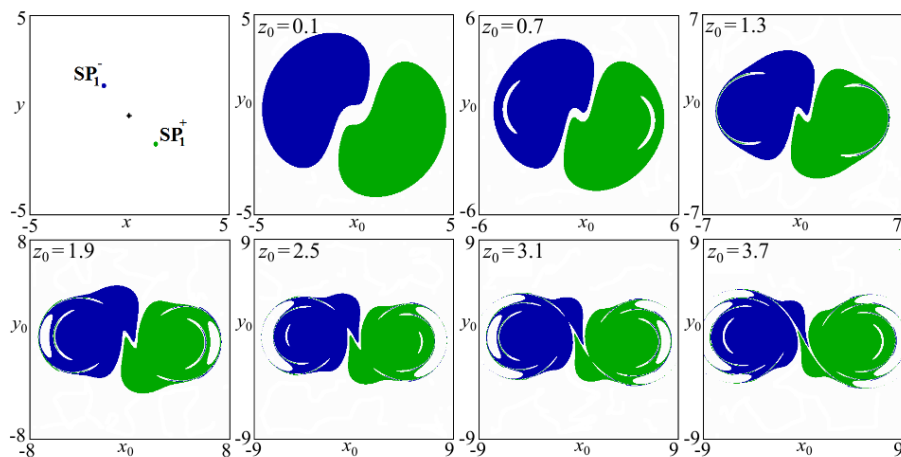
Параметрическое взаимодействие трёх волновых мод

Получены обобщённые уравнения, описывающие трехмодовое взаимодействие в присутствии квадратичной или кубической нелинейности общего вида

$$\dot{x} = [p(x^2 + z) + q(-y^2 + 3z) - 1]y + \gamma x,$$

$$\dot{y} = [p(-x^2 + 3z) + q(y^2 + z) + 1]x + \gamma y,$$

$$\dot{z} = -2z(\nu + (p + q)xy).$$



Различные сечения бассейнов притяжения устойчивых положений равновесия SP_1^- , SP_1^+ .
Зависимость показателей Ляпунова от параметров, примеры аттракторов

С использованием механического формализма Лагранжа в присутствии диссипации получена обобщённая модель, описывающая возникновение хаоса при параметрическом взаимодействии трёх мод в неравновесной среде с кубической нелинейностью. Для полученной модели, для случаев, когда параметры, имеющие смысл коэффициентов диссипации принимают положительные и отрицательные значения, была проанализирована структура пространства параметров, исследована структура аттракторов и их бассейнов притяжения, найдены основные бифуркации неподвижных точек и предельных циклов, исследована мультистабильность. Показано, что мультистабильность, обусловленная внутренней симметрией системы, проявляется независимо от знака диссипации, а мультистабильность, когда в фазовом пространстве сосуществуют аттракторы различных периодов, характерна только для случая положительной диссипации. Результаты работы могут быть использованы для анализа процессов, протекающих в неравновесных средах, и предсказания их поведения. В силу универсальности, модель отвечает системам различной физической природы, в том числе электронным, гидродинамическим, химическим.

Тюрюкина Л. В. Динамика системы Рабиновича–Фабриканта и ее обобщённой модели в случае отрицательных значений параметров, имеющих смысл коэффициентов диссипации. Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2022. Т. 30, вып. 6. (DOI: 10.18500/0869-6632-003015).

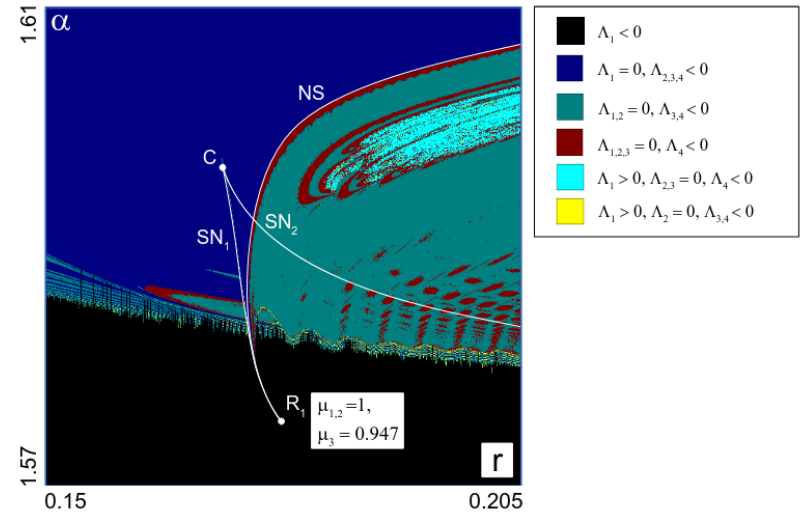
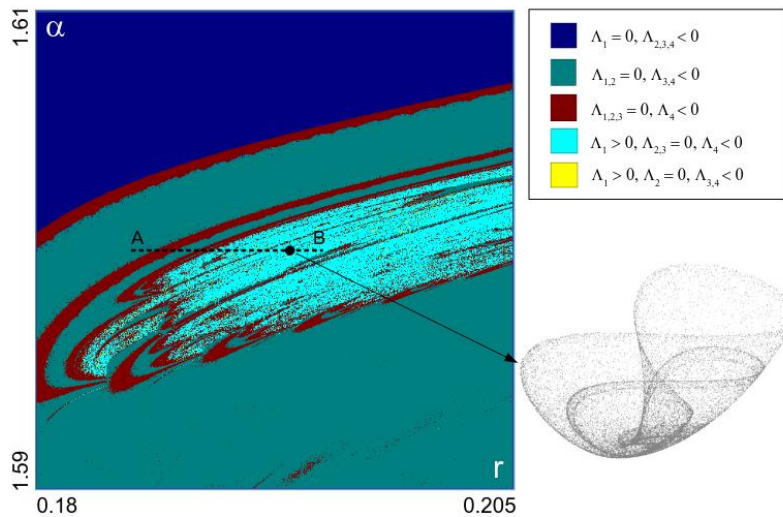
Кузнецов С.П., Тюрюкина Л. В. Обобщённая система Рабиновича–Фабриканта: уравнения и динамика Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 4 2022, №1, 7-29. (DOI:10.18500/0869-6632-2022-30-1-7-29).

Хаотический аттрактор с дополнительным
нулевым показателем

Исследовано возникновение хаотических аттракторов с дополнительным нулевым показателем Ляпунова

$$\dot{\gamma}_n = \Gamma_n(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4) = \frac{1}{5} \sum_{m=1}^4 [g(\gamma_n - \gamma_m) - g(-\gamma_m)] + \frac{1}{5} [g(\gamma_n) - g(0)], n = 1, 2, 3, 4.$$

$$g(\theta) = -\sin(\theta + \alpha) + r \sin(2\theta + \beta),$$



$$\Lambda_1 = 0.002179, \Lambda_2 = -0.000023,$$

$$\Lambda_3 = -0.000008, \Lambda_4 = -0.028477,$$

Карты показателей Ляпунова, фазовый портрет аттрактора и его показатели Ляпунова

Исследовано возникновение хаотических аттракторов с дополнительным нулевым показателем Ляпунова в системе четырех дифференциальных уравнений, описывающих взаимодействие пяти одинаковых фазовых осцилляторов, связанных посредством бигармонической функции. Показано, что появление дополнительного нулевого показателя в этой системе связано с тем, что хаотическая динамика развивается вблизи бифуркации коразмерности три, когда периодическая орбита (неподвижная точка отображения Пуанкаре) имеет тройку мультипликаторов $(1, 1, 1)$. В окрестности такой бифуркации соответствующее трехмерное отображение Пуанкаре может быть хорошо аппроксимировано отображением сдвига по времени трехмерной системы дифференциальных уравнений. Результаты работы могут быть использованы при исследовании свойств хаотических генераторов и для разработки систем коммуникации на основе хаотических сигналов.

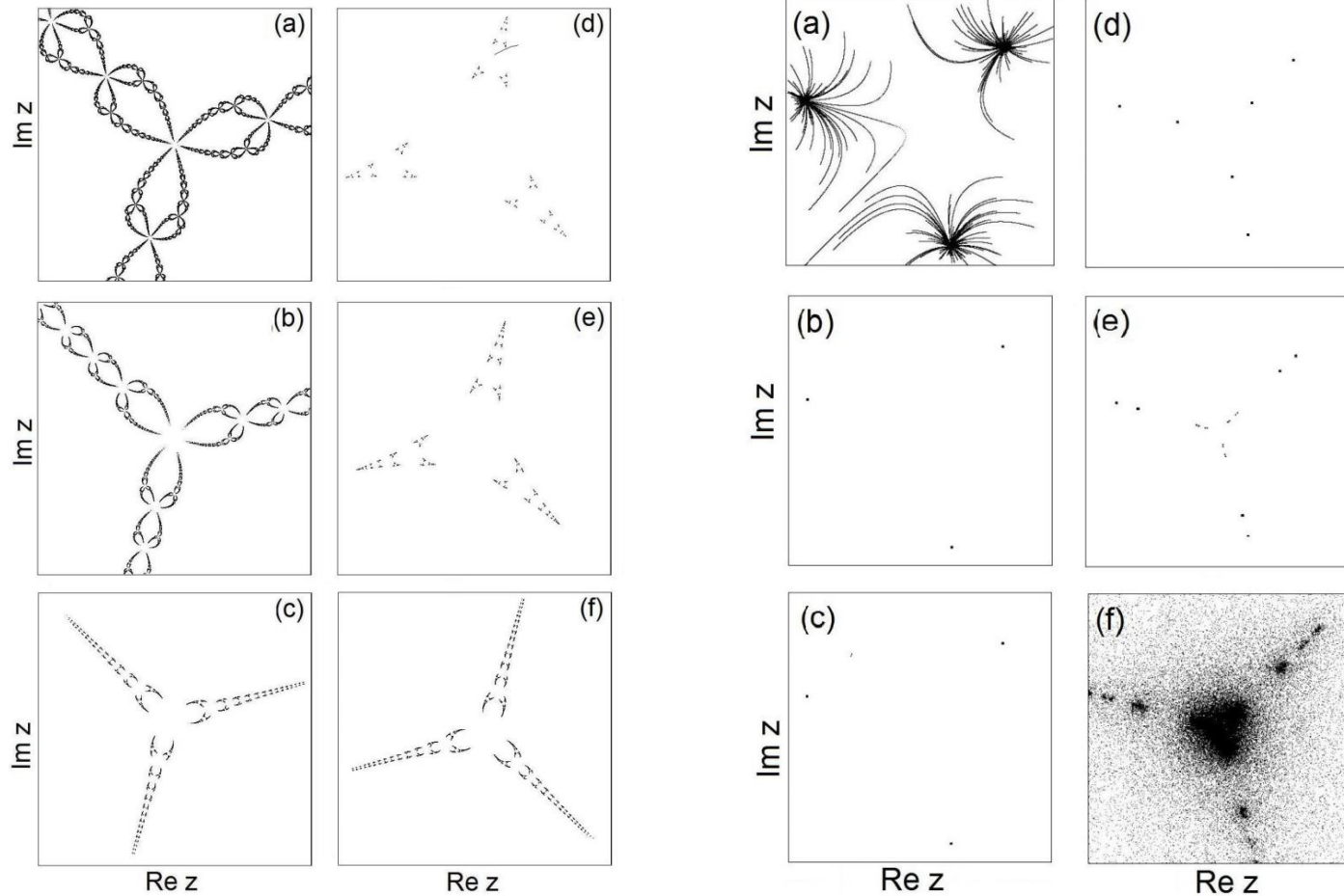
Evgeny A. Grines, Alexey Kazakov and Igor R. Sataev. On the origin of chaotic attractors with two zero Lyapunov exponents in a system of five biharmonically coupled phase oscillators. *Chaos* 32, 093105 (2022); DOI: 10.1063/5.0098163. WoS **Q2**.

Госзадание СФ ИРЭ РАН, Совместно с ННГУ им. Лобачевского и НИУ Высшая школа экономики.

Хаотическая динамика численных алгоритмов

Предложен новый пример модельной динамической системы из малоизученного экзотического класса - неявных отображений

$$(\alpha h + 3)z_{n+1}^3 z_n^2 + ((1 - \alpha)h - 3)z_{n+1}^2 z_n^3 + (1 - \alpha)hcz_{n+1}^2 + \alpha hcz_n^2 = 0.$$



Примеры репеллеров (слева) и аттракторов (справа)

Предложен новый пример модельной динамической системы из малоизученного экзотического класса - неявных отображений. Система возникает в рамках обобщения проблемы Ньютона-Кэли, которая объясняет появление фрактальных сепаратрисс при решении мультистабильных ОДУ методом Эйлера и фрактальных границ бассейнов притяжения корней нелинейных алгебраических уравнений при решении их методом Ньютона. Использование неявных и полунявных итерационных численных методов приводит к необходимости изучения динамики, неоднозначной не только в обратном, но и в прямом времени. Показано, что такое обобщение порождает еще более сложные артефакты: Наряду с фрактальными репеллерами возникают сложные притягивающие множества, которые в рамках терминологии теории систем итерируемых функций можно называть инвариантными. Они состоят из сосуществующих траекторий, отвечающих различным вариантам неоднозначной в прямом времени динамики.

Елистратов А.А., Савин Д.В., Исаева О.Б. Complex Dynamics of the Implicit Maps Derived from Iteration of Newton and Euler Methods. Mathematical Modeling and Supercomputer Technologies. MMST 2022. Communications in Computer and Information Science. Springer, Cham 1750, 2022, С. 29-40.