ШКОЛА-КОНФЕРЕНЦИЯ
“НЕЛИНЕЙНЫЕ ДНИ В САРАТОВЕ
ДЛЯ МОЛОДЫХ - 2007”

АКАДЕМБОЙ ШКОЛЬНИКОВ ПО ФИЗИКЕ

Саратов

16–20 октября 2007 года

Составление заданий академбоя: А.В. Савин, Д.В. Савин, Н.В. Станкевич

Оригинал-макет подготовлен А.В. Савиным

Домашнее задание

Теоретическая часть

№1. “Прыгающая шайба”

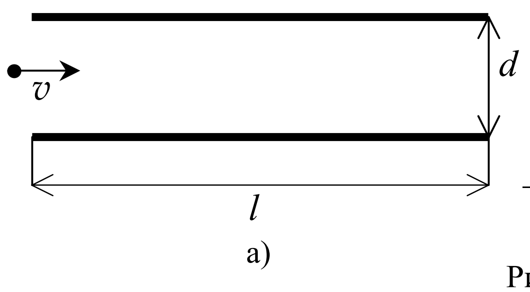
На наклонную плоскость падает “плашмя” маленькая плоская шайба, коэффициент трения скольжения которой по плоскости равен μ. Считая, что при ударе перпендикулярная к плоскости компонента скорости сохраняется по величине, определите, при каком угле наклона шайба будет прыгать по плоскости бесконечно долго.

№2. “Закрытая комната”

Оцените, сколько времени может без возникновения затруднений в дыхании пробыть в герметически закрытой комнате размерами 3*6*3 м^3 человек? Считайте, что объем вдоха 0,5 л, а из содержащегося во вдыхаемом воздухе кислорода в происходящих в организме окислительных процессах с образованием углекислого газа и воды расходуется примерно третья часть. Человек начинает испытывать дискомфорт, если концентрация углекислого газа превышает 1%.

№3. “Частицы в конденсаторе”

К обкладкам плоского конденсатора с длиной пластин l и расстоянием между ними d (рис. 2а) приложено переменное напряжение амплитудой U_0 и периодом τ (рис.2б). Точно посередине между пластинами в конденсатор влетает поток частиц массы m и заряда e, имеющих одинаковую скорость v. Считая, что время пролета частицы между пластинами в отсутствие напряжения намного больше τ, определите: а) максимальное значение амплитуды напряжения, при котором все частицы пролетят через конденсатор; б) минимальное значение амплитуды напряжения, при котором ни одна частица не пролетит через конденсатор.



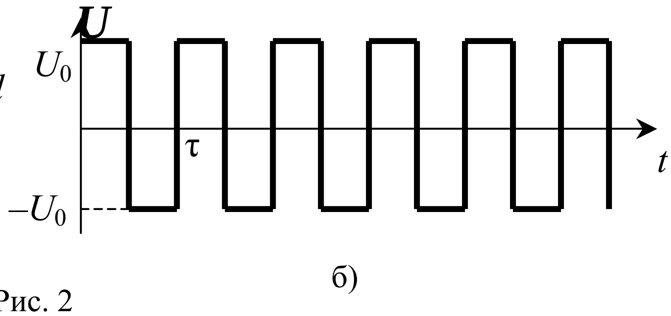


Рис. 2

Экспериментальная часть

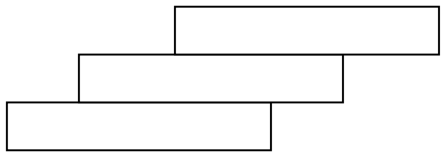


Рис. 3

Сложите некоторое количество костяшек домино в стопку. Сдвигая верхние костяшки относительно нижних, попробуйте получить “перевернутую стенку” максимальной длины (см. рис. 3). Количество используемых костяшек неограничено, однако при равной длине преимущество будет иметь решение с наименьшим числом использованных костяшек.

Попробуйте провести теоретическое рассмотрение этой задачи и ответить, в частности, на следующие вопросы:

а) какую наибольшую длину стенки можно достичь при идеальных условиях? В реальных условиях?

б) от каких параметров используемых костяшек зависит результат?

в) какова наилучшая стратегия складывания такой стенки?

РЕШЕНИЯ

Теоретическая часть

№1

1. Для удара шайбы о плоскость запишем второй закон Ньютона в импульсной форме (закон изменения импульса) в проекциях на оси (см. рис. 7):

$$\begin{aligned} OY &: 2v_0\cos\beta = (N - mg\cos\alpha)\tau \\ OX &: v_x - v_0\sin\beta = (-\mu N + mg\sin\alpha)\tau \end{aligned} . \quad (1)$$

Здесь v_x – проекция скорости шайбы на направление наклонной плоскости после удара.

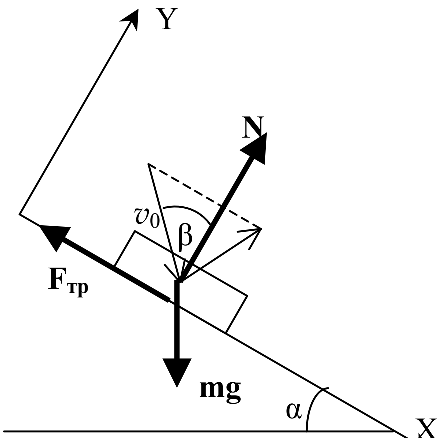


Рис. 7

2. В момент удара сила реакции плоскости существенно превышает силу тяжести шайбы. Поэтому в (1) слагаемыми mg можно пренебречь. В этом случае, разделив второе уравнение на первое, получаем выражение для убыли касательной составляющей скорости за 1 удар:

$$\Delta v_{x_1} = v_x - v_0\sin\beta = -2\mu v_0\cos\beta .$$

3. После удара шайба движется как тело, брошенное под углом к горизонту, причем высота тела над наклонной плоскостью (отсчитываемая по перпендикуляру к плоскости, а не по вертикали!) $h = v_0\cos\beta \cdot t - g\cos\alpha \cdot t^2/2$. В момент следующего удара о плоскость $t = \dfrac{2v_0\cos\beta}{g\cos\alpha}$. Тогда прирост касательной компоненты скорости за время полета $\Delta v_{x_2} = g\sin\alpha t = 2v_0\cos\beta tg\alpha$.

4. Таким образом, за 1 цикл “удар-полет” касательная к плоскости компонента изменяется на $\Delta v_x = \Delta v_{x_1} + \Delta v_{x_2} = 2v_0\cos\beta(tg\alpha - \mu)$. (Обратите внимание, что за следующий цикл формула будет такой же, но значение v_0 в ней другим, равным модулю скорости перед вторым ударом). Отсюда видно, что при $tg\alpha > \mu$ скорость будет все время увеличиваться, а при $tg\alpha < \mu$ – уменьшаться и в конце концов рассчитываемая по этой формуле продольная скорость станет равна нулю. Это, однако, говорит лишь о том, что произошло качественное изменение характера движения: при ударе о плоскость продольная компонента скорости полностью гасится. Однако поскольку перпендикулярная компонента скорости сохраняется, то движение тела относительно плоскости не прекратится, только теперь продольная компонента скорости в начале каждого «прыжка» равна нулю, т.е. все прыжки одинаковы.

Ответ: при любом угле. Значение $\alpha = arctg\mu$ соответствует изменению характера движения.

№2

1. Органические вещества состоят в основном из углерода и водорода, следовательно, при их окислении получаются углекислый газ и вода. Если (для оценки) предположить, что на одну молекулу CO_2 получается 1 молекула H_2O, то реакцию окисления кислорода в организме можно условно записать в виде $3O_2 \rightarrow 2CO_2 + 2H_2O$, следовательно, на три молекулы кислорода образуется 2 молекулы углекислого газа.

2. Тогда за 1 вдох-выдох из воздуха забирается $\delta N_{O_2} = 1/3 n_{O_2} V_0$ молекул кислорода, а в воздух поступает $\delta N_{CO_2} = 2/3 \cdot 1/3 n_{O_2} V_0$ молекул углекислого газа. Соответственно, концентрация углекислого газа в воздухе после N вдохов станет равна $\dfrac{N\delta N_{CO_2}}{V} = \dfrac{2n_{O_2}V_0 N}{9V}$. Здесь мы предположили, что концентрация кислорода существенно не изменилась, т.к. начальная кон-

центрация кислорода 20%, и за рассматриваемое время она изменится не более, чем на 0,5%.

3. Тогда число вдохов $N = 0{,}01n \cdot \dfrac{9V}{2 \cdot 0{,}2nV_0} = 0{,}225\dfrac{V}{V_0} = 24300$, где n – концентрация молекул в воздухе. Считая, что частота дыхания человека примерно 15-20 вдохов в минуту, получаем время 1200-1600 минут, т.е. 20-25 часов.

Ответ: 20-25 часов.

Комментарий: понятно, что оценка очень приблизительна. Наиболее “уязвимой” частью представляется уравнение окисления, т.к., во-первых, далеко не все вещества окисляются полностью, т.е. до углекислого газа и воды, во-вторых, соотношения углерода и кислорода, от которых и зависят коэффициенты в уравнении, для разных органических веществ существенно различаются.

№3

1. Рассмотрим частицу, влетевшую в конденсатор в тот момент времени, когда произошла смена полярности напряжения. Тогда в течение времени τ/2 на нее действует постоянная сила $F = \dfrac{U_0 e}{d}$, направленная перпендикулярно пластинам конденсатора. Соответственно за полпериода напряжения (до смены полярности) частица сместится в перпендикулярном направлении на $h_{1/2} = \dfrac{U_0 e}{8md}\tau^2$, приобретя при этом перпендикулярную компоненту скорости $v_n = \dfrac{U_0 e}{2md}\tau$. Следующие полпериода на частицу действует такая же по величине сила, но направленная в другую сторону. Поэтому ее движение в перпендикулярном направлении будет равнозамедленным, и в итоге после одного периода перпендикулярная компонента скорости будет равна нулю, а смещение в перпендикулярном направлении составит $h = \dfrac{U_0 e}{4md}\tau^2$. В продольном же направлении частица за периода смещается на $v\tau$.

2. Таким образом, влетевшая в момент смены полярности напряжения частица за один периода смещается на $h = \dfrac{U_0 e}{4md}\tau^2$. Понятно, что это максимально возможное смещение за период, т.е. если частица влетает в другой момент времени, то какую-то часть периода она движется в одном направлении, в какую-то – в другом. Тогда, т.к. длина конденсатора велика, то можно считать, что на ней укладывается целое число смещений за периода, т.е. $l = Nv\tau$. Тогда частица не вылетит из конденсатора, если за N (или меньше) периодов ее перпендикулярное смещение станет больше $d/2$, т.е. $\dfrac{l}{v\tau} \cdot \dfrac{U_0 e}{4md}\tau^2 \geq \dfrac{d}{2}$, откуда получаем $U_{0\min} \geq \dfrac{2vmd^2}{el\tau}$.

3. Рассмотрим теперь движение частицы, влетевшей в конденсатор точно посередине между моментами смены полярности напряжения. В течение четверти периода она движется равноускоренно в перпендикулярном направлении, и к моменту смены полярности напряжения смещается на $h_{1/4} = \dfrac{U_0 e}{32md}\tau^2$, имея при этом перпендикулярную компоненту скорости $v_n = \dfrac{U_0 e}{4md}\tau$. После смены полярности в течение времени τ/2 ускорение направлено в противоположную сторону, поэтому за это время смещение в перпендикулярном направлении составит $h_{3/4} = \dfrac{U_0 e}{32md}\tau^2 + \dfrac{U_0 e}{4md}\tau \cdot \dfrac{\tau}{2} - \dfrac{U_0 e}{8md}\tau^2 = \dfrac{U_0 e}{32md}\tau^2$, а перпендикулярная компонента ско-

рости $v_n = \frac{U_0 e}{4md}\tau - \frac{U_0 e}{2md}\tau = -\frac{U_0 e}{4md}\tau$. Наконец, в течение последних четверти периода полярность изменяется, и окончательно за период напряжения смещение частицы по перпендикулярному направлению $h_1 = \frac{U_0 e}{32md}\tau^2 - \frac{U_0 e}{4md}\tau \cdot \frac{\tau}{2} + \frac{U_0 e}{32md}\tau^2 = 0$, а перпендикулярная компонента скорости также равна нулю. Т.е. в среднем за периода частица не смещается. Следовательно, если она не достигнет пластины конденсатора на первом же периоде воздействия, то пролетит через него. Поэтому напряжение должно быть таким, чтобы максимальное смещение в течение периода было больше $d/2$.

4. Несложно видеть, что максимальное смещение достигается в момент времени $\tau/2$, т.к. именно в это время перпендикулярная компонента скорости меняет знак. Тогда $h_{\max} = h_{1/2} = \frac{U_0 e}{32md}\tau^2 + \frac{U_0 e}{4md}\tau \cdot \frac{\tau}{4} - \frac{U_0 e}{32md}\tau^2 = \frac{U_0 e}{16md}\tau^2$. Из условия $h_{\max} \geq \frac{d}{2}$ имеем $U_0 \geq \frac{8md^2}{e\tau^2}$.

Ответ: а) $U_0 = \frac{2vmd^2}{el\tau}$ б) $U_0 = \frac{8md^2}{e\tau^2}$

Экспериментальная часть

С формальной точки зрения наилучшей является следующая стратегия: складываем костяшки в стопку, а затем сдвигаем верхнюю на максимально возможное расстояние. Очевидно, что это половина ее длины. Затем сдвигаем вторую сверху (вместе с первой). Очевидно, что ее удастся сдвинуть уже только на 1/3 длины и т.д. Очевидно, что такое формальное рассмотрение приводит к ряду $\frac{l}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}$, который при $N \to \infty$ расходится. Это означает, что можно сложить стенку какой угодно длины. На самом деле возникающая из-за погрешностей установки неустойчивость разрушает систему даже при сравнительно небольших N, значение которого грубо можно оценить как $\frac{l}{N} \cong d$, где d – погрешность при установке костяшки.

Понятно, что результат будет тем лучше, чем костяшки длиннее (т.к. тогда больше l, и, следовательно, при том же d N будет больше), а также “площе” и тяжелее (что уменьшает роль случайных вибраций стола). Кроме того, при большом длине “костяшки” и ее малой жесткости (если, например, использовать в качестве “костяшек” книги) может играть существенную роль изгиб “костяшки”.

Организаторам удалось добиться длины нависающей части стенки, немного (на 5%) превышающей длину одной костяшки.