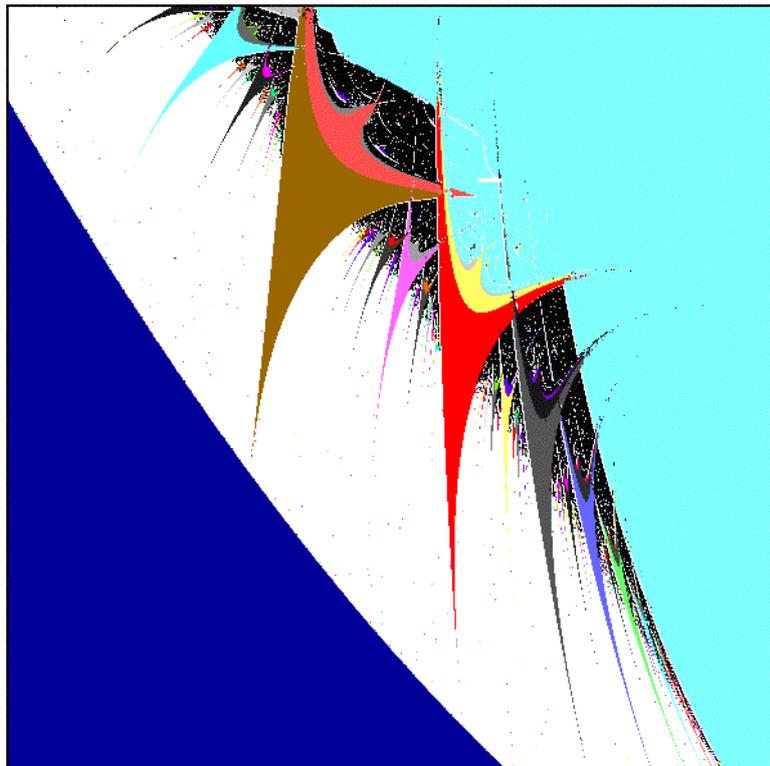


А.П.Кузнецов
Л.В.Тюрюкина

**ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И
БИФУРКАЦИИ**
(Задачи и примеры решений)



**А.П.Кузнецов
Л.В.Тюрюкина**

**ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И
БИФУРКАЦИИ
(Задачи и примеры решений)**

Саратов
Издательский центр «РАТА»
2008

УДК 517.9

К89

Кузнецов А.П., Тюрюкина Л.В.

Динамические системы и бифуркации (задачи и примеры решений) – Саратов: издательский центр «РАТА», 2008, 40 с.

ISBN 978-5-91659-019-7

Методическое пособие основано на опыте Факультета нелинейных процессов Саратовского госуниверситета. В сборнике представлено более 70 задач по курсам «Моделирование динамических систем» и «Динамические системы и бифуркации». Представлены как теоретические задачи, так и задачи, решаемые с помощью компьютера.

Рекомендуют к печати:

Базовая кафедра динамических систем Саратовского госуниверситета

д.ф-м.н., профессор Рыскин Н.М.

Оригинал-макет подготовлен авторами

© А.П. Кузнецов, Л.В. Тюрюкина, 2008

ISBN 978-5-91659-019-7

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее пособие представляет задачи для курсов «Динамические системы и бифуркации» и «Моделирование динамических систем» для студентов факультета нелинейных процессов Саратовского госуниверситета. Для студентов базовой кафедры динамических систем такой курс является основным, определяющим характер последующего учебного процесса.

Текстовые задачи дают примеры динамических систем, вводят в основы их теории, знакомят с отображениями и потоками, их взаимосвязью, а также основными бифуркациями. Эти задачи решаются и обсуждаются на семинарах. Мы рекомендуем студентам к концу курса иметь «финально» оформленные задачи в отдельной тетради, не ограничиваясь своими самостоятельными рабочими записями. Это будет очень полезным для цельного усвоения курса и отработки техники работы с динамическими системами и их бифуркациями.

Задачи компьютерного практикума предполагают самостоятельное программирование и исследование. В результате выполнения компьютерного практикума у каждого студента должен образоваться пакет программ по исследованию динамических систем, который используется в последующих курсах, при выполнении курсовых и дипломной работ. Поэтому, если самостоятельное программирование какой-то задачи вызвало трудности, к концу курса следует иметь в своем пользовании программу, которая подготовлена либо коллективно, либо другими студентами (по их разрешению).

Тест-вопросы позволяют быстро оценить знакомство с основными понятиями и методами. Мы рекомендуем выполнить этот тест самостоятельно, обращаясь при возникновении затруднений к лекционному материалу.

Для самостоятельной работы рекомендуем дополнительные задачи, для которых даны решения. Лучше всего самостоятельно попробовать решить эти задачи, а затем познакомиться с представленными решениями. Некоторые задачи этого раздела носят комбинированный характер, т.е. требуют не только теоретического рассмотрения, но и компьютерного моделирования. Комплект этих задач отвечает структуре курса, поэтому для удобства мы дали им заголовки, характеризующие соответствующую тему.

Авторы

Задачи

1. Найдите матрицу эволюции для гармонического осциллятора, позволяющую определить вектор-столбец, составленный из величин x и \dot{x} , в любой момент времени по его начальному значению. Вычислите определитель этой матрицы и покажите, что рассматриваемая система является консервативной.

2. Представьте уравнение линейного осциллятора с затуханием в «стандартной» форме, отвечающей определению динамической системы. Покажите, что рассматриваемая система является диссипативной, для чего вычислите дивергенцию соответствующего векторного поля на фазовой плоскости.

3. Одной из первых систем, для которой был обнаружен динамический хаос, являлась простая модель тепловой конвекции в атмосфере, исследованная Лоренцем (1963 г.):

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x), \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= xy - bz.\end{aligned}$$

Здесь σ , r , b — параметры. Установите значения параметров, при которых модель Лоренца является диссипативной.

4. Простейший генератор электромагнитных колебаний, содержащий электронную лампу, описывается уравнением ван-дер-Поля

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = 0.$$

Представьте это уравнение в «стандартной» форме. Укажите области в фазовом пространстве, для которых имеет место сжатие фазового объема. Что можно сказать об остальных областях?

5. Покажите, что у системы Реслера может существовать пара неподвижных точек (состояний равновесия). Найдите условие на параметры, при которых эта пара возникает.

6. Дискретное отображение $x_{n+1} = f(x_n)$ имеет неподвижную точку x^* такую, что $f'(x^*) \neq 0$. Покажите, что поведение последовательности $y_n = x_n - x^*$ в малой окрестности этой точки соответствует сходящейся геометрической прогрессии, если $|f'(x^*)| < 1$ и расходящейся при $|f'(x^*)| > 1$. Отметьте, что величина производной $\mu = f'(x)$, вычисленная в неподвижной точке, носит специальное название – мультипликатор.

7. Покажите, что отображение

$$x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2}$$

можно использовать для вычисления квадратного корня из числа a (такой способ применяли еще в древнем Вавилоне). Найдите первые пять членов последовательности x_n , порождаемой этим отображением при $a=2$. Величину x_0 положите равной единице. Проиллюстрируйте решение задачи с помощью итерационной диаграммы. Покажите, что неподвижная точка этого отображения устойчива. Можно ли использовать отображение

$$x_{n+1} = \frac{a}{x_n} ?$$

8. Покажите, что обобщенное отображение Эно

$$x_{n+1} = f(x_n) - by_n,$$

$$y_{n+1} = x_n$$

обратимо. Когда оно консервативно, а когда диссипативно?

9. Получите отображение для системы с импульсным воздействием вида

$$\dot{x} = \sum_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(t - nT).$$

(Получите аккуратно условие «сшивания» решений в момент действия импульса. Чем оно отличаются от ситуации, когда в левой части стоит вторая производная?) Охарактеризуйте полученное отображение.

10. Рассмотрите движение линейного диссипативного осциллятора под действием внешней периодической импульсной силы, амплитуда которой зависит от координаты осциллятора:

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \sum_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(t - nT).$$

В качестве физической реализации может выступать железный маятник между полюсами электромагнита. (В промежутке между импульсами используйте известное из линейной теории колебаний решение задачи о движении осциллятора с затуханием.) Охарактеризуйте полученное отображение.

11. Покажите, что система

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} = A + \varepsilon \sin x \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT),$$

приводится к двумерному отображению Заславского

$$x_{n+1} = x_n + \frac{\Omega}{2\pi} + \frac{K}{\Gamma} (1 - e^{-\Gamma}) \sin(2\pi x_n) + \frac{1 - e^{-\Gamma}}{\Gamma} y_n,$$

$$y_{n+1} = e^{-\Gamma} (y_n + \varepsilon \sin 2\pi x_n),$$

и установите смысл параметров и переменных в этом отображении. В консервативном случае оно называется отображением Чирикова или стандартным отображением. Как оно выглядит в этом случае?

12. В ряде работ по нелинейной динамике использовался следующий прием построения дискретных отображений. Пусть имеется осциллятор общего вида

$$\ddot{x} + g(\dot{x}, x) + f(x) = 0,$$

который в стандартной форме приводится к системе уравнений

$$\dot{x} = y,$$

$$\dot{y} = -g(y, x) - f(x).$$

Для численного решения этой системы можно использовать полуявную схему Эйлера

$$x_{n+1} = x_n + \varepsilon y_{n+1},$$

$$y_{n+1} = y_n - \varepsilon g(y_n, x_n) - \varepsilon f(x_n).$$

Здесь ε – параметр, дающий шаг интегрирования. Полученная в результате такой процедуры система представляет собой новое двумерное отображение, свойства которого зависят от дополнительного параметра ε . Оно демонстрирует динамику, гораздо более богатую, чем система-прототип, хотя и переходит в нее при $\varepsilon \rightarrow 0$.

а) Покажите, что для консервативного осциллятора в случае $g(y, x) = 0$ указанная процедура приводит к консервативному отображению.

б) Покажите, что отображение «прыгающего шарика» принадлежит к этому классу и получите для него уравнение осциллятора-прототипа.

13. Сделайте в отображении Заславского аккуратный предельный переход к случаю очень большой диссипации. Покажите, что получается точно такое же отображение окружности, как и в задаче о релаксационном генераторе.

14. Имеется бесконечная цепочка сопротивлений, показанная на рисунке 1. Получите дискретное отображение, позволяющее определить величину сопротивления R_{n+1} цепочки, составленной из $n+1$ звеньев, по величине сопротивления R_n цепочки, составленной из n звеньев. Найдите неподвижную точку R этого отображения и исследуйте ее устойчивость.

Проиллюстрируйте решение с помощью итерационной диаграммы. Сколько элементов должна содержать цепочка, чтобы ее сопротивление равнялось величине R с точностью до 1%? Как изменится ответ на этот вопрос, если крайнее правое сопротивление равно 100 Ом?

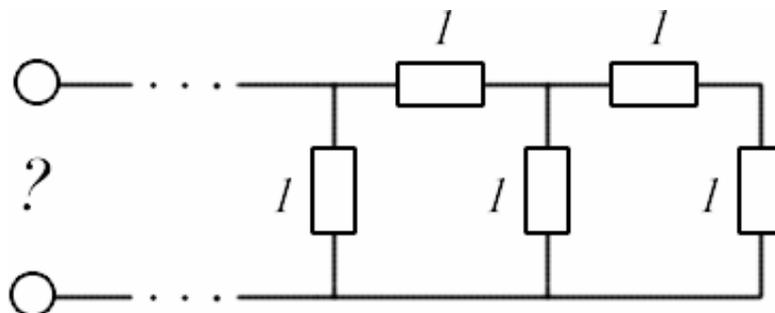


Рис.1

15. В работе Икеды с соавторами была рассмотрена оптическая система в виде кольцевого резонатора, частично заполненного средой с фазовой нелинейностью (рис. 2). Резонатор возбуждается лучом лазера через одно полупрозрачное зеркало, а выходной сигнал снимается через другое. Как показал Икеда, при некоторых условиях такая система может быть приближенно описана с помощью отображения $z_{n+1} = A + Bz_n \cdot \exp(i|z_n|^2)$. Здесь z - комплексная амплитуда света, A - параметр, пропорциональный сигналу лазера, B - параметр диссипации поля в среде. Найдите якобиан отображения, и укажите, когда оно является диссипативным, а когда консервативным.

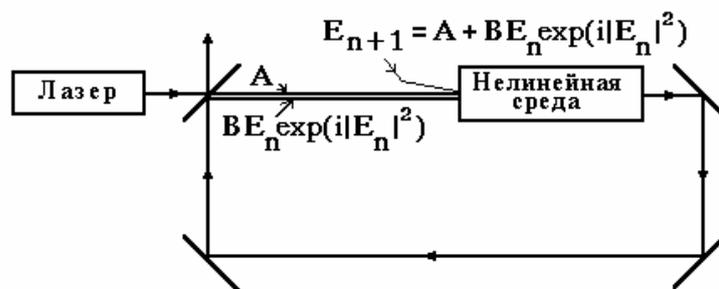
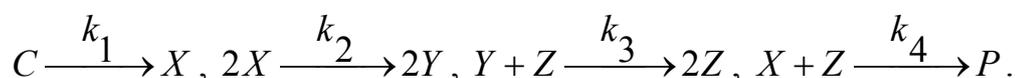


Рис.2.

16. Бриггсом и Раушером в 1973 г. была открыта реакция, названная йодными часами. В процессе этой реакции может периодически изменяться концентрация йода, а цвет раствора меняется с белого на синий, снова на белый и т.д. (Подробнее см. Д. Гарел, О. Гарел, «Колебательные химические реакции».) Схема реакции выглядит следующим образом:



Получите динамическую систему для переменных X, Y, Z , описывающую эту реакцию.

17. Для модели прыгающего шарика найдите условие, при котором шарик будет подпрыгивать после каждого удара на одинаковую высоту. (Вопрос об устойчивости этого решения пока обсуждать не будем.) Постройте аналитически диаграммы для случая периода 2 в соответствующем отображении.

18. Изобразите качественно пространственно-временную диаграмму для задачи о прыгающем шарике в случае, когда смещением плиты пренебречь нельзя. Покажите траектории, отвечающие неподвижной точки отображения.

19. Получите отображение для механической системы, являющейся моделью Улама ускорения Ферми (рис. 3). Все удары упругие, стенка колеблется по гармоническому закону. Смещением стенки пренебречь.

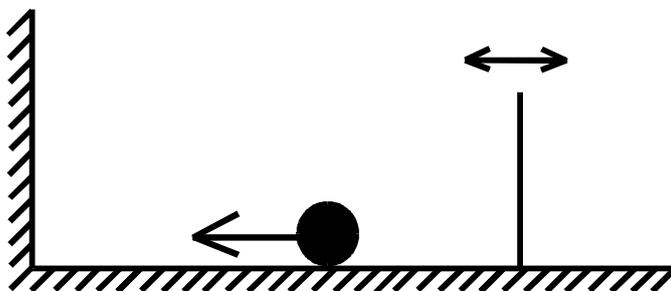


Рис.3.

20. Для отображения Улама изобразите пространственно-временную диаграмму, отвечающую неподвижной точке в отображении. Как она будет выглядеть, если период удвоится?

21. Получите диссипативное отображение Улама. Рассмотрите два случая: когда при ударе о вибрирующую стенку теряется доля скорости ε , а удар о неподвижную стенку упругий, и все удары упругие, но есть сопротивление среды, пропорциональное скорости шарика с коэффициентом γ .

22. Предлагается следующая классификационная схема построения эталонных модельных отображений:

- логистическое отображение $x_{n+1} = \lambda - x_n^2$,
- кубическое отображение $x_{n+1} = a + bx_n \pm x_n^3$,
- ...

Продолжите этот ряд.

23. Найдите в явном виде зависимость переменной от времени до порога бифуркации седло-узел (область $\lambda < 0$).

24. Найдите в явном виде зависимость переменной от времени до порога бифуркации вилки (область $\lambda < 0$).

25. Покажите, что в одномерной потоковой систем с нелинейной функцией вида $\lambda x - \sin x$ имеет место бифуркация вилка, и найдите порог этой бифуркации.

26. Изобразите бифуркацию седло-узел на плоскости, когда сливаются седло и неустойчивый узел.

27. Изобразите вариант бифуркации вилка, когда сливаются узел и два седла. Может ли узел быть устойчивым? Могут ли слиться три седла?

28. Найдите бифуркацию Андронова-Хопфа в следующей модификации уравнения ван-дер-Поля

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = a.$$

29. Найдите бифуркацию Андронова-Хопфа в задаче об устойчивости самолета в вертикальной плоскости

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= \rho - \cos \varphi, \\ \dot{\rho} &= 2\rho(\lambda - \mu\rho - \sin \varphi).\end{aligned}$$

30. Найдите пороговое значение параметра γ , отвечающее бифуркацию Андронова-Хопфа для системы, описывающей колебания в гликолизе

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 1 - xy^\gamma, \\ \dot{y} &= \alpha(xy^\gamma - y).\end{aligned}$$

31. Одна из популярных в популяционной биологии моделей «хищник-жертва» может быть представлена в виде

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha(x)x - xy, \\ \dot{y} &= xy - my.\end{aligned}$$

Если положить $\alpha = const$, то мы получим классическую модель Вольтерра. (Подробнее см. Ю.М. Свиржев, «Нелинейные диссипативные структуры и катастрофы в экологии», где рассмотрены и другие варианты такой системы.) Покажите, что если функция $\alpha(x)$, характеризующая мальтузианский рост «жертвы», имеет вид, показанный на рис. 4а, то в системе невозможна бифуркация Андронова-Хопфа, а если ее вид соответствует рис. 4б, то такая бифуркация возможна. Найдите порог бифуркации в случае $\alpha(x) = a + bx - x^2$.

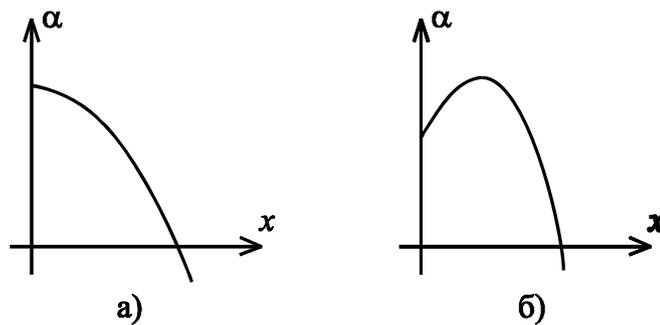


Рис.4.

32. Для модели Реслера следующего вида

$$\dot{x} = -(y + z),$$

$$\dot{y} = x + ay,$$

$$\dot{z} = bx + z(x - c),$$

найдите связь между параметрами, соответствующую бифуркации Андронова-Хопфа неподвижной точки $x=y=z=0$. (Такой вариант модели Реслера рассмотрен в книге Г. Николиса и И. Пригожина «Познание сложного».)

33. Покажите, что если бифуркация Андронова-Хопфа имеет общую точку с линией превращения узла в фокус, то в эту же точку приходит и линия бифуркации седло-узел.

34. Для задачи о динамике модели хищник-жертва из задачи 31 изобразите вместе линии бифуркации Андронова-Хопфа и седло-узел на плоскости параметров. Имеют ли они общую точку – точку Богданова-Такенса? Если да, найдите ее координаты.

35. Для релаксационного генератора, описываемого синус-отображением окружности $x_{n+1} = x_n + \Omega + k \sin 2\pi x_n \pmod{1}$, найдите границы области на плоскости параметров (Ω, k) , внутри которой существует неподвижная точка этого отображения. Найдите линию, отвечающую потере устойчивости этой точки и покажите ее на плоскости параметров.

36. Докажите эквивалентность двух форм логистического отображения

$$x_{n+1} = \lambda - x_n^2 \text{ и } x_{n+1} = rx_n(1 - x_n).$$

37. Изобразите зависимость мультипликатора μ устойчивого режима для логистического отображения $x_{n+1} = \lambda - x_n^2$ от параметра λ в области $\lambda < 1,25$. Укажите на этом графике точки, отвечающие касательной бифуркации, удвоениям периода и сверхустойчивым режимам.

38. Изобразите 2 и 4-циклы максимальной устойчивости логистического отображения $x_{n+1} = \lambda - x_n^2$ на итерационной диаграмме.

39. Получите уравнение относительно параметра λ , отвечающее 3-циклу максимальной устойчивости логистического отображения. Проверьте, что значение λ , приведенное в лекциях, удовлетворяет этому уравнению.

40. Оцените число итераций, необходимое для прохождения "коридора" ширины $\Delta x = 0,1$ для отображения $x_{n+1} = \lambda + x_n - x_n^2$ в случае $\lambda = -0,001$.

41. Найдите значения параметра, отвечающие касательной бифуркации и бифуркации удвоения периода для неподвижной точки отображения $x_{n+1} = \lambda - x_n^4$.

42. Получите уравнения, определяющие значения переменной x и бифуркационные значения параметра λ для касательной бифуркации неподвижных точек отображения $x_{n+1} = \lambda \cos x_n$. Дайте графическое решение уравнения для переменной x . Покажите, что существует множество таких бифуркаций. Приблизительно оцените соответствующие значения параметра λ . То же самое для бифуркации удвоения периода.

43. Покажите, что для отображения $x_{n+1} = \frac{\lambda x_n}{\sqrt{1+x_n^2}}$ имеет место бифуркация типа «вилка». Найдите бифуркационное значение параметра и изобразите итерационные диаграммы для ситуаций до и после бифуркации.

44. Для неподвижной точки кубического отображения $x_{n+1} = a - bx_n + x_n^3$ найдите линии касательной бифуркации на плоскости параметров a, b . Покажите, что они сходятся в точке сборки по закону $\frac{3}{2}$ и найдите ее координаты. Найдите линию удвоения периода и нанесите ее на плоскость параметров. Укажите число и характер устойчивости неподвижных точек на плоскости параметров. На полученный рисунок нанесите представленные в лекциях линии бифуркаций 2-циклов.

45. Для отображения из предыдущей задачи установите, как расположены на плоскости параметров линии, отвечающие отображению максимума в минимум и минимума в максимум. Укажите точку на плоскости параметров, отвечающую 2-циклу, опирающемуся одновременно на два квадратичных экстремума. Покажите, что вдоль найденных линий двукратно проитерированное отображение имеет экстремум четвертой степени.

46. Для отображения косинуса $x_{n+1} = \lambda \cos x_n + \varphi$, моделирующего нелинейный осциллятор с импульсным воздействием (дополнительная

задача 2) получите в параметрической форме уравнение для линий касательной бифуркации на плоскости параметров λ , φ . Найдите точку сборки, в которой сходятся эти линии. Считая, что переменная x и параметры λ , φ близки к значениям, отвечающим точкам сборки, покажите, что линии складок подходят к точке сборки по закону $\frac{3}{2}$.

47. Для отображения из предыдущей задачи найдите значения параметров, отвечающие сверхустойчивому 2-циклу, опирающемуся одновременно на максимум и минимум отображения и изобразите соответствующую итерационную диаграмму.

48. Изобразите качественно бифуркационные диаграммы, соответствующие двум представленным на рисунок 5 маршрутам на карте динамических режимов.

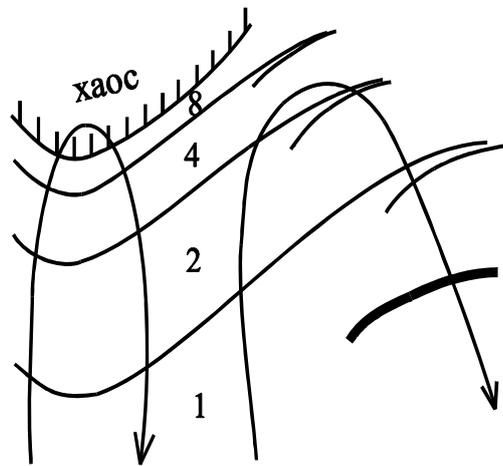


Рис.5.

49. В таблице представлены бифуркационные значения параметра, отвечающие удвоениям периода на базе неподвижной точки логистического отображения. Оцените по этим данным константы K и δ в законе Фейгенбаума.

n	λ_n
0	0.75
1	1.25
2	1.36809894
3	1.39404616
4	1.39963724
5	1.40082874
	...

50. Изобразите качественно динамику изображающей точки на фазовой плоскости двумерного отображения непосредственно в окрестности неподвижной точки в случаях, когда

а) оба мультипликатора μ_1 и μ_2 действительны и а) $\mu_1 < -1$, $\mu_2 < -1$; б) $\mu_1 > 1$, $\mu_2 < -1$.

б) мультипликаторы комплексные, причем модуль близок к единице, а фаза – к а) нулю; б) $\pi/2$; в) π .

51. Найдите диапазон значений параметра μ , в котором является устойчивой нетривиальная неподвижная точка отображения Гукенхеймера и Холмса

$$x_{n+1} = y_n,$$

$$y_{n+1} = \mu y_n (1 - x_n).$$

Определите фазовый угол θ (аргумент мультипликатора), отвечающий обращению якобиана отображения в единицу.

52. Найдите точки рождения 2-цикла и 4-цикла в системе Эно в консервативном случае.

53. Опишите эволюцию мультипликаторов отображения Эно на комплексной плоскости при увеличении λ в консервативном случае.

54. Рассмотрите два идентичных связанных одномерных отображения

$$x_{n+1} = f(x_n) + \varepsilon(y_n - x_n),$$

$$y_{n+1} = f(y_n) + \varepsilon(x_n - y_n).$$

Исследуйте симметричные режимы, т.е. такие, для которых $x=y$ и, соответственно, аттракторы определяются решениями для автономной системы. Покажите, что мультипликаторы неподвижной точки связанных систем даются выражениями $\mu_1 = f'(x)$ и $\mu_2 = \mu_1 - 2\varepsilon$. Исходя из этих результатов, найдите уравнения линий касательной бифуркации и бифуркации удвоения периода неподвижной точки на плоскости λ, ε в случае двух связанных логистических отображений, т.е. при $f(x) = \lambda - x^2$. Изобразите бифуркационные линии на плоскости параметров. Возможны ли точки бифуркаций коразмерности два, если да, то какие?

55. Для отображения прыгающего шарика

$$v_{n+1} = (1 - \varepsilon)v_n + K \sin \varphi_n,$$

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + v_{n+1} \pmod{2\pi}.$$

Найдите матрицу монодромии неподвижной точки, а также её след и якобиан как функции параметров. С её помощью найдите линию касательной бифуркации и бифуркации удвоения периода. Нанесите эти линии на плоскость параметров ε, K . Найдите точку удвоения периода в консервативной системе. Возможна ли бифуркация Неймарка-Сакера в рассматриваемой задаче?

56. Для универсального двумерного отображения с бифуркацией Неймарка-Сакера

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= Sx_n - y_n - (x_n^2 + y_n^2), \\y_{n+1} &= Jx_n - \frac{1}{5}(x_n^2 + y_n^2).\end{aligned}$$

Укажите на линии рождения инвариантной кривой, на плоскости параметров S, J точки, в которых расположены острия языков с числами вращения $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$.

57. Выпишите все числа вращения, отвечающие резонансному циклу периода 7. Изобразите качественно все соответствующие правила обхода элементов цикла.

58. Есть ли бифуркация Неймарка-Сакера в отображении Заславского?

59. Найдите линию бифуркации Неймарка-Сакера на базе симметричного 2-цикла для двух связанных логистических отображений из задачи 54. Для этого, используя свойства якобиана произведения матриц, найдите якобиан матрицы монодромии такого цикла и приравняйте его единице. Изобразите найденную линию на плоскости параметров. (*Указание. Используйте выражения для произведения и суммы элементов 2-цикла логистического отображения.*)

60. Изготовьте бумажную модель неустойчивого многообразия цикла удвоенного периода в трехмерном пространстве.

Задачи компьютерного практикума

1. Эволюция облака изображающих точек в фазовом пространстве потоковых систем. Задайте облако изображающих точек в фазовом пространстве в виде прямоугольной «решетки» из набора точек. Напишите программу, позволяющую наблюдать за эволюцией этого облака во времени для представленных ниже потоковых систем. Проследите за эволюцией облака. Ответьте на вопросы: консервативна или диссипативна система? Есть ли в ней аттракторы? Какого типа эти аттракторы? Проведите компьютерное моделирование для различных значений параметров. Изменяется ли при этом характер эволюции облака? Что происходит с аттракторами?

Динамические системы для исследования:

- Уравнение ван-дер-Поля

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = 0.$$

- Уравнение Релея

$$\ddot{x} - (\lambda - \dot{x}^2)\dot{x} + x = 0.$$

- Уравнение автогенератора с жестким возбуждением

$$\ddot{x} - (\lambda + kx^2 - x^4)\dot{x} + x = 0.$$

- Брюсселятор

$$\dot{x} = A - Bx + x^2y - x,$$

$$\dot{y} = Bx - x^2y.$$

- Система Ресслера

$$\dot{x} = -(y + z),$$

$$\dot{y} = x + ay,$$

$$\dot{z} = b + z(x - c).$$

- Система Чуа

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha(y - h(x)), \\ \dot{y} = x - y + z, \\ \dot{z} = -\beta y, \end{cases} \quad \text{где } h(x) = \begin{cases} \frac{2x+3}{7}, & x \leq 1 \\ -\frac{x}{7}, & -1 < x < 1 \\ \frac{2x-3}{7}, & x \geq 1 \end{cases}$$

2. Однопараметрическое исследование одномерных отображений.

Постройте бифуркационное дерево, дающее зависимость установившихся значений переменной x от управляющего параметра λ . Напишите программу, позволяет в заданной точке дерева строить соответствующую итерационную диаграмму (аттрактор). Пронаблюдайте возможные режимы – периодические и хаотические. Продемонстрируйте возможность окон периодических режимов внутри хаотической области. Что происходит с соответствующими циклами (например, периода 3) с ростом управляющего параметра?

Динамические системы для исследования:

- Логистическое отображение $x_{n+1} = \lambda - x_n^2$
- «Отображение косинуса» $x_{n+1} = \lambda \cos x_n$
- Кубическое отображение $x_{n+1} = \lambda(x_n - x_n^3)$

3. Двухпараметрическое исследование одномерных отображений

Постройте карты динамических режимов для следующих отображений:

- Кубическое отображение вида $x_{n+1} = a - bx_n + x_n^3$.
- Кубическое отображение вида $x_{n+1} = a + bx_n - x_n^3$.

Сопоставьте результат компьютерного моделирования с бифуркационным анализом этих отображений, выполненным в лекциях. Линии каких бифуркаций коразмерности один можно обнаружить на вашей карте? Видны ли точки сборки, если нет, то почему? Укажите ситуации типа «crossroad area» и «spring area».

Создайте дополнительную программу, которая строит итерационные диаграммы в задаваемых вами точках карты. С помощью этой программы проведите следующее исследование одного из этих отображений:

- а) выберите маршрут, пересекающий несколько линий удвоения, и наблюдайте каскад удвоений периода на итерационной диаграмме,
- б) получите циклы с небольшими периодами, например 3 или 5, в островках устойчивости в области хаоса,
- в) наблюдайте хаотические режимы.

4. Простейшие бифуркации потоков.

4а. Бифуркация седло-узел. Для нелинейного осциллятора с потенциалом, заданным кубическим полиномом

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial x} = 0,$$

где $U(x) = ax + \frac{x^3}{3}$, постройте характерные фазовые портреты на плоскости (x, \dot{x}) до бифуркации седло-узел, в точке бифуркации и за ней.

4б. Бифуркация Андронова-Хопфа. Для осциллятора ван-дер-Поля $\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = 0$ постройте характерные фазовые портреты до точки бифуркации Андронова-Хопфа и за ней. Получите фазовый портрет аттрактора и реализации $x(t)$ при разных положительных значениях λ . Пронаблюдайте переход к релаксационным колебаниям.

4в. Бифуркация Богданова-Такенса. Исследуйте систему с бифуркацией Богданова-Такенса. Напишите программу, строящую фазовые портреты в выбранных мышью точках на плоскости параметров. Проведите компьютерные эксперименты, иллюстрирующие динамику системы вблизи линий и точек бифуркаций, а также внутри характерных областей на плоскости параметров. По результатам компьютерного моделирования нанесите (хотя бы примерно) на плоскость параметров линию, отвечающую петле сепаратрисы.

Предварительно проведите аналитический анализ бифуркаций.

Динамические системы для исследования:

- Уравнение типа ван-дер-Поля с нелинейностью, характерной для осциллятора с катастрофой складки

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + a + (x + 1)^2 = 0,$$

- Осциллятор Богданова-Такенса

$$\ddot{x} - (\mu - x)\dot{x} + a - x^2 = 0,$$

5. Двухпараметрическое исследование двумерных отображений с удвоениями периода. Постройте карту динамических режимов двумерного отображения. Сопоставьте результат компьютерного моделирования с бифуркационным анализом, выполненным в лекциях и при решении задач. Идентифицируйте бифуркационные линии коразмерности один и точки коразмерности два. Укажите ситуации типа «crossroad area». «Просмотрите» увеличенные фрагменты карты, внутри которых можно

наблюдать интересную динамику. Пронаблюдайте эволюцию аттракторов при вариации параметров, в частности, каскады удвоений периода. Постарайтесь найти аттракторы, отвечающие фейгенбаумовским точкам на пороге хаоса. Пронаблюдайте характерные хаотические аттракторы. Просмотрите увеличенные фрагменты хаотических аттракторов, пронаблюдайте их фрактальную структуру.

Динамические системы для исследования:

- Отображение Эно

$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2 + by_n,$$

$$y_{n+1} = x_n.$$

- Шарик на вибрирующем столе

$$v_{n+1} = (1 - \varepsilon)v_n + K \sin \varphi_n,$$

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + v_{n+1} \pmod{2\pi}$$

- Отображение Холмса

$$x_{n+1} = a - bx_n + x_n^3 - cy_n,$$

$$y_{n+1} = x_n.$$

- Отображение Икеды

$$z_{n+1} = A + Bz_n \cdot \exp(i|z_n|^2), \text{ где } z - \text{ комплексная величина}$$

6. Квазипериодические движения, синхронизация и бифуркация Неймарка-Сакера. Получите карты динамических режимов для представленных ниже систем. Идентифицируйте на картах линию бифуркации Неймарка-Сакера и языки синхронизации. Постройте портреты аттракторов в окрестности какого-либо языка синхронизации. Варьируя параметры, пронаблюдайте инвариантную кривую и цикл, отвечающий синхронизации. Определите число вращения, соответствующее этому циклу. Идентифицируйте точки бифуркации коразмерности два, характерные для двумерных отображений, если они имеются в вашей системе.

Динамические системы для исследования.

- Универсальное двумерное отображение

$$x_{n+1} = Sx_n - y_n - (x_n^2 + y_n^2),$$

$$y_{n+1} = Jy_n - \frac{1}{5}(x_n^2 + y_n^2).$$

- Два неидентичных логистических отображения с линейной связью

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= \lambda_1 - x_n^2 + \varepsilon(y_n - x_n), \\y_{n+1} &= \lambda_2 - y_n^2 + \varepsilon(x_n - y_n)\end{aligned}$$

для $\varepsilon = 0,4$.

- Отображение Богданова

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + y_{n+1}, \\y_{n+1} &= y_n + \alpha y_n + kx_n(x_n - 1) + \beta x_n y_n\end{aligned}$$

для $\beta = -1$.

7. Численный бифуркационный анализ. С использованием программы *Content* найдите линии основных бифуркаций для системы из предыдущей задачи. Сравните полученную картину с картой динамических режимов. Программа *Content* доступна в Интернете по адресу <http://www.math.uu.nl/people/kuznet/CONTENT/>

В о п р о с ы – т е с т ы

1. Нарисуйте качественно зависимость сигнала генератора пилообразных колебаний с модулированным по гармоническому закону уровню срыва, и укажите на графике дискретные значения переменной.
2. Нарисуйте качественно диаграмму время – вертикальная координата для шарика на вибрирующем столе в режиме, когда для отображения реализуется 2-цикл.
3. Нарисуйте итерационную диаграмму логистического отображения, показывающую цикл периода 2.
4. Укажите значение мультипликатора отображения $x_{n+1} = \lambda x_n \cos x_n$ в неподвижной точке в начале координат
5. Напишите формулу отображения Эно.
6. Напишите формулу кубического отображения
7. Нарисуйте качественно структуру crossroad area.
8. Изобразите качественно возможные типы портретов аттракторов двумерных отображений.
9. Изобразите качественно картину языков Арнольда вдоль линии бифуркации Неймарка-Сакера.
10. Изобразите треугольник устойчивости для двумерного отображения на плоскости след – якобиан и укажите на рисунке характерные бифуркации коразмерности один и два.
11. Напишите уравнение ван-дер-Поля и представьте его в стандартной форме.
12. Изобразите области с различным типом неподвижных точек (устойчивых и неустойчивых) на плоскости след – якобиан матрицы линеаризации двумерной системы.
13. Выпишите условия бифуркации Андронова-Хопфа в двумерной динамической системе.
14. Выпишите условия бифуркации Богданова-Такенса в двумерной динамической системе.
15. Выпишите условия бифуркации Андронова-Хопфа в трехмерной динамической системе.

Дополнительные задачи

1. **Бифуркации одномерного отображения.** Найдите неподвижные точки и их бифуркации для отображения

$$x_{n+1} = \frac{\lambda x_n}{1 + x_n^2}. \quad (1)$$

Постройте соответствующую бифуркационную диаграмму.

2. **Построение и анализ отображений.** Постройте отображение, описывающее осциллятор Дуффинга с импульсным возбуждением:

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + x + \beta x^3 = \sum_{-\infty}^{\infty} C \delta(t - nT). \quad (2)$$

В промежутке между импульсами используйте решение для автономного осциллятора Дуффинга методом медленно меняющихся амплитуд. В качестве переменных дискретного отображения используйте координату и скорость осциллятора сразу после очередного импульса. Покажите, что полученное отображение приводится к отображению Икеды. Постройте карту динамических режимов и характерные фазовые портреты и обсудите их особенности. Получите в случае сильно диссипативного осциллятора приближенное одномерное отображение и обсудите, как оно соотносится с исходным отображением Икеды.

3. **Бифуркация седло-узел.** Рассмотрите нелинейный осциллятор следующего вида:

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + a - x^2 = 0. \quad (3)$$

Сопоставьте этой системе соответствующую потенциальную функцию, и с ее помощью дайте физическую интерпретацию возможности неподвижных точек, их устойчивости и бифуркаций. Представьте уравнения осциллятора в стандартном для динамической системы второго порядка виде, и дайте анализ неподвижных точек и их бифуркаций на основе исследования следа и якобиана линеаризованной матрицы.

4. **Бифуркация Андронова-Хопфа.** Найдите бифуркацию Андронова-Хопфа в следующей модификации уравнения ван-дер-Поля

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} - x + \beta x^3 = 0. \quad (4)$$

Исследуйте все возможные неподвижные точки.

5. **Бифуркация Богданова-Такенса.** Найдите бифуркации седло-узел, Андронова-Хопфа и их общую точку (бифуркацию Богданова-Такенса) для автоколебательного осциллятора Богданова-Такенса:

$$\ddot{x} - (\mu - x)\dot{x} + a - x^2 = 0. \quad (5)$$

Изобразите бифуркационные линии на плоскости параметров (μ, a) и постройте с помощью компьютера фазовые портреты в характерных точках $\mu = -\sqrt{a}$.

6. Бифуркационный анализ дискретного осциллятора Богданова-Такенса. Если применить процедуру дискретизации, описанную в задаче 12, к осциллятору Богданова-Такенса, то можно придти к следующему отображению:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + \varepsilon y_{n+1}, \\y_{n+1} &= y_n + \varepsilon[(\mu - x_n)y_n - a + x_n^2].\end{aligned}\tag{6}$$

Проведите полный анализ бифуркаций устойчивой неподвижной точки этого отображения. Постройте карту динамических режимов этого отображения и укажите на ней характерные линии и точки бифуркаций. Сопоставьте свойства этого отображения и исходной потоковой системы-прототипа.

Решения дополнительных задач

1. Рассмотрим отображение (1). Неподвижные точки этого отображения находятся из условия

$$x^* = f(x^*), \quad \text{где} \quad f(x) = \frac{\lambda x}{1+x^2}.$$

Тогда, подставляя в отображение (1) $x_{n+1} = x_n = x^*$, получим

$$x^* = \frac{\lambda x^*}{1+(x^*)^2}.$$

Решим это уравнение. Легко показать, что оно имеет три решения:

$$x_0 = 0 \quad \text{и} \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda-1}. \quad (7)$$

Причем последнее решение существует при $\lambda \geq 1$. Таким образом, одномерное отображение (1) имеет три неподвижные точки. Поэтому можно сделать вывод, что в нем имеет место бифуркация «вилки», которая состоит в том, что устойчивая неподвижная точка теряет устойчивость, а вместо нее рождаются две устойчивые неподвижные точки. Эта бифуркация отвечает условию, что мультипликатор отображения μ , вычисленный в неподвижной точке, равен $+1$. Помимо бифуркации вилки, для неподвижных точек рассматриваемого отображения, может иметь место еще одна бифуркация – бифуркация удвоения периода, отвечающая тому, что мультипликатор $\mu = -1$.

Найдем эти бифуркации. Мультипликатор одномерного отображения вычисляется по следующей формуле:

$$\mu = \frac{dx_{n+1}}{dx_n}.$$

Тогда для отображения (1) получаем:

$$\mu = \frac{\lambda(1-(x^*)^2)}{(1+(x^*)^2)^2}, \quad (8)$$

где x^* - неподвижная точка отображения. Теперь в выражение (8) надо подставить значения неподвижных точек (7) и найти условия на параметр λ , при которых мультипликатор равен либо $+1$, либо -1 .

Рассмотрим, сначала, неподвижную точку $x = 0$. Из (8) следует, что

$$\mu(x=0) = \lambda.$$

Отсюда следует, что неподвижная точка $x = 0$ испытывает бифуркацию «вилки» при $\lambda = 1$ и бифуркацию удвоения периода при $\lambda = -1$.

Теперь рассмотрим неподвижные точки $x_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda-1}$. Их можно исследовать одновременно, так как в выражение (8) x^* входит в квадрате. Подставив указанные выше значения неподвижных точек в выражение (8), получим:

$$\mu = \frac{2-\lambda}{\lambda}.$$

Отсюда следует, что мультипликатор неподвижных точек $x_{1,2}$ так же равен +1 при $\lambda = 1$. А вот бифуркация удвоения периода для неподвижных точек $x_{1,2}$ не наблюдается, так как нет таких значений λ , при которых бы выполнялось условие $\mu = -1$.

Бифуркационная диаграмма отображения (1) будет иметь следующий вид.

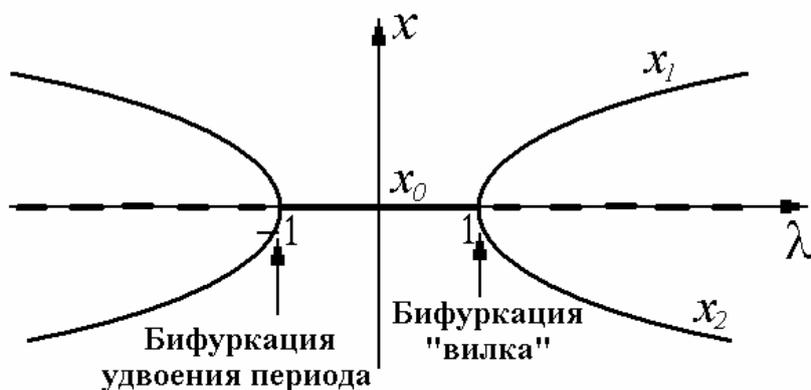


Рис.1. Бифуркационная диаграмма одномерного отображения (1). Сплошная кривая отвечает устойчивым неподвижным точкам отображения, пунктирная — неустойчивым.

2. Представим координату осциллятора (2) в виде:

$$x = \frac{a}{2} e^{it} + \frac{a^*}{2} e^{-it}. \quad (9)$$

Здесь $a(t)$ - комплексная медленно меняющаяся амплитуда. Поскольку мы ввели, фактически, две новые функции $a(t)$ и $a^*(t)$, то на них можно наложить дополнительное условие, которое традиционно имеет вид

$$\dot{a}e^{it} + \dot{a}^*e^{-it} = 0. \quad (10)$$

Подставим теперь соотношения (9) и (10) в исходное уравнение Дуффинга (2) и выделим в полученном уравнении лишь члены, пропорциональные e^{it} . Остальные на их фоне являются быстро осциллирующими и их можно отбросить. Далее умножим обе части

получившегося уравнения на $e^{-i t}$ и приведем подобные слагаемые. В результате приходим к известному «укороченному» уравнению для осциллятора Дуффинга:

$$\dot{a} = -\frac{\gamma}{2}a + \frac{3}{8}i\beta|a|^2 a. \quad (11)$$

Введем далее действительную амплитуду $R(t)$ и фазу $\varphi(t)$ с помощью соотношения

$$a(t) = R(t)e^{i\varphi(t)}.$$

Подставим выражение для $a(t)$ в «укороченное» уравнение (11). Тогда, после разделения действительной и мнимой частей, для действительных амплитуды и фазы получим:

$$\dot{R} = -\frac{\gamma}{2}R,$$

$$\dot{\varphi} = \frac{3}{8}\beta R^2.$$

Эти уравнения допускают аналитическое решение вида:

$$\begin{aligned} R(t) &= R_n e^{-\gamma t/2}, \\ \varphi(t) &= \frac{3}{8}\beta R_n^2 \frac{1 - e^{-\gamma t}}{\gamma} + \varphi_n, \end{aligned} \quad (12)$$

где R_n и φ_n - начальные амплитуда и фаза сразу после n -го импульса.

Из соотношений (9, 10) можно найти выражения, задающие зависимости координаты $x(t)$ и скорости $v(t)$ осциллятора от времени. Они имеют следующий вид:

$$x(t) = R(t) \cos[t + \varphi(t)],$$

$$v(t) = -R(t) \sin[t + \varphi(t)].$$

Тогда через интервал времени T , отвечающий моментам «стробоскопических сечений», имеем

$$x_{n+1} = R(T) \cos[T + \varphi(T)],$$

$$v_{n+1} = -R(T) \sin[T + \varphi(T)] + C.$$

Здесь x_{n+1} и v_{n+1} координата и скорость осциллятора сразу после $(n+1)$ -го импульса. В последних выражениях мы учли, что сразу после истечения интервала времени, длительностью T , осциллятор испытывает импульсный толчок, в результате которого координата не изменяется, а

скорость получает добавку, равную амплитуде импульса C . (Такое поведение координаты и скорости осциллятора связано с импульсным характером внешнего воздействия.) Используя полученные решения для амплитуды и фазы (12), получаем:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= R_n e^{-\gamma T/2} \cos\left(T + \frac{3}{8}\beta R_n^2 \frac{1-e^{-\gamma T}}{\gamma} + \varphi_n\right), \\ v_{n+1} &= -R_n e^{-\gamma T/2} \sin\left(T + \frac{3}{8}\beta R_n^2 \frac{1-e^{-\gamma T}}{\gamma} + \varphi_n\right) + C. \end{aligned} \quad (13)$$

Полученные выражения удобно записать в комплексной форме, введя новую комплексную переменную z :

$$z = (ix + v) \sqrt{\frac{3}{8}\beta \frac{1-e^{-\gamma T}}{\gamma}}.$$

Тогда, используя начальные условия, которые получаются, если в формулах (13) $T=0$,

$$\begin{aligned} x_n &= R_n \cos \varphi_n, \\ v_n &= -R_n \sin \varphi_n, \end{aligned}$$

для комплексной переменной z получим искомое двумерное отображение вида

$$z_{n+1} = A + Bz_n \exp(i(|z_n|^2 + T)), \quad (14)$$

где параметры A , B определяются через параметры исходной системы следующим образом:

$$A = C \sqrt{\frac{3\beta}{8} \cdot \frac{1-e^{-\gamma T}}{\gamma}}, \quad B = e^{-\gamma T/2}.$$

Заметим, что точно такое же отображение было получено Икедой для оптического кольцевого резонатора со средой с фазовой нелинейностью (задача 15).

Обсудим теперь динамику осциллятора Дуффинга, задаваемую отображением Икеды. Прежде всего, рассмотрим свободный осциллятор. Для этого в отображении (14) следует положить $A=0$ и тогда оно примет вид:

$$z_{n+1} = Bz_n \exp(i(|z_n|^2 + T)).$$

Умножим это выражение на комплексно сопряженное и положим $\xi = |z|^2$. Тогда получаем отображение

$$\xi_{n+1} = B\xi_n$$

По определению параметр $0 < B < 1$. Таким образом, мы получаем затухающую по закону геометрической прогрессии последовательность. Итак, свободный осциллятор Дуффинга демонстрирует простое поведение – затухающие колебания. Нелинейность системы проявляется лишь в динамике фазы осциллятора (см. выражение для $\varphi(t)$ в формуле 12).

Гораздо более сложное поведение демонстрирует возбуждаемый импульсами осциллятор. На рис.2 показана карта динамических режимов отображения Икеды на плоскости параметров безразмерная амплитуда A – параметр диссипации B для случая $T = 2\pi$ (период воздействия точно равен собственному периоду колебаний линейного осциллятора) и ее выделенный фрагмент.

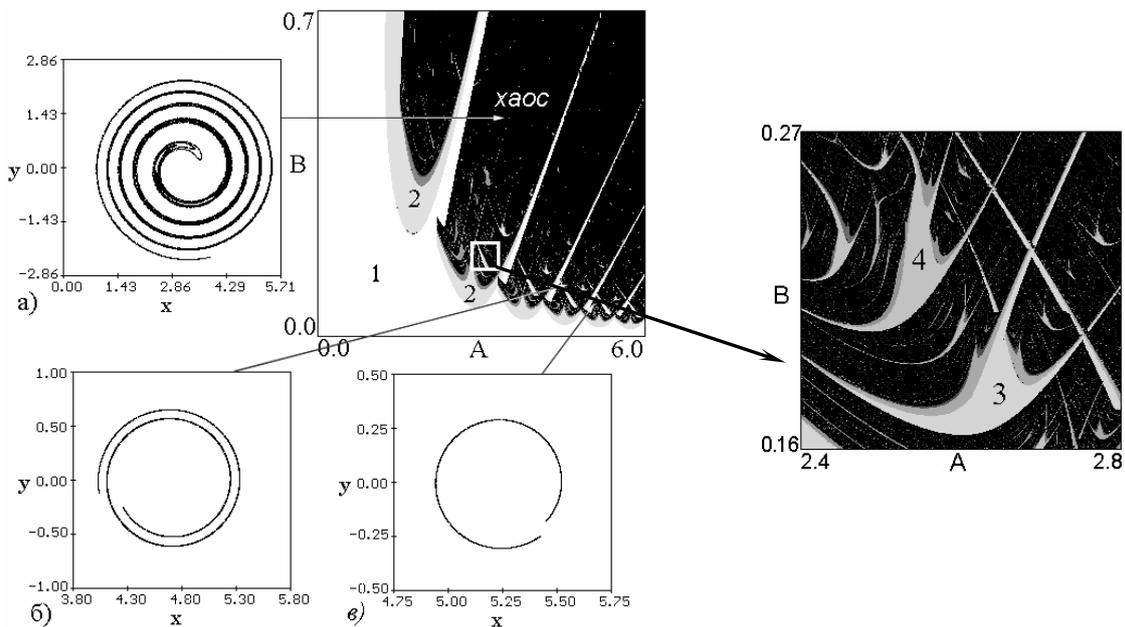


Рис.2. Карта динамических режимов отображения Икеды, ее выделенный фрагмент и портреты аттракторов в избранных точках плоскости параметров (A, B): а) $A=3,24, B=0,445$; б) $A=4,7, B=0,126$; в) $A=5,24, B=0,056$.

Из рисунка видно, что система демонстрирует удвоения периода и характерные структуры типа «crossroad area». Можно наблюдать целую систему таких структур на базе неподвижной точки, периодически повторяющихся с ростом параметра A , отвечающего за амплитуду внешнего воздействия.

На рис.2 так же показано несколько характерных фазовых портретов, построенных для значений параметров, взятых из области, где рассматриваемое отображение демонстрирует хаотическое поведение. Аттракторы имеют вид спирали, формируя фрактальную структуру в «поперечном» направлении. Можно отметить также, что с ростом амплитуды воздействия порогу возникновения хаоса отвечают все

меньшие значения параметра $B = e^{-\gamma T/2}$, а значит все большей диссипации γ . При этом «спиральная» структура аттрактора становится все менее выраженной, и он представляет собой, фактически, тонкую линию – одномерный объект. Это позволяет дать важную иллюстрацию, когда двумерная система может быть приближенно описана одномерным отображением. В нашем случае оно может быть построено аналитически.

Получим соответствующее одномерное отображение в явном виде. Представим комплексную переменную z следующим образом:

$$z = A(1 + B\tilde{z}).$$

Подставим это выражение в левую и правую части отображения (14) и разрешим его относительно переменной \tilde{z}_{n+1} . Тогда получим:

$$\tilde{z}_{n+1} = (1 + B\tilde{z}_n) \exp[i(\varphi + \lambda \operatorname{Re} \tilde{z}_n + \frac{1}{2} \lambda B |\tilde{z}_n|^2)]. \quad (15)$$

Для удобства в выражении (15) введены новые параметры, которые связаны с параметрами исходного двумерного отображения (14) следующим образом:

$$\lambda = 2A^2B, \quad \varphi = A^2 + T. \quad (16)$$

Будем считать параметр B малым и пренебрежем соответствующими членами в выражении (15), оставив только слагаемые первого порядка малости. Тогда для действительной части $\xi_n = \operatorname{Re} \tilde{z}_n$ из (15) следует одномерное отображение

$$\xi_{n+1} = \cos(\lambda \xi_n + \varphi),$$

которое заменой $x = \lambda \xi + \varphi$ приводится к более удобному виду - «отображению косинуса»

$$x_{n+1} = \lambda \cos x_n + \varphi. \quad (17)$$

Заметим, что переход к одномерному отображению привел к уменьшению числа существенных параметров с трех до двух.

Отображение (17), как мы уже отмечали, получено, как одномерная аппроксимация системы Икеды и описывается очень простым выражением. Не удивительно, что оно представляет интерес и само по себе.

Карта динамических режимов «отображения косинуса» на плоскости управляющих параметров (λ, φ) показана на рис.3. Заметим, что, так как косинус периодическая функция, то плоскость параметров одномерного отображения будет иметь периодическую структуру. На рис. 3 представлен ее фрагмент, соответствующий одному периоду, т.е. изменению параметра φ от 0 до 2π . На карте располагаются аналогичные «объекты», что и на

картах двумерного отображения, а именно, точки сборки с отходящими от них линиями касательных бифуркаций, линии удвоений периода, области существования устойчивых циклов различных периодов и хаоса. На картах так же хорошо видны структуры «crossroad area». Полученные картинки говорят о типичности характерного вида карт и двухпараметрических бифуркаций.

При этом рис.3а позволяет понять устройство плоскости параметров отображения Икеды. Действительно, благодаря периодичности косинуса и соотношениям (16), элементарная «ячейка», показанная на рис.3б с границами $\varphi = 0$, $\varphi = 2\pi$ и $\lambda = 3$ трансформируется в систему криволинейных ячеек на плоскости (B, A) как показано на рис.3а.

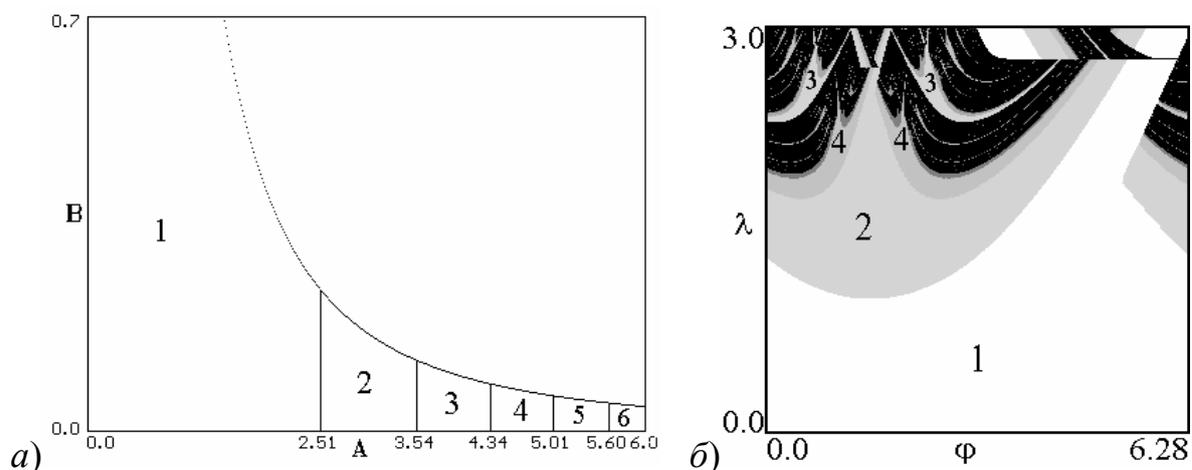


Рис.3. а) Устройство плоскости параметров отображения Икеды. б) Карта динамических режимов «отображения косинуса».

3. Вводя потенциал $U(x)$, уравнение исследуемого осциллятора (3) можно записать в виде

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \frac{\partial U(x)}{\partial x} = 0,$$

где потенциал отвечает кубическому полиному

$$U(x) = ax - \frac{x^3}{3}. \quad (18)$$

Эта потенциальная функция характеризуется наличием максимума и минимума при $a > 0$ (рис.4в). Соответственно, в системе возможны устойчивая и неустойчивая неподвижные точки. Их легко находим из условия экстремума потенциала:

$$\frac{\partial U(x)}{\partial x} = a - x_0^2 = 0.$$

Тогда получаем, что неподвижные точки отображения (3) имеют следующие координаты: $x_0 = \pm\sqrt{a}$.

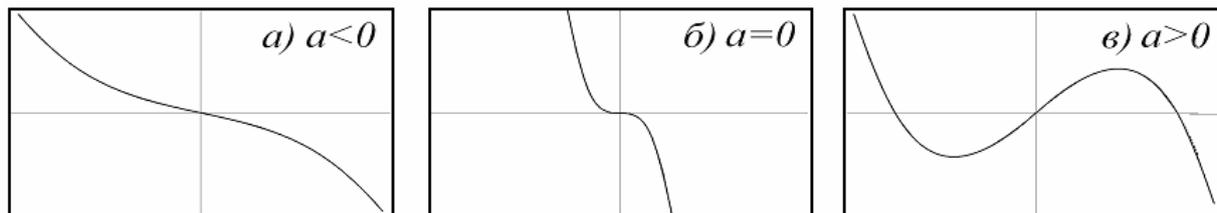


Рис.4. Вид потенциальной функции (18) до порога бифуркации (а), в точке бифуркации (б) и за ней (в)

Из вида потенциала (рис.4) легко понять, что точка $x_0 = \sqrt{a}$ соответствует потенциальному максимуму и поэтому неустойчива, а точка $x_0 = -\sqrt{a}$ соответствует минимуму, и поэтому устойчива. При $a = 0$ неподвижные точки сливаются (рис.4б) и исчезают (рис.4а).

Проведем теперь формальное исследование устойчивости неподвижных точек и их бифуркаций, которое подтвердит наши соображения. Представим уравнение осциллятора в стандартном для динамической системе виде:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\gamma y - a + x^2. \end{aligned} \quad (19)$$

Приравняв нулю производные по времени, получаем выражение для нахождения координат неподвижных точек:

$$\begin{aligned} y &= 0, \\ \gamma y + a - x^2 &= 0. \end{aligned}$$

Откуда получаем:

$$x_0 = \pm\sqrt{a} \text{ и } y = 0.$$

Для анализа устойчивости полученных неподвижных точек запишем для рассматриваемого осциллятора (19) матрицу линеаризации:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2x_0 & -\gamma \end{pmatrix}.$$

Теперь находим след и якобиан этой матрицы:

$$S = -\gamma \text{ и } J = -2x_0. \quad (20)$$

Анализ типа неподвижной точки можно провести, используя плоскость след-якобиан матрицы M (рис.5). Тип неподвижной точки будет

определяются тем, в какую область этой плоскости попадает точка, заданная координатами $S = -\gamma$ и $J = -2x_0$.

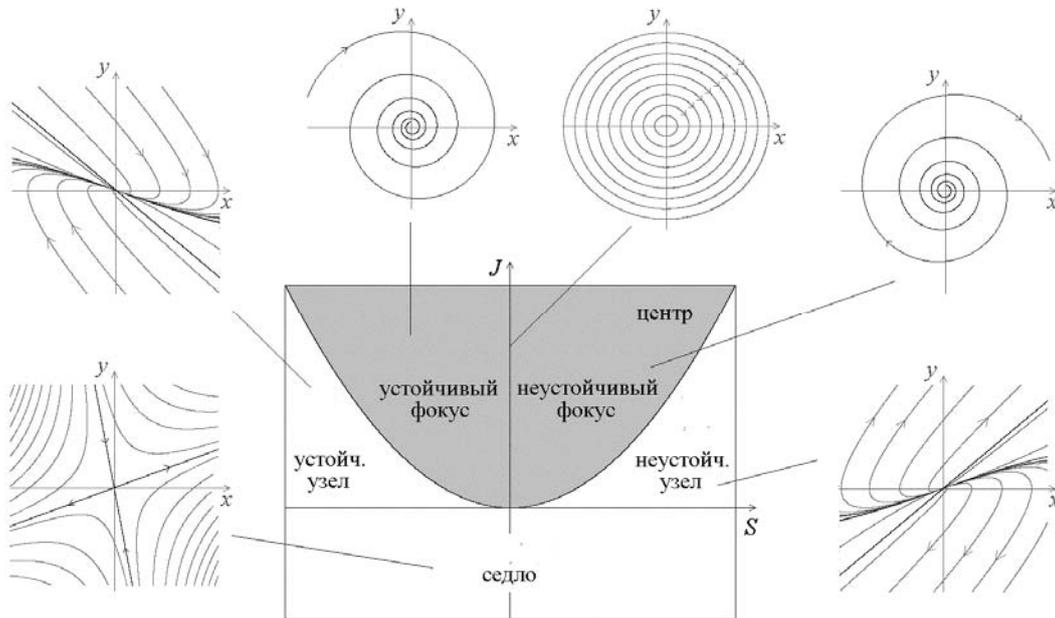


Рис.5. Различные типы неподвижных точек на плоскости след S - якобиан J матрицы линеаризации. Граница между узлами и фокусами дается уравнением $J = S^2/4$.

Таким образом, для того, что бы определить тип неподвижной точки, надо в выражения для следа и якобиана матрицы M подставить ее координаты в выражения (20).

Для первой неподвижной точки ($x_0 = +\sqrt{a}$ и $y = 0$) имеем $J = -2\sqrt{a}$ и $S = -\gamma$. Таким образом, якобиан для этой точки всегда отрицателен, и в соответствии с рис.5, это седло.

Для второй неподвижной точки ($x_0 = -\sqrt{a}$ и $y = 0$) имеем $J = 2\sqrt{a}$ и $S = -\gamma < 0$. Таким образом, в соответствии с рис.5, эта точка является устойчивой. Причем при $J < S^2/4$ это узел, а при противоположном условии – фокус. В нашем случае точка будет устойчивым узлом при выполнении условия

$$\sqrt{a} < \gamma^2/8.$$

При этом при $a=0$ этот устойчивый узел сливается с седлом (неустойчивая неподвижная точка), и происходит бифуркаций седло-узел. Ее формальным критерием является равенство нулю якобиана матрицы M . Тогда приравняв нулю значение якобиана для неподвижной точки (в данном случае не важно какой) получим $a=0$. Это и есть условие седло-узловой бифуркации

4. Перепишем уравнение (4) в стандартной форме:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= (\lambda - x^2)y + x - \beta x^3.\end{aligned}\tag{21}$$

Найдем неподвижные точки рассматриваемой системы. Для этого приравняем нулю производные по времени в системе (21) и решим полученные уравнения. Тогда получаем, что система (21) имеет три неподвижных точки:

$$(y = 0, x = 0) \text{ и } (y = 0, x = \pm \frac{1}{\sqrt{\beta}}).$$

Выпишем теперь матрицу линеаризации системы (21). Она имеет вид:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 3\beta x^2 & \lambda - x^2 \end{pmatrix}.$$

Соответственно, след и якобиан этой матрицы будут

$$\begin{aligned}S &= \lambda - x^2, \\ J &= -1 + 3\beta x^2.\end{aligned}\tag{22}$$

Известно, что условие для нахождения бифуркации Андронова-Хопфа имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}S &= 0, \\ J &> 0.\end{aligned}\tag{23}$$

Таким образом, для того, что бы ответить на вопрос, для каких неподвижных точек рассматриваемой системы наблюдается бифуркация Андронова – Хопфа и найти условие, при которых она происходит, надо подставить координаты неподвижных точек в выражения (22) и проверить их на выполнение условий (23).

Начнем с первой неподвижной точки $(y = 0, x = 0)$. Согласно формулам (22) след и якобиан для этой неподвижной точки будут:

$$\begin{aligned}S &= \lambda, \\ J &= -1.\end{aligned}$$

Поскольку якобиан отрицательный, то условие бифуркации Андронова-Хопфа выполнено быть не может. Соответственно для этой неподвижной точки бифуркация Андронова-Хопфа не наблюдается.

Теперь рассмотрим две оставшиеся неподвижные точки $(y = 0, x = \pm \frac{1}{\sqrt{\beta}})$. Для них получаем

$$S = \lambda - \frac{1}{\beta},$$

$$J = 2.$$

Из полученных равенств следует, что условие $J > 0$ выполняется всегда. Следовательно, надо проверить выполнение условия $S = 0$. Приравняв нулю след, находим, что для неподвижных точек $(y = 0, x = \pm \frac{1}{\sqrt{\beta}})$

бифуркация Андронова-Хопфа происходит при выполнении условия:

$$\lambda = \frac{1}{\beta}.$$

5. Уравнение осциллятора (5) может быть переписано в следующем виде

$$\ddot{x} - (\mu - x)\dot{x} + \frac{\partial U(x)}{\partial x} = 0, \quad (24)$$

где потенциал задан кубическим полиномом, показанным на рис.6. Таким образом, в системе должна иметь место бифуркация седло-узел, отвечающая слиянию максимума и минимума потенциала. С другой стороны, при $\mu > 0$ осциллятор характеризуется отрицательным трением, т.е. имеются предпосылки для возникновения автоколебаний и бифуркации Андронова-Хопфа.

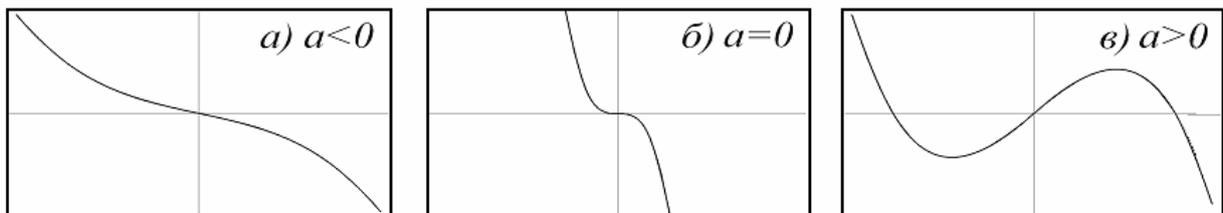


Рис.6. Вид потенциала $U(x)$, входящего в уравнение (24).

Проведем соответствующий бифуркационный анализ. Перепишем уравнение осциллятора Богданова-Такенса (5) в стандартной форме:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= (\mu - x)y - a + x^2. \end{aligned} \quad (25)$$

и запишем для него матрицу линеаризации:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -y + 2x & \mu - x \end{pmatrix}.$$

Неподвижные точки этой системы находятся их условия равенства нулю производных от времени динамических переменных x и y . Тогда согласно

уравнениям (25) осциллятор Богданова-Такенса имеет две неподвижные точки

$$x = \pm\sqrt{a}, \quad y = 0.$$

Первая из них (отвечающая знаку +), в соответствии с рис.6в, неустойчива, а вторая – устойчива. Для последней тогда имеем

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2\sqrt{a} & \sqrt{a} + \mu \end{pmatrix}.$$

Находим далее след и якобиан этой матрицы. Они равны:

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{a} + \mu, \\ J &= 2\sqrt{a}. \end{aligned} \tag{26}$$

Условием бифуркации седло-узел является обращение в ноль якобиана матрицы M . Из выражений (26) следует, что это условие выполняется при

$$a = 0.$$

Условия на бифуркацию Андронова-Хопфа имеют следующий вид

$$\begin{aligned} S &= 0, \\ J &> 0. \end{aligned}$$

Тогда из (26) следует, что бифуркация Андронова – Хопфа имеет место при

$$\mu = -\sqrt{a}. \tag{27}$$

При этом условие положительности якобиана выполняется при любых значениях параметра a .

Теперь найдем общую точку обеих бифуркаций. Для этого положим в выражении (27) a равным нулю. Тогда получим, что $\mu = 0$. Таким образом, общая точка двух бифуркаций, отвечающая бифуркации Богданова-Такенса, на плоскости параметров имеет координаты $\mu = a = 0$. В этой точке обращаются в ноль одновременно и след, и якобиан линеаризованной матрицы, что может служить удобным приемом при определении точек Богданова-Такенса в конкретных системах.

На рис.7 показаны линии основных бифуркаций коразмерности один в окрестности точки бифуркации Богданова-Такенса и фазовые портреты системы (5) в избранных точках. Можно видеть характерные для точки Богданова-Такенса метаморфозы фазового портрета системы. Отметим, что наряду с описанными локальными бифуркациями для такой системы оказывается типичной и нелокальная бифуркация влипания предельного цикла в петлю сепаратрисы.

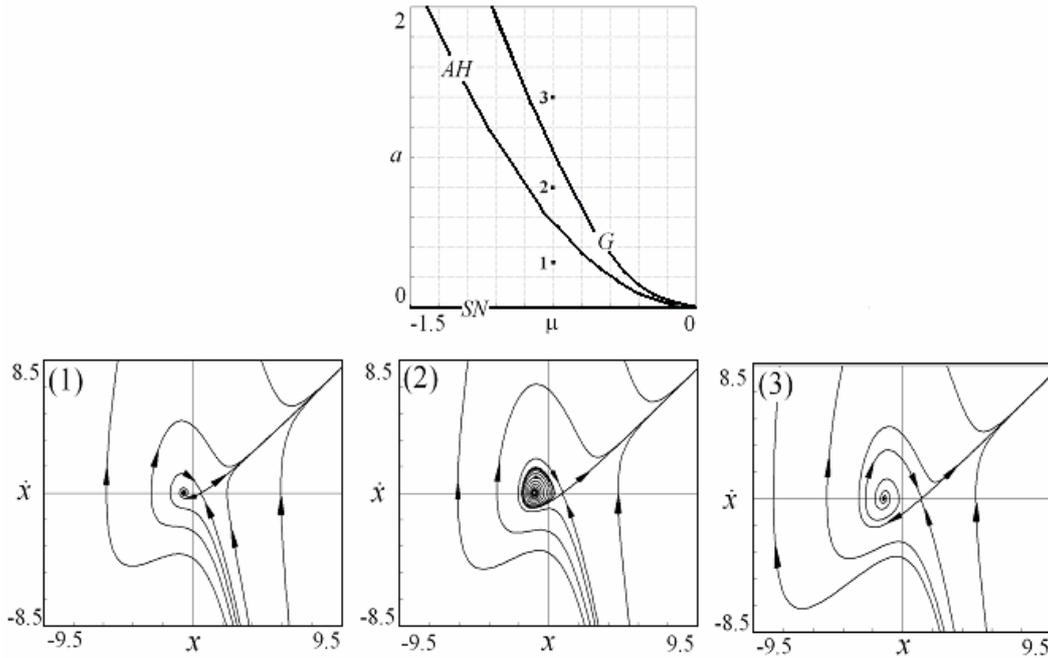


Рис.7. Бифуркационные линии осциллятора в окрестности точки Богданова-Тakensа ВТ на плоскости параметров (μ, a) и фазовые портреты в характерных точках, АН – линия бифуркации Андронова-Хопфа, SN – линия бифуркации седло-узел, G – линия влипания предельного цикла в петлю сепаратрисы

6. Исследуем свойства отображения (6). Во-первых, найдем неподвижные точки этого отображения. Они находятся из условия

$$x_{n+1} = x_n \text{ и } y_{n+1} = y_n.$$

Тогда из формул (6) следует что

$$x = x + \varepsilon y$$

и

$$y = y + \varepsilon[(\mu - x)y - a + x^2].$$

Решим последние уравнения и получим, что рассматриваемое отображение имеет две неподвижные точки

$$x = \pm\sqrt{a} \text{ и } y = 0.$$

При этом одна из них будет устойчивой, а вторая неустойчивой. (Это будет показано далее при анализе матрицы возмущений.)

Выпишем теперь матрицу возмущений (матрицу монодромии) для отображения (6). Она имеет вид:

$$M = \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon^2(-y + 2x), & \varepsilon + \varepsilon^2(\mu - x) \\ \varepsilon(-y + 2x), & 1 + \varepsilon(\mu - x) \end{pmatrix}.$$

Далее запишем след и якобиан этой матрицы

$$\begin{aligned} S &= 2 + \varepsilon(\mu - x) + \varepsilon^2(2x - y), \\ J &= 1 + \varepsilon(\mu - x). \end{aligned} \quad (28)$$

Для определения устойчивости неподвижных точек двумерного отображения и нахождения их бифуркаций необходимо знать собственные числа матрицы монодромии (мультипликаторы). Из свойств матрицы 2×2 известно, что собственные числа подчиняются соотношению

$$\mu^2 - S\mu + J = 0.$$

Откуда следует, что

$$\mu_{1,2} = \frac{S}{2} \pm \sqrt{\frac{S^2}{4} - J}. \quad (28)$$

(Замечание: не надо путать μ в формуле (28) с параметром μ в отображении.) Таким образом, зная след и якобиан, легко определить тип устойчивости неподвижных точек и найти условия всех локальных бифуркаций.

Начнем с определения устойчивости неподвижных точек отображения. Подставим в выражения (28) их координаты и получим, что для неподвижной точки $(x = \sqrt{a}, y = 0)$ след и якобиан есть

$$S = 2 + \varepsilon(-\sqrt{a} + \mu) + 2\varepsilon^2\sqrt{a} \quad \text{и} \quad J = 1 + \varepsilon(-\sqrt{a} + \mu),$$

а для неподвижной точки $(x = -\sqrt{a}, y = 0)$ –

$$S = 2 + \varepsilon(\sqrt{a} + \mu) - 2\varepsilon^2\sqrt{a} \quad \text{и} \quad J = 1 + \varepsilon(\sqrt{a} + \mu). \quad (29)$$

Теперь подставим выражения для следа и якобиана матрицы монодромии, вычисленные в неподвижных точках, в формулу (28) и получим что неподвижная точка $(x = \sqrt{a}, y = 0)$ является неустойчивой, а неподвижная точка $(x = -\sqrt{a}, y = 0)$ – устойчивой.

Анализ бифуркаций двумерного отображения удобно выполнить, используя плоскость параметров след – якобиан матрицы монодромии. Устройство этой плоскости в общем случае показано на рис.8. На нем представлен треугольник устойчивости неподвижной точки двумерного отображения, границы которого, в общем случае, заданы линиями $1 - S + J = 0$ ($\mu = +1$), $1 + S + J = 0$ ($\mu = -1$) и $J = 1$ ($|\mu| = 1$). Таким образом, для устойчивой неподвижной точки двумерного отображения имеют место три бифуркации коразмерности 1 на границах треугольника устойчивости: касательная бифуркация ($\mu = +1$), бифуркация удвоения периода ($\mu = -1$) и бифуркация Неймарка-Сакера ($|\mu| = 1$). А так же три бифуркации

коразмерности 2 в вершинах треугольника: $\mu_1 = -1$ и $\mu_2 = -1$ (резонанс 1:2), $\mu_1 = +1$ и $\mu_2 = +1$ (резонанс 1:1) и $\mu_1 = -1$ и $\mu_2 = +1$ (fold-flip бифуркация).

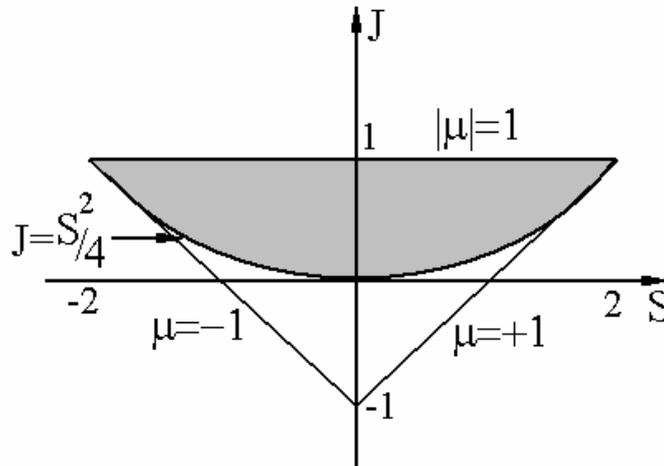


Рис.8. Треугольник устойчивости неподвижной точки двумерного отображения на плоскости след S - якобиан J матрицы монодромии. Серым цветом обозначена область, к которой мультипликаторы неподвижной точки принимают комплексные значения.

Исследуем перечисленные выше бифуркации более подробно. Начнем с бифуркации коразмерности 1.

Бифуркация Неймарка-Сакера. Это бифуркация рождения инвариантной кривой. Она имеет место при пересечении верхней границы треугольника устойчивости. Условие для нахождения этой бифуркации есть $J = 1$. Тогда в соответствии с формулами (29) получаем, что бифуркация Неймарка-Сакера происходит при $\mu = -\sqrt{a}$. Таким образом, условие бифуркации Неймарка-Сакера не зависит от параметра дискретизации ε .

Касательная бифуркаций. Эта бифуркация имеет место, когда хотя бы один из мультипликаторов неподвижной точки становится равным плюс единице. Соответственно она имеет место при выходе из треугольника устойчивости через его правую границу. Условие для нахождения этой бифуркации имеет вид

$$1 - S + J = 0.$$

Подставив в это уравнение выражения для следа и якобиана (29) получим, что касательная бифуркация имеет место при $a = 0$. Это полностью соответствует бифуркации седло-узел в осцилляторе-прототипе.

Бифуркация удвоения периода. Этой бифуркации отвечает значение одного из мультипликаторов, равное минус единице. Соответственно она имеет место при выходе из треугольника устойчивости через его правую границу. Условие для нахождения этой бифуркации имеет вид:

$$1 + S + J = 0.$$

Тогда используя (29) получаем

$$2 + \varepsilon(\sqrt{a} + \mu) - \varepsilon^2 \sqrt{a} = 0.$$

Теперь рассмотрим бифуркации коразмерности 2.

Резонанс 1:2. Этой бифуркации отвечают следующие значения мультипликаторов $\mu_1 = -1$ и $\mu_2 = -1$ (левая верхняя вершина треугольника устойчивости). Или другими словами это общая точка линий бифуркации удвоения периода и бифуркации Неймарка-Сакера. Т.е. она имеет место при одновременном выполнении условий

$$1 + S + J = 0 \text{ и } J = 1.$$

Тогда используя соотношения (29) получаем

$$\mu = -\frac{2}{\varepsilon^2}, \quad a = \frac{4}{\varepsilon^4}.$$

Бифуркация fold-flip. Этой бифуркации отвечают следующие значения мультипликаторов $\mu_1 = -1$ и $\mu_2 = +1$. Т.е. она происходит в точке пересечения линий касательной бифуркации и бифуркации удвоения периода (нижняя вершина треугольника). Для ее нахождения надо решить следующую систему

$$1 - S + J = 0 \text{ и } 1 + S + J = 0.$$

Тогда используя выражения (29) получаем, что она имеет место при

$$\mu = -\frac{2}{\varepsilon}, \quad a = 0.$$

Резонанс 1:1. Эти бифуркации отвечают значения мультипликаторов $\mu_1 = +1$ и $\mu_2 = +1$ (правая верхняя вершина треугольника). Т.е. это точка пересечения линий касательной бифуркации и бифуркации Неймарка-Сакера. Она имеет место при совместном выполнении условий

$$1 - S + J = 0 \text{ и } J = 1.$$

Тогда используя (29) получаем, что эта бифуркация происходит в точке

$$\mu = 0, \quad a = 0.$$

На рис. 8 представлена полученная численно карта динамических режимов отображения (6) на плоскости параметров (a, μ) и ее увеличенные фрагменты. Параметр дискретизации $\varepsilon = 0,8$. На ней можно видеть найденные выше аналитически линии и точки бифуркаций. Это линия бифуркации Неймарка-Сакера с примыкающей к ней системой языков Арнольда в правой части карты. В левой части карты располагаются линии

бифуркаций удвоения периода на базе неподвижной точки. Так на карте хорошо различимы области режимов периода 1, 2 и 4. На этом рисунке так же наблюдаются точки бифуркации коразмерности два: fold-flip и резонанс 1:1. Точка резонанса 1:2 располагается очень «высоко» и при выбранных масштабах в поле зрения не попадает.

Рис.8 можно сравнить с бифуркационными линиями системы-прототипа на рис.7. Отметим, что между иллюстрациями наблюдается хорошее соответствие, что говорит о достаточно высокой работоспособности двумерного отображения как аппроксимации осциллятора Богданова-Такенса. Так линия бифуркации Неймарка-Сакера точно совпадает с линией бифуркации Андронова-Хопфа, а касательной бифуркации – бифуркацией седло-узел. Точка резонанса 1:1 совпадает с точкой Богданова-Такенса. Однако есть и ряд отличий. Главное из них состоит в том, что для отображения (6) наблюдаются квазипериодические режимы и языки Арнольда, опирающихся основаниями на линию Неймарка-Сакера. Для исходной потоковой системы в этой области наблюдался предельный цикл. Кроме того в нем наблюдается серия бифуркаций удвоения периода и бифуркации коразмерности 2: fold-flip и резонанс 1:2, которых нет в системе-прототипе. Однако, при уменьшении параметра дискретизации область квазипериодических режимов «вытесняет» языки синхронизации, а точки бифуркаций fold-flip и резонанс 1:2 при этом уходят на бесконечность. Как следствие при $\varepsilon \rightarrow 0$ происходит переход к картине, характерной для системы-прототипа.

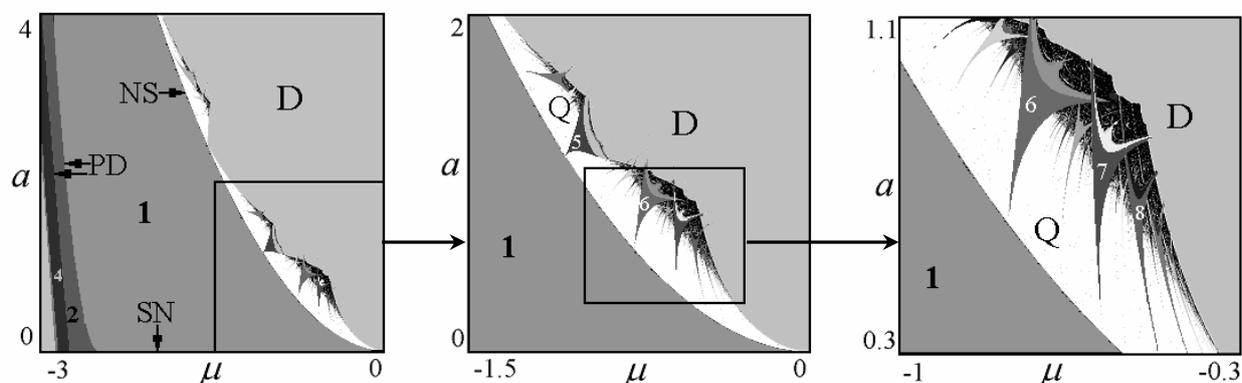


Рис.8. Карта динамических режимов двумерного отображения (6) и ее увеличенные фрагменты. Буквами обозначены: NS – бифуркация Неймарка-Сакера, SN – касательная бифуркация, PD – линии удвоения периода, Q – область квазипериодических режимов, D – область убегания фазовых траекторий на бесконечность. Цифрами обозначены периоды циклов.

Рекомендуемая литература

1. А.П.Кузнецов, С.П.Кузнецов, Рыскин Н.М. Нелинейные колебания. М., Физматлит, 2002, 292 с.
2. Кузнецов С.П. Динамический хаос. М., Физматлит, 2006, 356 с.
3. Г.Шустер. Детерминированный хаос. М., Мир, 1988.
4. Гукенхеймер Дж., Холмс П. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. М., Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2002, 559 с.
5. В.С. Анищенко. Сложные колебания в простых системах. М., Наука, 1990, 312с.

Содержание

Предисловие	3
Задачи	4
Задачи компьютерного практикума	15
Вопросы-тесты	20
Дополнительные задачи	21
Решения дополнительных задач	23
Рекомендуемая литература	40