

Глава 10

Гиперболическая динамика в амплитудных уравнениях

В этой главе, следуя работе [Isaeva et al., 2011], рассматривается подход к построению осуществимых на практике динамических систем с гиперболическими хаотическими аттракторами, функционирование которых состоит в последовательной передаче возбуждения между попеременно активными парами автогенераторов. При этом угловая переменная, которая определяет соотношение мгновенных амплитуд для двух осцилляторов из каждой пары, на каждом очередном цикле процесса подвергается преобразованию в соответствии с растягивающим отображением окружности.

10.1. Амплитудная динамика в терминах угловой переменной, подчиняющейся отображению типа Бернулли

Рассмотрим пару автоколебательных элементов, у которых потери энергии компенсируются из общего источника, и предположим, что уравнения для комплексных амплитуд $a_{1,2}$ имеют вид

$$\begin{aligned}\dot{a}_1 &= (1 - |a_1|^2 - |a_2|^2)a_1, \\ \dot{a}_2 &= (1 - |a_1|^2 - |a_2|^2)a_2.\end{aligned}\quad (10.1)$$

Насыщение амплитуд определяется, очевидно, условием $|a_1|^2 + |a_2|^2 = 1$. Имеющееся распределение энергии между осцилляторами можно охарактеризовать угловой переменной θ , определенной так, что амплитуды удовлетворяют требуемому условию: $|a_1|^2 = \cos^2 \theta$, $|a_2|^2 = \sin^2 \theta$.

Пусть теперь имеем две пары осцилляторов, каждая из которых описывается уравнениями типа (10.1) с периодической модуляцией параметра, производимой внешним воздействием, так, что возбуждение одной и другой пары чередуются на последовательных полупериодах модуляции. Кроме того, дополним уравнения членами, вводящими связь между осцилляторами, относящимися к одной и другой попеременно активирующимся подсистемам. Конкретный вид этих дополнительных членов выбирается так, чтобы передача возбуждения на каждом периоде модуляции сопровождалась преобразованием угловой переменной θ в соответствии с растягивающим отображением окружности. (Здесь и далее мы рассматриваем преобразование утроения.) В результате динамика амплитуд в системе будет соответствовать аттрактору типа Смейла – Вильямса в стробоскопическом отображении.

Рассмотрим модельные уравнения, записанные для комплексных амплитуд в следующей форме:

$$\begin{aligned}\dot{a}_1 &= \frac{1}{2} [A \cos(2\pi t/T) - |a_1|^2 - |a_2|^2] a_1 + \frac{1}{2} \varepsilon b_1, \\ \dot{a}_2 &= \frac{1}{2} [A \cos(2\pi t/T) - |a_1|^2 - |a_2|^2] a_2 + \frac{1}{2} \varepsilon b_2, \\ \dot{b}_1 &= \frac{1}{2} [-A \cos(2\pi t/T) - |b_1|^2 - |b_2|^2] b_1 + \frac{1}{2} \varepsilon a_1 (|a_1|^2 - 3|a_2|^2), \\ \dot{b}_2 &= \frac{1}{2} [-A \cos(2\pi t/T) - |b_1|^2 - |b_2|^2] b_2 + \frac{1}{2} \varepsilon a_2 (3|a_1|^2 - |a_2|^2).\end{aligned}\quad (10.2)$$

Здесь $a_{1,2}$ и $b_{1,2}$ комплексные переменные, относящиеся к двум подсистемам, каждая из которых представляет собой пару осцилляторов, восполняющих потери энергии от источника, отдельного для одной и другой подсистемы. Благодаря противофазной модуляции параметра, управляющего автоколебаниями в подсистемах a и b , они становятся активными попеременно. Амплитуда модуляции характеризуется параметром A , а величина T задает период

модуляции. Члены, пропорциональные константе ϵ , отвечают за связь парно взаимодействующих осцилляторов из разных подсистем; их конкретная форма выбрана с учетом желаемого режима функционирования, как объяснено ниже.

Предположим, что на полупериоде активности первой пары осцилляторов ($A \cos 2\pi t / T > 0$) величины $a_{1,2}$ характеризуются приблизительно постоянными во времени амплитудами, соответствующими некоторой угловой координате θ : $a_1 \sim \cos \theta$, $a_2 \sim \sin \theta$. В начале стадии активности второй пары ($A \cos 2\pi t / T < 0$), возбуждение колебаний стимулируется воздействием, описываемым членами связи в третьем и четвертом уравнениях (10.2). Используя известные тригонометрические тождества, можно видеть, что

$$\begin{aligned} (|a_1|^2 - 3|a_2|^2)a_1 &\sim (\cos^2 \theta - 3\sin^2 \theta)\cos \theta = \cos 3\theta, \\ (3|a_1|^2 - |a_2|^2)a_2 &\sim (3\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)\sin \theta = \sin 3\theta. \end{aligned} \quad (10.3)$$

Следовательно, соотношение амплитуд для комплексных переменных $b_{1,2}$ будет определяться утроенной угловой переменной 3θ . Далее, когда подойдет к концу стадия активности второй пары, возбуждение передается снова первой паре. В соответствии с видом членов связи в первом и втором уравнениях (10.2), это происходит без изменения величины θ . Таким образом, на полном периоде модуляции эта переменная претерпевает преобразование утроения: $\theta_{n+1} \approx 3\theta_n$.

Заметим, что уравнения (10.2) инвариантны по отношению к двум фазовым сдвигам, т.е. по отношению к заменам переменных $a_1, b_1 \rightarrow a_1 e^{i\phi_1}, b_1 e^{i\phi_1}$ и $a_2, b_2 \rightarrow a_2 e^{i\phi_2}, b_2 e^{i\phi_2}$, где ϕ_1 и ϕ_2 произвольные постоянные. Мы можем ограничиться описанием исключительно амплитудной динамики модели, используя уравнения в действительных переменных

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 &= \frac{1}{2} [A \cos(2\pi t / T) - a_1^2 - a_2^2] a_1 + \frac{1}{2} \epsilon b_1, \\ \dot{a}_2 &= \frac{1}{2} [A \cos(2\pi t / T) - a_1^2 - a_2^2] a_2 + \frac{1}{2} \epsilon b_2, \\ \dot{b}_1 &= \frac{1}{2} [-A \cos(2\pi t / T) - b_1^2 - b_2^2] b_1 + \frac{1}{2} \epsilon a_1 (a_1^2 - 3a_2^2), \\ \dot{b}_2 &= \frac{1}{2} [-A \cos(2\pi t / T) - b_1^2 - b_2^2] b_2 + \frac{1}{2} \epsilon a_2 (3a_1^2 - a_2^2). \end{aligned} \quad (10.4)$$

(Здесь принимается, что переменные $a_{1,2}$ и $b_{1,2}$ могут быть иметь любой знак, так что истинные амплитуды осцилляторов отвечают их абсолютным величинам.)

Вместо рассмотрения динамики в непрерывном времени можно обратиться к описанию в дискретном времени с привлечением стробоскопиче-

ского отображения Пуанкаре. В нашем случае отображение $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{T}(\mathbf{x}_n)$ оперирует с векторами $\mathbf{x}_n = \{a_1, a_2, b_1, b_2\}_{t=nT}$. Хотя аналитически вывести его не удастся, отображение можно реализовать в вычислениях путем решения дифференциальных уравнений на периоде T . Применительно к исходным уравнениям (10.2) отображение восьмимерное (учитывая, что переменные $a_{1,2}$ и $b_{1,2}$ комплексные), но для уравнений, записанных для амплитуд (10.4), оно четырехмерное.

В обсуждаемом режиме работы, согласно приведенной аргументации, можно определить угловую переменную, претерпевающую утроения на последовательных итерациях стробоскопического отображения. Из-за сжатия фазового объема по остальным направлениям четырехмерного пространства состояний отображения Пуанкаре в модели (10.4), аттрактор этого отображения будет представлять собой разновидность соленоида Смейла – Вильямса, построение которого отвечает утроению числа витков на каждом следующем шаге конструкции. Это будет однородно гиперболический аттрактор, вложенный в пространство состояний четырехмерного отображения Пуанкаре с одномерным неустойчивым многообразием и трехмерным устойчивым многообразием принадлежащих ему орбит.

Для иллюстрации функционирования модели в соответствии с приведенным описанием обратимся к результатам вычислений на компьютере.

На рис.10.1 показаны зависимости от времени действительных амплитуд, полученные при численном решении уравнений (10.4) при значениях параметров $T=10$, $A=3$, $\varepsilon=0.06$. Как можно видеть, наблюдается попеременная активность первой и второй пар осцилляторов. Как показано ниже, трансформация угловой переменной, отвечающей за распределение амплитуд в каждой паре осцилляторов, за период модуляции соответствует отображению типа Бернулли.

На рис.10.2 показан портрет аттрактора в сечении Пуанкаре в проекции на плоскость переменных, относящихся к одной из двух попеременно возбуждающихся подсистем, и диаграммы, иллюстрирующие преобразование угловой переменной, которая характеризует распределение амплитуд между составляющими подсистему осцилляторами, на последовательных периодах модуляции. Аттрактор действительно выглядит как проекция соленоида Смейла – Вильямса, демонстрируя тонкую канторову структуру волокон. Угловая переменная вычислялась в последовательные моменты времени $t_n = nT$, как $\theta_n = \arg(a_1(nT) + ib_1(nT))$. Как можно убедиться, для циклической координаты θ имеет место отображение окружности, отвечающее утроению переменной: один обход окружности для прообраза отвечает трехкратному обходу для образа.

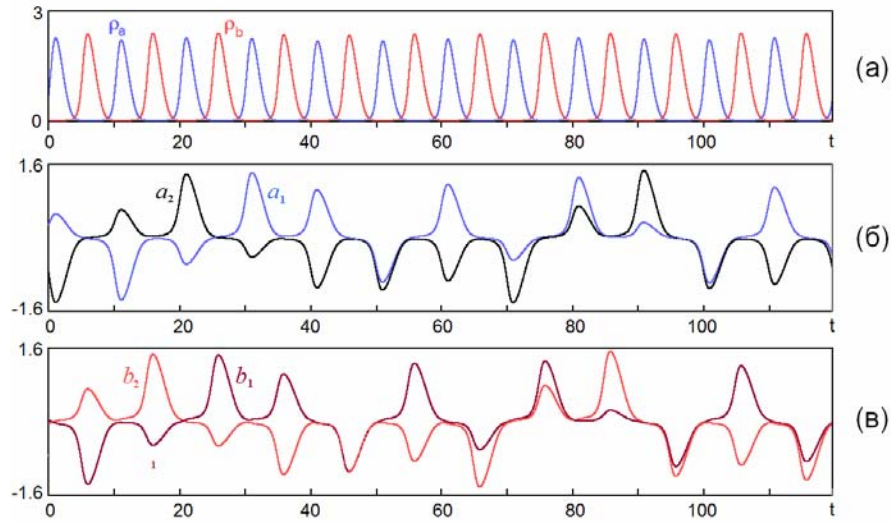


Рис.10.1. Типичные временные зависимости амплитуд четырех осцилляторов, полученные при численном решении уравнений (10.4) при $T=10$, $A=3$, $\varepsilon=0.06$: (а) величины сумм квадратов амплитуд каждой пары осцилляторов, $\rho_a = a_1^2 + a_2^2$ и $\rho_b = b_1^2 + b_2^2$, и графики для амплитуд первой (б) и второй (в) пар осцилляторов.

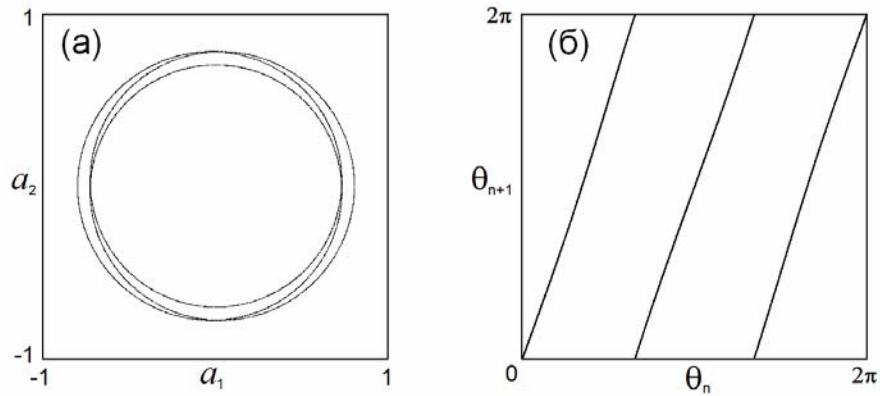


Рис.10.2: Портрет аттрактора в сечении Пуанкаре в двумерной проекции на плоскость действительных амплитуд первых двух осцилляторов (а) и диаграмма для угловой переменной, вычисляемой в последовательные моменты времени $t=nT$ (б) для системы (10.4) при $T=10$, $\varepsilon=0.06$, $A=3$.

Вычисление показателей Ляпунова для модели (10.4) основывается на совместном решении этих уравнений и набора из четырех комплектов линеаризованных уравнений в вариациях, вдоль опорной траектории на аттракторе, с ортогонализацией по Граму – Шмидту и перенормировкой соот-

ветствующих векторов возмущения по ходу выполнения процедуры (алгоритма Бенеттина, глава 1).

На рис.10.3 на диаграмме (а) все четыре показателя Ляпунова для отображения Пуанкаре представлены графически в зависимости от параметра глубины модуляции A при фиксированных остальных параметрах $\varepsilon=0.06$, $T=10$. Диаграммы (б) и (в) представляют собой аналогичные графики зависимости показателей Ляпунова от параметра связи ε (при $A=3$ и $T=10$) и от периода модуляции T (при $A=3$ и $\varepsilon=0.06$). Как можно видеть, старший показатель Ляпунова остается практически постоянным в широком диапазоне изменения параметра, оставаясь близким к величине $\ln 3 = 1.0986\dots$, что прекрасно согласуется с приближением, основанном на отображении утроения Бернулли. Такое поведение старшего показателя, отвечающего за хаотическую природу динамического поведения, косвенно подтверждает структурную устойчивость аттрактора, который, как предполагается, остается гиперболическим в этой области параметров. Остальные три показателя все отрицательны и отвечают за сжатие фазового объема по направлениям поперек волокон соленоида Смейла – Вильямса.

В частности, при $A=3$, $\varepsilon=0.06$, $T=10$ показатели Ляпунова для отображения Пуанкаре таковы:

$$\Lambda_1 = 1.095, \Lambda_2 = -4.172, \Lambda_3 = -7.712, \Lambda_4 = -10.690. \quad (10.5)$$

Оценка фрактальной размерности аттрактора в сечении Пуанкаре по формуле Каплана – Йорке дает $D = 1 + |\Lambda_1| / |\Lambda_2| \approx 1.26$; наличие ненулевой дробной части говорит о фрактальной структуре аттрактора.

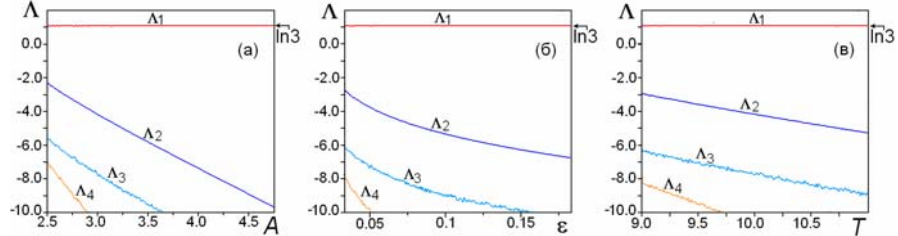


Рис.10.3. Показатели Ляпунова для отображения Пуанкаре системы (10.4), представленные в зависимости от параметров: (а) амплитуды модуляции A при $T=10$, $\varepsilon=0.06$, (б) параметра связи ε при $A=3$, $T=10$, (в) периода модуляции T при $A=3$, $\varepsilon=0.06$.

Для исходных уравнений в комплексных амплитудах (10.2) вычисление показателей Ляпунова дает:

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= 1.097, \quad \Lambda_2 = 0.000, \quad \Lambda_3 = 0.000, \quad \Lambda_4 = -4.166, \\ \Lambda_6 &= -5.366, \quad \Lambda_7 = -5.365, \quad \Lambda_8 = -7.556, \quad \Lambda_9 = -10.637. \end{aligned} \quad (10.6)$$

Старший показатель такой же, как и в уравнениях для действительных амплитуд, и близок к величине $\ln 3$. Второй и третий показатели нулевые (с точностью до погрешности вычислений); они ассоциируются, очевидно, с нейтральными возмущениями типа упомянутых выше двух фазовых сдвигов, относительно которых уравнения инвариантны. Остальные показатели отрицательны, причем Λ_8 и Λ_9 совпадают с определенными показателями из спектра четырехмерной системы, тогда как Λ_6 и Λ_7 являются специфическими для версии модели с комплексными амплитудами.

Оценка фрактальной размерности аттрактора в сечении Пуанкаре по формуле Каплана – Йорке дает $D = 3 + (\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3) / |\Lambda_4| \approx 3.26$. Этот аттрактор, вложенный в восьмимерное пространство состояний отображения Пуанкаре, следует отнести к классу частично гиперболических аттракторов из-за присутствия нейтрального подпространства, связанного с фазовыми переменными ϕ_1 и ϕ_2 и соответствующими двумя нулевыми показателями Ляпунова. Для рассматриваемой модели это обстоятельство не является очень существенным: инвариантность уравнений (10.2) по отношению к фазовым сдвигам точная, а это значит, что правоммерным будет соглашение не различать состояния, отличающиеся только фазами. Тогда динамику можно рассматривать как истинно однородно гиперболическую. Однако в системах, для которых описание в терминах медленных комплексных амплитуд приближенное (как те, что обсуждаются в двух следующих параграфах), можно ожидать особенностей поведения, связанных с природой частично гиперболического аттрактора. Если отклонения от приближения, основанного на методе медленных амплитуд, невелики, то следует ожидать, что динамика амплитудных переменных сохранит свой характер вследствие грубости, присущей гиперболическому аттрактору.

10.2. Модель двух попеременно возбуждающихся пар осцилляторов ван дер Поля с равными частотами

Обратимся теперь к модельным системам, построенным на основе осцилляторов ван дер Поля. Осциллятор ван дер Поля это хорошо известная, популярная и значимая модель – парадигма автоколебательной системы (см. вводный раздел главы 7). Его можно рассматривать в контексте, например, электрических, механических, химических колебаний; то же самое можно сказать в отношении составных систем, базирующихся на таких элементах.

Предположим сначала, что все парциальные осцилляторы, используемые для построения составной системы, имеют одну и ту же частоту ω_0 , и рассмотрим следующую систему уравнений

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_1 - [A \cos(2\pi t / T) - x_1^2 - x_2^2] \dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 &= \epsilon \dot{y}_1, \\
\ddot{x}_2 - [A \cos(2\pi t / T) - x_1^2 - x_2^2] \dot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 &= \epsilon \dot{y}_2, \\
\ddot{y}_1 - [-A \cos(2\pi t / T) - y_1^2 - y_2^2] \dot{y}_1 + \omega_0^2 y_1 &= \epsilon (x_1^2 - 3x_2^2) \dot{x}_1, \\
\ddot{y}_2 - [-A \cos(2\pi t / T) - y_1^2 - y_2^2] \dot{y}_2 + \omega_0^2 y_2 &= \epsilon (3x_1^2 - x_2^2) \dot{x}_2.
\end{aligned} \tag{10.7}$$

Здесь представлены две пары автоколебательных элементов. Каждая пара характеризуется обобщенными координатными переменными $x_{1,2}$ и $y_{1,2}$, соответственно, и, как предполагается, восполняет потери энергии из общего источника, своего для каждой пары, что видно из структуры выражений в квадратных скобках. Обе пары становятся активными по очереди вследствие периодической модуляции параметров, ответственных за бифуркацию Андронова – Хопфа в осцилляторах ван дер Поля. Интенсивность модуляции характеризуется параметром A , а ее период дается константой T . Члены, описывающие связь и пропорциональные константе ϵ , обеспечивают передачу возбуждения между первыми и вторыми осцилляторами одной и другой пары; их структура подобна постулированной в предыдущем разделе. Заметим, что передача возбуждения имеет место в условиях резонанса собственной частоты осцилляторов и первой гармоники воздействия, заданного правыми частями уравнений.

При использовании аппроксимации, основанной на методе медленных амплитуд, система сводится к форме, точно соответствующей уравнениям (10.4) (см. раздел 10.4). Следовательно, функционирование системы, как можно ожидать, должно быть подобно модели из предыдущего раздела в силу структурной устойчивости гиперболического аттрактора модели (10.4).

На рис.10.4 показаны временные зависимости динамических переменных, полученные при численном решении уравнений (10.7) для $A=3$, $T=10$, $\epsilon=0.06$, $\omega_0 = 2\pi$. Панели (а) и (б) представляют собой графики для попарно связанных осцилляторов. Заметим, что первая и вторая подсистемы активны по очереди, а распределение интенсивностей колебаний меняется существенным образом на последовательных стадиях активности. Панель (в) демонстрирует колебания двух осцилляторов, относящихся к одной и той же подсистеме. Можно заметить, что фазы обоих осцилляторов практически одинаковы, по крайней мере, насколько различимо на графике. (На самом деле эта фаза медленно меняется на больших масштабах времени и представляет собой специфическую переменную, не участвующую в гиперболической структуре; в связи с этим обстоятельством аттрактор в стробоскопическом отображении данной системы, очевидно, должен быть отнесен к классу частично гиперболических, а не равномерно гиперболических в обычном смысле аттракторов.)

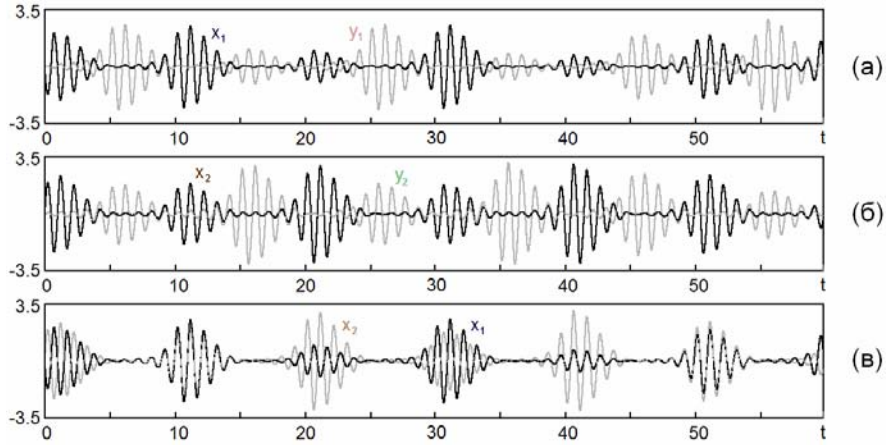


Рис.10.4: Сигналы, порождаемые парциальными осцилляторами системы (10.7) при $A=3$, $T=10$, $\varepsilon=0.06$, $\omega_0 = 2\pi$.

Удобно ввести описание с привлечением стробоскопического отображения Пуанкаре. Теперь отображение $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{T}(\mathbf{x}_n)$ оперирует с восьмимерными векторами $\mathbf{x}_n = \{x_1, u_1, x_2, u_2, y_1, v_1, y_2, v_2\}_{t=nT}$, где $u_{1,2} = \dot{x}_{1,2} / \omega_0$ и $v_{1,2} = \dot{y}_{1,2} / \omega_0$ представляют собой нормированные обобщенные скорости соответствующих осцилляторов. Отображение Пуанкаре выполняется при вычислениях на компьютере путем решения дифференциальных уравнений (10.7) на интервале времени T .

Чтобы двигаться дальше, необходимо ввести угловую переменную, характеризующую распределение амплитуд осцилляторов, составляющих одну подсистему, и выразить ее через динамические переменные $x_{1,2}, u_{1,2}$. В рамках данной модели это более тонкий момент, чем для системы (10.4). В самом деле, простое определение как $\arctan[\sqrt{x_2^2 + u_2^2} / \sqrt{x_1^2 + u_1^2}]$ не является удовлетворительным, поскольку оно годится только для одного из четырех квадрантов угловой переменной, в то время как для представления соленоида Смейла – Вильямса угловая переменная должна иметь возможность принимать значения, соответствующие полной окружности. Подходящим оказалось следующее определение. Сначала выберем пару (x_1, u_1) или (x_2, u_2) , характеризуемую большим значением $r_i^2 = x_i^2 + u_i^2$. Далее, если $|x_i| > |u_i|$, то полагаем $s = \text{sgn}(x_i)$, в противном случае $s = \text{sgn}(u_i)$, и находим $\xi = sx_i / r_i$, $\eta = su_i / r_i$. Используя эти определения до и после каждого шага отображения Пуанкаре, вычисляем $X = \xi x_1 + \eta u_1$, $Y = \xi x_2 + \eta u_2$ и

$X' = \xi x'_1 + \eta u'_1$, $Y' = \xi x'_2 + \eta u'_2$, где штрих обозначает обновленные значения переменных. (Коэффициенты ξ и η принимаются одинаковыми при вычислении как X, Y , так X', Y' .) Наконец, полагаем $\theta = \arg(X + iY)$ и $\theta' = \arg(X' + iY')$, после чего откладываем эти величины по осям координат на графике.

На рис.10.5 показан портрет аттрактора в сечении Пуанкаре на плоскости переменных X, Y (панель (а)) и итерационная диаграмма для угловой переменной θ (панель (б)). По сравнению с рис.10.2 портрет аттрактора выглядит, как образование, уширенное в направлении поперек витков соленоида. Это связано с тем, что в рассматриваемой системе имеется медленно эволюционирующая фазовая переменная, как уже было сказано выше. Тем не менее, некоторую тонкую структуру, унаследованную от канторова устройства соленоида, на графике можно различить. Что касается диаграммы для угловой переменной, то, благодаря удачно выбранному ее определению, график выглядит очень похожим на рис.10.2б, который отвечал истинно равномерно гиперболическому аттрактору. Таким образом, можно утверждать, что гиперболическая составляющая имеет место: благодаря присущей структурной устойчивости, она не разрушается возмущениями, возникающими из-за динамики фазовой переменной.

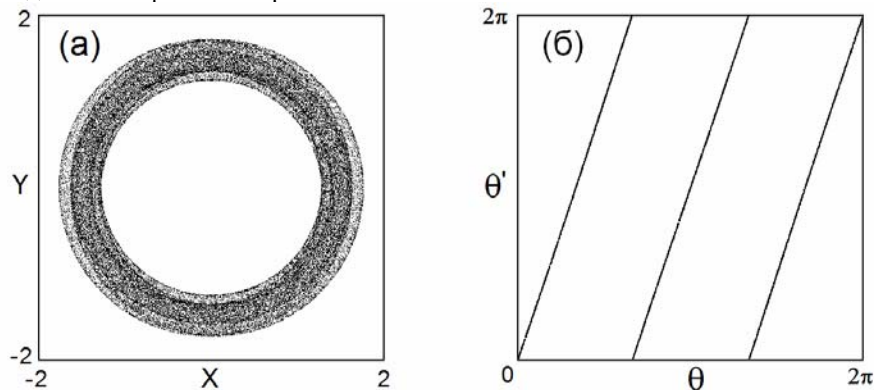


Рис.10.5. Портрет аттрактора в сечении Пуанкаре в двумерной проекции на плоскость вспомогательных переменных, введенных в тексте и характеризующих амплитуды первых двух осцилляторов (а), и диаграммы для угловых переменных в последовательные моменты $t=nT$ (б) для системы (10.7) при $T=10$, $\epsilon=0.06$, $A=3$, $\omega_0=2\pi$.

На рис.10.6 представлены результаты расчета спектра показателей Ляпунова для отображения Пуанкаре системы (10.7). На диаграмме (а) приводится их зависимость от параметра интенсивности модуляции A при фиксированных остальных параметрах $T=10$, $\epsilon=0.06$, $\omega_0=2\pi$. Диаграммы (б) и (в) представляют собой аналогичные графики, где показана зависимость от па-

раметра связи ε (при $A=3$, $T=10$, $\omega_0=2\pi$) и от периода модуляции T (при $A=3$, $\varepsilon=0.06$, $\omega_0=2\pi$). Заметим, что старший показатель остается близким к $\ln 3$ в широком диапазоне изменения параметров, что подтверждает грубый характер динамики, обусловленной гиперболической компонентой. Второй показатель не обнаруживает отличия от нуля, и, очевидно, связано с медленно эволюционирующей фазовой переменной. Остальные показатели отрицательные. В частности, при $A=3$, $T=10$, $\varepsilon=0.06$, $\omega_0 = 2\pi$ имеем

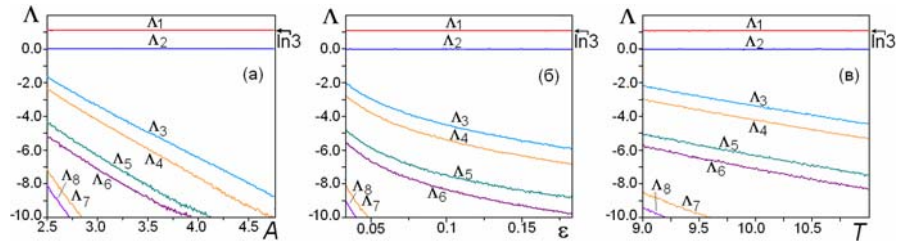


Рис.10.6. Показатели Ляпунова для отображения Пуанкаре системы (10.7) в зависимости от параметров: (а) амплитуды модуляции A при $T=10$, $\varepsilon=0.06$, $\omega_0=2\pi$, (б) параметра связи ε при $A=3$, $T=10$, $\omega_0=2\pi$, (в) периода модуляции T при $A=3$, $\varepsilon=0.06$, $\omega_0=2\pi$.

$$\begin{aligned} \Lambda_1 = 1.099, \quad \Lambda_2 = 0.000, \quad \Lambda_3 = -3.373, \quad \Lambda_4 = -4.198, \\ \Lambda_6 = -6.326, \quad \Lambda_7 = -7.097, \quad \Lambda_8 = -11.041, \quad \Lambda_9 = -12.020. \end{aligned} \quad (10.8)$$

Интересно сравнить эти результаты с данными для однородно гиперболического аттрактора четырехмерной системы для действительных амплитуд. (Напомним, что уравнения (10.7) сводится к ним в приближении медленно меняющихся амплитуд, см. раздел 10.4). Как можно видеть, значения $\Lambda_1, \Lambda_4, \Lambda_7, \Lambda_8$ из списка (10.8), хорошо согласуются со значениями $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_4$ из списка (10.5). Размерность аттрактора отображения Пуанкаре по формуле Каплана – Йорке в данном случае составляет $D = 2 + (\Lambda_1 + \Lambda_2) / |\Lambda_3| \approx 2.33$. Целая часть отличается от оценки в предыдущем разделе из-за присутствия фазовой переменной, а дробная часть отличается, потому что показатель Λ_3 не имеет аналога в списке (10.5).

10.3. Модель двух попеременно возбуждаемых пар нерезонансных осцилляторов ван дер Поля

Рассмотрим еще один вариант системы, составленной из осцилляторов ван дер Поля, который более точно соответствует исходной модели (10.2), и задается системой уравнений

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_1 - [A \cos(2\pi t / T) - x_1^2 - \frac{1}{2} x_2^2] \dot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 &= \varepsilon \dot{y}_1, \\
\ddot{x}_2 - [A \cos(2\pi t / T) - \frac{1}{2} x_1^2 - x_2^2] \dot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 &= \varepsilon \dot{y}_2, \\
\ddot{y}_1 - [-A \cos(2\pi t / T) - y_1^2 - \frac{1}{2} y_2^2] \dot{y}_1 + \omega_1^2 y_1 &= \varepsilon (x_1^2 - \frac{3}{2} x_2^2) \dot{x}_1, \\
\ddot{y}_2 - [-A \cos(2\pi t / T) - \frac{1}{2} y_1^2 - y_2^2] \dot{y}_2 + \omega_2^2 y_2 &= \varepsilon (\frac{3}{2} x_1^2 - x_2^2) \dot{x}_2.
\end{aligned} \tag{10.9}$$

В отличие от модели (10.7), первый и второй осцилляторы поочередно возбуждаемых подсистем характеризуются различными собственными частотами, которые предполагаются не удовлетворяющими резонансным условиям низкого порядка. Факторы $\frac{1}{2}$ введены при некоторых членах для того, чтобы обеспечить соответствие системы (10.2) в приближении, отвечающем методу медленных комплексных амплитуд в нерезонансной ситуации (см. раздел 10.4). Тем не менее, передача возбуждения между первыми и вторыми осцилляторами одной и другой подсистем благодаря членам связи в правых частях уравнений является резонансной, поскольку собственные частоты осцилляторов, отмеченных одним и тем же индексом 1 или 2, совпадают в обеих подсистемах. Функционирование системы аналогично предыдущим моделям. При приближенном описании на основе вещественных уравнений для амплитуд (10.4), получаем гиперболический аттрактор типа Смейла – Вильямса в стробоскопическом отображении. В силу его грубости, естественно ожидать, что грубый хаос в динамике амплитуд сохранится также в системе (10.9), хотя аттрактор полной системы уравнений будет относиться к классу частично гиперболических аттракторов.

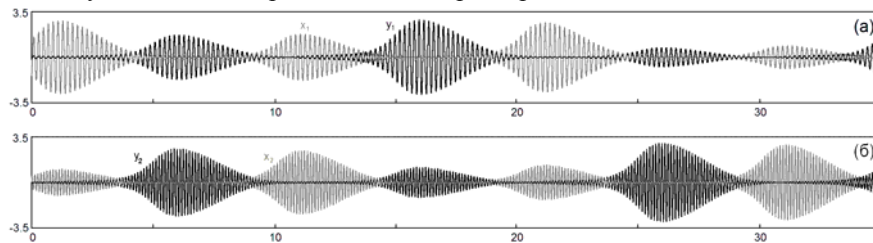


Рис.10.7. Типичный образец зависимости от времени для координатных переменных четырех осцилляторов, полученный при численном решении уравнений (10.9) при $T=10$, $A=3$, $\varepsilon=0.06$, $\omega_1=10\pi$, $\omega_2=16\pi$.

Для иллюстрации динамики зададим параметры $A=3$, $T=10$, $\varepsilon=0.06$, как и в предыдущих случаях. Что касается собственных частот ω_1 и ω_2 , уместно выбрать их в отношении, даваемом двумя последовательными числами Фибоначчи, чтобы избежать, по крайней мере, резонансов низкого порядка. Конкретно, положим $\omega_1 = 5\omega_0$, $\omega_2 = 8\omega_0$, где $\omega_0 = 2\pi$.

На рис.10.8 показаны зависимости динамических переменных от времени, полученные из численного решения уравнений (10.9). Панели (а) и (б)

представляют собой графики для обобщенных координат попарно связанных осцилляторов. Первая и вторая подсистемы активны поочередно, и интенсивности колебаний изменяются на последовательных стадиях активности хаотическим образом.

Как и в предыдущем разделе, приходится уделить специальное внимание определению подходящей угловой координаты, чтобы проиллюстрировать связь амплитудной динамики с аттрактором Смейла – Вильямса. Определение должно быть выработано так, чтобы исключить непосредственное влияние на угловую переменную фаз осцилляторов, помеченных индексами 1 и 2. Подходящей оказывается следующая процедура. Для $i=1,2$, если $|x_i| > |u_i|$, полагаем $s_i = \text{sgn}(x_i)$, в противном случае $s_i = \text{sgn}(u_i)$. Далее перед каждым шагом отображения Пуанкаре и после него вычисляем $X = s_1 \sqrt{x_1^2 + u_1^2}$, $Y = s_2 \sqrt{x_2^2 + u_2^2}$ и $X' = s_1 \sqrt{x_1'^2 + u_1'^2}$, $Y' = s_2 \sqrt{x_2'^2 + u_2'^2}$, где штрихами обозначены обновленные переменные. (Факторы $s_{1,2}$ считаются одинаковыми при вычислении как X, Y , так и X', Y' .) Окончательно, полагаем $\theta = \arg(X + iY)$ и $\theta' = \arg(X' + iY')$.

На рис.10.8 показан портрет аттрактора в сечении Пуанкаре на плоскости переменных X, Y (панель (а)) и итерационная диаграмма для угловой переменной θ (панель (б)). Аттрактор демонстрирует сходство с тем, который был приведен на рис.10.2, с некоторым поперечным уширением, возникающим, очевидно, из-за медленной эволюции фазовых переменных. Диаграмма для угловой переменной очень похожа на рис.10.2б, который отвечал однородно гиперболическому аттрактору Смейла – Вильямса.

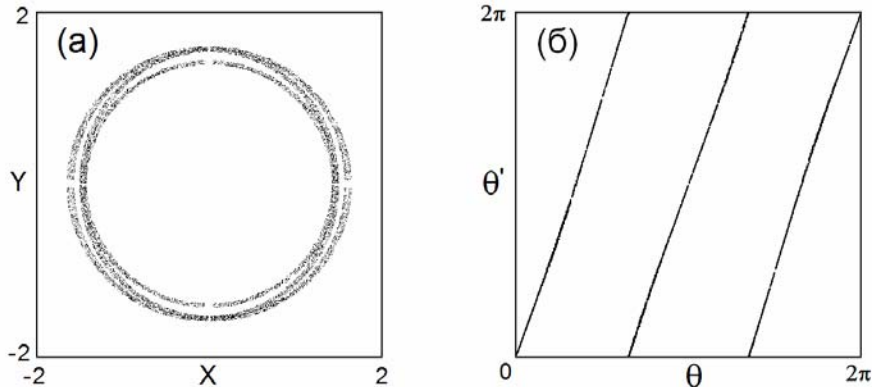


Рис.10.8. Портрет аттрактора в сечении Пуанкаре в двумерной проекции на плоскость вспомогательных переменных, введенных в тексте и характеризующих амплитуды первых двух осцилляторов (а), и диаграммы для угловых переменных в последовательные моменты $t=nT$ (б) для системы (10.9) при $T = 10$, $\varepsilon = 0.06$, $A = 3$, $\omega_1=10\pi$, $\omega_2=16\pi$.

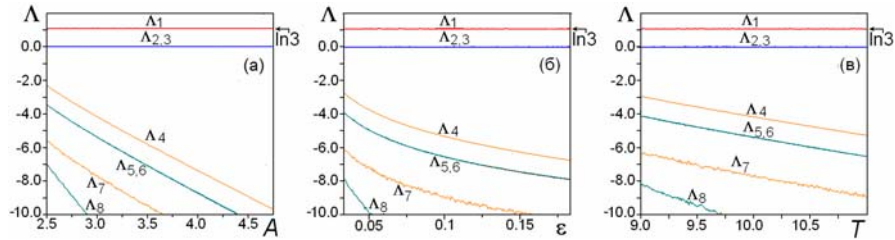


Рис.10.9. Показатели Ляпунова для отображения Пуанкаре системы (10.9) в зависимости от параметров: (а) амплитуды модуляции A при $T=10$, $\epsilon=0.06$, $\omega_1=10\pi$, $\omega_2=16\pi$, (б) параметра связи ϵ при $A=3$, $T=10$, $\omega_1=10\pi$, $\omega_2=16\pi$, (в) периода модуляции T при $A=3$, $\epsilon=0.06$, $\omega_1=10\pi$, $\omega_2=16\pi$.

На рис.10.9 приводятся показатели Ляпунова для отображения Пуанкаре системы (10.9) в зависимости от параметра интенсивности модуляции A (а), параметра связи ϵ (б) и периода модуляции T (в) при фиксированных остальных параметрах. Вновь старший показатель близок к $\ln 3$ в широком диапазоне изменения параметров. Второй и третий показатели приблизительно нулевые и ассоциируются, очевидно, с двумя медленно эволюционирующими фазовыми переменными. Остальные показатели отрицательные. В частности, при $A=3$, $T=10$, $\epsilon=0.06$ имеем

$$\begin{aligned} \Lambda_1 = 1.081, \quad \Lambda_2 = 0.000, \quad \Lambda_3 = 0.000, \quad \Lambda_4 = -4.173, \\ \Lambda_6 = -5.385, \quad \Lambda_7 = -5.386, \quad \Lambda_8 = -7.717, \quad \Lambda_9 = -10.632. \end{aligned} \quad (10.10)$$

Эти результаты замечательно близки к данным, полученным при описании системы в рамках метода медленно меняющихся комплексных амплитуд, см. (10.6). Оценка размерности по формуле Каплана – Йорке дает $D \approx 3.26$.

10.4. Описание моделей, построенных на основе осцилляторов ван дер Поля, методом медленно меняющихся амплитуд

При рассмотрении моделей на базе уравнений ван дер Поля и обсуждении численных результатов был упомянуто их соответствие уравнениям (10.4) при описании в рамках метода медленных амплитуд. Ниже приведены выкладки, подтверждающие это утверждение.

Начнем с применения метода медленно меняющихся комплексных амплитуд (см. раздел 7.1) к системе (10.9). Для этого положим

$$\begin{aligned} x_1 = a_1 e^{i\omega_1 t} + a_1^* e^{-i\omega_1 t}, \quad x_2 = a_2 e^{i\omega_2 t} + a_2^* e^{-i\omega_2 t}, \\ y_1 = b_1 e^{i\omega_1 t} + b_1^* e^{-i\omega_1 t}, \quad y_2 = b_2 e^{i\omega_2 t} + b_2^* e^{-i\omega_2 t}, \end{aligned} \quad (10.11)$$

и

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= i\omega_1 a_1 e^{i\omega_1 t} - i\omega_1 a_1^* e^{-i\omega_1 t}, & \dot{x}_2 &= i\omega_2 a_2 e^{i\omega_2 t} - i\omega_2 a_2^* e^{-i\omega_2 t}, \\ \dot{y}_1 &= i\omega_1 b_1 e^{i\omega_1 t} - i\omega_1 b_1^* e^{-i\omega_1 t}, & \dot{y}_2 &= i\omega_2 b_2 e^{i\omega_2 t} - i\omega_2 b_2^* e^{-i\omega_2 t},\end{aligned}\quad (10.12)$$

где $a_{1,2}(t)$, $b_{1,2}(t)$ комплексные амплитуды, которые будем считать зависящими от времени. Одновременное выполнение соотношений (10.11) и (10.12) означает, что должны быть справедливы условия

$$\begin{aligned}\dot{a}_1 e^{i\omega_1 t} + \dot{a}_1^* e^{-i\omega_1 t} &= 0, & \dot{a}_2 e^{i\omega_2 t} + \dot{a}_2^* e^{-i\omega_2 t} &= 0, \\ \dot{b}_1 e^{i\omega_1 t} + \dot{b}_1^* e^{-i\omega_1 t} &= 0, & \dot{b}_2 e^{i\omega_2 t} + \dot{b}_2^* e^{-i\omega_2 t} &= 0.\end{aligned}\quad (10.13)$$

(Поскольку мы вводим четыре комплексных переменных вместо четырех действительных, наложение этих дополнительных условий правомерно.)

Теперь подставим выражения для x и y через комплексные амплитуды в уравнения (10.9) и, учитывая соотношения (10.13), заменим производные от сопряженных переменных через сами комплексные амплитуды, например, $\dot{a}_1^* e^{-i\omega_1 t} = -\dot{a}_1 e^{i\omega_1 t}$ и т.д. Полученная система уравнений является точным представлением исходных уравнений в новых переменных a_1 , a_2 , b_1 , b_2 . Следующий шаг состоит в учете медленности изменения комплексных амплитуд. Умножим уравнения для переменных a_1 и b_1 на $e^{-i\omega_1 t}$, а уравнения для a_2 и b_2 на $e^{-i\omega_2 t}$ и выполним усреднение по быстрым осцилляциям. Учитывая отсутствия резонансов низкого порядка (соотношений типа $p\omega_1 = q\omega_2$ с целыми коэффициентами, меньшими 4), это соответствует просто исключению всех членов уравнения, содержащих экспоненциальные множители. После очевидных, хотя и громоздких, алгебраических преобразований, получим в точности уравнения (10.2) для комплексных амплитуд a_1 , a_2 , b_1 , b_2 .

Применим теперь тот же метод к уравнениям (10.7). В этом случае все собственные частоты осцилляторов одинаковые, и мы используем соотношения (10.11)-(10.13), полагая $\omega_{1,2} = \omega_0$. После подстановки в уравнения (10.7) находим, что в усредненных уравнениях некоторые дополнительные члены сохраняются, и система уравнений получается в виде

$$\begin{aligned}
\dot{a}_1 &= \frac{1}{2} \left[A \cos(2\pi t / T) a_1 - |a_1|^2 a_1 - 2 |a_2|^2 a_1 + a_1^* a_2^2 \right] + \frac{1}{2} \varepsilon b_1, \\
\dot{a}_2 &= \frac{1}{2} \left[A \cos(2\pi t / T) a_2 - 2 |a_1|^2 a_2 + a_1^2 a_2^* - |a_2|^2 a_2 \right] + \frac{1}{2} \varepsilon b_2, \\
\dot{b}_1 &= \frac{1}{2} \left[-A \cos(2\pi t / T) b_1 - |b_1|^2 b_1 - 2 |b_2|^2 b_1 + b_1^* b_2^2 \right] \\
&\quad + \frac{1}{2} \varepsilon (|a_1|^2 a_1 - 6 |a_2|^2 a_1 + 3 a_1^* a_2^2), \\
\dot{b}_2 &= \frac{1}{2} \left[-A \cos(2\pi t / T) b_2 - 2 |b_1|^2 b_2 + b_1^2 b_2^* - |b_2|^2 b_2 \right] \\
&\quad + \frac{1}{2} \varepsilon (6 |a_1|^2 a_2 - 3 a_1^2 a_2^* - |a_2|^2 a_2).
\end{aligned} \tag{10.14}$$

Хотя эти уравнения отличаются от исходной модели (10.2), их структура не противоречит предположению, что все амплитуды действительные, а в этом случае они сводятся к уравнениям (10.4).

Показатели Ляпунова, вычисленные для аттрактора стробоскопического отображения Пуанкаре системы (10.14) при $A=3$, $T=10$, $\varepsilon=0.06$, таковы:

$$\begin{aligned}
\Lambda_1 &= 1.097, \quad \Lambda_2 = 0.000, \quad \Lambda_3 = -3.414, \quad \Lambda_4 = -4.167, \\
\Lambda_6 &= -6.204, \quad \Lambda_7 = -7.584, \quad \Lambda_8 = -10.834, \quad \Lambda_9 = -11.845.
\end{aligned} \tag{10.15}$$

Они хорошо согласуются с данными (10.8), что подтверждает применимость метода медленных амплитуд к режиму функционирования системы, который здесь рассмотрен.

Итак, в настоящей главе рассмотрен подход к конструированию систем с аттрактором типа Смейла – Вильямса в стробоскопическом отображении для амплитуд осцилляторов, образующих систему, который основан на манипуляции угловой переменной, описывающей распределение амплитуд для автогенераторов, питающихся от общего источника энергии. За каждый период модуляции параметра, обусловленной внешним периодическим воздействием, эта переменная подвергается растягивающему отображению окружности. Предлагаемый принцип может быть реализован, например, в системах электроники и нелинейной оптики для генерации грубого хаоса.

Тонкий момент состоит в том, что реализуемые примеры систем на основе осцилляторов ван дер Поля в разделах 10.2 и 10.3 сводятся к уравнениям с однородно гиперболическими аттракторами только в некотором приближении, соответствующем описанию в терминах действительных амплитуд и в пренебрежении фазами. При учете фаз аттракторы должны рассматриваться, предположительно, как относящиеся к классу частично гиперболических аттракторов. Тем не менее, из-за структурной устойчивости аттрактора в амплитудных уравнениях естественно ожидать, что динамика амплитуд не нарушается влиянием динамики фаз, и, следовательно, сохраняет свойства, присущие равномерно гиперболическому аттрактору. Данные численного моделирования, как представляется, подтверждают это предположение, но его математическое обоснование было бы, конечно, желательно.

В заключение отметим, что описанный выше подход к построению генераторов хаоса с гиперболическими аттракторами можно применить также к параметрическим системам [Кузнецов А.С., 2012]. При этом, в отличие от схем, рассмотренных в главе 9, в качестве угловой переменной, претерпевающей кратное увеличение за характерный период, будет выступать не фаза параметрических колебаний, а величина, характеризующая распределение амплитуд двух колебательных элементов при параметрическом возбуждении от общего источника накачки.