

## **Глава 20**

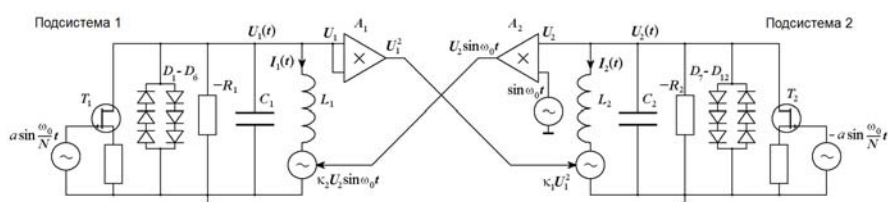
# **Эксперименты с электронными устройствами, имеющими аттрактор типа Смейла – Вильямса**

Очень интересной задачей представляется реализация моделей, рассмотренных в предыдущих главах (а также других систем с гиперболическими аттракторами) в виде конкретных устройств, например, в области электроники, лазерной физики, механики и т.д. В настоящей главе обсуждаются экспериментальные результаты, известные к настоящему моменту по публикациям и соответствующие по принципу действия моделям, рассмотренным в главах 7 и 17. Они были реализованы в виде лабораторных электронных устройств и изучены в работах [Кузнецов и Селезнев, 2006; Кузнецов и Пономаренко, 2008; Баранов и др., 2010]. Электронные устройства с грубым гиперболическим хаосом, аналогичные описанному здесь, могут найти применение в системах коммуникации на основе хаоса, шумовой локации, а также для криптографических схем. Одним из возможных применений является генерация случайных чисел. Принципиальный момент состоит в том, что, в отличие от компьютерной модели, которую в этом контексте приходится трактовать, как генератор псевдослучайных чисел, соответствующее физическое устройство будет служить истинным источником случайных чисел. Действительно, в процессе динамической эволюции на аттракторе неизбежно усиление шума от микроскопического уровня до макроскопических величин в силу присущей гиперболическому хаосу чувствительности к возмущению фазовых траекторий. Поэтому в системе, находящейся под влиянием слабого шума, выбор траектории на аттракторе осуществляется реально случайным образом.

### 20.1 Экспериментальное устройство в виде двух попеременно возбуждающихся неавтономных осцилляторов

В настоящем разделе рассматривается электронное устройство, идея которого следует модели, обсуждавшейся в главе 7. Оно также соответствует одной из схем, для которых в главе 19 были представлены результаты моделирования в программной среде Multisim. Изложение основывается на результатах работы [Кузнецов и Селезнев, 2006].

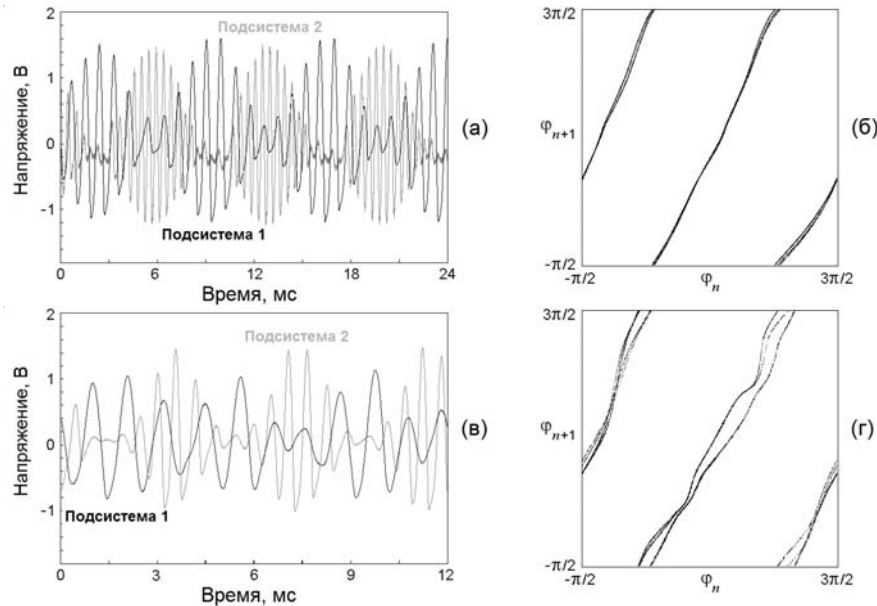
Обратимся к показанной на рис. 20.1 схеме радиотехнического устройства, составленного из двух автоколебательных элементов с характерными частотами  $\omega_0$  и  $2\omega_0$ , соответственно. Каждый из них содержит колебательный контур, образованный катушкой индуктивности  $L_{1,2}$  и емкостью  $C_{1,2}$ , так что  $\omega_0 = 1/\sqrt{L_1 C_1}$ ,  $2\omega_0 = 1/\sqrt{L_2 C_2}$ . Отрицательное сопротивление ( $-R_{1,2}$ ) в каждый контур вносится элементом на основе операционного усилителя, причем величину отрицательного сопротивления можно считать практически постоянной в рабочем интервале напряжений при колебаниях в контурах. Нелинейная проводимость вводится комбинацией полупроводниковых диодов в виде двух параллельно соединенных ветвей с противоположным направлением пропускания тока. Полевой транзистор вносит в колебательный контур практически линейную положительную проводимость, величина которой регулируется напряжением на затворе транзистора. Это напряжение медленно изменяется во времени, совершая колебания периода  $T = 2\pi N/\omega_0$ , где  $N$  – целое число, причем один и другой осциллятор пребывает по очереди в режиме генерации колебаний и под порогом генерации. Первый генератор действует на второй через посредство нелинейного квадратичного элемента  $A_1$ . В свою очередь, второй генератор действует на первый через посредство нелинейного элемента  $A_2$ , осуществляющего смещение поступающего сигнала и вспомогательного сигнала на частоте  $\omega_0$ .



**Рис.20.1** Схема устройства, составленного из двух связанных автоколебательных элементов с периодически меняющимися параметрами: физическая система, обладающая аттрактором типа Смейла – Вильямса

Оба осциллятора, составляющих схему, по очереди передают возбуждение один другому, причем, как объяснялось в главах 7 и 19, это сопровождается удвоением фазы колебаний на каждом очередном периоде активности.

С учетом того, что по другим направлениям в фазовом пространстве имеет место сжатие, в отображении за период модуляции аттрактор должен представлять собой соленоид Смейла – Вильямса.

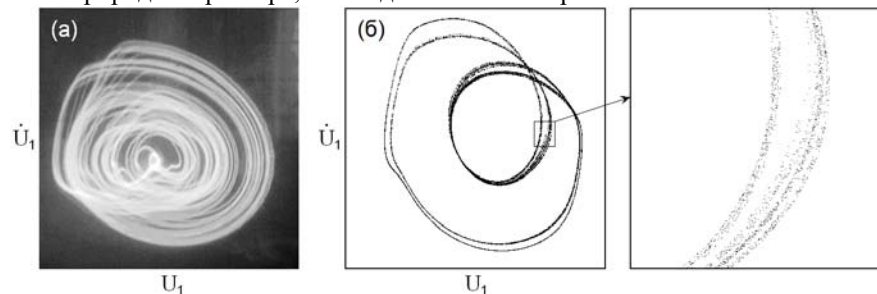


**Рис.20.2** Образцы сигналов, генерируемых первой (черная кривая) и второй (серая кривая) подсистемами в хаотическом режиме и итерационные диаграммы для стробоскопического преобразования фаз первого осциллятора при  $N = 8$  (а, в) и 4 (б, г).

Для проведения экспериментального исследования схема была реализована в виде лабораторного устройства [Кузнецов и Селезнев, 2006]. Конденсаторы в колебательных контурах имели емкость  $C_1 = 20$  нФ и  $C_2 = 5$  нФ. Катушки  $L_1$  и  $L_2$  выполнены на ферритовых сердечниках 2000НМ с одинаковой индуктивностью, около 1 Гн. Соответственно, рабочая частота двух осцилляторов составляла  $f_1 = \omega_0/2\pi = 1090$  Гц и  $f_2 = 2f_1 = 2180$  Гц. Элемент отрицательного сопротивления реализован на операционном усилителе 140УД26, а нелинейный элемент – на диодах КД102. Для внесения в колебательные контура изменяющейся во времени проводимости использованы полевые транзисторы КП303Г. Нелинейные элементы, через которые осуществлялась связь обеих подсистем, выполнены на основе аналоговых умножителей 525ПС2. Напряжения  $U_1$  и  $U_2$ , снимаемые, соответственно, с первого и второго контура, можно было подавать на регистрирующую аппаратуру (осциллограф, анализатор спектра) или вводить в компьютер в виде временного ряда через посредство аналого-цифрового преобразователя АДМ12-3 (12-разрядный, максимальная частота дискретизации 3 МГц). Функции  $\dot{U}_1$  и  $\dot{U}_2$  получались как результат аналогового дифференцирования с использовани-

ем стандартной дифференцирующей цепочки, содержащей емкость 500 пФ, резистор 62 кОм и операционный усилитель 140УД26.

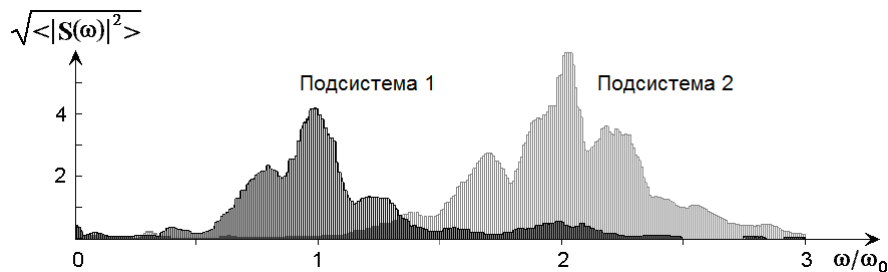
В широком диапазоне параметров экспериментальная система демонстрировала хаотические колебания, реализующиеся при поочередной передаче возбуждения между осцилляторами, согласно предполагаемому механизму Функционирование системы иллюстрируется на рис.20.2. На диаграммах (а) и (в) показаны типичные записи сигналов, полученные для  $N=8$  и  $N=4$ . Графики построены с использованием записанных в память компьютера временных рядов, полученных посредством аналого-цифрового преобразования напряжений при частоте выборки 200 кГц, т.е. на период характерной частоты генерации  $\omega_0$  приходилось примерно 200 точек. На панелях (б) и (г) приведены итерационные диаграммы для фазы первого осциллятора. Для их построения проводилась обработка на компьютере двухкомпонентного временного ряда. Одна компонента отвечала выборке сигнала  $U_1$  с периодом медленной вариации параметров  $T = 2\pi N/\omega_0$  в моменты времени, соответствующие максимуму амплитуды колебаний первого осциллятора. В качестве второй компоненты фигурировала производная сигнала  $\dot{U}_1$  на выходе аналоговой дифференцирующей цепочки в те же моменты времени. Фаза определялась по формуле  $\varphi = \arg(U_1 - i\omega_0^{-1}\dot{U}_1)$ . Очевидная из рисунка топологическая эквивалентность полученного преобразования отображению Бернулли (20.1) является принципиальной для заключения о гиперболической природе аттрактора, наблюдаемого в эксперименте.



**Рис.20.3** Портреты аттракторов в проекции на плоскость переменных  $U_1$  и  $\dot{U}_1$  для  $N=4$ : (а) фотография с экрана осциллографа; (б) стробоскопическое сечение, отвечающее последовательности моментов времени  $T = 2\pi N/\omega_0$  вблизи максимума амплитуды первого осциллятора и увеличенный фрагмент, демонстрирующий фрактальную поперечную структуру аттрактора.

На рис. 20.3(а) приводится фотография с экрана осциллографа, показывающая вид хаотического аттрактора системы для случая  $N=4$ , где горизонтальное и вертикальное отклонение луча пропорционально  $U_1$  и  $\dot{U}_1$ , соответственно. Время экспозиции составляло несколько секунд, чтобы отобразить достаточно большое число витков траектории на аттракторе.

Изображение демонстрирует очевидное сходство с рис. 7.6(а). На рис. 20.3(б) показано стробоскопическое сечение аттрактора в проекции на плоскость  $(U_1, \dot{U}_1)$ , полученное на компьютере путем обработки записанного в ходе эксперимента двухкомпонентного временного ряда, использованного при построении итерационной диаграммы для фаз на рис. 20.2(г). Его вид следует сравнить с портретом соленоида Смейла – Вильямса на рис. 7.6(б). Отдельно показан увеличенный фрагмент изображения, позволяющий различить тонкую поперечную канторову структуру аттрактора. Старший показатель Ляпунова для стробоскопического отображения, согласно оценке по методике обработки временного ряда [Wolf et al., 1985], с периодом выборки  $T = 2\pi N/\omega_0$ , составил  $\Lambda \approx 0.73$ , что удовлетворительно согласуется с ожидаемой величиной  $\ln 2 \approx 0.693$ .



**Рис.20.4.** Спектры сигналов, порождаемых двумя составляющими систему осцилляторами в хаотическом режиме, соответствующем  $N=4$ , перерисованные с фотографии, сделанной с экрана анализатора спектра.

На рис. 20.4 показаны спектры колебаний первого и второго осцилляторов в режиме генерации хаоса при  $N = 4$ . Отметим, что спектр непрерывный; для первого и второго осциллятора максимум спектральной плотности располагается вблизи их рабочих частот  $\omega_0$  и  $2\omega_0$ , соответственно. Спектры сходны по виду с теми, что были получены в численных расчетах для модели, обсуждавшейся в главе 7 и при моделировании в программной среде Multisim в главе 19. К сожалению, в эксперименте вряд ли возможно определить полный спектр показателей Ляпунова или осуществить проверку критерия гиперболичности. Тем не менее, в целом, полученные результаты можно с уверенностью рассматривать как свидетельствующие о присутствии аттрактора типа Смейла – Вильямса в экспериментальной неавтономной системе.

Кроме того, был также предложен генератор электромагнитных колебаний в диапазоне сверхвысоких частот на базе клистрона, где реализуется подобный же механизм функционирования [Емельянов и др., 2009; Emel'yanov et al., 2010]. На данный момент для этого устройства доступны пока только результаты численного моделирования.

## 20.2. Электронные устройства с запаздыванием

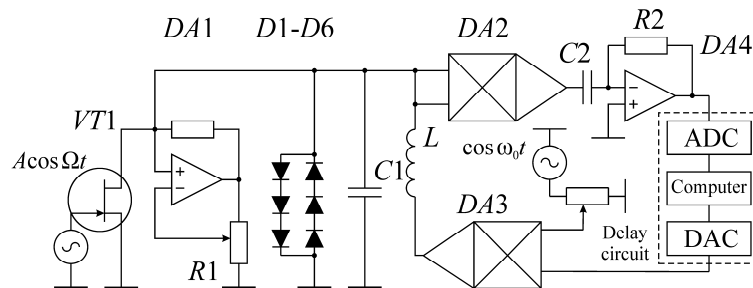
Перейдем к рассмотрению систем с запаздывающей обратной связью, соответствующих моделям главы 17, которые были реализованы в виде лабораторных электронных устройств и изучены в экспериментах [Кузнецов и Пономаренко, 2008; Баранов и др., 2010]. С точки зрения гиперболической теории, статус динамики в этих системах, не так четко определен, поскольку классическая формулировка теории относится к конечномерным системам, а для систем с запаздыванием пространство состояний формально является бесконечномерным. Тем не менее, с физической точки зрения, принцип действия и наблюдаемые динамические явления очень похожи на те, которые реализуются в системах попеременно возбуждающихся осцилляторов, для которых гиперболическая природа хаотических аттракторов надежно установлена (см. главы 7, 11-13). С одной стороны, это говорит о наличии нетривиальной математической проблемы, заключающейся в том, чтобы дать строгие определения и сформулировать основы теории однородно гиперболических хаотических аттракторов, вложенных в бесконечномерное пространство состояния систем с запаздыванием. С другой стороны, учитывая прозрачный принцип действия и очевидные аналогии с системами попеременно возбуждающихся осцилляторов, на уровне физических рассуждений можно с достаточной уверенностью полагать, что хаотическая динамика в системах с запаздыванием рассматриваемого класса будет иметь те же достоинства для технических приложений, обладая, в частности, структурной устойчивостью (грубостью).

### **20.2.1 Система с запаздывающей обратной связью, модуляцией параметра и вспомогательным сигналом**

Система с запаздыванием на основе рассмотренной в разделе 17.2.1 модели в виде лабораторного экспериментального устройства описана в работе [Кузнецов и Пономаренко, 2008]. Система построена с использованием одиночного автоколебательного элемента с периодически моделированным управляющим параметром, что обеспечивает чередование стадий активности и подавления, и содержит цепь запаздывающей обратной связи, где производится квадратичное нелинейное преобразование сигнала и смещение его со вспомогательным опорным сигналом. На каждой новой стадии активности возбуждение осциллятора стимулируется сигналом, поступившим по цепи запаздывающей обратной связи, который был испущен на предыдущей стадии активности и подвергнутым преобразованию, обеспечивающему удвоение фазы колебаний.

Схема электронного устройства приведена на рис. 20.5. Активный элемент реализован с использованием LC-контура, отрицательного сопротивления на усилителе DA1 и нелинейного диссипативного элемента, составленного из полупроводниковых диодов D1-D6. Основная частота колебаний автогенератора составляет  $f_0 = \omega_0/2\pi = 3$  кГц. Модуляция параметра, ответ-

ственного за возбуждение автоколебаний, достигается за счет внесения дополнительной диссипации полевым транзистором VT1. Его сопротивление медленно изменяется во времени под действием внешнего сигнала по периодическому закону  $\Delta R \sim A \cos \Omega t = A \cos(2\pi t/T)$ . При этом на одном полупериоде осциллятор находится в режиме генерации, а на втором – под порогом генерации, т.е. имеет место чередование стадий активности и подавления. Возбуждение колебаний с определенной фазой при наступлении очередной стадии генерации стимулируется сигналом, который приходит по цепи запаздывающей обратной связи с выхода умножителя DA3. В цепи обратной связи сигнал подвергается квадратичному преобразованию (умножитель на микросхеме DA2), и дифференцированию посредством стандартной схемы на резисторе R2, конденсаторе C2 и операционном усилителе DA4. Далее сигнал проходит через цифровую линию задержки, содержащую аналого-цифровой преобразователь (ADC), компьютер и цифро-аналоговый преобразователь (DAC). Задержка реализована программным образом в компьютере. После прохождения линии задержки имеет место умножение на вспомогательный сигнал частоты  $f_0$  от внешнего генератора. Благодаря выбору времени запаздывания  $\tau=3T/4$ , сигнал, испущенный в момент достижения максимальной величины параметра возбуждения, оказывает действие на осциллятор как раз к началу очередной стадии активности, обеспечивая заправку для начала генерации на этой стадии. Из-за присутствия в цепи обратной связи квадратичного нелинейного преобразования, в схеме реализуется удвоение фазы при переходе от одного цуга колебаний к другому. Отношение частот внешних сигналов в эксперименте было  $N = \omega_0 / \Omega = f_0 T = 6$ .



**Рис.20.5** Блок-схема генератора хаоса, построенного на одиночном осцилляторе ван дер Поля с периодически модулированным параметром, с дополнительной цепью запаздывающей обратной связи, где сигнал претерпевает квадратичное нелинейное преобразование и смещение со вспомогательным сигналом постоянной частоты.

На рис. 20.6-20.8 приводятся некоторые экспериментальные результаты.

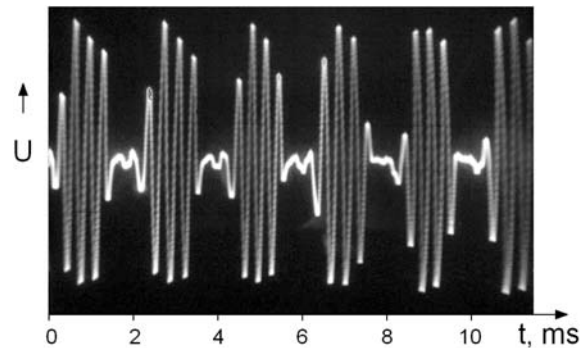


Рис.20.6 Оциллограмма сигнала, генерируемого лабораторным устройством.

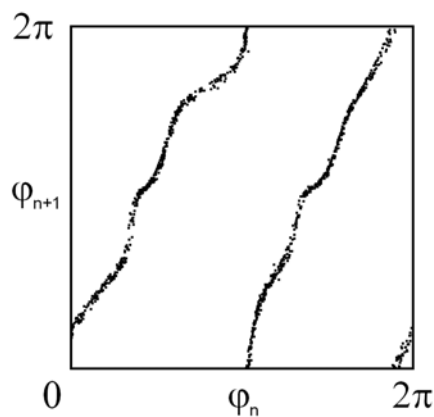
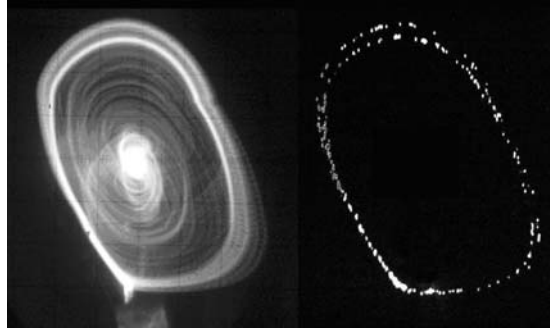


Рис.20.7 Диаграмма для фаз колебаний, отвечающих последовательным цугам, полученная обработкой сигнала, генерируемого экспериментальным устройством.

На рис. 20.6 показана временная зависимость генерируемого системой сигнала, где можно видеть последовательность цугов колебаний, отвечающих стадиям активности. Хаос проявляется в нерегулярных вариациях положения заполнения относительно огибающей сигнала в последовательных цугах. На рис. 20.7 показана диаграмма для фаз колебаний на последовательных стадиях активности. Для построения этой диаграммы сигнал, генерируемый устройством, записывался в компьютер в виде временного ряда с выхода аналого-цифрового преобразователя, две компоненты которого отвечали напряжению  $U_n$  и его временной производной  $\dot{U}_n$ , получаемой с выхода дифференцирующей цепочки. Выборка производилась с временным шагом, равным периоду медленной модуляции параметра, в моменты времени, отвечающие середине стадий активности осциллятора. Фазы вычислялись с помощью соотношения  $\varphi_n = \arg(U_n + i\omega_0^{-1}\dot{U}_n)$ . Как можно видеть из диаграммы, преобразование фазы за один период  $T$  соответствует в тополо-



гическом смысле растягивающему отображению окружности, или отображению Бернулли: один полный оборот для прообраза отвечает двукратному обходу полной окружности для образа.

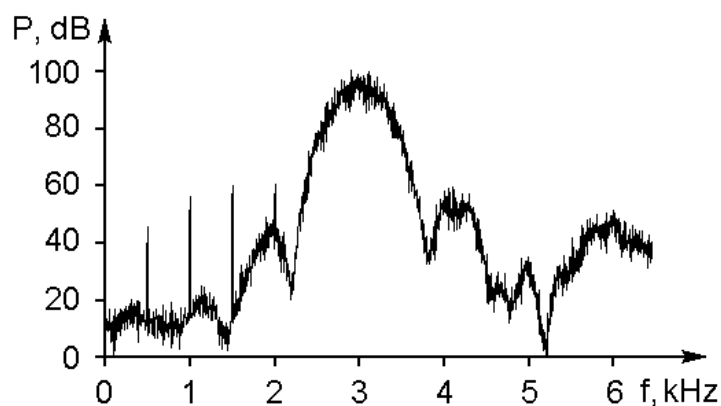


**Рис.20.8** Портрет аттрактора, сфотографированный с экрана осциллографа, который соответствует проекции на плоскость переменных  $(U, \dot{U})$  из многомерного фазового пространства системы с запаздыванием (а), и вид того же аттрактора в стробоскопическом сечении (б).

На рис. 20.8 показаны портреты аттрактора, сфотографированные с экрана осциллографа (а,б). Панель (а) отвечает проекции аттрактора из многомерного фазового пространства системы с запаздыванием на плоскость двух переменных  $(U, \dot{U})$ . Панель (б) соответствует стробоскопическому сечению аттрактора. При ее построении выборка производится с шагом по времени, равном периоду медленной модуляции параметра. Стробоскопическое изображение согласуется с ожидаемым видом соленоида Смейла – Вильямса, демонстрируя заметную поперечную фрактальную структуру, характерную для аттракторов этого типа.

На рис. 20.9 показан график спектральной плотности мощности, полученный обработкой временного ряда генерируемого системой сигнала, который был записан в компьютере. Спектр имеет явно выраженную непрерывную составляющую, причем его ширина на уровне половины максимальной плотности мощности составляет около 20% при средней частоте 3 кГц. Дискретные пики, присутствующие в левой части графика, обязаны своим происхождением наличию периодической составляющей, обусловленной модуляцией параметра.

Таким образом, эксперимент свидетельствует в пользу того, что наблюдаемая хаотическая динамика связана с аттрактором типа Смейла – Вильямса, вложенным в многомерное фазовое пространство системы с запаздыванием. Строгое обоснование этой гипотезы, как уже отмечалось, является непростой математической задачей.



**Рис.20.9** График спектральной плотности мощности в хаотическом режиме, полученный обработкой записанного в ходе эксперимента временного ряда, генерируемого лабораторным устройством.

### **20.2.2 Система с двумя петлями запаздывающей обратной связи и модуляцией параметра**

Перейдем к версии системы с запаздыванием, обсуждавшейся в параграфе 17.2.2. Она построена на основе одиночного осциллятора, пребывающего попеременно в состоянии активности или подавления, с двумя цепями запаздывающей обратной связи, одна из которых линейная, а другая характеризуется квадратичной нелинейностью, производящей вторую гармонику. Оба сигнала подвергаются смещению, и возникает сигнал на разностной частоте, используемый для стимуляции возбуждения осциллятора на следующей стадии активности. Компоновка устройства обеспечивают удвоение разности фаз двух соседних цугов колебаний по ходу процесса.

Рассмотрим схему, показанную на рис. 20.10 [Баранов и др., 2010]. Ее основой служит генератор ван дер Поля, выполненный с использованием операционного усилителя DA1, вносящего отрицательное сопротивление в колебательный контур LC ( $L=10$  мГн,  $C1=5$  мкФ). Нелинейность обеспечивается элементом в виде двух параллельных цепочек полупроводниковых диодов. Частота автоколебаний составляет около 700 Гц. Параметр надкритичности генератора модулируется внешним сигналом с частотой 71 Гц, подаваемым на затвор полевого транзистора VT1. Сигнал генератора ван дер Поля возводится в квадрат при помощи аналогового умножителя DA2 и дифференцируется схемой на операционном усилителе DA4. Сигналы с выхода схемы дифференцирования и с генератора ван дер Поля подаются на два входа аналого-цифрового преобразователя и в компьютер, где реализована двухканальная линия задержки (времена задержки 21 мс и 7 мс соответственно, что составляет примерно  $3/2$  и  $1/2$  периода модуляции параметра). Выходные сигналы подаются на входы аналогового умножителя, выход

которого подключен к катушке индуктивности колебательного контура генератора ван дер Поля. Таким образом, данное устройство качественно соответствует уравнению (17.16). Для анализа фазовых соотношений сигнал генератора ван дер Поля (напряжение на конденсаторе  $C_1$ ) записывался в компьютер вместе со второй компонентой (производной напряжения) при помощи дополнительного (не показанного на схеме) аналого-цифрового преобразователя.

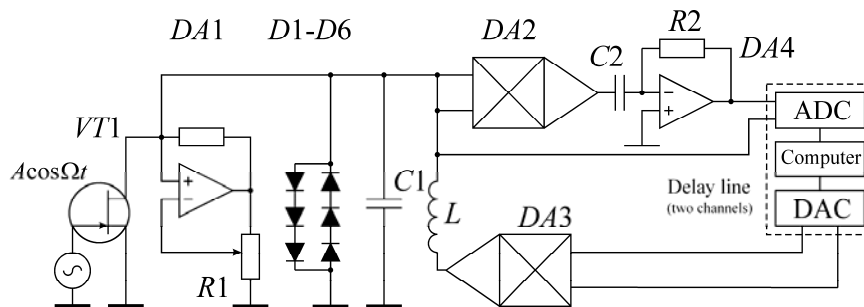


Рис.20.10 Схема экспериментального устройства.

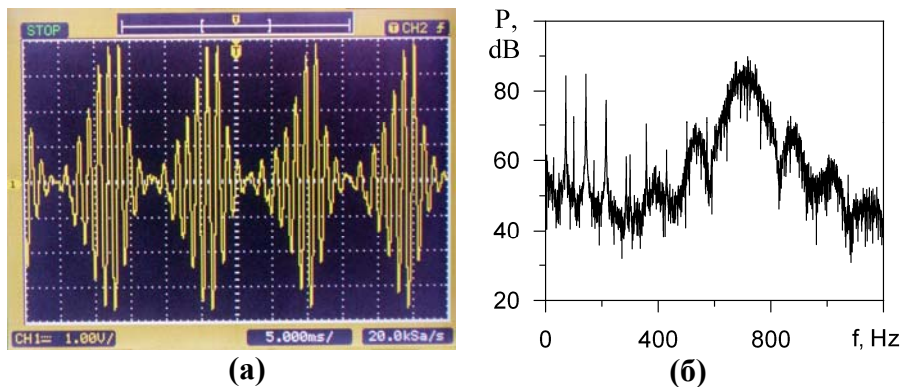
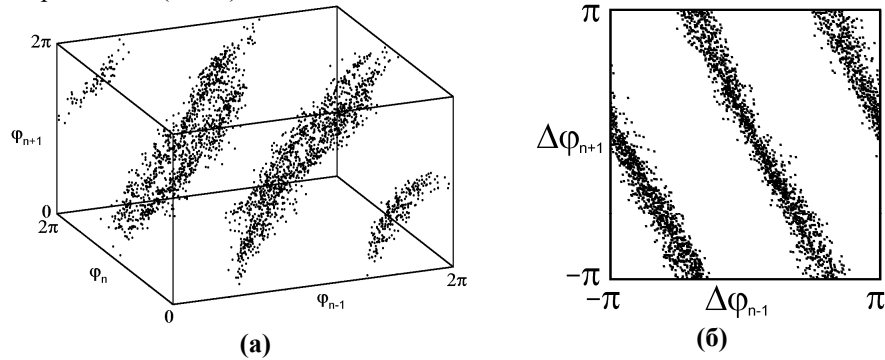


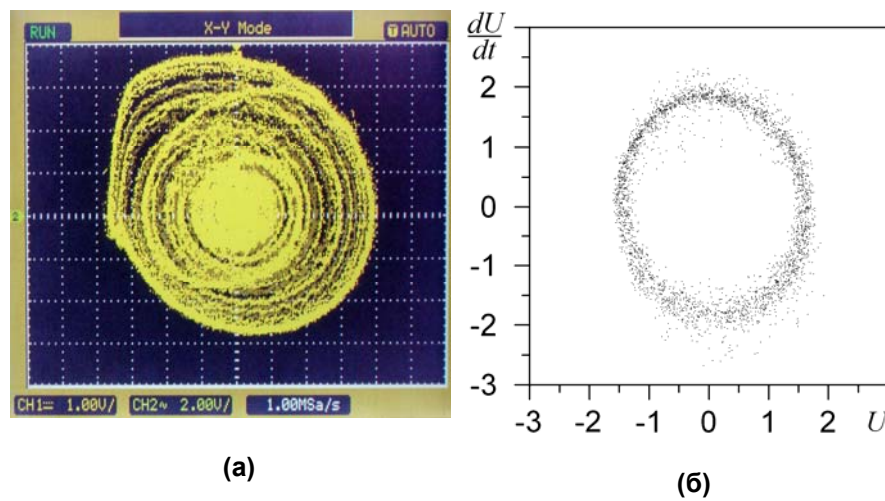
Рис.20.11. Реализация хаотического сигнала в эксперименте, сфотографированная с экрана осциллографа (а) и спектр мощности в этом режиме (б).

На рис. 20.11 показаны реализация хаотического сигнала, полученная в эксперименте, и спектр колебаний осциллятора в режиме генерации хаоса. Они качественно неплохо согласуются, соответственно, с рисунками 17.10 и 17.14. На рис. 20.12 приводятся итерационные диаграммы для фаз, полученные обработкой экспериментальных данных, записанных в компьютер с помощью аналого-цифрового преобразователя ADC в виде двухкомпонентного временного ряда для напряжения на конденсаторе  $C_1$  и его производной по времени. На панели (а) представлены в виде трехмерного графика данные, относящиеся к трем последовательным цугам колебаний, причем вид графика

ка находится в качественном соответствии с формулой (17.17). Фазы вычисляются в моменты времени, отвечающие серединами стадий активности осциллятора  $\varphi_n = \arg(U_n + i\omega_0^{-1}\dot{U}_n)$ . На панели (б) приводится диаграмма для разностей фаз  $\Delta\varphi_n = \varphi_n - \varphi_{n-1}$ , которая качественно хорошо согласуется с выражением (17.18).



**Рис.20.12.** Итерационная диаграмма для фаз в виде трехмерного графика, построенная по результатам эксперимента (а) и диаграмма для разностей фаз (б)

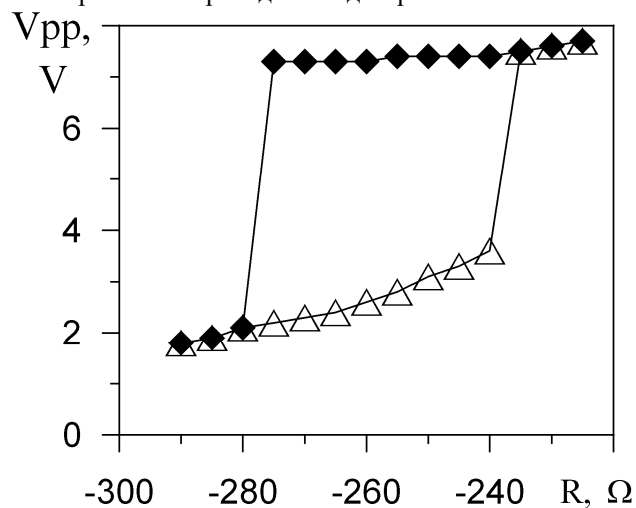


**Рис.20.13.** Портрет аттрактора в проекции на фазовую плоскость осциллятора, снятый с экрана осциллографа (а), и портрет аттрактора в стробоскопическом сечении, построенный путем обработки экспериментальных данных (б)

На рис.20.13 показаны полученные в эксперименте портреты аттрактора. Панель (а) представляет собой фотографию, сделанную с экрана осциллографа; по горизонтальной оси отсчитывается напряжение на конденсаторе  $C_1$ , а по вертикальной – временная производная этого напряжения. Напом-

ним, что аттрактор системы с запаздыванием представляет собой объект в бесконечномерном пространстве состояний, так что представленное на рисунке изображение следует рассматривать, как двумерную проекцию этого объекта. На панели (б) приводится портрет аттрактора в стробоскопическом сечении. Этот аттрактор, вложенный в многомерное пространство состояний системы с запаздыванием, как можно полагать, должен быть отнесен к классу частично гиперболических аттракторов.

В эксперименте нашло подтверждение присутствие в системе отмеченного в разделе 17.3 эффекта жесткого возбуждения. При регулировке отрицательного сопротивления, вносимого в колебательный контур благодаря наличию операционного усилителя, можно было наблюдать гистерезис, что иллюстрируется на рис. 20.14. При постепенном движении по параметру слева направо вдоль нижней ветви графика, интенсивных колебаний в системе нет; они возникают при переходе некоторого порога, но сохраняются при обратном движении по параметру в относительно широком диапазоне, где ранее они отсутствовали. Это соответствует перемещению вдоль верхней ветви петли гистерезиса на приведенной диаграмме.



**Рис.20.14.** Диаграмма, иллюстрирующая гистерезис при возбуждении колебаний в экспериментальном устройстве. Представлена зависимость напряжения «от пика до пика» порождаемого системой сигнала от величины отрицательного сопротивления, вносимого в колебательный контур благодаря присутствию операционного усилителя.