

4.6 Движение по геодезическим линиям на поверхности отрицательной кривизны и механическая система с гиперболической динамикой

Свободное механическое движение частицы в пространстве с кривизной осуществляется, как известно, по *геодезическим линиям* метрики, заданной положительно-определенной квадратичной формой с гладко зависящими от координат коэффициентами. В двумерном случае квадрат инфинитезимального смещения дается выражением

$$ds^2 = E(x, y)dx^2 + F(x, y)dxdy + G(x, y)dy^2. \quad (4.18)$$

Через коэффициенты квадратичной формы можно найти *гауссову кривизну*, используя *формулу Бриоски* [Struik, 1988]

$$K = \frac{1}{(EG - F^2)^2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -\frac{1}{2}E_{yy} + F_{xy} - \frac{1}{2}G_{xx} & \frac{1}{2}E_x & F_x - \frac{1}{2}E_y & 0 & \frac{1}{2}E_y & \frac{1}{2}G_x \\ F_y - \frac{1}{2}G_x & E & F & -\frac{1}{2}E_y & E & F \\ \frac{1}{2}G_y & F & G & \frac{1}{2}G_x & F & G \end{array} \right). \quad (4.19)$$

В случае отрицательной кривизны движение по геодезическим линиям характеризуется неустойчивостью по отношению к поперечным возмущениям. Поэтому, если движение происходит в ограниченной области, то оно оказывается хаотическим. Анализ динамики в этой ситуации восходит к Адамару; данный предмет был одним из главных источников вдохновения для создания гиперболической теории [Аносов, 1967].

Проиллюстрируем основные свойства движения на компактном многообразии отрицательной кривизны на конкретном примере, следуя работе [Balazs and Voros, 1986].

Поверхность постоянной отрицательной кривизны (плоскость Лобачевского или псевдосферу) можно представить моделью Пуанкаре, в которой точки поверхности изображаются точками в единичном круге, а прямые (т.е. геодезические) дугами окружностей, ортогональными краю диска (рис.4.13а). Метрика в модели Пуанкаре задается выражением

$$ds^2 = \frac{4(dx^2 + dy^2)}{(1 - x^2 - y^2)^2}, \quad (4.20)$$

и ей соответствует постоянная отрицательная кривизна $K = -1$, что можно проверить с помощью формулы (4.19).

Функция Лагранжа свободной частицы массы μ содержит только член кинетической энергии, который, с учетом (4.20), представляется как

$$L = W = \frac{2\mu(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{(1 - x^2 - y^2)^2}. \quad (4.21)$$

Уравнения Эйлера – Лагранжа, задающие движение частицы, получаются отсюда стандартным образом и имеют вид

$$\ddot{x} = 2 \frac{x\dot{y}^2 - x\dot{x}^2 - 2y\dot{x}\dot{y}}{(1 - x^2 - y^2)^2}, \quad \ddot{y} = 2 \frac{y\dot{x}^2 - y\dot{y}^2 - 2x\dot{x}\dot{y}}{(1 - x^2 - y^2)^2}. \quad (4.22)$$

При движении в соответствии с этими уравнениями сохраняется кинетическая энергия $W = 4\mu(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)(1 - x^2 - y^2)^{-2}$, так что движение имеет место по геодезическим линиям метрики, заданной выражением (4.20). Скорость, как производная по времени от расстояния, отсчитываемого по геодезической линии, дается выражением

$$\dot{s}^2 = \frac{4(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{(1 - x^2 - y^2)^2} = 2W\mu^{-1}. \quad (4.23)$$

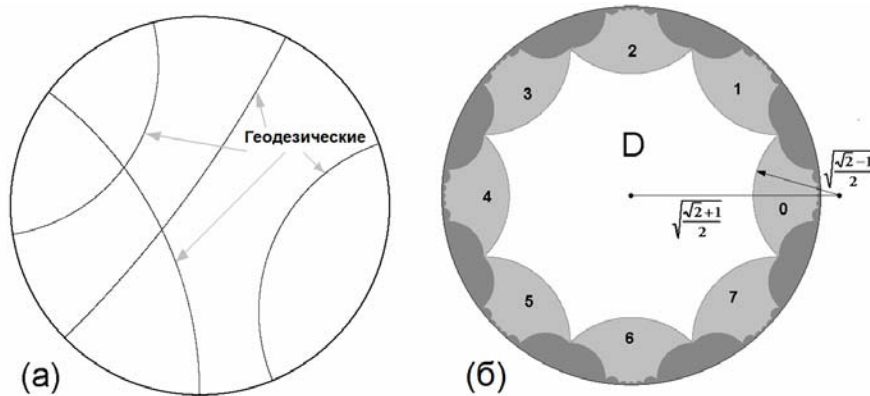


Рис. 4.13. Единичный диск, представляющий плоскость Лобачевского в модели Пуанкаре с изображенными на нем представителями семейства геодезических линий (а). Область D , в которой рассматривается движение частицы, и множество эквивалентных областей, получаемых из области D заменой переменных (4.24) при $m=0,1,\dots,7$ (б).

Рассмотрим движение частицы внутри восьмиугольника D , ограниченного дугами окружностей (рис.4.13б). Из-за симметрии присущей псевдосфере, восьмиугольник может рассматриваться как эквивалентный каждой из восьми областей, присоединенных к его сторонам, которые в модели Пуанкаре имеют вид искаженных восьмиугольников меньшего размера. Замены

переменных, соответствующие преобразованию каждой из этих областей к восьмиугольнику D , даются выражениями

$$x' + iy' = \frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}(x+iy) + e^{i\pi m/4}\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{\sqrt{1+\sqrt{2}} - \sqrt{2+\sqrt{2}}e^{-i\pi m/4}(x+iy)}, \quad (4.24)$$

где m – индекс соответствующей области. По ходу движения частицы каждый раз, когда она пересекает границу восьмиугольника D , можно представлять ее, как появляющуюся на противоположной стороне с координатами, пересчитанными в соответствии с (4.24), и компонентами скорости, полученными как производные от этого выражения:

$$\dot{x}' + i\dot{y}' = \frac{(3+3\sqrt{2})(\dot{x} + i\dot{y})}{\left(\sqrt{1+\sqrt{2}} - \sqrt{2+\sqrt{2}}e^{-i\pi m/4}(x+iy)\right)^2}. \quad (4.25)$$

Точки двух противоположных участков границы области D можно отождествить, представляя себе эти участки, как подклеенные друг к другу. С точки зрения топологии, получившийся в результате объект отвечает бублику с двумя дырками или сфере с двумя приклеенными ручками и, согласно принятой классификации, представляет собой многообразие рода 2.

На рис. 4.14 показана траектория свободного движения частицы в области D , полученная посредством численного решения дифференциальных уравнений (4.22) с добавлением правил пересечения границ (4.24) и (4.25). При большом времени наблюдения орбита плотно покрывает всю область.

Показатели Ляпунова можно получить численно методом Бенетина из совместного решения уравнений движения (4.22) и четырех комплектов линейных уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{x}} &= 2 \frac{\tilde{x}\dot{y}^2 + 2x\dot{y}\dot{y} - \tilde{x}\dot{x}^2 - 2x\dot{x}\dot{x} - 2\tilde{y}\dot{x}\dot{y} - 2y\dot{x}\dot{y} - 2y\dot{x}\dot{y}}{(1-x^2-y^2)^2} \\ &+ 4 \frac{(x\dot{y}^2 - x\dot{x}^2 - 2y\dot{x}\dot{y})(x\tilde{x} + y\tilde{y})}{(1-x^2-y^2)^3}, \\ \ddot{\tilde{y}} &= 2 \frac{\tilde{y}\dot{x}^2 + 2y\dot{x}\dot{x} - \tilde{y}\dot{y}^2 - 2y\dot{y}\dot{y} - 2\tilde{x}\dot{x}\dot{y} - 2x\dot{x}\dot{y} - 2x\dot{x}\dot{y}}{(1-x^2-y^2)^2} \\ &+ 4 \frac{(y\dot{x}^2 - y\dot{y}^2 - 2x\dot{x}\dot{y})(x\tilde{x} + y\tilde{y})}{(1-x^2-y^2)^3}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Однако, благодаря специфике данной конкретной задачи, показатели Ляпунова удается найти явно. Если представить вектор $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}, \tilde{y})$ в локально определенном базисе $(\mathbf{e}_{\parallel}, \mathbf{e}_{\perp})$, где \mathbf{e}_{\parallel} единичный вектор, направленный вдоль геодезической линии, а \mathbf{e}_{\perp} ортогональный к нему единичный вектор, то, записав вектор инфинитезимального возмущения в виде $\tilde{\mathbf{x}} = J_{\parallel}\mathbf{e}_{\parallel} + J_{\perp}\mathbf{e}_{\perp}$, можно вывести уравнения для коэффициентов

$$\ddot{J}_{\parallel} = 0, \ddot{J}_{\perp} = -K\dot{s}^2 J_{\perp}, \quad (4.27)$$

где K – гауссова кривизна. (Эти уравнения справедливы для общего случая свободного движения частицы в метрике (4.18) с произвольной гладкой зависимостью коэффициентов от координат; при этом величину K надо понимать как локальную кривизну, зависящую от мгновенных координат x, y согласно формуле (4.19).)

Общее решение первого уравнения (4.27) является линейной комбинацией функций 1 и t . Таким образом, его вклад в спектр показателей Ляпунова состоит в появлении двух нулевых показателей. Что касается второго уравнения, то для рассматриваемой системы величина \dot{s}^2 равна удвоенному отношению постоянной кинетической энергии частицы к ее массе, см. (4.20). При постоянной отрицательной кривизне K , фундаментальные решения будут $e^{\sqrt{KW\mu^{-1}}t}$ и $e^{-\sqrt{KW\mu^{-1}}t}$. Таким образом, спектр показателей Ляпунова содержит один положительный показатель, два нулевых, и один отрицательный, а именно:

$$\lambda_1 = \sqrt{2KW\mu^{-1}}, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = -\sqrt{2KW\mu^{-1}}. \quad (4.28)$$

Присутствие положительного показателя говорит о хаотическом характере динамики. То обстоятельство, что сумма всех показателей нулевая, отражает консервативную природу рассматриваемой системы.

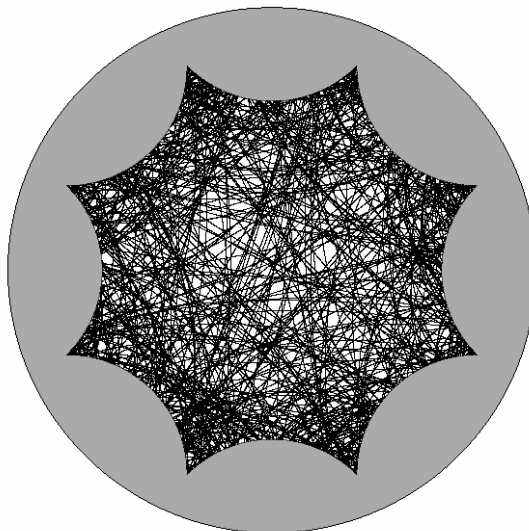


Рис.4.14 Типичная траектория свободного движения частицы на поверхности постоянной отрицательной кривизны. Движение описывается уравнениями (4.22), дополненными правилами пересечения границ (4.24) и (4.25).

Результаты прямого численного расчета показателей Ляпунова хорошо согласуются с теоретическим результатом (4.28). Например, для траектории с начальными условиями $x = 0, y = 0, \dot{x} = 0.6, \dot{y} = 0.8$ имеем $W = 2\mu$ и, с учетом того, что $K = -1$, получаем $\sqrt{2KW\mu^{-1}} = 2$. Результат вычисления показателей по методу Бенеттина на временном интервале $\Delta t = 1000$ таков:

$$\lambda_1 = 2.0004, \lambda_2 = 0.0038, \lambda_3 = -0.0038, \lambda_4 = -2.0004. \quad (4.29)$$

Очевидно, отклонения от результата (4.28) надо интерпретировать как погрешность вычислений.

Тип динамики, подобный рассмотренному примеру, оказывается возможным реализовать в технически несложной механической системе – шарнирном механизме «*тройное соединение*», обсуждавшемся в свое время в научно-популярной математической статье Тёрстона и Уикса [Тёрстон и Уикс, 1984], см. рис. 4.15. Гиперболическая природа динамики этой системы установлена в работах МакКэя и Ханта [Hunt and MacKay, 2003; Hunt, 2000; MacKay, 2005].

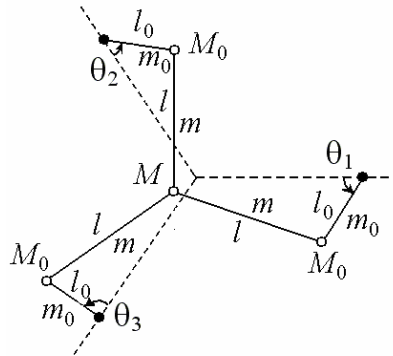


Рис.4.15. Механическая система Тёрстона и Уикса. «тройное соединение».

Механизм составлен из трех шарниров, закрепленных в вершинах равностороннего треугольника (черные кружки на рисунке), вокруг которых могут свободно вращаться присоединенные к ним концами идентичные стержни. Каждый стержень на другом конце имеет подвижный шарнир, и к этим трем шарнирам прикреплены другие три одинаковых стержня, противоположные концы которых соединены вместе посредством еще одного подвижного шарнира. (Подвижные шарниры обозначены незаполненными кружками.) Мгновенная конфигурация шарнирного механизма задается угловыми переменными $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, но только две из них являются независимыми в силу наложенных механических связей. Таким образом, конфигурационное пространство представляет собой двумерное многообразие. Топологически, как указали Тёрстон и Уикс, это поверхность рода 3 («крендель с тремя дырками»).

В отсутствие трения и внешних сил движение происходит по инерции, с сохранением кинетической энергии. Кинетическая энергия выражается, как квадратичная форма, через обобщенные скорости – временные производные локальных координат на двумерном многообразии. Эта квадратичная форма, коэффициенты которой зависят от соотношения длин и масс элементов конструкции, задает метрику на двумерном многообразии, причем движение имеет место по геодезическим линиям этой метрики. Перебором вариантов был найден набор параметров, при котором метрика характеризуется отрицательной кривизной во всем конфигурационном пространстве (на двумерном многообразии), а при этом, как известно [Аносов, 1967; Balazs and Voros, 1986], имеет место гиперболический хаос в его консервативной версии. Типичная траектория, полученная при численном решении механических уравнений движения, показана на рис.4.16 на трехмерном графике в пространстве $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$. Вычисления выполнены при выборе длин и масс, при которых, согласно анализу МакКэя и Ханга, гиперболичность должна иметь место вследствие глобально отрицательной кривизны метрики на многообразии.

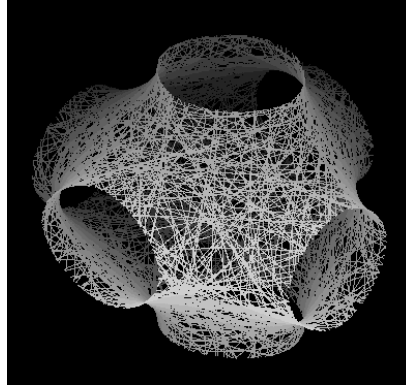


Рис.4.16. Траектория в трехмерном пространстве $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, полученная для системы Тёрстона и Уикса при величинах длин и масс $l = \frac{41}{40}$, $l_0 = \frac{7}{40}$, $m = \frac{9}{100}$, $M = \frac{13}{100}$, $M_0 = \frac{1}{5}$, $m_0 = 0$. Согласно результатам МакКэя и Ханта, при этих параметрах движение гиперболическое вследствие глобально отрицательной кривизны метрики на двумерном многообразии в конфигурационном пространстве.

Как утверждают МакКэй и Хант, при добавлении трения, потенциального поля и надлежащего управления посредством механизма обратной связи, можно получить систему с гиперболическим аттрактором. Пока, однако, не проведено конкретного исследования, в рамках которого такой аттрактор был бы в явном виде продемонстрирован на уровне компьютерного моделирования или в эксперименте.