

### 2.3. Сценарий Ландау-Хопфа в ансамбле осцилляторов

В описанной выше системе наблюдался следующий каскад бифуркаций: рождение предельного цикла в результате бифуркации Андронова-Хопфа, рождение предельного цикла в результате бифуркации Неймарка-Сакера и возникновение двумерного тора в результате квазипериодической бифуркации Неймарка-Сакера (квазипериодической бифуркации Хопфа). Таким образом, в рассмотренном случае наблюдаются три первых «шага» в *сценарии Ландау-Хопфа*. Может ли продолжиться этот каскад? Или, иначе говоря, возможен ли сценарий Ландау-Хопфа мягкого рождения все более высокоразмерных торов с выходом за порог все новых колебательных мод?

Такой сценарий возможен, однако, требуется выполнение некоторых дополнительных условий.

Во-первых, сама концепция сценария Ландау-Хопфа требует неидентичности по управляющим параметрам  $\lambda$ . Действительно, разные моды должны иметь разную степень возбуждения. Именно тогда, варьируя параметр, отвечающий за диссипацию в системе (аналог числа Рейнольдса), можно наблюдать последовательный выход за порог новых мод.

Во-вторых, все моды должны быть достаточно разнесены по частоте. В противном случае возникают эффекты синхронизации, которые приводят к различным резонансам, и, как следствие, к изменению бифуркационных сценариев.

В третьих, желательно устранить эффекты, связанные с наличием разного числа соседей у каждого осциллятора в цепочке. Тогда управляющий параметр каждого отдельного осциллятора  $\lambda_i$  будет строго управлять соответствующей квазипериодической бифуркацией.

Построим модель, которая удовлетворяет всем перечисленным требованиям. Это будет система из пяти осцилляторов с эквидистантным спектром собственных частот. При этом оставим единственный частотный параметр  $\Delta$ , который будет управлять рассинхронизмом сразу всех осцилляторов. Все осцилляторы будут неидентичными по управляющим параметрам, что обеспечит поэтапный вывод за порог возмущения соответствующих мод. Кроме того, выберем объединение осцилляторов в ансамбль в виде связи «каждый с каждым», т.е. в форме сети. Это позволяет обеспечить одинаковое число соседей у каждого осциллятора.

Уравнения такой модели имеют вид:

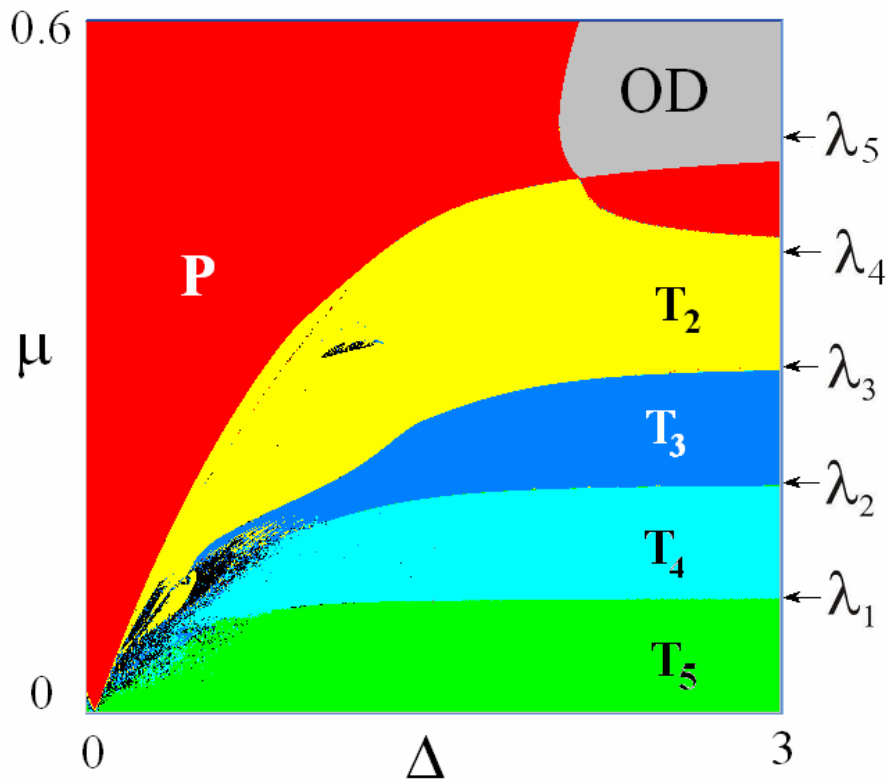
$$\begin{aligned}
\ddot{x} - (\lambda_1 - x^2)\dot{x} + x + \frac{\mu}{4}(4\dot{x} - \dot{y} - \dot{z} - \dot{w} - \dot{v}) &= 0, \\
\ddot{y} - (\lambda_2 - y^2)\dot{y} + (1 + \frac{\Delta}{4})y + \frac{\mu}{4}(4\dot{y} - \dot{x} - \dot{z} - \dot{w} - \dot{v}) &= 0, \\
\ddot{z} - (\lambda_3 - z^2)\dot{z} + (1 + \frac{\Delta}{2})z + \frac{\mu}{4}(4\dot{z} - \dot{y} - \dot{x} - \dot{w} - \dot{v}) &= 0, \\
\ddot{w} - (\lambda_4 - w^2)\dot{w} + (1 + \frac{3\Delta}{4})w + \frac{\mu}{4}(4\dot{w} - \dot{y} - \dot{x} - \dot{z} - \dot{v}) &= 0, \\
\ddot{v} - (\lambda_5 - v^2)\dot{v} + (1 + \Delta)v + \frac{\mu}{4}(4\dot{v} - \dot{y} - \dot{x} - \dot{z} - \dot{w}) &= 0
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Здесь  $\lambda_i$  – параметры возбуждения автономных осцилляторов,  $\Delta$  – определяет частотную отстройку осцилляторов, а частота первого осциллятора принята за единицу. Положим далее  $\lambda_1 = 0.1$ ,  $\lambda_2 = 0.2$ ,  $\lambda_3 = 0.3$ ,  $\lambda_4 = 0.4$ ,  $\lambda_5 = 0.5$ . Карта ляпуновских показателей системы (2.10) в этом случае на плоскости  $(\Delta, \mu)$  показана на рис.2.12.

Можно видеть, что в системе действительно устранены основные резонансные эффекты. Достаточно выраженный язык резонансного двухчастотного тора можно видеть лишь в области  $\Delta \leq 0.5$ , между областью пятичастотных торов и полной синхронизации. Интересно отметить, что он погружен в область хаоса, возникающую при малых связях.<sup>1</sup> При этом трехчастотные, четырехчастотные и отчасти пятичастотные торы разрушены, хотя хаос и является слабым. (Типичные значения положительного ляпуновского показателя составляют величины порядка  $10^{-3}$ - $10^{-2}$ .) Отметим, однако, что возможен и небольшой островок хаоса в области двухчастотных торов при величине связи порядка 0,3-0.4.

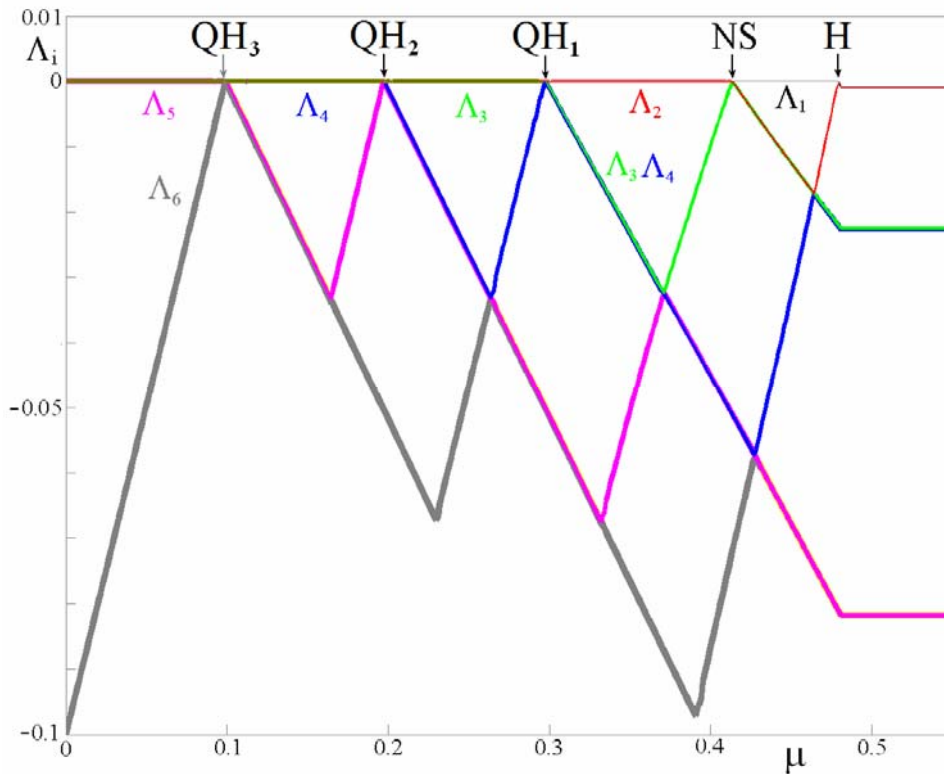
В свою очередь, в области большого рассинхронизма осцилляторов  $\Delta \geq 1$  наблюдается система торов все более высокой размерности. Границы этих областей в асимптотике  $\Delta \rightarrow \infty$  отвечают значениям соответствующих управляющих параметров  $\lambda_i$ . Для удобства восприятия эти значения отмечены стрелками по правому обрезу карты.

<sup>1</sup> Наличие хаоса при малой связи в сетях из небольшого числа элементов было обнаружено в работах [47,48], и там этот эффект получил название «фазовый хаос» (phase chaos).



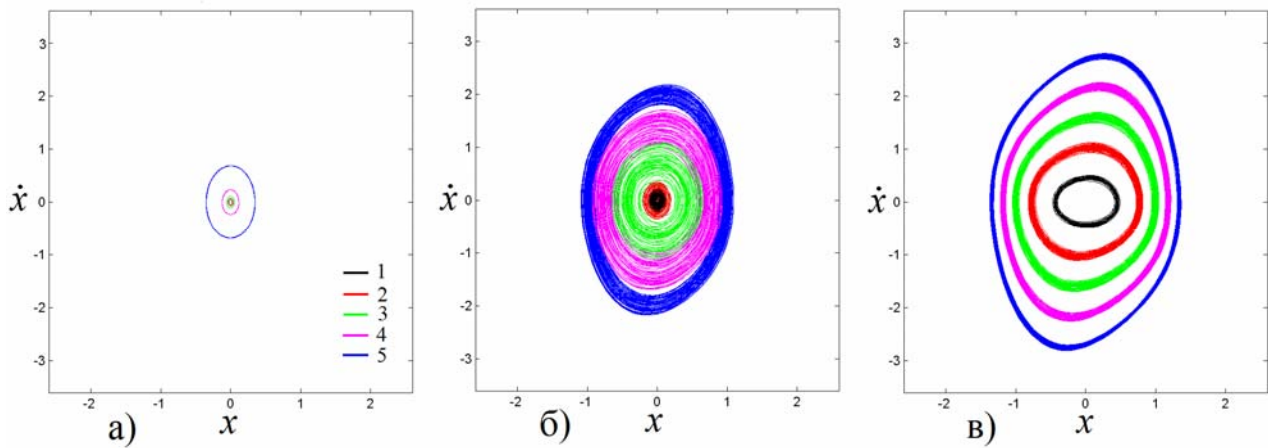
**Рис.2.12.** Карта ляпуновских показателей сети из пяти неидентичных осцилляторов Ван-дер-Поля с глобальной связью (2.10);  $\lambda_1 = 0.1$ ,  $\lambda_2 = 0.2$ ,  $\lambda_3 = 0.3$ ,  $\lambda_4 = 0.4$ ,  $\lambda_5 = 0.5$ .

Убедимся, что здесь имеет место именно каскад квазипериодических бифуркаций Неймарка-Сакера  $QH$  для торов все более высокой размерности. Для этого обратимся к графикам ляпуновских показателей на рис.2.13, построенным вдоль линии  $\Delta = 3$ . Можно видеть, что при больших значениях величины связи все показатели отрицательные, и имеет место режим гибели колебаний. Затем в точке  $H$  происходит бифуркация Андронова-Хопфа, и один показатель  $\Lambda_1$  становится нулевым. Далее в точке  $NS$  происходит бифуркация Неймарка-Сакера и еще один показатель  $\Lambda_2$  становится нулевым. В точке  $QH_1$  становится равным нулю показатель  $\Lambda_3$ , и рождается трехмерный тор. Чтобы идентифицировать характер бифуркации замечаем, что до бифуркации показатели  $\Lambda_3$  и  $\Lambda_4$  совпадали. Это характерно для квазипериодической бифуркации Неймарка-Сакера [38]. Далее совершенно аналогично ведут себя оставшиеся показатели, так что в точке  $QH_2$  в результате второй квазипериодической бифуркации Неймарка-Сакера рождается четырехмерный тор, а в точке  $QH_3$  – пятимерный.



**Рис.2.13.** Графики зависимости ляпуновских показателей системы (2.10) от величины диссипативной связи,  $\Delta = 3$ .  $QH_i$  – каскад квазипериодических бифуркаций Неймарка-Сакера (квазипериодических бифуркаций Хопфа).

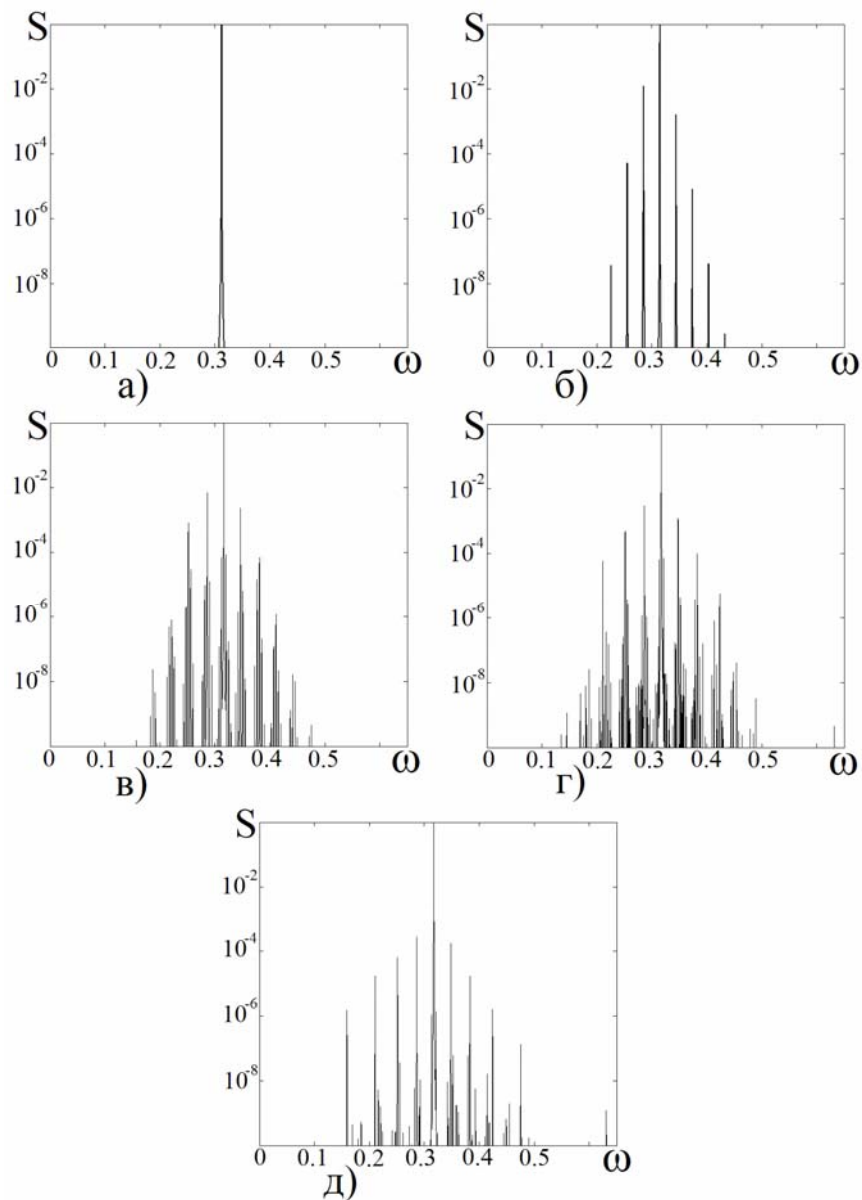
Рис.2.14 и рис.2.15 иллюстрируют развитие сценария Ландау-Хопфа в такой системе. На рис.2.14 показана эволюция фазовых портретов осцилляторов, наблюдающаяся при уменьшении параметра диссипации. На каждом рисунке даны одновременно портреты всех пяти осцилляторов на плоскости «динамическая переменная – скорость ее изменения». Траектории разных осцилляторов показаны разным цветом. Рис.2.14а отвечает достаточно большой диссипации  $\mu = 0.45$ . В этом случае наблюдается вложенный в многомерное пространство состояний предельный цикл. Хорошо видно, что колебания пятого осциллятора наиболее интенсивные. Это обусловлено тем, что его управляющий параметр  $\lambda$  самый большой. Интенсивность колебаний для остальных осцилляторов последовательно убывает. На рис.2.14б для случая  $\mu = 0.25$ , отвечающего трехчастотному тору, траектории всех осцилляторов возмущены квазипериодическим образом. Однако, на рис.2.14в, при  $\mu = 0.05$ , когда реализуется пятичастотный тор, размер возмущений снова падает: малая связь слабо возмущает орбиты.



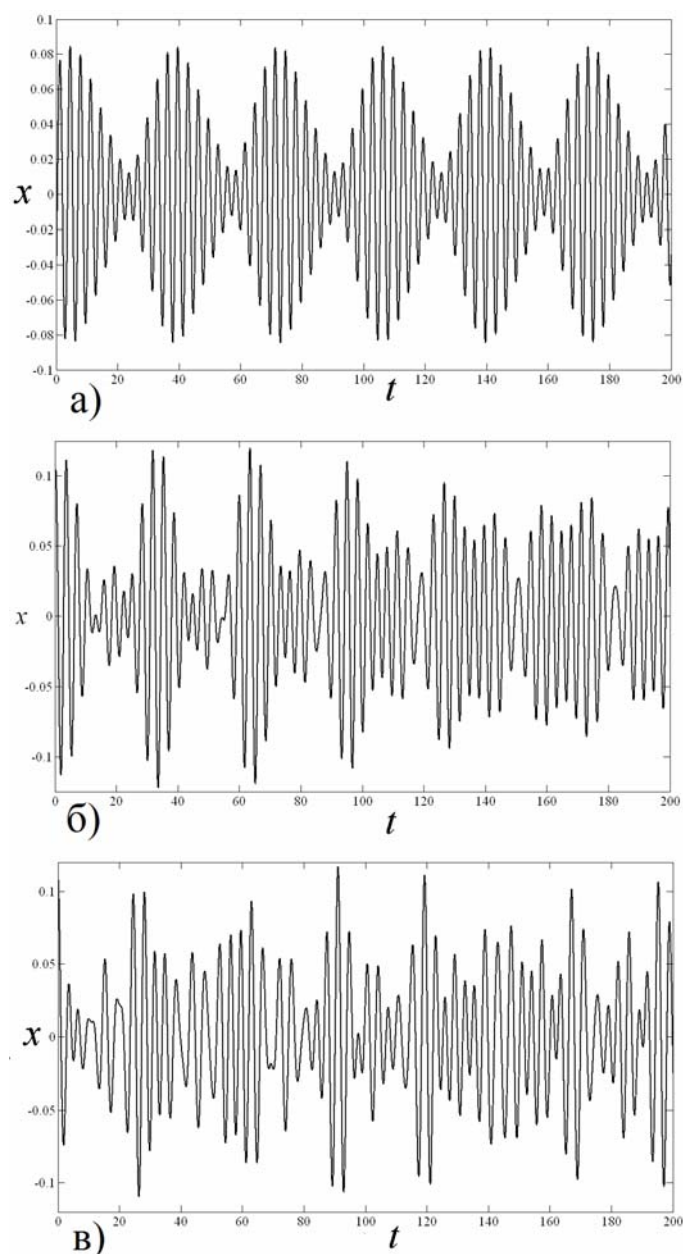
**Рис.2.14.** Эволюция фазовых портретов системы (2.10) при уменьшении диссипации в системе: а) предельные циклы  $\mu=0.45$ , б) трехчастотный тор  $\mu=0.25$ , в) пятичастотный тор  $\mu=0.05$ . Цифры отвечают номеру осциллятора. Параметр частотной расстройки  $\Delta=3$ .

На рис.2.15 показан спектр Фурье колебаний пятого осциллятора, отвечающий развитию сценария Ландау-Хопфа в системе (2.10). Можно видеть последовательное обогащение спектра колебаний все новыми линиями, отвечающими квазипериодичности все более высокой размерности. Отметим, однако, что в случае рис.2.15д степень «сложности» спектра на визуальном уровне не увеличивается, а, скорее, уменьшается, хотя в системе имеет место пятимерный тор. Причина состоит в существенном уменьшении уровня связи. При очень малой связи аттрактор оказывается слабо возмущенным, и становится близким к предельному циклу системы автономных осцилляторов, рис.2.14в. Поэтому высота соответствующих линий в спектре становится меньше, хотя в более мелких масштабах спектр остается сложным.

На рис.2.16 приведены примеры реализаций, а именно, зависимостей обобщенной координаты первого осциллятора  $x(t)$  от времени. Представленные графики отвечают режимам двухчастотного, трехчастотного и четырехчастотного торов. На рис.2.16а можно видеть типичную картину биений, характерную для двухчастотных колебаний. Рис.2.16б и рис.2.16в демонстрируют заметно более сложный сигнал. Интересно отметить, что для двухчастотного режима процессы установления происходят очень быстро: практически сразу система выходит на квазипериодический аттрактор. Однако уже для трехчастотного тора время установления колебаний заметно увеличивается ( $t \approx 100$  по визуальной оценке для рисунка 2.16б).



**Рис.2.15** Спектр колебаний пятого осциллятора системы (2.10), отвечающий развитию сценария Ландау-Хопфа: а) режим полной синхронизации  $\mu=0.45$ ; б) двумерный тор  $\mu=0.35$ ; в) трехмерный тор  $\mu=0.25$ ; г) четырехмерный тор  $\mu=0.15$ ; д) пятимерный тор  $\mu=0.05$ . Остальные параметры соответственно  $\lambda_1 = 0.1$ ,  $\lambda_2 = 0.2$ ,  $\lambda_3 = 0.3$ ,  $\lambda_4 = 0.4$ ,  $\lambda_5 = 0.5$  и  $\Delta = 3$ .

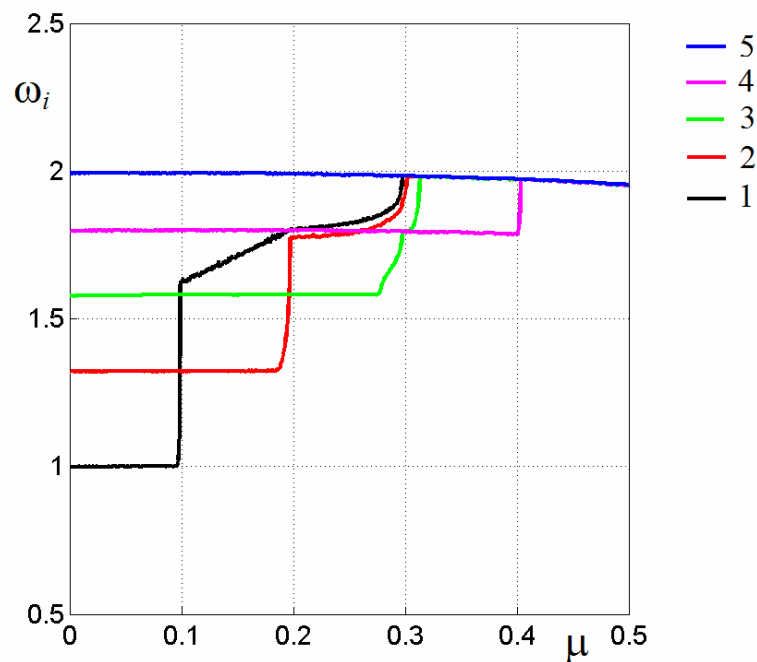


**Рис.2.16.** Реализации для первого осциллятора в системе (2.10), случаи а) двухчастотного тора,  $\mu=0.35$ ; б) трехчастотного тора,  $\mu=0.25$ ; в) четырехчастотного тора,  $\mu=0.15$ .

На рисунке 2.17 показана зависимость наблюдаемых частот (дерево синхронизации) от параметра диссипативной связи  $\mu$  для рассматриваемой системы. Частоты определялись, как средние скорости изменения фазы соответствующих осцилляторов. Они найдены путем подсчета числа пересечений секущих Пуанкаре, отвечающих нулевым значениям координат соответствующих осцилляторов. Из рис.2.17 видно, что при достаточно большой связи все частоты совпадают и примерно равны собственной частоте наиболее возбужденного пятого осциллятора<sup>2</sup>. С уменьшением силы связи в

<sup>2</sup> В соответствии с (2.10) собственная частота пятого осциллятора  $\omega_5 = \sqrt{1+\Delta}$ , четвертого –  $\omega_4 = \sqrt{1+3\Delta/4}$  и т.д.

точке бифуркации Неймарка-Сакера наблюдается появление новой частоты, близкой к собственной частоте четвертого осциллятора. Затем возникает новая ветвь (зеленый цвет на рисунке), частота для которой быстро приближается к собственной частоте третьего осциллятора. Интересные особенности наблюдаются для оставшихся двух осцилляторов. Их частоты претерпевают резкое изменение практически одновременно с третьим осциллятором, но они примерно близки к более высокой частоте четвертого осциллятора. Другими словами, возникновение нового режима заставляет слабо возбужденные осцилляторы корректировать свои частоты. Затем возникает четвертая, и, наконец, пятая ветви. Как видим, устройство дерева синхронизации позволяет проследить последовательность бифуркаций в системе, сопровождающихся увеличением наблюдаемых частот. Однако это дерево имеет специфический вид, существенно отличающийся от традиционного (см. рис.1.24, а также рис.11.1 в [1]). В рассматриваемом случае, одна из частот остается почти постоянной в ходе каждой бифуркации, а новая компонента, наоборот, возникает практически скачком. Эта разница обусловлена типом бифуркаций: теперь это не седло-узловые бифуркации инвариантных торов, а вторичные квазипериодические бифуркации Неймарка-Сакера  $QH$ .



**Рис.2.17** Дерево синхронизации для системы (2.10) с каскадом квазипериодических бифуркаций Неймарка-Сакера. Цифры отвечают номерам осцилляторов,  $\Delta = 3$ .