

УДК 621.385.6

## О МЕТОДЕ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ СХЕМ В ТЕОРИИ ЦЕПОЧЕК СВЯЗАННЫХ РЕЗОНАТОРОВ

*Кузнецов А. П., Рожнев А. Г.*

Развита система представлений, рассматривающая цепочку связанных резонаторов (ЦСР) и ее модели как цепочки связанных осцилляторов. Получены уравнения возбуждения эквивалентных схем общего вида и показано их соответствие со строгой теорией возбуждения ЦСР. Указано, какие параметры ЦСР и как следует измерять. Предлагается рассматривать эквивалентную схему не как геометрическую, а как физическую модель ЦСР.

### ВВЕДЕНИЕ

Замедляющая система типа цепочки связанных резонаторов (ЦСР) широко применяется в мощных электронных усилителях электромагнитных колебаний. Поэтому исследование таких систем, а также процесса взаимодействия электронного пучка с полем в них представляет большой интерес и привлекает значительное внимание [1–3].

Для описания электродинамической части задачи широкое распространение получил так называемый дискретный подход, в котором замедляющую систему заменяют моделью — эквивалентной схемой. При этом эквивалентную схему стараются выбрать так, чтобы каждому ее элементу соответствовал бы некий элемент реальной системы. Неоднозначность и определенный произвол такого выбора в сочетании с отсутствием строгого электродинамического обоснования привели к многочисленным дискуссиям и к отсутствию необходимой ясности в ряде практически важных вопросов. В частности, большинство предложенных схем содержит элементы, сама возможность измерения которых является проблематичной.

Развитием этого метода явилось представление звена эквивалентной схемы (т. е. отдельного резонатора) абстрактным шестиполюсником [1, 2]. Если вид этого звена известен, то конкретизированной оказывается и матрица  $3 \times 3$ , характеризующая шестиполюсник. Однако преимущество данного метода состоит в необязательности подобной конкретизации. При этом отпадает необходимость в сопоставлении с элементами ЦСР каких-либо емкостей и индуктивностей, но появляется проблема измерения элементов матрицы. Учет различных свойств симметрии позволяет уменьшить число независимых элементов матрицы до четырех, но все они являются функциями частоты, и процедура их определения остается не вполне ясной.

Таким образом, актуальными являются следующие вопросы: каковы границы применимости моделей в виде эквивалентных схем и цепочек шестиполюсников; насколько правомерной является та или иная конкретная эквивалентная схема; какие и сколько параметров ЦСР нужно измерить, чтобы обеспечить однозначное и правильное решение электродинамической части задачи.

Отсутствие ответа на эти вопросы обусловлено тем, что в теории — как в физическом плане, так и в математическом аппарате — не содержится представление о ЦСР как о колебательной системе. Можно сказать, что в теории есть цепочки, но нет резонаторов — они теряются в недрах матрицы передачи шестиполюсника. В данной работе на первый план будем ста-

вить основное свойство ЦСР — наличие локализованных колебаний электромагнитного поля. Иными словами, будем развивать подход к ЦСР и ее моделям как к системе связанных осцилляторов, что позволит ответить на поставленные вопросы.

Прежде чем приступить к реализации этой идеи, четко оговорим, что, собственно, следует понимать под хорошей моделью ЦСР. Пусть электронная часть задачи решается в рамках одномерного приближения. Это означает, что воздействующее на пучок поле можно задать потенциалом  $V(x, t)$ . Этот потенциал должен полностью определяться возбуждающим

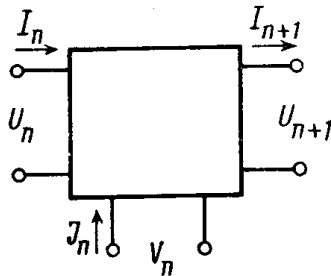


Рис. 1

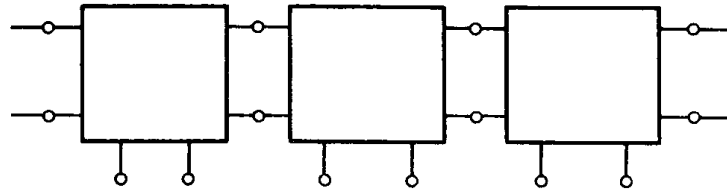


Рис. 2

систему током — током электронного пучка  $\mathcal{J}(x, t)$  — посредством некоторого линейного оператора  $\hat{L}$ :

$$(1) \quad V(x, t) = \hat{L}\mathcal{J}(x, t).$$

В фурье-представлении это соотношение принимает вид

$$(2) \quad V_{\omega\beta} = \mathcal{Z}(\omega, \beta)\mathcal{J}_{\omega\beta}.$$

Функцию  $\mathcal{Z}(\omega, \beta)$  будем называть полным импедансом электродинамической системы.

Если полный импеданс как функция двух своих переменных известен, то, выполнив в (2) обратное преобразование Фурье, по заданному току  $\mathcal{J}(x, t)$  можно найти временную и пространственную зависимости напряжения  $V(x, t)$ . Тогда электродинамическая часть задачи формулируется однозначно. Следовательно, хорошей моделью ЦСР будет такая система, для которой структура полного импеданса как функции  $\omega$  и  $\beta$  (например, в форме некоторого ряда) точно такая же, как и у ЦСР. Действительно, простым подбором параметров можно при этом добиться, чтобы уравнения возбуждения ЦСР и ее модели совпали. Найдем полный импеданс цепочки шестиполюсников, покажем, что у ЦСР такой же импеданс, укажем способ его экспериментального определения и выясним физический смысл параметров, которые определяют его структуру.

## 1. Уравнение возбуждения цепочки шестиполюсников

1.1. Рассмотрим отдельный шестиполюсник<sup>1</sup> (рис. 1). Под током  $\mathcal{J}_n$ , характеризующим воздействие пучка на шестиполюсник, будем понимать так называемый наведенный ток, а его связь с конвекционным током пучка полагать известной. Величина  $V_n$  представляет собой напряжение на высокочастотном зазоре, воздействующее на пучок. Будем считать, что именно  $V_n$  описывает состояние осциллятора, находящегося внутри шестиполюсника. Токи и напряжения  $I_n, U_n, I_{n+1}, U_{n+1}$  описывают связь шестиполюсника с соседями.

Из перечисленных величин можно составить два вектора-столбца

$$\begin{pmatrix} U_{n+1} \\ I_{n+1} \\ V_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} U_n \\ I_n \\ \mathcal{J}_n \end{pmatrix}$$

<sup>1</sup> Будем рассматривать только симметричные шестиполюсники, для которых левая и правая пары выводов равноправны.

которые, как и в [1], считаем связанными матрицей перехода:

$$(3) \quad \begin{pmatrix} U_{n+1} \\ I_{n+1} \\ V_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_n \\ I_n \\ \mathcal{I}_n \end{pmatrix}.$$

Подобная форма записи неудобна, поскольку смешивает между собой величину  $V_n$ , характеризующую состояние осциллятора, и величины  $U_{n+1}$ ,  $I_{n+1}$ ,  $U_n$ ,  $I_n$ , описывающие связь этого осциллятора с соседями. Поэтому представим матрицу передачи  $\hat{A}$  в виде блочной матрицы:

$$(4) \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} \hat{M} & |\alpha\rangle \\ \langle\beta| & a \end{pmatrix},$$

где

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad |\alpha\rangle = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}, \quad \langle\beta| = (a_{31}, a_{32}), \quad a = a_{33}.$$

Вводя вектор-столбец

$$(5) \quad |\psi_n\rangle = \begin{pmatrix} U_n \\ I_n \end{pmatrix},$$

можно переписать матричное уравнение (3) в следующем виде:

$$(6) \quad |\psi_{n+1}\rangle = \hat{M} |\psi_n\rangle + \mathcal{I}_n |\alpha\rangle,$$

$$(7) \quad V_n = \langle\beta| \psi_n\rangle + a \mathcal{I}_n.$$

1.2. Пусть имеется цепочка шестиполюсников (рис. 2). Рассмотрим сначала колебания в системе без пучка, для чего положим все возбуждающие токи равными нулю. В этом случае мы фактически имеем дело с цепочкой четырехполюсников, причем, как это следует из (6),  $\hat{M}$  является матрицей передачи отдельного четырехполюсника:

$$(8) \quad |\psi_{n+1}\rangle = \hat{M} |\psi_n\rangle,$$

$$|\psi_{n-1}\rangle = \hat{M}^{-1} |\psi_n\rangle.$$

Здесь  $\hat{M}^{-1}$  — матрица, обратная  $\hat{M}$ .

Складывая два последних равенства, получим

$$(9) \quad |\psi_{n+1}\rangle + |\psi_{n-1}\rangle = (\hat{M} + \hat{M}^{-1}) |\psi_n\rangle.$$

Нетрудно показать, что для симметричного четырехполюсника матрица  $(\hat{M} + \hat{M}^{-1})$  диагональна и пропорциональна единичной:

$$(10) \quad (\hat{M} + \hat{M}^{-1}) = 2\Omega \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где  $\Omega$  — диагональный элемент матрицы  $\hat{M}$ , являющийся некоторой функцией частоты.

Умножая соотношение (10) справа на  $|\psi_n\rangle$ , получим волновое уравнение

$$(11) \quad |\psi_{n+1}\rangle + |\psi_{n-1}\rangle = 2\Omega |\psi_n\rangle.$$

Дисперсионное уравнение находим, подставляя в (11)  $|\psi_n\rangle \sim e^{in\varphi}$ :

$$(12) \quad \Omega(\omega) = \cos \varphi.$$

Характер дисперсии зависит от конкретного вида функции  $\Omega(\omega)$ ; дисперсионная характеристика может содержать несколько ветвей.

1.3. Рассмотрим теперь возбуждение цепочки шестиполюсников током, причем уравнение возбуждения будем искать для величины  $V_n$ , характеризующей состояние осциллятора. Выпишем уравнение (6) для векторов

$|\psi_{n+1}\rangle$  и  $|\psi_{n-1}\rangle$ :

$$(13) \quad \begin{aligned} |\psi_{n+1}\rangle &= \hat{M} |\psi_n\rangle + \mathcal{J}_n |\alpha\rangle, \\ |\psi_{n-1}\rangle &= \hat{M}^{-1} |\psi_n\rangle - \mathcal{J}_{n-1} \hat{M}^{-1} |\alpha\rangle. \end{aligned}$$

Сложим эти выражения почленно:

$$(14) \quad |\psi_{n+1}\rangle + |\psi_{n-1}\rangle = (\hat{M} + \hat{M}^{-1}) |\psi_n\rangle + \mathcal{J}_n |\alpha\rangle - \mathcal{J}_{n-1} \hat{M}^{-1} |\alpha\rangle.$$

Умножая соотношение (14) на  $\langle\beta|$  и учитывая (7) и (10), получаем

$$(15) \quad V_{n+1} + V_{n-1} = 2\Omega V_n + (\langle\beta|\alpha\rangle - 2\Omega a) \mathcal{J}_n + a(\mathcal{J}_{n+1} + \mathcal{J}_{n-1}) - \mathcal{J}_{n-1} \langle\beta|\hat{M}^{-1}|\alpha\rangle.$$

В силу симметрии шестиполюсников влияние токов  $\mathcal{J}_{n+1}$  и  $\mathcal{J}_{n-1}$  на напряжение  $V_n$  одинаково, и они обязаны входить в уравнение (15) симметрично. Следовательно,  $\langle\beta|\hat{M}^{-1}|\alpha\rangle = 0$ , и (15) принимает вид

$$(16) \quad V_{n+1} + V_{n-1} - 2\Omega(\omega) V_n = Z(\omega) \mathcal{J}_n + a(\omega) (\mathcal{J}_{n+1} + \mathcal{J}_{n-1}),$$

где

$$(17) \quad Z = \langle\beta|\alpha\rangle - 2\Omega a.$$

Уравнение (16) и является искомым уравнением возбуждения. Все параметры, входящие в это уравнение, имеют ясный физический смысл:  $\Omega(\omega)$  определяет дисперсию системы;  $Z(\omega)$  — влияние на напряжение  $V_n$  тока  $\mathcal{J}_n$ , возбуждающего  $n$ -й шестиполюсник;  $a(\omega)$  — воздействие на  $V_n$  токов, возбуждающих соседние шестиполюсники.

## 2. Полный импеданс системы. Уравнение возбуждения для отдельной ветви дисперсионной характеристики

2.1. Следуя введению, определим полный импеданс системы  $\mathcal{L}(\omega, \varphi)$  соотношением

$$(18) \quad V_{\omega\varphi} = i\mathcal{L}(\omega, \varphi) \mathcal{J}_{\omega\varphi},$$

где  $V_{\omega\varphi}$  и  $\mathcal{J}_{\omega\varphi}$  — фурье-образы напряжений  $V_n(t)$  и токов  $\mathcal{J}_n(t)$ , определенные как

$$(19) \quad \begin{aligned} V_{\omega\varphi} &= \sum_n \int V_n(t) e^{-i(\omega t - n\varphi)} dt, \\ \mathcal{J}_{\omega\varphi} &= \sum_n \int \mathcal{J}_n(t) e^{-i(\omega t - n\varphi)} dt. \end{aligned}$$

Мнимая единица выделена для того, чтобы полный импеданс был действительным. Для сокращения записи индексы  $\omega$  и  $\varphi$  далее будем опускать.

Выполнив в (16) преобразование Фурье (19), получим следующее выражение для полного импеданса цепочки шестиполюсников:

$$(20) \quad \mathcal{L}(\omega, \varphi) = \frac{1/2 Z(\omega) + a(\omega) \cos \varphi}{\Omega(\omega) - \cos \varphi}.$$

Подчеркнем, что полный импеданс является функцией двух независимых переменных  $\omega$  и  $\varphi$ .

2.2. Полный импеданс  $\mathcal{L}(\omega, \varphi)$  как функция  $\omega$  представляет собой сложную дробь, поскольку шестиполюсник состоит из конечного числа емкостей и индуктивностей. Разложим  $\mathcal{L}(\omega, \varphi)$  на простые дроби:

$$(21) \quad \mathcal{L}(\omega, \varphi) = \sum_s \frac{\alpha_s(\varphi)}{\omega - \omega_s(\varphi)}.$$

Выражение (18) при этом принимает вид

$$(22) \quad V = i \sum_s \frac{\alpha_s(\varphi)}{\omega - \omega_s(\varphi)} \mathcal{I}.$$

Введем величины  $V_s$  так, чтобы

$$(23) \quad V = \sum_s V_s,$$

$$(24) \quad [\omega - \omega_s(\varphi)] V_s = \alpha_s(\varphi) \mathcal{I}.$$

Выполним в (24) обратное преобразование Фурье по времени:

$$(25) \quad \dot{V}_s + i\omega_s(\varphi) V_s = \alpha_s(\varphi) \mathcal{I}.$$

Величину  $\alpha_s(\varphi)$  в дальнейшем будем называть  $\alpha$ -параметром.

Функции  $\omega_s(\varphi)$  и  $\alpha_s(\varphi)$  являются  $2\pi$ -периодическими. Разлагая обе части формулы (25) в ряды Фурье по  $\varphi$ , получим

$$(26) \quad \dot{V}_{sn} + i \sum_l \omega_{sl} V_{s,n+l} = \sum_l \alpha_{sl} \mathcal{I}_{n+l},$$

где

$$(27) \quad V_s = \sum_n V_{sn} e^{in\varphi}, \quad \omega_s = \sum_n \omega_{sn} e^{in\varphi}, \quad \alpha_s = \sum_n \alpha_{sn} e^{in\varphi}.$$

Формула (26) представляет собой уравнение вынужденных колебаний цепочки связанных осцилляторов. При этом  $V_{sn}$  следует трактовать как амплитуду колебаний осциллятора  $s$ -го типа в  $n$ -й ячейке замедляющей системы. Коэффициент  $\omega_{s0}$  является собственной частотой такого осциллятора (т. е. отдельного резонатора), а остальные коэффициенты  $\omega_{sn}$  отвечают за связь этого осциллятора с соседними. Эта связь приводит к зависимости частоты от волнового числа  $\varphi$ , т. е. к пространственной дисперсии:  $\omega = \omega_s(\varphi)$ .

Коэффициенты  $\alpha_{sl}$  характеризуют воздействие тока  $\mathcal{I}_{n+l}$  на  $n$ -й осциллятор  $s$ -го типа. Если  $\alpha$  — параметр не зависит от  $\varphi$ , то все коэффициенты Фурье  $\alpha_{sl}$ , кроме  $\alpha_{s0}$ , равны нулю. При этом в правую часть уравнения (26) войдет лишь ток  $\mathcal{I}_n$ , возбуждающий только «свой» шестиполюсник. Таким образом, зависимость  $\alpha$ -параметра от  $\varphi$  характеризует нелокальность воздействия возбуждающих токов на шестиполюсники.

### 3. Сравнение со строгой теорией

Вернемся к задаче о ЦСР. Рассмотрим сначала цепочку несвязанных резонаторов. В ней могут существовать колебания электромагнитного поля с бесконечным набором частот  $\omega_s$  (собственные частоты резонаторных мод) и произвольной разностью фаз колебаний между соседними резонаторами  $\varphi$ . Поэтому можно приписать этой системе дисперсионную характеристику, показанную на рис. 3, а. При включении связи между резонаторами частоты колебаний начинают периодическим образом зависеть от фазы  $\varphi$ . При этом каждая собственная частота рождает ветвь дисперсионной характеристики  $\omega = \omega_s(\varphi)$  (рис. 3, б), а каждая резонаторная мода — моду цепочки связанных резонаторов. В работе [4] получено строгое решение электродинамической задачи о возбуждении ЦСР в виде разложения по этим модам<sup>2</sup>. Уравнение (26) с точностью до обозначений совпадает с уравнением возбуждения одной такой моды, следовательно, цепочка шестиполюсников является хорошей моделью ЦСР<sup>3</sup>. Собственно

<sup>2</sup> Эти моды нельзя отождествить с модами отдельного резонатора и не следует путать с используемыми в теории замедляющих систем волноводными модами [5].

<sup>3</sup> Цепочка шестиполюсников содержит конечное число мод, а ЦСР — бесконечное. Однако обычно только одна мода является резонансной ( $\omega \approx \omega_s(\varphi)$ ), а остальные можно отбросить или учесть конечное их число.

говоря, хорошей моделью ЦСР является любой набор цепочек связанных осцилляторов с соответствующими дисперсиями и нелокальностями воздействия внешней силы — мы только показали, что цепочка шестиполусников содержит такой набор. При этом тип осцилляторов соответствует моде ЦСР, а суммирование в (21)–(23) проводится по всем модам, или,

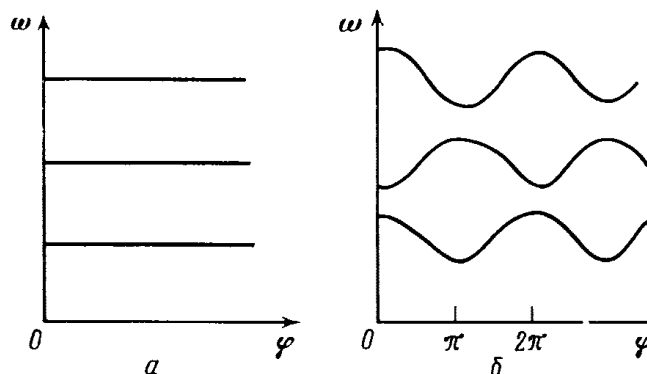


Рис. 3

что тоже самое, по всем ветвям дисперсионной характеристики системы. Развитую в данной работе интерпретацию функций  $\omega_s(\varphi)$  и  $\alpha_s(\varphi)$  и их коэффициентов Фурье можно теперь отнести к отдельной моде ЦСР.

#### 4. Способ экспериментального определения полного импеданса

Из сказанного вытекает, что полный импеданс ЦСР задается формулой (21), а определяющими его параметрами являются дисперсия и  $\alpha$ -параметры всех мод. Экспериментальное определение дисперсии каждой моды не составляет труда. Основной вопрос, следовательно, заключается в том, как измерить зависимости  $\alpha_s(\varphi)$ . Хорошо известны электродинамические методы измерения отношения  $V^2/2W$  [6], где  $W$  — энергия, запасенная в одной ячейке. Покажем, что это отношение, измеренное резонансным методом в полосе пропускания  $s$ -й моды, совпадает с  $\alpha$ -параметром этой моды.

Умножим соотношение (25) на  $V_s^*$ , от получившегося выражения возьмем действительную часть, просуммируем результат по всем ветвям дисперсионной характеристики и, используя (23), получим

$$(28) \quad \frac{d}{dt} \sum_s \frac{|V_s|^2}{2\alpha_s} = \frac{1}{2} (\mathcal{J}^* V + \mathcal{J} V^*).$$

Поскольку в правой части уравнения (28) стоит мощность, поступающая в систему, то для полной энергии получаем выражение

$$(29) \quad W = \sum_s \frac{|V_s|^2}{2\alpha_s}.$$

Воспользуемся теперь уравнениями (18), (22), (25):

$$(30) \quad W = \frac{|V|^2}{2} \sum_s \frac{\alpha_s}{[(\omega - \omega_s) \mathcal{L}]^2} = \frac{|V|^2}{2} \sum_s \frac{\alpha_s}{\left[ (\omega - \omega_s) \sum_k \frac{\alpha_k}{\omega - \omega_k} \right]^2}.$$

Пусть для определенности измерение отношения  $V^2/2W$  проводится в полосе пропускания первой моды. В этом случае измеряется величина

$$(31) \quad \left[ \frac{2W}{V^2}(\omega, \varphi) \right]_{\omega=\omega_1(\varphi)} = \frac{1}{\alpha_1(\varphi)},$$

т. е.  $\alpha$ -параметр первой моды.

Проводя измерение дисперсии и  $\alpha$ -параметра для всех ветвей дисперсионной характеристики системы, мы можем полностью найти из эксперимента величину  $\mathcal{L}(\omega, \varphi)$  как функцию двух независимых переменных  $\omega$  и  $\varphi$ , после чего уравнения возбуждения системы однозначно определяются выражением (18). Подчеркнем еще раз, что правильный результат получится только в случае, если найденную экспериментально частотную зависимость отношения  $V^2/2W$  пересчитать в зависимость от  $\varphi$ .

Изложенные результаты позволяют сформулировать экспериментальный критерий применимости той или иной эквивалентной схемы в качестве модели ЦСР. Таким критерием будет совпадение (или несовпадение) рассчитанного по формулам (17) и (20) полного импеданса этой схемы с экспериментально измеренным.

В заключение заметим, что  $\alpha$ -параметры лучше всего измерять в области движения пучка, помещая туда возмущающее тело. При этом напряжение  $V$  нужно трактовать как напряжение, непосредственно воздействующее на пучок. В этом случае отпадает необходимость в пересчете экспериментальных данных в высокочастотный зазор, что существенно упрощает их обработку.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Булгакова Л. В., Трубецков Д. И., Фишер В. Л., Шевчик В. Н. Лекции по электронике СВЧ приборов типа О. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1974.
2. Гаврилов М. В., Трубецков Д. И., Фишер В. Л. Лекции по электронике СВЧ и радиофизике: 5-я зимняя школа-семинар инженеров. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1981, кн. 1, с. 173.
3. Стапранс А., Маккьюн Э., Рютц Дж. В кн.: Мощные электровакуумные приборы СВЧ. М.: Мир, 1974, с. 33.
4. Кузнецов С. П. Радиотехника и электроника, 1980, т. 25, № 2, с. 419.
5. Вайнштейн Л. А., Солнцев В. А. Лекции по сверхвысокочастотной электронике. М.: Сов. радио, 1973.
6. Conolly D. J. IEEE Trans., 1976, v. ED-23, № 4, p. 491.

Поступила в редакцию  
5.IV.1982