1984 № 10

УДК 621.372.81

КАЛИБРОВОЧНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ В ТЕОРИИ ВОЗБУЖДЕНИЯ ВОЛНОВОДОВ

Кузнецов А. П., Кузнецов С. П., Рожнев А. Г.

Исследована структура известных теорий возбуждения волноводов. Предложена символическая форма записи, которая позволяет свести такое исследование к элементарным алгебраическим операциям, на основе которых несложно восстановить и строгие формулы. Показано, что различие известных теорий возбуждения обусловлено различной формой некоторого преобразования функций Грина, названного калибровочным (в силу его взаимосвязи с калибровочной инвариантностью уравнений электромагнитного поля). Приведен пример использования развитого формализма для конструирования уравнений возбуждения – рассмотрена нестационарная задача о возбуждении волновода вблизи границы полосы пропускания.

1. Существует несколько типов уравнений возбуждения волноводов, авторы которых исходят из различных физических и математических соображений (см., например, [1–5]). Эквивалентность этих теорий друг другу с точки зрения вычисления полного электромагнитного поля не вызывает сомнений – все они получены строгим образом из уравнений Максвелла. Однако разбиение полного поля на части выполнено в них по-разному. В то же время именно отдельные составляющие полного поля (собственные волны, поле пространственного заряда) учитываются в уравнениях движения электронов при построении теории электронных приборов. Поэтому вопрос о форме уравнений возбуждения важен. В данной работе сосредоточим внимание на исследовании структуры теорий возбуждения волноводов и способах перехода от одной формы уравнений к другой.

Рассмотрим задачу о возбуждении гладкого цилиндрического волновода прямолинейным электронным пучком. В таком пучке плотность тока имеет только продольную составляющую $\mathbf{j}=j_z\mathbf{z}^0=j(\mathbf{r},z,t)\mathbf{z}^0$, где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор, определяющий положение точки в поперечном сечении волновода, $\mathbf{z}^0$ – единичный вектор в направлении оси волновода. Будем интересоваться лишь продольной компонентой электрического поля $E_z=E_z(\mathbf{r},z,t)$, которая только и важна в случае прямолинейного пучка.

Поскольку уравнения Максвелла линейны и содержат два сорта источников поля (токи и заряды), то общий рецепт вычисления поля выглядит следующим образом:

$$E_z=\hat{L}j_z+\hat{M}\rho, \tag{1}$$

где $j_z=j(\mathbf{r},z,t)$, $\rho=\rho(\mathbf{r},z,t)$ – заданные распределения плотности тока и заряда; $\hat{L}$ и $\hat{M}$ – линейные операторы. В силу однородности гладкого волновода соотношение (1) выглядит особенно просто в фурье-представлении

$$E_{\omega k}=G(\omega,k)j_{\omega k}+g(\omega,k)\rho_{\omega k}, \tag{2}$$

где $E_{\omega k}$, $j_{\omega k}$, $\rho_{\omega k}$ – соответствующие фурье-компоненты, $G(\omega,k)$ и $g(\omega,k)$ – токовая и зарядовая функции Грина. Определены ли функции Грина $G(\omega,k)$ и $g(\omega,k)$ однозначно? Ответ на этот вопрос отрицателен. Действительно, плотности тока и заряда связаны между собой уравнением непрерывности, которое в фурье-представлении имеет вид

$$kj_{\omega k}-\omega\rho_{\omega k}=0. \tag{3}$$

Вводя произвольную функцию $\alpha(\omega, k)$, можно написать

$$\rho_{\omega k}=(1-\alpha(\omega, k))\rho_{\omega k}+\frac{k\alpha(\omega, k)}{\omega}j_{\omega k}.$$

Подставляя последнее выражение в (2), видим, что вместо $G(\omega, k)$ и $g(\omega, k)$ можно использовать другие функции $G'(\omega, k)$ и $g'(\omega, k)$, которые связаны с первоначальными следующими соотношениями:

$$\begin{gathered} G'(\omega, k)=G(\omega, k)+\frac{k}{\omega}\alpha(\omega, k)g(\omega, k), \\ g'(\omega, k)=[1-\alpha(\omega, k)]g(\omega, k). \end{gathered} \tag{4}$$

При этом уравнение (2) переходит в

$$E_{\omega k}=G'(\omega, k)j_{\omega k}+g'(\omega, k)\rho_{\omega k}, \tag{5}$$

т. е. сохраняет свою форму. Назовем преобразование (4) калибровочным преобразованием функций Грина, так как можно показать, что произвол в выборе функций Грина связан с калибровочной инвариантностью уравнений электромагнитного поля, которая в свою очередь тесно связана с законом сохранения заряда (3) [6].

Приведем выражение для фурье-компоненты продольного электрического поля в гладком волноводе, которое легко получить из уравнений возбуждения, предложенных Кисунько [1][1]

$$E_{\omega k}(\mathbf{r})=\frac{4\pi i}{c}\sum_s\psi_s(\mathbf{r})\int\limits_{S_\perp}\psi_s(\mathbf{r}')\frac{\omega j_{\omega k}(\mathbf{r}')-k\rho_{\omega k}(\mathbf{r}')}{\omega^2-k^2c^2-\varkappa_s^2}dS'. \tag{6}$$

Здесь c — скорость света, i — минимая единица, ψ_s и $\varkappa_s^2$ — собственные функции и собственные числа задачи Дирихле для поперечного сечения волновода

$$\Delta_\perp\psi_s+\varkappa_s^2\psi_s=0, \quad \psi_s=0 \text{ на } \bar{S}, \tag{7}$$

где $\bar{S}$ — граница поперечного сечения волновода. Собственные функции $\psi_s(\mathbf{r})$ удовлетворяют условиям ортонормированности и полноты

$$\int\limits_{S_\perp}\psi_s(\mathbf{r})\psi_p(\mathbf{r})ds=\delta_{sp}, \qquad \sum_s\psi_s(\mathbf{r})\psi_s(\mathbf{r}')=\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \tag{8}$$

Таким образом, в теории Кисунько функции Грина есть

$$\begin{gathered} G(\omega, k)=\frac{4\pi i}{c}\sum_s\psi_s(\mathbf{r})\frac{\omega}{\omega^2-k^2c^2-\varkappa_s^2}\int\limits_{S_\perp}\psi_s(\mathbf{r}')dS', \\ g(\omega, k)=-\frac{4\pi i}{c}\sum_s\psi_s(\mathbf{r})\frac{k}{\omega^2-k^2c^2-\varkappa_s^2}\int\limits_{S_\perp}\psi_s(\mathbf{r}')dS'. \end{gathered} \tag{9}$$

Произведем с ними калибровочное преобразование (4), положив $\alpha(\omega, k)=1$. Тогда вместо (6) имеем

$$E_{\omega k}=\frac{4\pi i}{c}\sum_s\psi_s(\mathbf{r})\int\limits_{S_\perp}\psi_s(\mathbf{r}')\frac{\omega^2-k^2c^2}{\omega^2-k^2c^2-\varkappa_s^2}\frac{j_{\omega k}(\mathbf{r}')}{\omega}dS'. \tag{10}$$

[1] Поскольку нас интересует только продольная составляющая электрического поля, рассмотрим только LE-волны.

Разложим это выражение на простые дроби относительно k

$$(11)\qquad E_{\omega k}=i\sum_s\frac{\psi_s(\mathbf{r})\varkappa_s^4}{N_s(\omega)}\int\limits_{S_\perp}\left[\frac{1}{k-k_s(\omega)}-\frac{1}{k-k_{-s}(\omega)}\right]\times$$

$$\times\psi_s(\mathbf{r}')j_{\omega k}(\mathbf{r}')\,dS'+\frac{4\pi i}{c}\frac{j_{\omega k}(\mathbf{r})}{\omega},$$

где введены обозначения

$$k_s(\omega)=\frac{\sqrt{\omega^2-\varkappa_s^2}}{c},\quad k_{-s}(\omega)=-k_s(\omega),\quad N_s(\omega)=-\frac{\varkappa_s^2\omega k_s(\omega)c}{2\pi}.$$

Рассмотрим один член суммы

$$(12)\qquad E_s(\omega,k)=\frac{i\varkappa_s^4\psi_s(\mathbf{r})}{N_s(\omega)}\frac{\int\limits_{S_\perp}\psi_s(\mathbf{r}')j_{\omega k}(\mathbf{r}')\,dS'}{k-k_s(\omega)}$$

или

$$(13)\qquad i(k-k_s(\omega))E_s(\omega,k)=-\frac{\varkappa_s^4\psi_s(\mathbf{r})}{N_s(\omega)}\int\limits_{S_\perp}\psi_s(\mathbf{r}')j_{\omega k}(\mathbf{r}')\,dS'.$$

Выполним обратное преобразование Фурье по k

$$(14)\qquad \frac{dE_s(\omega,z)}{dz}+ik_s(\omega)E_s(\omega,z)=\frac{\varkappa_s^4\psi_s(\mathbf{r})}{N_s(\omega)}\int\limits_{S_\perp}\psi_s(\mathbf{r}')j_{\omega k}(\mathbf{r}')\,dS'.$$

Введем собственные функции $\mathbf{E}_s^0$ и $\mathbf{H}_s^0$, а также амплитуду поля C_s соотношениями $\mathbf{E}_s^0=\operatorname{grad}\operatorname{div}(\psi_s\mathbf{z}^0)+\omega^2\psi_s\mathbf{z}^0$, $\mathbf{H}_s^0=i\omega\operatorname{rot}(\psi_s\mathbf{z}^0)$, $\mathbf{E}_s=C_s\mathbf{E}_s^0$. Тогда $\mathbf{E}_{sz}^0=\varkappa_s^2\psi_s$, а для $N_s(\omega)$ нетрудно получить

$$(15)\qquad N_s(\omega)=-\frac{\varkappa_s^2\omega k_s(\omega)c}{2\pi}=\frac{c}{2\pi}\int\limits_{S_\perp}\{[\mathbf{E}_s^0\mathbf{H}_{-s}^0]-[\mathbf{E}_{-s}^0\mathbf{H}_s^0]\}\,dS.$$

Учитывая (14), имеем

$$(16)\qquad E_z(z)=\sum_s C_s(z)E_{sz}^0+\frac{4\pi i}{c}\frac{j(z)}{\omega},$$

$$\frac{dC_s(z)}{dz}+ik_s(\omega)C_s(z)=\frac{1}{N_s(\omega)}\int\limits_{S_\perp}\mathbf{E}_s^0(\mathbf{r}')\mathbf{j}_{\omega k}(\mathbf{r}')\,dS'.$$

В этих выражениях нетрудно узнать уравнения возбуждения Вайнштейна [2], причем N_s является нормой s-го типа колебаний.

2. Введем следующую форму записи. Опустим в уравнении возбуждения (6) знак суммирования, индекс s, знак интегрирования, функции ψ_s, постоянную $4\pi i$, индексы ω и k и положим $c=1$. Формула (6) приобретает следующий вид:

$$(17)\qquad E=\frac{\omega j-k\rho}{\omega^2-k^2-\varkappa^2}.$$

Если выполнить в этом соотношении калибровочное преобразование (4), положив $\alpha(\omega,k)=1$, и разложить получившееся выражение на простые дроби относительно k, то приходим к формуле

$$(18)\qquad E=\frac{\varkappa^2}{2k(\omega)\omega}\left[\frac{2}{k+k(\omega)}-\frac{1}{k-k(\omega)}\right]j+\frac{j}{\omega},$$

где $k(\omega)=\sqrt{\omega^2-\varkappa^2}$. По соотношению (18) несложно установить в общих чертах структуру теории возбуждения, которая соответствует проделанной процедуре (разложение ведется по двум системам собственных волн, распространяющихся в противоположные стороны; уравнение для амплитуд собственных волн имеет вид $dE/dz+ik(\omega)E\sim j$; неразложимый по собственным функциям остаток есть j/ω). Перечисленными свойствами обладает теория возбуждения Вайнштейна [2]. Это позволяет интерпретировать формулу (18) как символическую форму записи структуры теории возбуждения Вайнштейна, а формулу (17) — теории Кисунько. Таким образом, если нас интересует только структура теории возбуждения, то вместо громоздких строгих выкладок представляется возможным использовать элементарные алгебраические преобразования с формулами типа (17) и (18). Мы покажем, что такие алгебраические преобразования позволяют получить правильную структуру всех теорий возбуждения [2—5] и с наибольшей наглядностью продемонстрировать взаимосвязь между ними.

3. Одной из важных задач теории возбуждения волноводов является вычисление поля пространственного заряда. Поскольку это поле является квазистатическим, то для его нахождения следует положить в функциях Грина $\omega=0$. Используя символическую формулу теории Кисунько (17), для квазистатического поля получаем выражение

$$E_{\text{кс}}=\frac{k\rho}{k^2+\varkappa^2}. \tag{19}$$

Если же попытаться отыскать величину $E_{\text{кс}}$ при помощи формулы (18), соответствующей теории Вайнштейна, то мы столкнемся с трудностями, связанными с наличием в этой формуле особенности при $\omega=0$. Солнцев [3] предложил модификацию уравнений Вайнштейна

$$E(\omega,z)=[E(\omega,z)-\hat{E}(\omega,z)]+\hat{E}(\omega,z), \tag{20}$$

где $\hat{E}(\omega,z)$ — поле пространственного заряда, для вычисления которого предлагается следующее соотношение:

$$\hat{E}(\omega,z)=\lim_{\tilde{\omega}\to 0}\frac{\tilde{\omega}}{\omega}E(\tilde{\omega},z). \tag{21}$$

Построим символическую формулу теории Солнцева. Найдем величину $\hat{E}$ в фурье-представлении, для чего воспользуемся формулами (18) и (21)

$$\hat{E}=\frac{\varkappa}{2i\omega}\left[\frac{1}{k+i\varkappa}-\frac{1}{k-i\varkappa}\right]j+\frac{j}{\omega}=\frac{k^2}{k^2+\varkappa^2}\frac{j}{\omega}. \tag{22}$$

В силу уравнения непрерывности (3) выражения для квазистатического поля пространственного заряда (22) и (19) эквивалентны. Используя соотношения (18), (19) и (22), находим

$$E=\frac{\varkappa^2}{2\omega k(\omega)}\left[\frac{1}{k+k(\omega)}-\frac{1}{k-k(\omega)}\right]j+\frac{\varkappa}{2i\omega}\times \tag{23}$$
$$\times\left[\frac{1}{k+i\varkappa}-\frac{1}{k-i\varkappa}\right]j+\frac{k\rho}{k^2+\varkappa^2}.$$

Это и есть искомая символическая формула теории Солнцева, в которой полное поле представлено в виде собственных волн теории Вайнштейна, собственных волн, соответствующих нулевой частоте, и квазистатического поля пространственного заряда.

Обратимся теперь к работе [4]. В ней предлагается вместо пары источников $(\mathbf{j}(z,t),\rho(z,t))$ использовать пару

$$(\mathbf{j}_{\text{в}}(z,t),\rho(z,t))=\left(\mathbf{j}(z,t)-\frac{\partial\mathbf{E}(z,t)}{\partial t},\ \rho(z,t)\right), \tag{24}$$

где $\mathbf{j}_в$ — вихревая часть плотности тока, $\mathbf{E}$ — поле пространственного заряда. В фурье-представлении, используя формулу (22), имеем

$$(j_в, \rho)=\left(\frac{\varkappa^2}{k^2+\varkappa^2}j, \rho\right).$$

Произведем в (17) калибровочное преобразование, полагая

$$\alpha(\omega, k)=\frac{\omega^2}{k^2+\varkappa^2}.$$

Тогда получим

$$E=\frac{\omega\varkappa^2}{(\omega^2-k^2-\varkappa^2)(k^2+\varkappa^2)}j+\frac{k}{k^2+\varkappa^2}\rho. \tag{25}$$

Выбранная калибровка удачна в том отношении, что зарядовая функция Грина сразу дает квазистатическое поле пространственного заряда (19). Переходя в формуле (25) к источникам $(j_в, \rho)$ и разлагая первое слагаемое на простые дроби как функцию k, приходим к окончательному выражению

$$E=\frac{\omega}{2k(\omega)}\left[\frac{1}{k+k(\omega)}-\frac{1}{k-k(\omega)}\right]j_в+\frac{k\rho}{k^2+\varkappa^2}, \tag{26}$$

которое соответствует символической форме записи теории возбуждения [4].

Вернемся вновь к соотношению (25). Разложим его на простые дроби, но как функцию ω

$$E=\frac{1}{N(k)}\left[\frac{1}{\omega-\omega(k)}+\frac{1}{\omega+\omega(k)}\right]j+\frac{k}{k^2+\varkappa^2}\rho, \tag{27}$$

где $\omega(k)=\sqrt{k^2+\varkappa^2}$; $N(k)=2(\varkappa^2+k^2)/\varkappa^2$. Рассмотрим член в выражении для поля, соответствующий одной простой дроби

$$E=\frac{j}{N(k)(\omega-\omega(k))}. \tag{28}$$

Выполним обратное преобразование Фурье по времени

$$\frac{\partial E(t)}{\partial t}-i\omega(k)E(t)=\frac{i}{N(k)}j(t). \tag{29}$$

Сопоставляя формулу (29) с уравнениями возбуждения, предложенными в [5], мы видим, что получили в нашей записи изложенные в этой работе уравнения.

4. Покажем, как развитый нами метод можно использовать для конструирования уравнений. Получим уравнения возбуждения волновода вблизи границы полосы прозрачности, пригодные для решения нестационарных задач. На границе полосы $\omega\to\varkappa$ и $k(\omega)\to 0$. Соответственно во всех уравнениях, использующих разложение на простые дроби относительно k, появляются особенности вида $1/k(\omega)$

$$\frac{1}{k^2-k^2(\omega)}=\frac{1}{2k(\omega)}\left[\frac{1}{k-k(\omega)}-\frac{1}{k+k(\omega)}\right]\sim\frac{1}{k(\omega)}. \tag{30}$$

Если же использовать разложение на простые дроби относительно ω, то никаких особенностей не появляется. При $k\to 0$ имеем $\omega(k)\approx\varkappa+k^2/2\varkappa$, и уравнение (27) переходит в

$$E=\frac{j}{2\left(\omega-\varkappa-\dfrac{k^2}{2\varkappa}\right)}+\frac{k\rho}{\varkappa^2}. \tag{31}$$

Собственной волне соответствует следующее уравнение в пространственно-временном представлении:

$$\frac{\partial E(z,t)}{\partial t} - i\varkappa E(z,t) + \frac{i}{2\varkappa}\frac{\partial^2 E(z,t)}{\partial z^2} = \frac{i}{2} j. \tag{32}$$

Приведем и соответствующую строгую формулу

$$\frac{\partial E_s}{\partial t} - i\varkappa_s E_s + \frac{i}{2\varkappa_s}\frac{\partial^2 E_s}{\partial z^2} = -\frac{2\pi}{c}\psi_s(\mathbf{r}) \int\limits_{S_\perp} \psi_s(\mathbf{r}') j(\mathbf{r}', z, t)\, dS'. \tag{33}$$

5. Подведем итоги. Символическая форма записи структуры теории возбуждения весьма эффективна при исследовании соотношений между различными теориями. Она позволяет свести это исследование к элементарным алгебраическим операциям, на основе которых несложно восстановить и строгие соотношения. Как мы показали, различие в структуре известных теорий возбуждения обусловлено, во-первых, различной калибровкой функций Грина, и во вторых, различным способом разложения этих функций на простые дроби. Такое разложение можно выполнить двояко — по k и по ω. Эта двойственность представления функций Грина позволяет решать два типа задач — стационарные и нестационарные. Для первых нужны уравнения, содержащие пространственные производные (разложение функций Грина по k), а для вторых — временные (разложение функций Грина по ω).[2]

Развитый формализм может быть полезен при конструировании уравнений возбуждения в форме, наиболее адекватной решаемой задаче.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кисунько Г. В.* ЖТФ, 1946, т. 16, № 5, с. 565.
2. *Вайнштейн Л. А.* ЖТФ, 1953, т. 23, № 4, с. 654.
3. *Солнцев В. А.* ЖТФ, 1968, т. 38, № 1, с. 100.
4. *Канавец В. И., Лопухин В. М., Сандалов А. Н.* В кн.: Лекции по электронике СВЧ. 3-я зимняя школа-семинар инженеров. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1974, кн. 7, с. 3.
5. *Кузнецов С. П.* Радиотехника и электроника, 1980, т. 25, № 2, с. 419.
6. *Берестецкий В. Б., Лившиц Е. М., Питаевский Л. П.* Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1980.

Поступила в редакцию
1.VI.1982

---

[2] Отметим, что в электронике СВЧ традиционным является первый тип уравнений [2–4], а в теоретической физике более распространено представление функций Грина в форме $G \sim 1/[\omega - \omega(k)]$ (см., например, [6]).