

## О СЦЕНАРИЯХ РАЗРУШЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ХАОСА В МОДЕЛЬНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ НА ТОРЕ С ДИССИПАТИВНЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ

*Д.С. Аржанухина*

В работе исследуется диссипативная модификация отображения «кот Арнольда», в которой при малых значениях амплитуды введенного возмущения реализуется гиперболический хаос, и в определенном диапазоне имеет место гиперболический хаотический аттрактор с поперечной канторовой структурой, разрушающийся при дальнейшем увеличении амплитуды возмущения.

*Ключевые слова:* Аттрактор, гиперболический хаос, показатель Ляпунова.

### Введение

Как известно, традиционно выделяют два класса динамических систем – консервативные и диссипативные. Для консервативного случая характерным является сохранение объема облака изображающих точек в фазовом пространстве при эволюции ансамбля систем во времени. Для диссипативных систем объем облака изображающих точек в фазовом пространстве с течением времени стремится к нулю, вследствие чего точки концентрируются на аттракторе [1–5]. Аттракторы могут быть как регулярными (неподвижная точка, предельный цикл, или тор), так и хаотическими. Среди хаотических аттракторов можно выделить гиперболические и негиперболические аттракторы (см., например, [5]).

Важным свойством гиперболических аттракторов является структурная устойчивость или грубость, то есть нечувствительность динамики к малому изменению параметров в уравнениях. Вследствие этого, с точки зрения возможных приложений хаоса, перспективной представляется физическая реализация именно гиперболических аттракторов, поскольку в этом случае неизбежное присутствие погрешностей при изготовлении устройств, а также шумов и технических флуктуаций не будет приводить к качественным изменениям генерируемого хаотического сигнала.

В последнее время появился ряд работ, посвященных реализации гиперболических аттракторов в физических системах [6–10]. Простыми примерами могут служить система двух связанных осцилляторов ван дер Поля с попеременным возбуждением и генератор ван дер Поля с запаздывающей обратной связью [8].

В связи с возможностью наблюдения гиперболических аттракторов в реальных системах, динамика которых зависит от управляющих параметров, становится актуальным вопрос о путях (сценариях) возникновения (разрушения) гиперболических аттракторов при изменении параметров. Такого рода исследования удобно проводить с использованием моделей с дискретным временем в виде отображений.

Одним из способов получить отображение, имеющее гиперболический аттрактор, является введение диссипации в консервативное отображение, демонстрирующее гиперболический хаос, посредством модификации, предложенной в свое время Смейлом. Конкретный вид отображения, полученного добавлением записанного в аналитической форме возмущения в известное отображение «кот Арнольда», указан, в частности, в работе [6].

Настоящая статья посвящена исследованию диссипативной модификации консервативного отображения «кот Арнольда». Рассматриваемая модель, помимо присутствия гиперболического аттрактора, демонстрирует достаточно сложную динамику после его разрушения.

### 1. Модифицированное отображение «кот Арнольда»

Отображение «кот Арнольда» [1,3] может быть записано в виде

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + y_n, \quad (\text{mod } 1), \\y_{n+1} &= x_n + 2y_n, \quad (\text{mod } 1).\end{aligned}\tag{1}$$

Название связано с тем, что для иллюстрации этого отображения В.И. Арнольд использовал в своих лекциях и книгах изображение кота. Это отображение относится к классу так называемых систем Аносова: задаваемая им динамика является хаотической, причем типичная траектория покрывает плотно поверхность тора, выступающего в качестве фазового пространства системы. Отметим, что отображение имеет в начале координат неустойчивую неподвижную точку седлового типа, поведение в окрестности которой качественно представлено на рис. 1 слева. Для того чтобы модельная система имела аттрактор, Смейл предложил модифицировать отображение локально в окрестности точки седла так, чтобы динамика соответствовала диаграмме на рис. 1 справа. При этом в модифицированном отображении неподвижная точка, имевшая ранее тип седла, становится отталкивающей вдоль устойчивого направления, превращаясь в неустойчивый узел, а в ее окрестности возникают две новые седловые точки. Аттрактор в полученной модели – гиперболический,

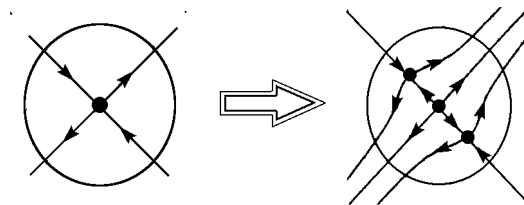


Рис. 1. Иллюстрация модификации отображения в окрестности неподвижной точки седла. Рисунок взят из статьи [6]

и Смейл называет его DA-аттрактором («Derived from Anosov») [11]. Возмущение, посредством которого из отображения (1) получается отображение с DA-аттрактором, можно задать в аналитической форме, как предложено в работе [6], путем прибавления к правым частям уравнений диссипативной добавки определенного вида, величина которой характеризуется некоторым пара-

метром  $\varepsilon$ . Это приводит к отображению следующего вида:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + y_n + \frac{\varepsilon}{2\pi}(\sin 2\pi x_n + \frac{1}{2} \sin 4\pi x_n) \pmod{1}, \\ y_{n+1} &= x_n + 2y_n + \frac{\varepsilon}{2\pi}(\sin 2\pi x_n + \frac{1}{2} \sin 4\pi x_n + \sin 2\pi y_n + \frac{1}{2} \sin 4\pi y_n) \pmod{1}. \end{aligned} \quad (2)$$

Диаграмма, показанная на рис. 1 слева, отвечает случаю  $\varepsilon = 0$ , а диаграмма справа – некоторой подходящим образом заданной величине  $\varepsilon > 0$ .

При нулевом и малом значении амплитуды возмущения динамика на всей поверхности тора на качественном уровне соответствует отображению «кот Арнольда», но при ненулевых  $\varepsilon$  в распределении инвариантной меры становится заметной его неоднородность. Затем, в некотором интервале по параметру  $\varepsilon$  реализуется гиперболический ДА-аттрактор. При дальнейшем увеличении параметра  $\varepsilon$  гиперболический аттрактор разрушается; при этом может возникать негиперболический хаос, а также различные периодические режимы динамики.

На рис. 2 приведены графики зависимости показателей Ляпунова от амплитуды возмущения  $\varepsilon$ , бифуркационное дерево отображения (2) на плоскости  $(x, \varepsilon)$ , построенное для множества начальных условий  $(x, y)$ , и соответствующее ему бифуркационное дерево в пространстве  $(x, y, \varepsilon)$ .

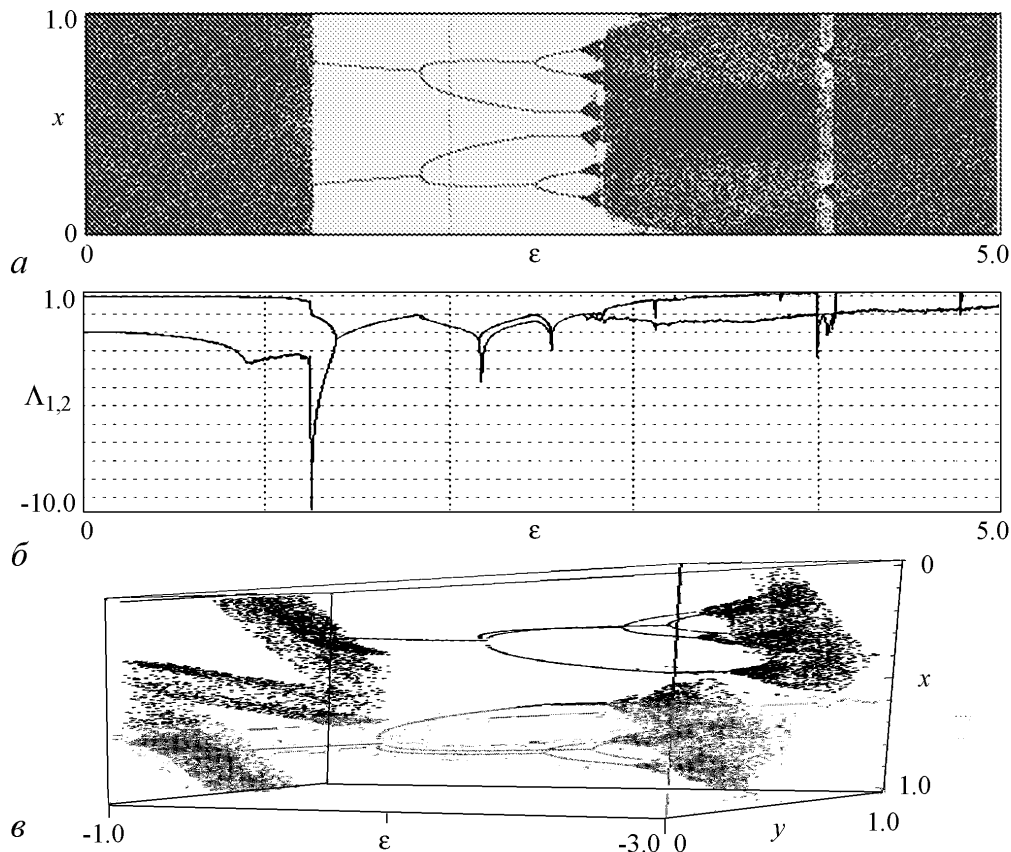


Рис. 2. Бифуркационное дерево на плоскости  $(x, \varepsilon)$  (а), графики зависимости показателей Ляпунова от параметра  $\varepsilon$  (б) и бифуркационное дерево в пространстве  $(x, y, \varepsilon)$  (в) отображения (2)

При небольших значениях амплитуды возмущения в системе реализуется гиперболический хаос, который разрушается при дальнейшем увеличении амплитуды возмущения. Подтверждением присутствия в данной области именно гиперболического хаоса может являться примерно постоянное значение старшего показателя Ляпунова и отсутствие окон периодичности. Затем возникают регулярные режимы, которые переходят в квазипериодические и затем в хаотические.

## 2. Анализ свойств ляпуновских сумм

С целью снятия возможного вырождения, отображение (2) целесообразно модифицировать путем введения еще одного аддитивного параметра  $\mu$ :

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + y_n + \mu + \frac{\varepsilon}{2\pi} (\sin 2\pi x_n + \frac{1}{2} \sin 4\pi x_n) \pmod{1}, \\ y_{n+1} &= x_n + 2y_n + \frac{\varepsilon}{2\pi} (\sin 2\pi x_n + \frac{1}{2} \sin 4\pi x_n + \sin 2\pi y_n + \frac{1}{2} \sin 4\pi y_n) \pmod{1}. \end{aligned} \quad (3)$$

Для исследования хаотической динамики целесообразно использовать карты старшего показателя Ляпунова. На рис. 3 приведена такая карта для отобра-

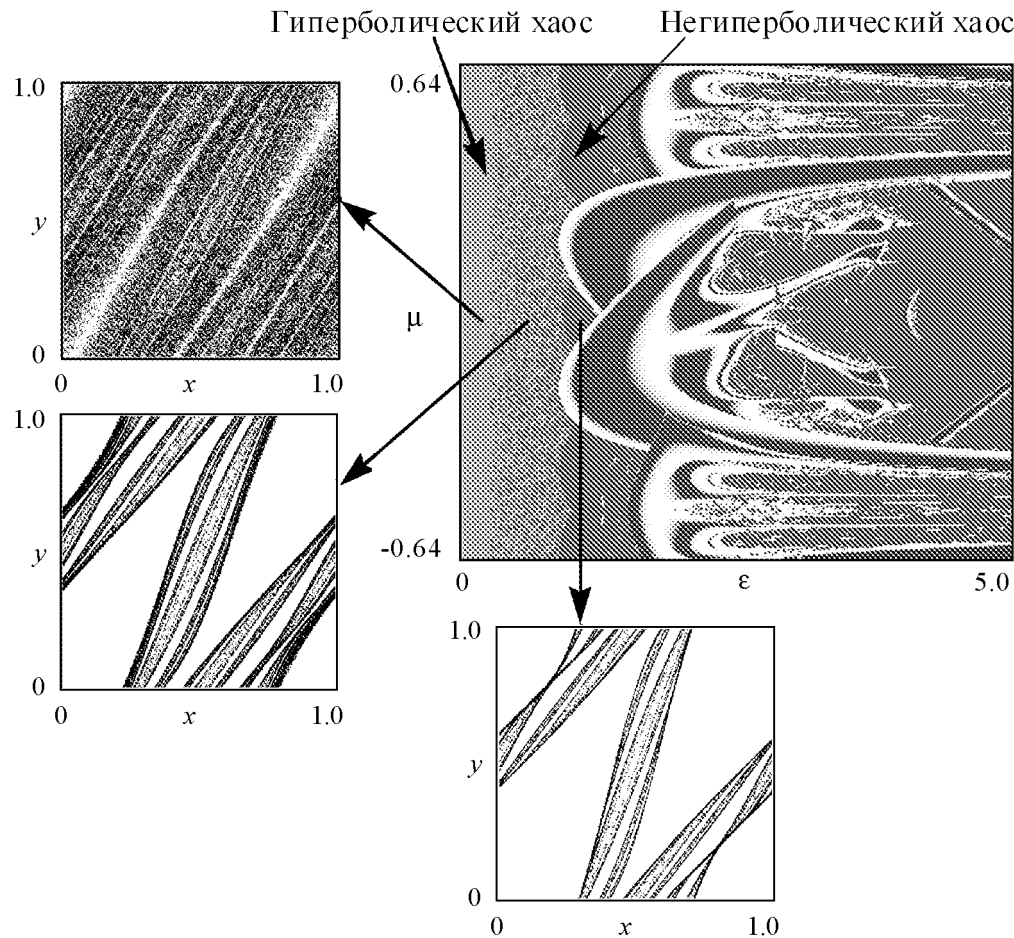


Рис. 3. Карта старшего ляпуновского показателя отображения (3) на плоскости параметров  $(\varepsilon, \mu)$  и аттракторы отображения в различных точках

жения (3) на плоскости параметров  $(\varepsilon, \mu)$  и аттракторы в различных точках хаотической области.

Для выяснения структуры областей хаотической динамики используется следующий прием. Чтобы получить в данной точке плоскости параметров показатель Ляпунова, производится, как обычно, вычисление суммы логарифмов отношений, характеризующих изменение нормы вектора возмущения на одной итерации. При проведении расчетов наибольшего показателя Ляпунова отслеживаем, являются ли все члены ляпуновской суммы положительными, или встречаются также и отрицательные величины. В первом случае пиксель на карте отмечается темным цветом, а в противном случае – более светлым серым тоном. Преобладание темного цвета свидетельствует о преимущественно гиперболической природе хаотической динамики в данной области.

При значительных амплитудах возмущения темным цветом обозначена область негиперболического хаоса, оттенками серого обозначены области с регулярным режимом и отрицательным показателем Ляпунова, белый цвет отвечает нулевому показателю и квазипериодической динамике.

### 3. Анализ сжатия в фазовом пространстве

Помимо вычисления показателя Ляпунова, можно непосредственно определить области в пространстве состояний, где имеет место сжатие и растяжение фазового объема. Для этого необходимо вычислить значение определителя матрицы Якоби отображения в точках фазовой плоскости с достаточно малым шагом.

На рис. 4. показан вид диаграмм на фазовой плоскости отображения (2), раскрашенных в соответствии с результатами вычисления определителя Якоби. Белый

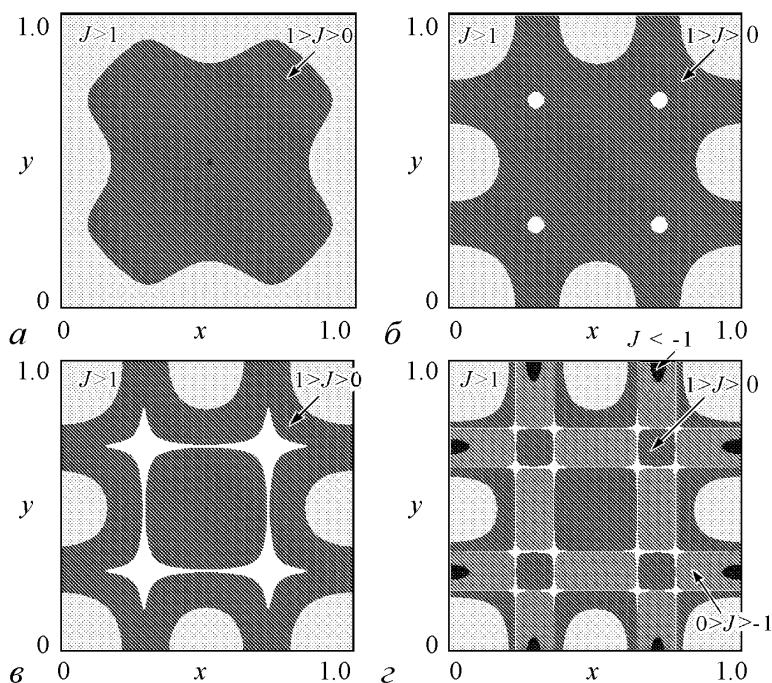


Рис. 4. Карты на плоскости  $(x, y)$  для отображения (2) при значениях  $\varepsilon$ : 0.135 (а), 0.820 (б), 0.880 (в), 1.273 (г)

цвет соответствует якобиану равному нулю, различные оттенки серого отвечают ненулевым значениям.

Как можно видеть, при малых значениях  $\varepsilon$  якобиан положителен во всем единичном квадрате; это свидетельствует о том, что отображение является обратимым. Момент потери обратимости отвечает тому, что значение якобиана достигает нуля. Для отображения (2) это происходит при  $\varepsilon \approx 0.8$ . При этом значении на плоскости появляются четыре белые точки. На карте показателя Ляпунова значению  $\varepsilon$ , при котором отображение теряет обратимость, соответствует неоднородная область.

### Заключение

В данной работе была изучена динамика диссипативной модификации отображения «кот Арнольда». Был исследован процесс разрушения гиперболического аттрактора при увеличении амплитуды возмущения. Для этого использовался анализ свойств ляпуновских сумм и анализ сжатия в фазовом пространстве.

Автор выражает благодарность А.В. Савину и М.В. Позднякову за обсуждение и помощь.

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 12-02-00343.*

### Библиографический список

1. Кузнецов С.П. Динамический хаос (курс лекций). М.: Изд-во Физ.-мат. лит., 2001. 296 с.
2. Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. О детерминистском подходе к турбулентности. М.: Мир, 1991. 368 с.
3. Шустер Г. Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988. 240 с.
4. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984. 528 с.
5. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В. Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Фундаментальные основы и избранные проблемы / Под ред. В.С. Анищенко. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1999. 368 с.
6. Кузнецов С.П. Гиперболические странные аттракторы систем, допускающих физическую реализацию // Изв. вузов. ПНД, 2009. Т. 17, № 4. С. 5.
7. Кузнецов С.П. Пример неавтономной системы с непрерывным временем, имеющей аттрактор типа Плыкина в отображении Пуанкаре // Нелинейная динамика. 2009. Т. 5, № 3. С. 403.
8. Кузнецов С.П. Динамический хаос и однородно гиперболические аттракторы: от математики к физике // Успехи физических наук. 2011. Т. 181, № 2. С. 121.
9. Кузнецов С.П., Селезнев Е.П. Хаотическая динамика в физической системе со странным аттрактором типа Смейла – Вильямса // ЖЭТФ. 2006. Т. 129. Вып. 2. С. 400.
10. Belykh V., Belykh I., Mosekilde E. Hyperbolic Plykin attractor can exist in neuron models // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2005. Vol. 15, № 11.
11. Каток А.Б., Хасселблат Б. Введение в современную теорию динамических систем / Пер. с англ. М.: Изд-во Факториал, 1999. 768 с.

*Саратовский государственный  
университет им. Н.Г. Чернышевского*

*Поступила в редакцию 13.02.2012*

## ON SCENARIOS OF HYPERBOLIC CHAOS DESTRUCTION IN MODEL MAPS ON TORUS WITH DISSIPATIVE PERTURBATION

*D.S. Arzhanukhina*

In this paper we investigate modified «Arnold cat» map with dissipative terms, in which a hyperbolic chaos exists for small perturbation magnitudes, and in a certain range a hyperbolic chaotic attractor with Cantor transversal structure takes place, collapsing with a further perturbation amplitude increase.

*Keywords:* Attractor, hyperbolic chaos, Lyapunov exponent.



*Аржанухина Дарья Сергеевна* – родилась в Саратове (1988). Окончила факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета (2011). Защитила дипломную работу на тему «Сложная динамика и разрушение гиперболического хаоса в отображении «кот Арнольда» с диссипативным возмущением». В настоящее время является аспирантом базовой кафедры динамических систем факультета нелинейных процессов СГУ.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
E-mail: arzhanukhinadarja@rambler.ru