

## ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ГЕНЕРАТОРЫ С ХАОТИЧЕСКОЙ АМПЛИТУДНОЙ ДИНАМИКОЙ, ОТВЕЧАЮЩЕЙ АТТРАКТОРАМ ТИПА СМЕЙЛА–ВИЛЬЯМСА

*А.С. Кузнецов*

Рассмотрен новый подход к построению параметрических генераторов хаоса с гиперболическими аттракторами на основе двух попеременно возбуждающихся подсистем, где каждая состоит из трех осцилляторов, один из которых играет роль накачки. В отличие от ранее предложенных схем, в качестве угловой переменной, претерпевающей кратное увеличение за характерный период, выступает не фаза колебаний, а величина, характеризующая распределение амплитуд двух колебательных элементов при параметрическом возбуждении от общего источника накачки.

*Ключевые слова:* Хаос, аттрактор, параметрический генератор, неавтономная система, соленоид Смейла–Вильямса.

### Введение

В математической теории динамических систем вводятся *однородно гиперболические странные аттракторы*, которые обладают сильными хаотическими свойствами и характеризуются структурной устойчивостью, то есть нечувствительностью к вариациям функций и параметров в определяющих уравнениях [1–3]. В последнее время указан ряд подходов к построению физических систем с такими аттракторами [4,5], один из которых опирается на использование известного в теории колебаний и приложениях класса систем с параметрическим возбуждением [6,7]. Механизм функционирования рассмотренных схем подразумевает попеременное возбуждение двух колебательных процессов, так что за полный цикл передачи возбуждения преобразование фазы колебаний описывается растягивающим отображением окружности. Для отображения, задающего изменение состояния за период обмена возбуждением, это соответствует присутствию аттрактора типа соленоида Смейла–Вильямса [1–5].

Недавно в работе [8] предложена принципиально другая идея реализации аттрактора Смейла–Вильямса, когда в качестве угловой переменной, претерпевающей

кратное увеличение за характерный период, выступает не фаза, а величина, характеризующая соотношение амплитуд колебаний автоколебательных элементов, питаемых от общего источника энергии. В настоящей статье предлагается применить аналогичный принцип для создания параметрического генератора хаоса. Схема строится на базе двух подсистем, содержащих каждая по три осциллятора, один из которых играет роль осциллятора накачки, а два других могут получать от него энергию за счет параметрического возбуждения, конкурируя между собой. Вводится угловая переменная, характеризующая распределение амплитуд пары осцилляторов, имеющих общий источник накачки, а связь между подсистемами организуется так, чтобы при попеременном возбуждении подсистем эта угловая переменная трансформировалась в соответствии с растягивающим отображением окружности. Таким образом, в отличие от ранее описанных параметрических генераторов с аттракторами типа Смейла–Вильямса [6,7], в данном случае хаотическое поведение на последовательных стадиях эволюции во времени демонстрируют амплитуды, а не фазы колебательных процессов.

## 1. Основная модель и ее уравнения

Поясним вначале способ введения угловой переменной. Пусть имеем два осциллятора с комплексными амплитудами  $a_1$  и  $a_2$ , взаимодействующих с осциллятором накачки амплитудой  $a_3$ . Если потери и внешние источники энергии отсутствуют, то при надлежащей нормировке амплитуд можно записать соотношение  $|a_1|^2 + |a_2|^2 = |a_3|^2$ , выражающее закон сохранения энергии. Полагая  $|a_1|^2 = |a_3|^2 \cos^2 \theta$ ,  $|a_2|^2 = |a_3|^2 \sin^2 \theta$ , вводим угловую координату  $\theta$ , характеризующую в каждый момент времени распределение энергии между первым и вторым осцилляторами.

Генератор хаоса можно построить из двух подсистем, отвечающих рассуждениям из предыдущего абзаца. Каждая из них содержит три осциллятора. Полагаем, что осцилляторы накачки в одной и другой подсистемах возбуждаются по очереди внешним воздействием прямоугольных импульсов с высокочастотным заполнением, и запишем модельные уравнения для медленных комплексных амплитуд осцилляторов в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 \dot{a}_1 &= a_1^* a_3 - \gamma a_1 + \varepsilon f_1(|b_1|^2, |b_2|^2) b_1, \\
 \dot{a}_2 &= a_2^* a_3 - \gamma a_2 + \varepsilon f_1(|b_2|^2, |b_1|^2) b_2, \\
 \dot{a}_3 &= -a_1^2 - a_2^2 - \gamma a_3 + \kappa \xi(t), \\
 \dot{b}_1 &= b_1^* b_3 - \gamma b_1 + \varepsilon f_2(|a_1|^2, |a_2|^2) a_1, \\
 \dot{b}_2 &= b_2^* b_3 - \gamma b_2 + \varepsilon f_2(|a_2|^2, |a_1|^2) a_2, \\
 \dot{b}_3 &= -b_1^2 - b_2^2 - \gamma b_3 + \kappa \xi(t + T),
 \end{aligned} \tag{1}$$

где величины  $a_{1,2,3}$  и  $b_{1,2,3}$  относятся к осцилляторам первой и второй подсистемы, соответственно; параметр  $\kappa$  характеризует интенсивность накачки, а  $\gamma$  служит параметром затухания осцилляторов. Попеременная подача внешнего воздействия

на осцилляторы накачки в подсистемах описывается функцией  $\xi(t)$ , которая определена соотношениями  $\xi(t) = 1$  при  $0 < t \leq T/2$ ,  $\xi(t) = 0$  при  $T/2 \leq t < T$  и  $\xi(t + T) = \xi(t)$ . Константа  $\varepsilon$  отвечает за связь осцилляторов, относящихся к разным подсистемам. Характер связи задается функциями  $f_1$  и  $f_2$ , которые считаем определенными в области действительных чисел и зависящими только от квадратов модуля амплитуд связанных осцилляторов. Вид этой зависимости будет конкретизирован ниже.

Структура уравнений (1) допускает класс решений, для которых амплитуды  $a$  и  $b$  действительны. Это позволяет рассматривать динамику в фазовом пространстве вдвое меньшей размерности, а именно,  $N = 6$  для стробоскопического отображения.

Временная эволюция составлена из двух периодически повторяющихся стадий. На одной стадии осуществляется возбуждение осциллятора накачки первой подсистемы с помощью внешнего резонансного воздействия и параметрическое возбуждение двух связанных с ним осцилляторов, распределение энергии между которыми будет соответствовать некоторой величине угловой переменной  $\theta$ . На другой стадии накачка первой подсистемы прекращается, и колебания в ней затухают. Но в то же время включается накачка второй подсистемы, и возникает параметрическая неустойчивость по отношению к возбуждению входящей в нее пары осцилляторов. Развитию этой неустойчивости кладет начало остаточное возбуждение осцилляторов первой подсистемы благодаря присутствию связи, характеризуемой параметром  $\varepsilon$  и функциями  $f_{1,2}$ .

Таким образом, оказывается, что распределение интенсивности колебаний осцилляторов второй подсистемы и соответствующая этому угловая переменная будут зависеть от предшествующего соотношения амплитуд осцилляторов первой подсистемы. Потом выключается накачка второй подсистемы, и включается накачка первой, так что происходит обратная передача возбуждения к первой подсистеме, после чего процесс повторяется периодически. Для реализации хаоса нужно, чтобы за полный цикл передачи возбуждения угловая переменная трансформировалась в соответствии с растягивающим отображением окружности. Это достигается надлежащим выбором функций  $f_{1,2}$ ; два возможных варианта рассмотрены в последующих разделах.

## 2. Модель с утроением угловой переменной

Зададим вид функций, фигурирующих в уравнениях (1), следующим образом:

$$f_1(x, y) = x - 3y, \quad f_2(x, y) = 1. \quad (2)$$

В этом случае при передаче возбуждения от первой системы ко второй угловая переменная, очевидно, не меняется, поскольку соотношение амплитуд осцилляторов остается тем же. Однако при передаче возбуждения от второй подсистемы к первой угловая переменная претерпевает утроение (с переменной знака). В самом деле, предположим, что на этапе возбуждения второй подсистемы мы имели  $|b_1|^2 \sim \cos^2 \theta$ ,  $|b_2|^2 \sim \sin^2 \theta$ . Тогда члены, фигурирующие в двух первых уравнениях системы (1), представляются в виде

$$\begin{aligned} (|b_1|^2 - 3|b_2|^2)b_1 &\sim (\cos^2 \theta - 3\sin^2 \theta) \cos \theta = \cos 3\theta, \\ (|b_2|^2 - 3|b_1|^2)b_2 &\sim (\sin^2 \theta - 3\cos^2 \theta) \sin \theta = -\sin 3\theta. \end{aligned} \quad (3)$$

Таким образом, в результате передачи возбуждения первой подсистеме амплитуды  $a_1$  и  $a_2$  будут пропорциональны этим величинам, а следовательно, угловая переменная окажется равной  $\theta' = -3\theta$ . В итоге, за полный цикл передачи возбуждения имеет место утроение угловой переменной (с изменением знака).

Численное моделирование проводилось путем решения дифференциальных уравнений (1) для действительных амплитуд при значениях параметров  $\kappa = 2$ ,  $\varepsilon = 0.1$ ,  $T = 20$ ,  $\gamma = 1$  методом Рунге–Кутты. На рис. 1 показаны зависимости амплитуд от времени для шести составляющих систему осцилляторов в режиме установившихся колебаний. Представлен интервал времени, содержащий 12 периодов модуляции накачки. Как можно видеть из диаграммы, в каждой из подсистем амплитуда осциллятора накачки изменяется практически по периодическому закону, но два других осциллятора, относящихся к подсистеме, на последовательных стадиях активности имеют различное соотношение амплитуд, изменяющееся нерегулярным образом.

На рис. 2, а приводится диаграмма, иллюстрирующая преобразование угловой переменной за период модуляции накачки, что соответствует стробоскопическому описанию системы. Угловая переменная определялась по ходу вычислений для первой подсистемы из соотношений  $\theta = \arctan(a_2/a_1)$  при  $a_1 > 0$ ,  $\theta = \arctan(a_2/a_1) + \pi$  при  $a_1 < 0$ , в момент окончания стадии параметрического возбуждения второй подсистемы. Как можно видеть, график соответствует растягивающему отображению окружности: полный оборот на  $2\pi$  для прообраза отвечает трехкратному обороту в обратном направлении для образа, что согласуется с приведенным выше рассуждением.

Вычисление показателей Ляпунова для стробоскопического отображения Пуанкаре было проведено на основе численного решения уравнений для действительных амплитуд и шести комплектов уравнений в вариациях с ортогонализацией векторов по Граму–Шмидту и нормализацией на каждом периоде модуляции [9]. В спектре показателей Ляпунова

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= 1.014, & \Lambda_2 &= -3.246, & \Lambda_3 &= -3.516, \\ \Lambda_4 &= -5.094, & \Lambda_5 &= -5.326, & \Lambda_6 &= -5.424 \end{aligned} \quad (4)$$

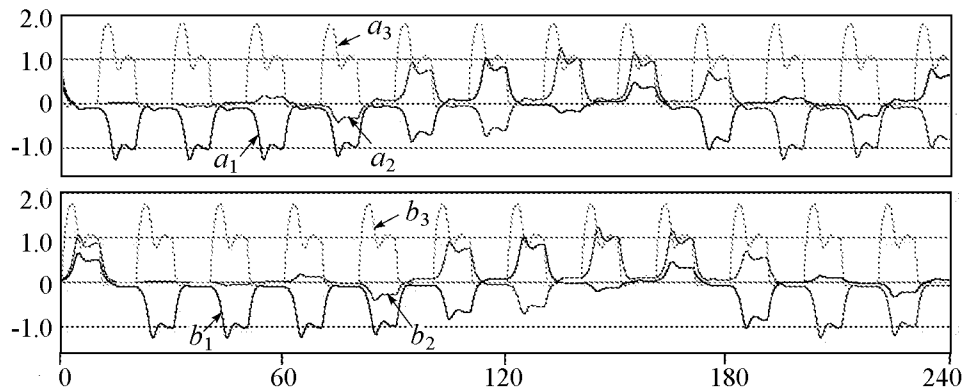


Рис. 1. Графики зависимости от времени амплитуд трех осцилляторов первой (вверху) и второй (внизу) подсистем, полученные в результате численного решения уравнений (1) для действительных амплитуд при задании функций связи соотношениями (2). Значения параметров  $\kappa = 2$ ,  $\varepsilon = 0.1$ ,  $T = 20$ ,  $\gamma = 1$

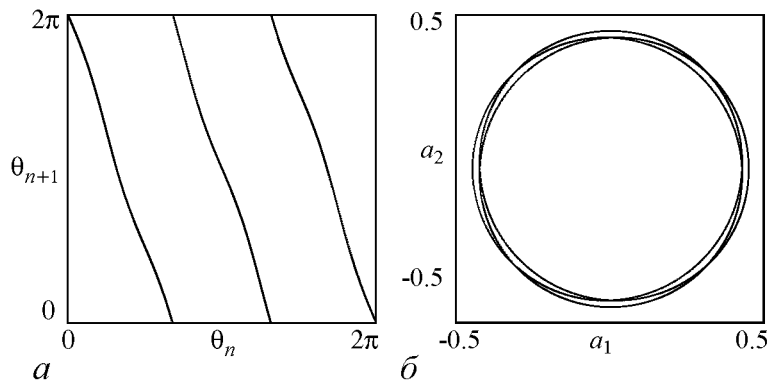


Рис. 2. Диаграмма, иллюстрирующая преобразование угловой переменной за период модуляции накачки (а), и портрет аттрактора в стробоскопическом сечении (б). Графики построены по результатам численного решения уравнений (1) для действительных амплитуд при задании функций связи соотношениями (2). Значения параметров  $\kappa = 2$ ,  $\varepsilon = 0.1$ ,  $T = 20$ ,  $\gamma = 1$

старший показатель близок к величине  $\ln 3 = 1.0986\dots$ , что соответствует трехкратному растяжению вдоль циклической координаты (угловой переменной) в шестимерном фазовом пространстве отображения Пуанкаре. Остальные показатели отрицательны, что отвечает сжатию по остальным направлениям в фазовом пространстве. Таким образом, с точки зрения динамики, описываемой в терминах действительных амплитуд, стробоскопическое отображение имеет, как можно полагать, аттрактор типа Смейла–Вильямса в варианте соленоида, у которого число витков на одном шаге построения утраивается. На рис. 2, б показан портрет аттрактора для стробоскопического отображения, визуально соответствующий изображению соленоида типа Смейла–Вильямса с различной поперечной канторовой структурой. Оценка размерности аттрактора в сечении Пуанкаре по формуле Каплана–Йорке на основе спектра показателей Ляпунова (3) дает  $D = 1 + \Lambda_1/|\Lambda_2| = 1.31$ .

Расчеты показывают, что рассмотренный тип динамики сохраняется в достаточно широком диапазоне изменения параметров системы.

### 3. Модель с девятикратным изменением угловой переменной

Зададим теперь функции в уравнениях (1) в виде

$$f_1(x, y) = f_2(x, y) = x - 3y, \quad (5)$$

благодаря чему уравнения приобретают симметричный вид. Теперь утроение угловой переменной будет происходить при каждой передаче возбуждения, от первой подсистемы ко второй, и от второй к первой. Таким образом, за полный цикл угловая переменная претерпевает умножение на фактор девять.

На рис. 3 показаны зависимости амплитуд от времени для шести осцилляторов, составляющих систему, в режиме установившихся колебаний при тех же значениях параметров, что и на рис. 2. Как и в предыдущем разделе, в каждой из подсистем амплитуда осциллятора накачки изменяется практически по периодическому закону, тогда как два других осциллятора каждой подсистемы демонстрируют соотношение амплитуд, изменяющееся нерегулярным образом. В данном случае

поведение подсистем симметрично. Это выражается в том, что верхняя и нижняя диаграммы на рис. 3 выглядят аналогично друг другу.

На рис. 4, *a* иллюстрируется преобразование угловой переменной при стробоскопическом описании динамики системы. График содержит девять ветвей и соответствует растягивающему отображению окружности: полный обход окружности для прообраза отвечает девятикратному обходу в том же направлении для образа.

Вычисление показателей Ляпунова для стробоскопического отображения Пуанкаре приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned} \Lambda_1 = 2.183, \quad \Lambda_2 = -2.516, \quad \Lambda_3 = -2.520, \\ \Lambda_4 = -5.177, \quad \Lambda_5 = -5.196, \quad \Lambda_6 = -5.217, \end{aligned} \tag{6}$$

где старший показатель близок к величине  $\ln 9 = 2.1972\dots$ . Это соответствует девятикратному растяжению вдоль циклической координаты и сжатию по остальным направлениям в фазовом пространстве отображения Пуанкаре. Таким образом, с точки зрения динамики, описываемой в терминах действительных амплитуд, реализуется аттрактор типа Смейла–Вильямса в варианте соленоида, у которого число витков на

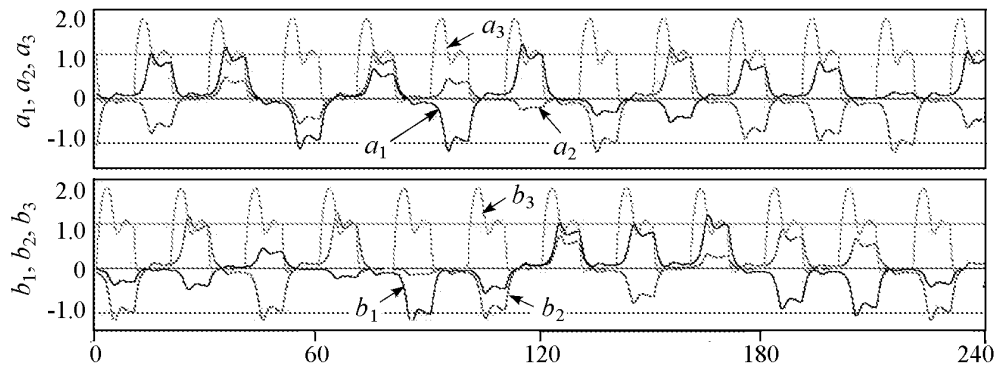


Рис. 3. Графики зависимости от времени амплитуд трех осцилляторов первой (вверху) и второй (внизу) подсистем, полученные в результате численного решения уравнений (1) для действительных амплитуд при задании функций связи соотношениями (5). Значения параметров  $\kappa = 2$ ,  $\varepsilon = 0.1$ ,  $T = 20$ ,  $\gamma = 1$

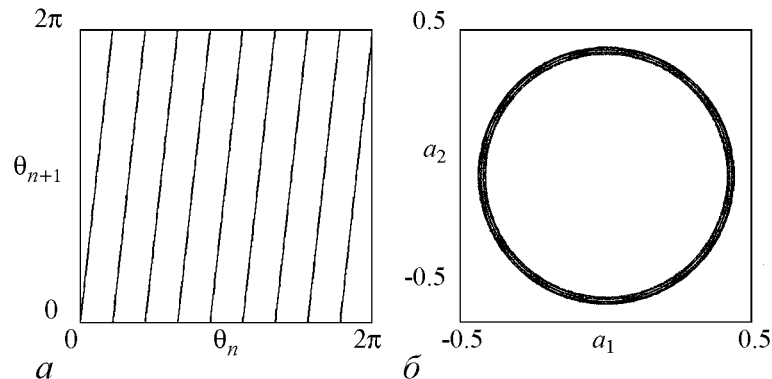


Рис. 4. Диаграмма, иллюстрирующая преобразование угловой переменной за период модуляции накачки (*a*), и портрет аттрактора в стробоскопическом сечении (*b*). Графики построены по результатам численного решения уравнений (1) для действительных амплитуд при задании функций связи соотношениями (5). Значения параметров  $\kappa = 2$ ,  $\varepsilon = 0.1$ ,  $T = 20$ ,  $\gamma = 1$

одном шаге построения увеличивается девятикратно. На рис. 4, б показан портрет аттрактора для стробоскопического отображения. Оценка размерности аттрактора в сечении Пуанкаре по формуле Каплана–Йорке на основе спектра показателей Ляпунова (6) дает  $D = 1 + \Lambda_1/|\Lambda_2| = 1.87$ . Заметим, что и старший показатель Ляпунова, и дробная часть фрактальной размерности в этом случае существенно больше, чем для модели, рассмотренной в предыдущем разделе.

Согласно результатам проведенных расчетов, характер динамики и тип аттрактора сохраняются в достаточно широком диапазоне изменения параметров.

### Заключение

Рассмотрен новый принцип построения схем параметрических генераторов гиперболического хаоса. Отличие от систем, предложенных ранее [6,7], состоит в том, что в качестве угловой переменной, претерпевающей кратное увеличение за характерный период, выступает не фаза колебаний, а величина, характеризующая соотношение амплитуд двух параметрических осцилляторов, возбуждаемых общим источником накачки. Таким образом, хаотическая динамика проявляется в динамике амплитуд, а не фаз осцилляторов. Подобные системы могут быть реализованы в радиотехнике или нелинейной оптике и найти применение для систем скрытой коммуникации и генерации случайных чисел. Привлекательной чертой для приложений является грубость, или структурная устойчивость, обусловленная гиперболической природой аттрактора в амплитудных уравнениях, что обеспечивает нечувствительность динамики амплитуд к шумам и флуктуациям, а также к изменению параметров и характеристик элементов, из которых построена система.

Автор выражает благодарность профессору С.П. Кузнецову за обсуждение и помощь.

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 12-02-00541.*

### Библиографический список

1. *Синай Я.Г.* Стохастичность динамических систем // В кн. Нелинейные волны / Ред. А.В. Гапонов-Грехов. М.: Наука, 1979. С. 192.
2. *Shilnikov L.* Mathematical problems of nonlinear dynamics: a tutorial // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 1997. Vol. 7, № 9. P. 1353.
3. *Лоскутов А.Ю.* Очарование хаоса // УФН. 2010. Vol. 180, № 12. P. 1305.
4. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос и однородно гиперболические аттракторы: от математики к физике // УФН. 2011. Т. 181, № 2. С. 121.
5. *Kuznetsov S.P.* Hyperbolic Chaos: A Physicist's View. Higher Education Press: Beijing and Springer-Verlag: Berlin, Heidelberg. 2012. 336 p.
6. *Кузнецов С.П.* О возможности реализации параметрического генератора гиперболического хаоса // ЖЭТФ. 2008. Т. 133, № 2. С. 438.
7. *Кузнецов А.С., Кузнецов С.П., Сатаев И.Р.* Параметрический генератор гиперболического хаоса на основе двух связанных осцилляторов с нелинейной диссипацией // ЖТФ. 2010. Т. 80, вып. 12. С. 1.

8. *Isaeva O.B., Kuznetsov S.P., Mosekilde E.* Hyperbolic chaotic attractor in amplitude dynamics of coupled self-oscillators with periodic parameter modulation // *Phys. Rev.* 2011. Vol. 84. 016228.
9. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. 2-е изд. Москва: Физматлит, 2006. 356 с.

*Саратовский государственный  
университет им. Н.Г. Чернышевского*

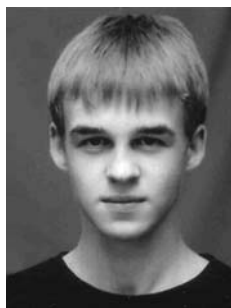
*Поступила в редакцию 13.02.2012*

## **PARAMETRIC GENERATORS WITH CHAOTIC AMPLITUDE DYNAMICS CORRESPONDING TO ATTRACTORS OF SMALE–WILLIAMS TYPE**

*A.S. Kuznetsov*

A new approach is considered to design of parametric generators of chaos with hyperbolic attractors on the basis of two alternately excited subsystems, each consisting of three oscillators, one of which plays the role of the pump source. In contrast to previously proposed schemes, the angular variable undergoing a multiple increase over each characteristic period is a quantity characterizing the amplitude ratio of two oscillators, rather than the phase of successive oscillation trains.

*Keywords:* Chaos, attractor, parametric generator, non-autonomous system, Smale–Williams solenoid.



*Кузнецов Алексей Сергеевич* – родился в Саратове (1989). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (2010). Защитил дипломную работу на тему «Генераторы хаоса на основе параметрических осцилляторов с модулированной добротностью». В настоящее время – аспирант факультета нелинейных процессов СГУ. Участник школ-семинаров и конференций «Нелинейные дни в Саратове для молодых», «Наноэлектроника, нанофотоника и нелинейная физика», «Хаотические автоколебания и образование структур».

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
E-mail: [alek.art@mail.ru](mailto:alek.art@mail.ru)