Научно-технический журнал

Издается с 2003 г.

Выходит один раз в квартал
Март 2014 года

ВЕСТНИК
САРАТОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

2014

№ 1 (74)

Журнал включен в перечень ведущих рецензируемых журналов и научных изданий, утвержденный президиумом ВАК Министерства образования и науки РФ, в которых публикуются основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук

Главный редактор д.и.н., профессор И.Р. Плеве
Зам. главного редактора д.т.н., профессор А.А. Сытник
Ответственный секретарь д.ф.-м.н., профессор В.В. Астахов

Редакционный совет: д.т.н. В.И. Волчихин, д.т.н. В.А. Голенков, д.и.н. В.А. Динес, д.х.н. В. Зеленский (Польша), д.т.н. В.А. Игнатьев, д.т.н. В.В. Калашников, д.т.н. И.А. Новаков, д.и.н. И.Р. Плеве (председатель), д.т.н. А.Ф. Резчиков, д. социол. н. С.Б. Суровов, д.т.н. А.А. Сытник (заместитель председателя), д.ф.-м.н. Я. Аврейцевич (Польша), д.э.н. У. Арнольд (Германия), д.ф.-м.н. Э. Мерсер (Великобритания), д.э.н. Э. де Соузе Феррейра (Португалия), д.т.н. Т. Чермак (Чехия), д.э.н. Ю.В. Шленов

Редакционная коллегия: д.т.н. В.А. Крысько, д.ф.-м.н. В.В. Астахов, д.х.н. А.В. Гороховский, д.т.н. В.Н. Лясников, д.ф.-м.н. Л.А. Мельников, д.т.н. Р.З. Аминов, д.т.н. Ю.Г. Иващенко, д.т.н. А.С. Денисов, д.т.н. А.А. Сытник, д.т.н. А.А. Большаков, д.филос.н. Д.В. Михель, д.биол.н. Е.И. Тихомирова, д.э.н. А.Н. Плотников, д.и.н. Г.В. Лобачева

Редактор Л.А. Скворцова
Компьютерная верстка Н.В. Лукашовой
Перевод на английский язык А.Х. Аскаровой

Адрес редакции:
Саратов, 410054, ул. Политехническая, 77
Телефон: (845 2) 99-87-39
E-mail: vestnik@sstu.ru
http://dni.sstu.ru/vestnik.nsf
Факс: (845 2) 52-53-02

Подписано в печать 15.03.14
Формат 60×84 1/8 Бум. офсет.
Усл. печ. л. 28,0 Уч.-изд. л. 15,5
Тираж 500 экз. Заказ 113
Отпечатано в Издательстве СГТУ,
410054, г. Саратов, ул. Политехническая, 77

Полная электронная версия журнала размещена в системе РИНЦ
в открытом доступе на платформе eLIBRARY.RU

Подписной индекс 18378
(каталог «Газеты. Журналы» на 2-е полугодие 2014 г.)

ISSN 1999-8341

© Саратовский государственный технический университет, 2014

ФИЗИКА, РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

УДК 517.9

В.М. Дорошенко, Ю.П. Емельянова, А.П. Кузнецов, Ю.В. Седова

МЕТОД КАРТ ЛЯПУНОВСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ: ИЛЛЮСТРАЦИИ В ТЕОРИИ СВЯЗАННЫХ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Демонстрируются возможности метода карт ляпуновских показателей для идентификации различных режимов нелинейных систем. Показано, что карты ляпуновских показателей выявляют тонкую структуру и сложное устройство пространства параметров. Иллюстрации приведены для ансамблей связанных автоколебательных элементов типа осциллятора Ван дер Поля, а также для связанных фазовых осцилляторов. Рассматриваемый подход является универсальным для систем различной физической природы.

Показатели Ляпунова, карта ляпуновских показателей, квазипериодические колебания, инвариантные торы, резонансная паутина Арнольда

V.M. Doroshenko, Yu.P. Emelianova, A.P. Kuznetsov, J.V. Sedova

A METHOD OF LYAPUNOV CHARTS: ILLUSTRATIONS TO THE THEORY OF COUPLED SELF-OSCILLATING SYSTEMS

We demonstrate scopes of the Lyapunov charts method for identification of various regimes in nonlinear systems. We show that Lyapunov charts reveal the sophisticated and complex structure of the parameter space. Illustrations are given for the ensembles of coupled self-oscillating elements of Van der Pol type oscillator and also for the coupled phase oscillators. The considered approach is common for a variety of physical systems

Lyapunov exponents, Lyapunov chart, quasiperiodic oscillations, invariant tori, Arnol'd resonance web

Введение. Нелинейные системы могут демонстрировать достаточно сложное поведение. Важным этапом исследования таких систем является выявление качественно разных типов динамики. Это могут быть периодические (регулярные) колебания, квазипериодические колебания с разным числом несоизмеримых частот, хаотические и гиперхаотические режимы разной степени сложности. Различить типы режимов можно с помощью расчета ляпуновских показателей, которые характеризуют среднее изменение расстояния между двумя изначально близкими точками в фазовом пространстве. В данной статье мы продемонстрируем возможности *метода карт ляпуновских показателей*, который позволяет выявлять тонкие особенности устройства пространства параметров нелинейных систем. В качестве объекта исследования выберем системы *связанных автоколебательных элементов* – генераторов периодических колебаний. Таким образом, параллельно с иллюстрацией возможностей метода дадим некоторый «эскиз» теории синхронизации ансамблей осцилляторов, содержащих различное количество элементов. В качестве индивидуального элемента будем использовать универсальные модели теории колебаний: осциллятор Ван дер Поля, редуцированную фазовую модель (фазовый осциллятор), а также отображение окружности и его обобщения.

Два связанных осциллятора Ван дер Поля – Дуффинга. Прежде всего, необходимо организовать алгоритм по вычислению показателей Ляпунова Λ_i при фиксированных параметрах системы. Это может быть стандартный алгоритм Бенеттина, описанный, например, в [1, 2]. Далее выбирается некоторый цветовой способ представления ляпуновских показателей. Такая процедура реализуется в

каждой точке плоскости параметров, в результате чего получаем карту, характеризующую динамику системы на всей плоскости.

В простейшем случае можно следить за одним – старшим показателем Λ_{CT}. Его положительные значения отвечают хаосу, нулевые – квазипериодическим колебаниям, а отрицательные – периодическим колебаниям. В качестве примера рассмотрим классическую модель теории колебаний – два диссипативно связанных *осциллятора Ван дер Поля – Дуффинга* [3,4]:

$$\begin{aligned} &\ddot{x} - (\lambda_1 - x^2)\dot{x} + \left(1 - \frac{\Delta}{2}\right)x + \beta x^3 + \mu(\dot{x} - \dot{y}) = 0, \\ &\ddot{y} - (\lambda_2 - y^2)\dot{y} + \left(1 + \frac{\Delta}{2}\right)y + \beta y^3 + \mu(\dot{y} - \dot{x}) = 0. \end{aligned} \qquad (1)$$

Здесь x, y – переменные, характеризующие осцилляторы, $\lambda_{1,2}$ – параметры отрицательного трения, отвечающие за возникновение автоколебаний, Δ – частотная расстройка осцилляторов, β – параметр кубической нелинейности по типу осциллятора Дуффинга, μ – величина диссипативной связи.

Карта старшего ляпуновского показателя системы (1) приведена на рис. 1. На этой карте оттенки синего цвета соответствуют областям с отрицательными значениями ляпуновского показателя. Причем, чем темнее цвет, тем больше показатель по абсолютной величине. Это области синхронизации осцилляторов, отвечающие периодическим колебаниям. Оттенки желтого и оранжевого цветов соответствуют близким к нулю значениям показателя и выявляют области квазипериодических режимов. В силу конечной точности расчетов идеально зафиксировать нулевой показатель не удается, и поэтому области квазипериодических режимов имеют не строго одинаковую окраску. Красный цвет соответствует хаотическим режимам с положительным ляпуновским показателем. Присутствие красного цвета на карте старшего ляпуновского показателя подтверждает наличие хаотического поведения в системе. Оттенком серого цвета обозначена область гибели колебаний OD, когда диссипативная связь подавляет колебания обоих осцилляторов.

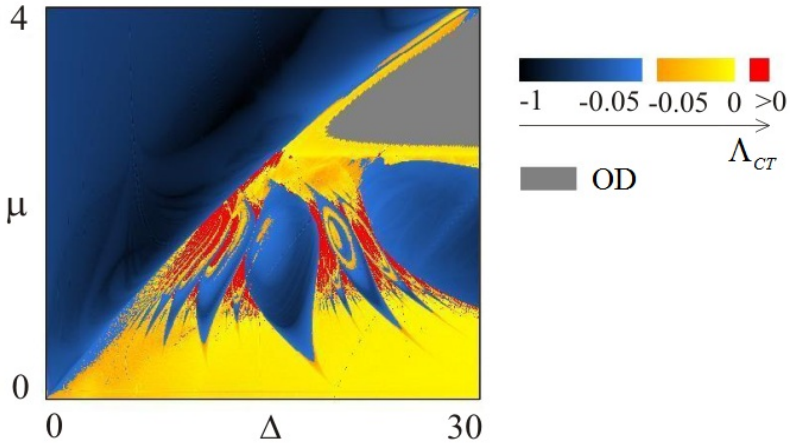

Рис. 1. Карта старшего ляпуновского показателя системы связанных осцилляторов Ван дер Поля – Дуффинга (1); $\lambda_1 = \lambda_2 = 2.5$, $\beta = 1$

Три связанных осциллятора Ван дер Поля – Дуффинга. В качестве более сложного примера рассмотрим три обобщенных осциллятора Ван дер Поля – Дуффинга, связанных в цепочку (рис. 2а):

$$\begin{aligned} &\ddot{x} - \left(\lambda_1 + cx - x^2\right)\dot{x} + x + \beta x^3 + \mu\left(\dot{x} - \dot{y}\right) = 0, \\ &\ddot{y} - \left(\lambda_2 + cy - y^2\right)\dot{y} + \left(1 + \Delta_1\right)y + \beta y^3 + \mu\left(\dot{y} - \dot{x}\right) + \mu\left(\dot{y} - \dot{z}\right) = 0, \\ &\ddot{z} - \left(\lambda_3 + cz - z^2\right)\dot{z} + \left(1 + \Delta_2\right)z + \beta z^3 + \mu\left(\dot{z} - \dot{y}\right) = 0. \end{aligned} \qquad (2)$$

Здесь обозначения аналогичны (1), причем Δ_1 и Δ_2 представляют собой частотные расстройки второго и третьего осцилляторов относительно первого, c – дополнительный параметр квадратичной нелинейности.

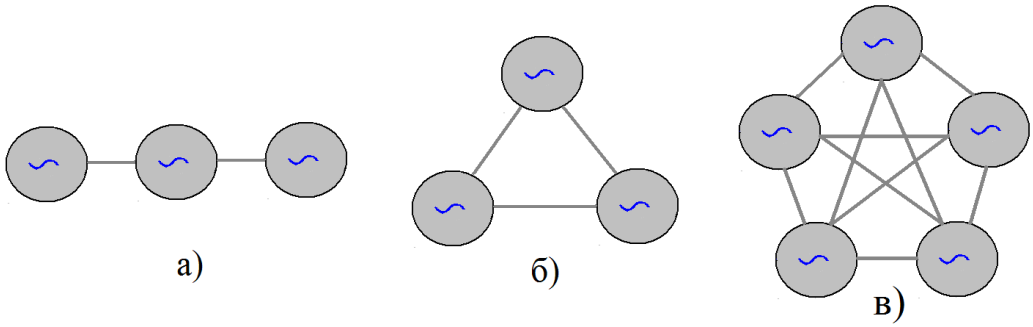

Рис. 2. Низкоразмерные ансамбли в форме а) цепочки из трех осцилляторов, б) сети из трех и в) пяти осцилляторов

В этом случае многообразие режимов возрастает, и поэтому целесообразно строить карту, демонстрирующую структуру *спектра показателей Ляпунова*. Для этого необходимо вычислить набор показателей Ляпунова и упорядочить их по величине: $\Lambda_1 \geq \Lambda_2 \geq \Lambda_3 \geq \ldots$ Затем плоскость параметров окрашивается в разные цвета, чтобы визуализировались разные типы режимов. Например, если существенных показателей четыре[1], то с помощью такого метода выявляются области устойчивых режимов:

а) OD – состояние равновесия, $\Lambda_{1-4} < 0$;

б) P – периодический режим, $\Lambda_1 = 0$, $\Lambda_{2-4} < 0$;

в) T_2 – режим двухчастотной квазипериодичности, $\Lambda_{1,2} = 0$, $\Lambda_{3,4} < 0$;

г) T_3 – режим трехчастотной квазипериодичности, $\Lambda_{1-3} = 0$, $\Lambda_4 < 0$;

д) T_4 – режим четырехчастотной квазипериодичности $\Lambda_{1-4} = 0$;

е) C – хаотический режим, хотя бы один показатель Ляпунова положительный.

Конкретный набор цветов и их число зависят от типа системы и целей анализа. Например, можно дополнительно показать режимы хаоса и гиперхаоса с разным числом положительных показателей Ляпунова и т.д. В данной статье мы сконцентрируемся на возможности *квазипериодических колебаний с разным числом несоизмеримых частот.*

Соответствующая карта ляпуновских показателей для системы (2) приведена на рис. 3. Цветовая палитра расшифрована справа от рисунка. Можно видеть, что при небольших значениях параметра связи доминируют квазипериодические режимы T_3 с тремя несоизмеримыми частотами. В область T_3 встроены языки двухчастотных режимов T_2. Перекрытие языков двухчастотных режимов приводит к хаосу.

Переходы между разными типами режимов полезно уточнить, дополнив карту ляпуновских показателей графиками зависимостей нескольких старших показателей Ляпунова от величины связи, как показано на рис. 4. Можно видеть характерные моменты обращения в ноль того или иного показателя, что отвечает различным бифуркациям [5]. Сначала все показатели Ляпунова отрицательные, что отвечает устойчивому равновесию в области «гибели колебаний». Затем происходит *бифуркация Андронова-Хопфа* АН, и рождается устойчивый предельный цикл, отвечающий периодическому режиму на карте ляпуновских показателей. *Бифуркация Неймарка-Сакера* NS приводит к возникновению двухчастотного тора из этого предельного цикла. Следующая характерная бифуркация – *квазипериодическая бифуркация Хопфа* QH. Она отвечает появлению новой частоты и мягкому возникновению трехчастотного тора из двухчастотного. Эта бифуркация идентифицируется по поведению графиков зависимостей третьего и четвертого показателей Ляпунова: они совпадают до точки бифуркации. За точкой бифуркации один показатель остается нулевым, а другой снова становится отрицательным. Отметим, что все эти три бифуркации при большой частотной расстройке приблизительно определяются значениями управляющих параметров осцилляторов, что показано стрелками на рис. 3.

[1] Число показателей Ляпунова равно размерности системы. Отметим, что для потоковых систем (дифференциальных уравнений) есть один нулевой показатель, отвечающий движению по аттрактору, который в случае периодических и нерегулярных колебаний можно отбросить. В этом случае число показателей уменьшится на единицу, а соответствующая классификация будет применима и к отображениям.

При этом при больших частотных расстройках возникают характерные режимы *широкополосной синхронизации* [6,7] на базе как периодического, так и двухчастотного квазипериодического режимов.

На рис. 4 можно видеть также окна двухчастотных квазипериодических режимов. Они отвечают *резонансным двухчастотным торам*, возникающим на поверхности трехчастотного тора. Эти окна ограничены точками *седло-узловых бифуркаций инвариантных торов* SNT. В этом случае устойчивый двумерный тор сталкивается с седловым тором, после чего они исчезают с образованием трехчастотного тора из общих многообразий. Признаком такой бифуркации является обращение в ноль третьего показателя Ляпунова, но четвертый показатель остается отрицательным и не участвует в картине бифуркации.

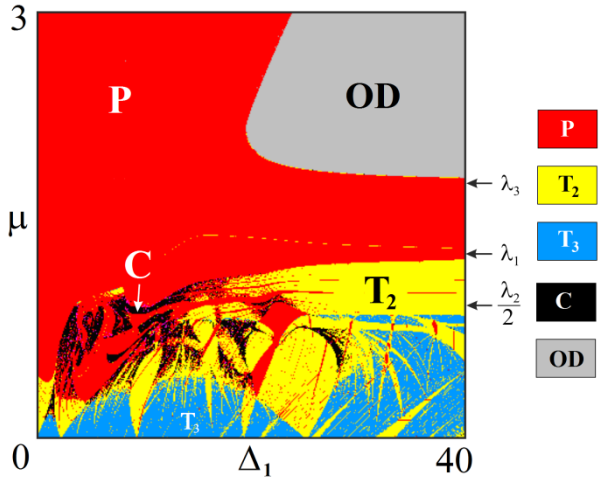

Рис. 3. Карта ляпуновских показателей для трех связанных обобщенных осцилляторов Ван дер Поля-Дуффинга;
$\lambda_1 = 1.3$, $\lambda_2 = 1.9$, $\lambda_3 = 1.8$, $\Delta_2 = 1.5$, $c = 1$, $\beta = 1$

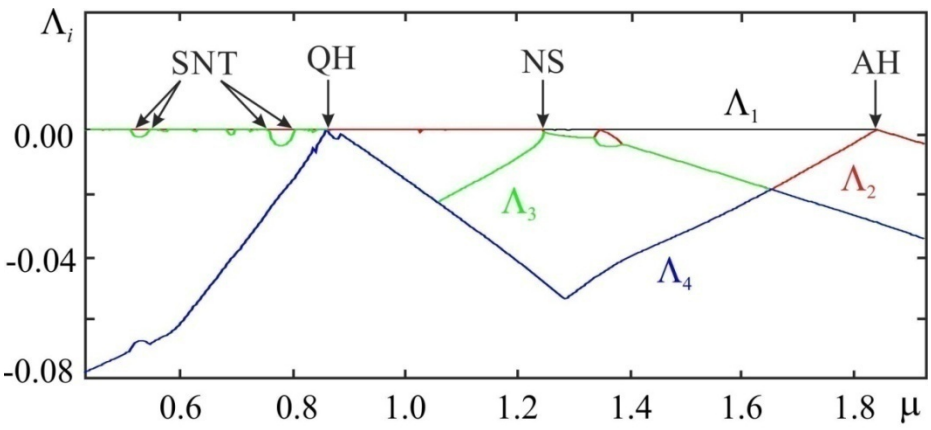

Рис. 4. Зависимость четырех старших показателей Ляпунова системы (2) от величины связи и точки бифуркаций разных типов; $\Delta_1 = 34.5$

Фазовые осцилляторы. Если параметр отрицательного трения, частотная расстройка и величина связи малы, причем предельные циклы автономных систем слабо возмущены, то можно следить только за относительной фазой осцилляторов θ [3, 4]. В случае двух осцилляторов (1) соответствующее уравнение носит название *уравнения Адлера* [3,4,8]:

$$\dot{\theta} = -\Delta/2 - \mu \sin\theta. \qquad (3)$$

Здесь частотная расстройка и величина связи нормированы на параметр λ.

Уравнение Адлера описывает основные эффекты, возникающие при взаимодействии автоколебательных элементов, а именно захват колебаний при $\mu > |\Delta|$ и режим квазипериодических коле-

баний (биений) при $\mu < |\Delta|$. Связанные осцилляторы, описываемые уравнением Адлера, можно назвать связанными *фазовыми осцилляторами*.

Аналогичное рассмотрение можно провести и для большего числа осцилляторов. Обратимся к системе трех осцилляторов Ван дер Поля, причем выберем другую геометрию связи: каждый с каждым (рис. 2б):

$$\begin{aligned} &\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \mu(2\dot{x} - \dot{y} -) = 0, \\ &\ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + (1 + \Delta_1)y + \mu(2\dot{y} - \dot{x} - \dot{z}) = 0, \\ &\ddot{z} - (\lambda - z^2)\dot{z} + (1 + \Delta_2)z + \mu(2\dot{x} - \dot{z} - \dot{y}) = 0. \end{aligned} \qquad (4)$$

Действуя стандартным образом [3, 4, 7], можно получить следующие уравнения для двух относительных фаз осцилляторов θ и φ, своего рода обобщенное уравнение Адлера:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= -\frac{\Delta_1}{2} - \mu\sin\theta + \frac{\mu}{2}\sin\varphi - \frac{\mu}{2}\sin(\theta + \varphi), \\ \dot{\varphi} &= \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{2} - \mu\sin\varphi + \frac{\mu}{2}\sin\theta - \frac{\mu}{2}\sin(\theta + \varphi). \end{aligned} \qquad (5)$$

Метод карт ляпуновских показателей применим и для фазовых систем. Соответствующая карта, построенная для системы (5) на плоскости двух частотных расстроек, показана на рис. 5а. В центре располагается имеющая вид эллипса область периодических режимов, отвечающая точной синхронизации всех трех осцилляторов. Особенностью системы является наличие трех основных полос двухчастотных режимов, на пересечении которых лежит область полной синхронизации. Возникновение этих полос обусловлено возможностью трех основных резонансов:

- совпадают частоты первого и второго осцилляторов, $\Delta_1 = 0$;
- совпадают частоты второго и третьего осцилляторов, $\Delta_2 = 0$;
- совпадают частоты первого и третьего осцилляторов, $\Delta_1 = \Delta_2$.

Более узкие полосы и языки двухчастотных режимов отвечают резонансам более высокого порядка.

Представляет интерес и случай *активной связи*, когда синхронизация двух элементов описывается уравнением (5), но с отрицательным параметром связи. Такой тип связи распространен, например, для массивов взаимодействующих лазеров [9, 10]. В этом случае синфазный режим становится неустойчивым. Поэтому в англоязычной литературе эту ситуацию иногда называют *repulsive interaction* – отталкивающее взаимодействие. Соответствующая карта ляпуновских показателей показана на рис. 5б. Можно видеть радикальное изменение области полной синхронизации, которая теперь представляет собой шестиконечную «звезду»[1].

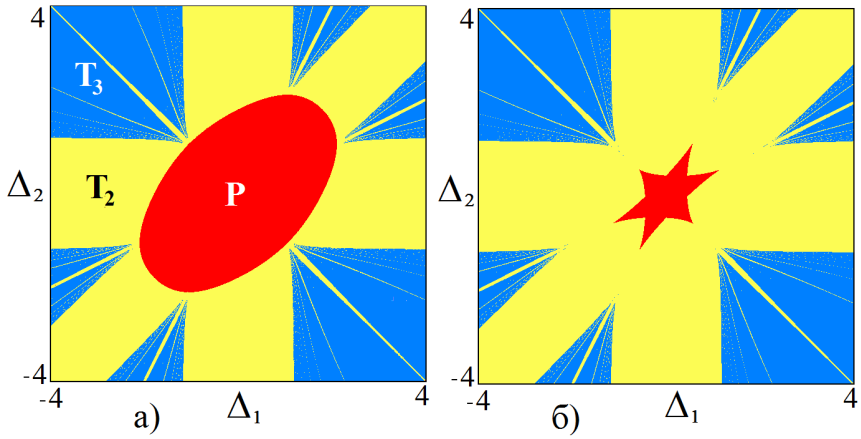

Рис. 5. Карта ляпуновских показателей для сети из трех фазовых осцилляторов (5) на плоскости частотных расстроек; а) случай диссипативной связи $\mu = 0.6$, б) случай активной связи $\mu = -0.6$

Дискретные фазовые модели. При увеличении числа осцилляторов возникает проблема заметного увеличения необходимого времени для проведения компьютерных расчетов. Поэтому можно

[1] Такая картина возникает в результате наложения двух областей треугольной формы, что говорит о возможности фазовой бистабильности в системе. Мы, однако, не будем детально обсуждать этот вопрос.

упростить задачу, перейдя к дискретным отображениям. Такой переход может быть проведен и строго аналитически, если, например, рассматривается неавтономная система с импульсным возбуждением [2, 11, 12]. Однако в математике и нелинейной динамике достаточно распространен простой прием, который состоит в замене производных конечными разностями:

$$\dot{\theta} \to (\theta_{n+1} - \theta_n)/h, \tag{6}$$

где h – шаг дискретизации[1]. Применив эту процедуру к уравнению Адлера, выполнив перенормировку $\Delta \to \Delta / h$, $\mu \to \mu / h$ и изменив знак фазы, получим *синус-отображение окружности*[2]:

$$\theta_{n+1} = \Delta + \theta_n - \mu \sin \theta_n. \tag{7}$$

Отображение (7) можно рассматривать как *дискретный фазовый осциллятор*. Оно «наследует» основное свойство системы-прототипа – наличие основного языка синхронизации (языка Арнольда), которому теперь отвечает неподвижная точка отображения (7). При этом граница этого языка синхронизации, как и для уравнения Адлера, задается условием $\mu = \pm\Delta$. Однако происходит и расширение круга описываемых феноменов, что иллюстрирует карта ляпуновских показателей на рис.6[3]. Для отображения окружности возникает не один, а множество языков Арнольда, а также появляются области хаоса. Это отображение хорошо передает качественное устройство плоскости параметров двух связанных автоколебательных систем при небольшой связи.

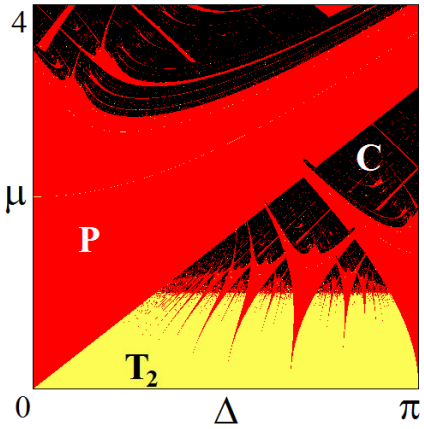

Рис. 6. Карта ляпуновских показателей для синус-отображения окружности (7)

Цепочка из четырех дискретных фазовых осцилляторов. При увеличении числа осцилляторов с математической точки зрения можно говорить о переходе от отображения окружности к *отображению на торе* соответствующей размерности. Например, для четырех связанных в цепочку осцилляторов такая процедура приводит к отображению на трехмерном торе для трех относительных фаз:

$$\begin{aligned}
\theta_{n+1} &= \Delta_1 + \theta_n - \mu \sin \theta_n + \frac{\mu}{2} \sin \varphi_n, \\
\varphi_{n+1} &= \Delta_2 + \varphi_n - \mu \sin \varphi_n + \frac{\mu}{2} \sin \phi_n + \frac{\mu}{2} \sin \theta_n, \\
\phi_{n+1} &= \Delta_3 + \phi_n - \mu \sin \phi_n + \frac{\mu}{2} \sin \varphi_n.
\end{aligned} \tag{8}$$

Здесь Δ_{1-3} – введенные соответствующим образом частотные расстройки разных осцилляторов.

Пример устройства плоскости параметров (Δ_1, Δ_2) для системы (8) дан на рис. 7. Влияние дополнительного осциллятора приводит к тому, что области периодических режимов вообще исчезают. Зато появляются обширные области четырехчастотных режимов. Области трехчастотных режимов образуют полосы разной ширины и отвечают резонансам разной «силы». При этом система этих полос образует структуру типа *резонансной паутины Арнольда*[4] [16]. На пересечении полос лежат «острова» двухчастотных режимов разного размера.

[1] Такой прием построения новых моделей широко используется в работах одних из создателей теории стохастических колебаний Г.М. Заславского, Б.В. Чирикова, а также других авторов [13-15].

[2] Название *отображение окружности* обусловлено тем, что фаза обладает свойством 2π-периодичности [2].

[3] См. замечание о цветовой палитре для отображений в сноске в п. «Три связанных осциллятора Ван дер Поля – Дуффинга».

[4] Вообще говоря, термин *паутина Арнольда* относится к особенностям устройства фазового пространства консервативных систем, обусловленного наличием множества резонансных условий [17, 18]. Однако в [16] было предложено использовать его для аналогичных структур в пространстве параметров диссипативных систем, также возникающим благодаря различным резонансам. Отметим здесь работы, касающиеся исследования трех дискретных фазовых осцилляторов [14, 19], где также появляются аналогичные структуры, но на основе трехчастотных режимов.

Фазовое пространство системы (8) в силу 2π-периодичности фаз представляет собой куб со сторонами 2π. Примеры фазовых портретов, построенных в различных точках плоскости параметров вдоль линии $\Delta_2 = 0.36\pi$, приведены на рис. 8. Они иллюстрируют возможные типы режимов и некоторые изменения, происходящие при пересечении границ различных областей на карте ляпуновских показателей на рис. 7.

Аттракторами в этом случае могут быть *инвариантные кривые*, отвечающие двухчастотным режимам, а также *инвариантные поверхности*, которые соответствуют трехчастотным режимам. Все они могут иметь разную форму и ориентацию, что отвечает разному соотношению частот и порядковых номеров захваченных осцилляторов. Для четырехчастотных и хаотических режимов изображающие точки достаточно плотно заполняют фазовый куб.

Переход на рис. 8а, б, в иллюстрирует седло-узловую бифуркацию трехчастотного режима: инвариантная поверхность резко, при очень малом увеличении параметра, «взрывается», в результате чего точки заполняют весь куб. Отметим, что инвариантные кривые могут возникать из «сгущения» траекторий на инвариантной поверхности, что отвечает возникновению *резонансного двухчастотного квазипериодического режима*.

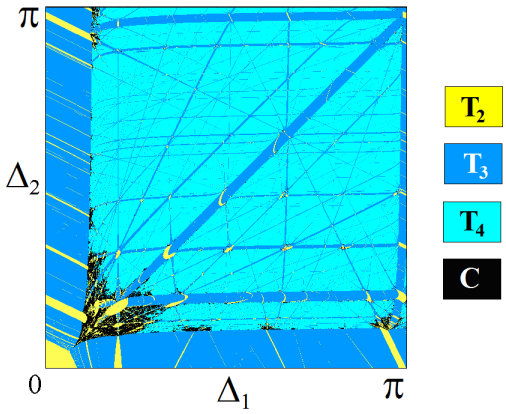

Рис. 7. Карта ляпуновских показателей для дискретной модели четырех связанных осцилляторов (8);
$\Delta_3 = 0.2\pi$, $\mu = 0.4$

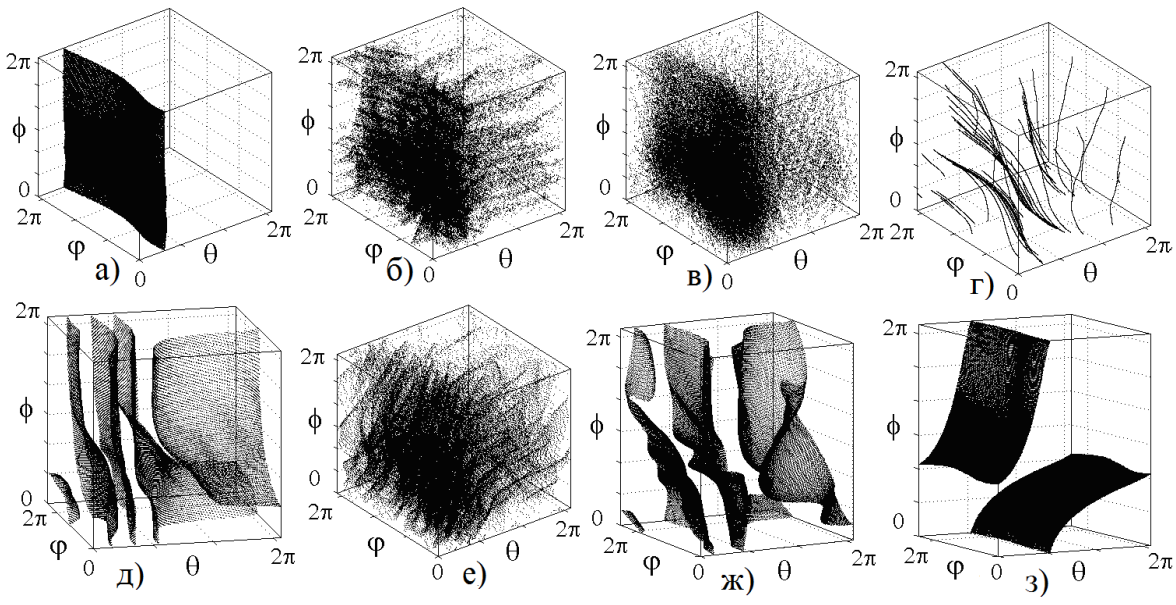

Рис. 8. Фазовые портреты системы (8), построенные вдоль линии $\Delta_2 = 0.36\pi$ на карте на рис. 7;
а) $\Delta_1 = 0.116\pi$, б) $\Delta_1 = 0.126\pi$, в) $\Delta_1 = 0.128\pi$, г) $\Delta_1 = 0.136\pi$, д) $\Delta_1 = 0.14\pi$,
е) $\Delta_1 = 0.142\pi$, ж) $\Delta_1 = 0.16\pi$, з) $\Delta_1 = 0.2\pi$

Сеть из пяти дискретных осцилляторов. Рассмотрим теперь сеть из пяти дискретных осцилляторов:

$$\psi_n \to \omega_n + \psi_n + \mu \sum_{i=1}^{5} \sin(\psi_i - \psi_n). \qquad (9)$$

Здесь ψ_n – фаза n-го осциллятора, ω_n – его собственная частота.

Размерность системы (9) может быть понижена на единицу. Для этого введем относительные фазы осцилляторов $\theta = \psi_2 - \psi_1$, $\varphi = \psi_3 - \psi_2$ и т.д. Определим также разностные частоты $\Delta_{i-1} = \omega_i - \omega_1$. Собственную частоту первого осциллятора в фазовой модели всегда можно выбрать фиксированной. Тогда получаем

$$\begin{aligned}
\theta &\to \Delta_1 + \theta + \mu[-2\sin\theta + \sin\varphi + \sin(\varphi+\alpha) + \sin(\varphi+\alpha+\beta) - \sin(\theta+\varphi) - \\
&\quad - \sin(\theta+\varphi+\alpha) - \sin(\theta+\varphi+\alpha+\beta)], \\
\varphi &\to \Delta_2 - \Delta_1 + \varphi + \mu[-2\sin\varphi + \sin\theta + \sin\alpha - \sin(\theta+\varphi) - \sin(\varphi+\alpha) + \\
&\quad + \sin(\alpha+\beta) - \sin(\varphi+\alpha+\beta)], \\
\alpha &\to \Delta_3 - \Delta_2 + \alpha + \mu[-2\sin\alpha + \sin\varphi + \sin\beta + \sin(\theta+\varphi) - \sin(\varphi+\alpha) - \\
&\quad - \sin(\alpha+\beta) - \sin(\theta+\varphi+\alpha)], \\
\beta &\to \Delta_4 - \Delta_3 + \beta + \mu[-2\sin\beta + \sin\alpha + \sin(\varphi+\alpha) - \sin(\varphi+\alpha+\beta) - \sin(\alpha+\beta) + \\
&\quad + \sin(\theta+\varphi+\alpha) - \sin(\theta+\varphi+\alpha+\beta)].
\end{aligned} \qquad (10)$$

Карта ляпуновских показателей для системы (10), построенная на плоскости параметров (Δ_1, μ), показана на рис. 9. При малой связи теперь преобладают пятичастотные режимы. Можно видеть, однако, несколько языков четырехчастотных режимов. У основания они имеют традиционный для языков Арнольда вид. Координаты точек оснований на оси частот легко найти из физических соображений. Действительно, при вариации частотного параметра $\Delta_1 = \omega_2 - \omega_1$ второй осциллятор последовательно может оказаться в условиях резонанса с первым, третьим, четвертым и пятым осцилляторами. В соответствии с определением частотных расстроек $\Delta_{i-1} = \omega_i - \omega_1$ это приводит к четырем резонансным условиям: $\Delta_1 = 0$, $\Delta_1 = \Delta_{2-4}$. Эти значения отмечены стрелками на оси абсцисс на рис. 9.

При возрастании уровня связи ($\mu \geq 0.05$) пятичастотные режимы сменяются четырехчастотными. Соответствующая граница выглядит фактически как горизонтальная линия. Она представляет собой линию седло-узловой бифуркации четырехчастотного режима. Выше нее возникает картина резонансной паутины Арнольда, показанная в деталях на рис. 10а. В этом случае имеется сеть трехчастотных областей, на пересечении отдельных полос которой возникают острова двухчастотных режимов. Следует отметить, что резонансная паутина возникает естественным образом на плоскости собственных частот осцилляторов, поскольку эти частоты при резонансах подчиняются некоторым Диофантовым уравнениям с целыми коэффициентами [14, 19]. В нашем случае одним из параметров является величина связи. Объяснение, видимо, состоит в том, что для возникающих кластеров из осцилляторов частота колебаний зависит от величины связи, так что складываются условия для резонансов при одновременной вариации частоты и связи. Интересно, что в верхней части рис. 10а четырехчастотные торы разрушаются с возникновением хаоса, но картина резонансной паутины сохраняется.

Еще большее увеличение связи на рис. 9 приводит при $\mu \geq 0.15$ к возникновению трехчастотных режимов. В этом случае также формируется резонансная паутина, но уже на базе трехчастотных режимов, как показано на рис. 10б.

При еще большей связи наблюдается полоса режимов двухчастотной квазипериодичности, в деталях показанная на рис. 10в. Можно видеть также *систему полных резонансов высшего порядка*, имеющих вид традиционных языков Арнольда, но с разрушенными основаниями. У каждого основания области периодических режимов возникает система веерообразных языков двухчастотных режимов, формирующих резонансную паутину. Внутри языков периодических режимов наблюдается переход к хаосу через удвоения периода, а их перекрытие при возрастании связи также приводит к хаосу.

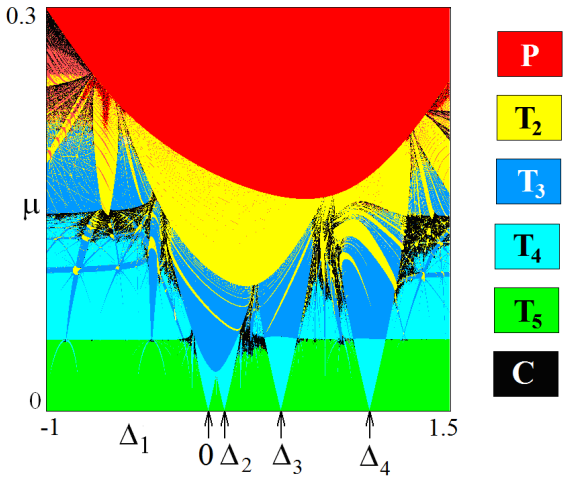

Рис. 9. Карта ляпуновских показателей для сети из пяти дискретных фазовых осцилляторов;

$$\Delta_2 = 0.1,\ \Delta_3 = 0.45,\ \Delta_4 = 1$$

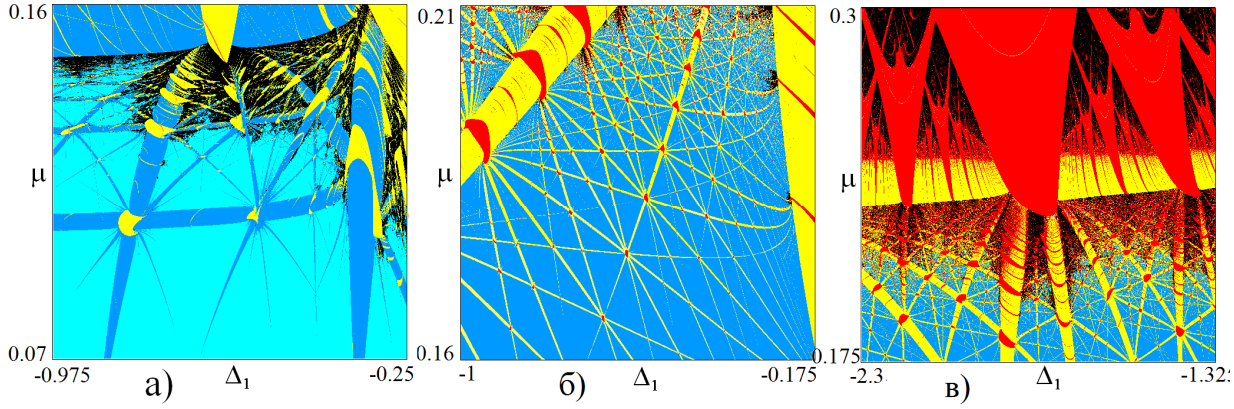

Рис. 10. Увеличенные фрагменты рис. 9

Заключение. Для анализа нелинейных систем с качественно разными типами динамики может применяться метод карт ляпуновских показателей. Главное преимущество этого метода состоит в автоматическом выявлении очень тонкой и сложной организации плоскости параметров. Это важно в случаях, когда система характеризуется несколькими качественно разными типами динамики. Метод карт ляпуновских показателей может применяться как к исходным уравнениям, так и к редуцированным фазовым моделям. Это позволяет сопоставлять результаты, полученные в рамках приближений разного уровня строгости. В ряде случаев этот метод имеет определенные преимущества перед традиционным бифуркационным анализом. Это, во-первых, ситуации, когда пространство параметров содержит много тонких «деталей». Во-вторых, этот метод эффективен для тех ситуаций, для которых методы бифуркационного анализа пока практически не разработаны, т.е. для анализа многочастотных квазипериодических и хаотических режимов.

Метод ляпуновских карт является универсальным и может применяться к системам любой физической или иной природы. Необходимо лишь задание математических уравнений в виде системы дифференциальных уравнений или дискретных отображений, определяющих динамическую систему. Можно привести несколько примеров из электроники [20], механики [21], лазерной физики [22]. Некоторые примеры можно найти также в [23-25]. Однако пока метод ляпуновских карт используется все же недостаточно. Отметим также проблему экспериментального исследования многочастотной квазипериодичности. В этом случае может быть использован, например, метод кратных сечений Пуанкаре [26]. Экспериментальное построение плоскости параметров, аналогичной карте ляпуновских показателей, представлено в [27]. Использован, однако, отчасти косвенный метод, поскольку трехчастотные режимы были определены «методом исключения». Таким образом, экспериментальная реализация метода карт ляпуновских показателей может стать предметом исследования.

Работа поддержана грантом Президента РФ поддержки ведущих научных школ НШ-1726.2014.2. Ю.С. благодарит также РФФИ (проект 14-02-31064).

ЛИТЕРАТУРА

1. Benettin G. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems: A method for computing all of them. Part I: Theory. Part II: Numerical application / G. Benettin, L. Galgani, A. Giorgilli, J.-M. Strelcyn // Meccanica. Vol. 15. 1980. P. 9-30.

2. Кузнецов С.П. Динамический хаос / С.П. Кузнецов. М.: Физматлит, 2006. 356 с.

3. Ланда П.С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы / П.С. Ланда. М.: Наука, 1980. 359 с.

4. Пиковский А. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление / А. Пиковский, М. Розенблюм, Ю. Куртс. М.: Техносфера, 2003. 496 с.

5. Broer H. Quasi-periodic bifurcations of invariant circles in low-dimensional dissipative dynamical systems / H. Broer, C. Simó, R. Vitolo // Regular and Chaotic Dynamics. Vol. 16. 2011. Issue 1-2. P. 154-184.

6. Kuznetsov A.P. Properties of synchronization in the systems of non-identical coupled van der Pol and van der Pol–Duffing oscillators. Broadband synchronization / A.P. Kuznetsov, Ju.P. Roman // Physica D. Vol. 238. 2009. Issue 16. P. 1499-1506.

7. Emelianova Yu.P. Synchronization and multi-frequency oscillations in the low-dimensional chain of the self-oscillators / Yu.P. Emelianova, A.P. Kuznetsov, I.R. Sataev, L.V. Turukina // Physica D. Vol. 244. 2013. Issue 1. P. 36-49.

8. Кузнецов А.П. Нелинейные колебания / А.П. Кузнецов, С.П. Кузнецов, Н.М. Рыскин. 2-е изд. М.: Физматлит, 2005. 292 с.

9. Phase model analysis of two lasers injected field / A.I. Khibnik, Y. Braimanc, T.A.B. Kennedyd, K. Wiesenfeld // Physica D. Vol. 111. 1998. Issue 1-4. P. 295-310.

10. Глова А.Ф. Синхронизация излучения лазеров с оптической связью / А.Ф. Глова // Квантовая Электроника. 2003. Т. 33. № 4. С. 283-306.

11. Кузнецов А.П. Синхронизация автоколебательной системы Ван дер Поля – Дуффинга короткими импульсами / А.П. Кузнецов, Л.В. Тюрюкина // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2004. Т. 12. №5. С. 16-31.

12. Kuznetsov A.P. Dynamical systems of different classes as models of the kicked nonlinear oscillator / A.P. Kuznetsov, L.V. Turukina, E. Mosekilde // International Journal of Bifurcation and Chaos. Vol. 11. 2001. Issue 4. P. 1065-1078.

13. Заславский Г.М. Физика хаоса в гамильтоновых системах / Г.М. Заславский. М.-Ижевск: РХД, 2004. 288 с.

14. Baesens C. Simple resonance regions of torus diffeomorphisms / C. Baesens, J. Guckenheimer, S. Kim // Patterns and dynamics in reactive media. Vol. 37. 1991. P. 1-9.

15. Морозов А.Д. Резонансы, циклы и хаос в квазиконсервативных системах / А.Д. Морозов. Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. 424 с.

16. Broer H. The Hopf-saddle-node bifurcation for fixed points of 3D-diffeomorphisms: the Arnol'd resonance web / H. Broer, C. Simó, R. Vitolo // Bulletin of the Belgian Mathematical Society. Vol. 15. 2008. Issue 5. P. 769-787.

17. Froeschlé C. Analysis of the chaotic behavior of orbits diffusing along the Arnold web / C. Froeschlé, E. Lega, M. Guzzo // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. Vol. 95. 2006. Issue 1-4. P. 141-153.

18. Guzzo M. First numerical evidence of global Arnold diffusion in quasi--integrable systems / M. Guzzo, E. Lega, C. Froeschlé // http://arxiv.org/abs/nlin/0407059.

19. О моделировании связанных автоколебательных осцилляторов с помощью простейших фазовых отображений / А.П. Кузнецов, И.Р. Сатаев, Ю.В. Седова, Л.В. Тюрюкина // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2012. Т. 20. № 2. С. 112-137.

20. Hoff A. Bifurcation structures and transient chaos in a four-dimensional Chua model / A. Hoff, D.T. da Silva, C. Manchein, H.A. Albuquerque // Physics Letters A. Vol. 378. 2014. P. 171-177.

21. Хаотическая динамика гибких криволинейных балок Бернулли-Эйлера. Ч. 1, 2 / Н.А. Загнибородa, В.В. Добриян, М.В. Жигалов, А.В. Крысько, В.А. Крысько // Вестник СГТУ. 2013. № 2 (70). Вып. 1. С. 12-28.

22. Синхронизация в фазовой модели трех связанных лазеров / А.П. Кузнецов, И.Р. Сатаев, Л.В. Тюрюкина, Н.Ю. Чернышов // Квантовая Электроника. Т. 44. 2014. № 1. С. 17-22.

23. Кузнецов А.П. Связанные универсальные отображения с бифуркацией Неймарка – Сакера / А.П. Кузнецов, М.В.Поздняков, Ю.В. Седова // Нелинейная динамика. Т. 8. 2012. № 3. С. 473-482.

24. Кузнецов А.П. Синхронизация генераторов квазипериодических колебаний / А.П. Кузнецов, Н.В. Станкевич // Нелинейная динамика. Т.9. 2013. № 3. С. 409-419.

25. Станкевич Н.В. Квазипериодические колебания и переход к гиперхаосу в двух противофазно возбуждаемых осцилляторах Тоды / Н.В. Станкевич, А.А. Дворак, В.В. Астахов // Вестник СГТУ. 2012. № 4 (68). С. 72-76.

26. Методика диагностики многочастотных торов в эксперименте / А.П. Кузнецов, Е.С. Попова, Е.П. Селезнев, Н.В. Станкевич // Вестник СГТУ. 2013. № 1 (69). С. 33-39.

27. Linsay P.S. Three-frequency quasiperiodicity, phase locking and the onset of chaos / P.S. Linsay, A.W. Cumming // Physica D. Vol. 40. 1989. P. 196-217.

Дорошенко Валентина Михайловна –
студентка
Саратовского государственного
университета имени Н.Г. Чернышевского

Valentina M. Doroshenko –
Undergraduate
Department of Nonlinear Processes,
Yuri Gagarin State Technical University of Saratov

Емельянова Юлия Павловна –
кандидат физико-математических наук,
ассистент кафедры «Приборостроение»
Саратовского государственного технического
университета имени Гагарина Ю.А.

Yulia P. Emelianova –
Ph. D., Associate Professor
Department of Instrument Engineering,
Yuri Gagarin State Technical University of Saratov

Кузнецов Александр Петрович –
доктор физико-математических наук, профессор,
ведущий научный сотрудник Саратовского
филиала Института радиотехники и электроники
имени В.А. Котельникова РАН

Alexander P. Kuznetsov –
Dr. Sc., Professor,
Leading Researcher: Kotel'nikov Institute of Radio Engineering and Electronics of the Russian Academy of Sciences (Saratov Branch)

Седова Юлия Викторовна –
кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник Саратовского
филиала Института радиотехники
и электроники имени В.А. Котельникова РАН

Yulia V. Sedova –
Ph.D., Senior Researcher:
Kotel'nikov Institute of Radio Engineering
and Electronics of the Russian Academy
of Sciences (Saratov Branch)

Статья поступила в редакцию 15.01.14, принята к опубликованию 11.03.14