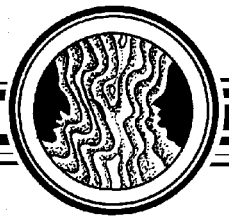


УДК 537.86(73)+929 Адлер

# УДИВИТЕЛЬНЫЙ РОБЕРТ АДЛЕР

## Лампа Адлера, уравнение Адлера и многое другое

*А. П. Кузнецов*[1,2], *И. Р. Сатаев*[1],
*Д. И. Трубецков*[2,3], *Е. С. Селиверстова*[2]

[1]Саратовский филиал ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН
[2]Саратовский государственный университет
[3]НИЯУ «МИФИ», Москва

Статья посвящена Роберту Адлеру, совмещавшему в своей деятельности работу физика-теоретика, физика-экспериментатора и инженера-изобретателя, имеющего более 200 патентов. Приводятся краткие биографические данные об этом удивительном человеке, и дано более подробное изложение результатов двух его знаменитых исследований, вошедших в науку как лампа Адлера и уравнение Адлера. Для тех, кто интересуется вкладом Адлера в акустоэлектронику, важно прочитать статью Kent J., Fakeuchi M., Laux G. Robert Adler's Touchscreen Inventions (IEEE Ultrasonics Symposium. 2007. P. 9–20), материал которой дал импульс к написанию данной статьи. Кроме того, приводятся оригинальные результаты обобщения уравнения Адлера и анализ обобщенных моделей с использованием современных методов нелинейной динамики.

*Ключевые слова:* Лампа Адлера, параметрический усилитель, микроволновая акустика, синхронизация, обобщенное уравнение Адлера, связанные контакты Джозефсона.

### Введение

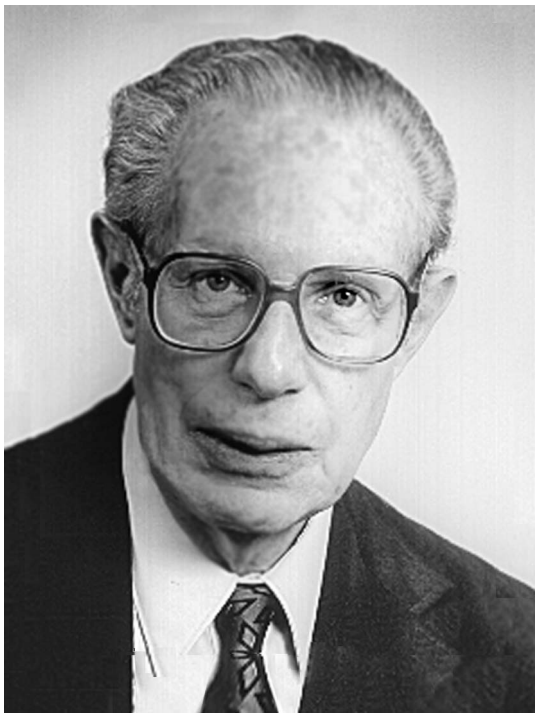
> «For everything you have done your life from your years to your 90s, we thank you Robert Adler!»
> [1, p. 17]

Впервые имя Роберта Адлера стало известно пишущим эту статью как изобретателя усилителя циклотронных волн, который в научной литературе сразу стали называть лампой Адлера (см., например, [2–4]).

Потом в период активных исследований а области акустоэлектроники это имя звучало в научных докладах и статьях об исследовании поверхностных акустических волн Релея и Лава и устройствах на основе их использования. Наконец, мы познакомились с ранней работой Адлера [5] и, как будет ясно из нашей статьи, никак с ней не расстанемся: знакомство с уравнением Адлера затянулось.

© *А.П. Кузнецов, И.Р. Сатаев, Д.И. Трубецков, Е.С. Селиверстова*

## 1. Краткие биографические данные [1]



Роберт Адлер родился в Вене в 1913 году в семье Макса Адлера и Дженни Хершманн Адлер. Его родители были социальными идеалистами. Мать получила степень в области медицины в 1905 году и посвятила себя деятельности по обеспечению безопасности рабочих. Макс Адлер был социологом и теоретиком в области политики. Его считали основателем венской школы марксизма.

Профессор истории Принстонского университета Ансон Рабинбах пишет о Максе Адлере следующее [1. Ref. 53, p. 20]: «Макс Адлер известен как человек, который пытался соединить марксизм и кантианство. Это значит, что он не принимал жесткий детерминизм и “телеологию” в марксистской доктрине, утверждая вместо этого, что причинная связь не зависит от великого замысла и что марксисты должны принять принципы научного метода, особенно эмпирицизма. Больший его практический вклад имеется в области педагогики. Он пропагандировал то, что можно назвать педагогической социальной идеей, и то, что нужно сделать властям “Красной Вены”, – создать синтез улучшений социальных условий – жилищных, образовательных, здравоохранения и культурных – с демократичной политикой для электората».

В юности Адлер, почерпнув интерес к физике от своей матери, увлекался радиотехникой, опубликовал первую работу в 16 лет. Как указано в [1], в личных бумагах Адлера есть список его публикаций с 1929 года по 1938 год: «Первые двенадцать публикаций по теме “Паразитная емкость проводов наушников – метод ее подавления с помощью специальной катушки индуктивности” (FUNK. Berlin, 1929. 52)» [1. Ref. 4, p. 18]. Адлер учился в гимназии в Вене, которую окончил в июне 1932 года. В Венском университете он учился между зимним семестром 1932/33 годов и летним 1936 года. Выпуск состоялся в мае 1937 года. Из копии зачетной книжки Адлера [1, p. 14, fig. 12] следует, что он изучал механику, электромагнетизм, оптику, термодинамику и квантовую теорию под руководством профессора Ганса Тиринга. Приведем слова доктора Вольфганга Ретера, касающиеся учебы Адлера в Венском университете [1. Ref. 47, p. 19]: «Учителя Адлера в Венском университете были выдающимися. Вводный курс по экспериментальной физике читал Эренхафт, хорошо известный из-за его спора с Робертом Милликеном по поводу электрического зряда электрона, его “открытия” субэлектронов и магнитных монополей и других странностей. Тиринг был его учителем по теоретической физике вместе с Коттлером. Вычисления преподавал Менгер, работающий в области топологии, математической логики и экономики, и он же был наставником Гёделя. Филипп Фортванглер, ученик Феликса Клейна и один из лидеров теоретиков своего времени, был еще одним его учителем математики: Нацисты уволили около 53% профессоров, имена которых собраны в “Meldungsbuch” (именно из этой книги скопирована зачетная книжка [1, fig. 12]). Этот факт является показателем того, что богатая интеллектуальная и научная жизнь в Австрии закончилась в марте 1938 года».

© *А.П. Кузнецов, И.Р. Сатаев, Д.И. Трубецков, Е.С. Селиверстова*

После нацистской оккупации Австрии в 1938 году жизнь Адлера оказалась под угрозой, поскольку его родители имели еврейское происхождение, а отец был известным марксистом. Интересно, что Адлер сумел сбежать из Австрии в Англию с помощью нацистского паспорта. «Много лет спустя архивы этого темного периода человеческой истории стали доступны в Мемориальном Музее Холокоста в округе Вашингтон путем интерактивного представления, основанного на сенсорных экранах поверхностных акустический волн (ПАВ) Роберта Адлера… [1, p.14]». Жизнь и работа в Англии устраивали Адлера, но в преддверии войны с Германией английские друзья убедили его, что с австрийским акцентом, который настораживал, а иногда вызывал гнев окружающих, лучше бежать в США. Адлер уехал и вскоре начал работать в Zenith Radio Corporation (ZRC), которая с началом участия США в войне сосредоточилась на исследованиях в области радиолокации. Но человека с «нацистским паспортом» к исследованиям военного назначения не допустили, и он стал заниматься фильтрами на ПАВ, которые потом нашли практическое применение в радиолокации. Постепенно Адлер стал лидером в области акустоэлектроники. В статье [1] указано, что список патентов Адлера содержит более 190 различных изобретений в США и других странах. При этом авторы [1] подчеркивают следующее: «В данной статье упоминаются не все изобретения Роберта Адлера. За пределами охвата этой статьи стоят изобретения Роберта Адлера, касающиеся лазеров, изобретения во время его работы в Extel, относящиеся к принтерам, изобретения, касающиеся экранов, изобретения, касающиеся технологии видеодисков и изобретения в других областях» [1. Ref. 63, p. 20]. Адлер изобрел первое акустическое устройство, использующееся в быту, для дистанционного управления телевизором. Любопытно, что когда один из авторов статьи [1] спросил Адлера, какое из своих изобретений он считает самым важным, тот назвал не дистанционное управление телевизором, а работы в области радиоприема, не указав при этом на конкретное изобретение. Возможно, это был малошумящий параметрический усилитель – лампа Адлера, о которой далее расскажем отдельно. Отдельно обсудим и знаменитую статью Адлера [5]. В ней выведено уравнение для описания фазовой синхронизации, которое в литературе носит название «уравнения Адлера».

Не будем подробно касаться его исследований в акустоэлектронике, поскольку о них и полно, и эмоционально написано в статье [1], правда, с большим акцентом на изобретение и разработку сенсорного ПАВ экрана. Значимость работ Адлера хорошо подчеркивает цитата из статьи [1, p. 11]: «В личной библиотеке Адлера есть копия цитируемой книги[1] – “Механические фильтры в электронике”. На внутренней ее обложке обнаружена следующая рукописная запись: “Д-ру Роберту Адлеру, кто первым показал миру, что можно на практике применять механические фильтры, от Боба Джонсона, автора и одного из Ваших почитателей”». Автор книги ссылается на инновационное открытие, сделанное во времена Второй мировой войны.

Для характеристики Адлера как честного, глубоко порядочного, доброго, смелого и доступного человека приведем еще несколько цитат и фактов из статьи [1].

Комментарии Джофа Вилсона: «В середине девяностых при подготовке внешнего “брейн-ринга” с ведущими специалистами R&D, адресованного определенной проблемной технической задаче, я дал понять, что в качестве активного участника возьму Боба

[1]Robert A. Johnson. Mechanical Filters in Electronics. John Wiley&Sons, 1983

© *А.П. Кузнецов, И.Р. Сатаев, Д.И. Трубецков, Е.С. Селиверстова*

Адлера – он будет полезен мне, не только из-за его обширного опыта в сенсорных технологиях в общем и того, что он вдохновляет моих сотрудников, но также и из-за его врожденной способности работать честно и непредвзято озвучивать все подходы к решению проблемы» [1. Ref. 33, p. 18].

«Роберт Адлер никогда не использовал термин “лампа Адлера”. Он пытался обратить всеобщее внимание на достижения других, а термин “лампа Адлера” заставлял его чувствовать себя некомфортно» [1. Ref. 34, p. 18].

«...в 1959 году лампа Адлера действительно являлась ключом к вводу в эксплуатацию Иллинойского 400-футового радиотелескопа. Роберт Адлер обладал интеллектуальной честностью и великодушием, отстаивая великие идеи других. Иллюстрирует это лампа Адлера» [1, p. 13].

Дело в том, что главным элементом лампы была квадрупольная секция накачки, предложенная Гленом Вейдом, что всегда подчеркивал Адлер. Он довел исследование квадрупольного усилителя до прибора, который использовался в радиотелескопе. Вейд был удивлен и счастлив, узнав об этом.

«Во времена безобразного маккартизма, или “Красной угрозы” в 1950-х годах могло быть много неприятностей, если бы правительство установило связь между Робертом Адлером и его отцом-марксистом. Можно только вообразить, какой смелостью и глубоким чувством справедливости необходимо было обладать, чтобы в тот период написать письмо в ФБР в защиту коллеги, ложно обвиненном в предательском “коммунизме”» [1. Ref. 54, p. 20].

Комментарии Эрвина Рошке: «...даже когда Адлер был вице-президентом, его дверь была открыта для любого человека с любыми проблемами, и люди, выходя из его офиса, выглядели более счастливыми, чем, когда они заходили туда. У меня никогда не было такого внимательного начальника» [1. Ref. 59, p. 20].

## 2. Лампа Адлера

Р. Адлер с принципиально важным участием Глена Вейда (см., например, [2–4, 6–11]) предложил прибор, который был назван параметрическим усилителем. Именно этот прибор в литературе называется лампой Адлера (об отношении Адлера к этому названию упоминалось в разделе 1 статьи). Используем далее книгу [10] и статью [12]. Схема прибора представлена на рис. 1.

С исторической точки зрения интересно описать первые конструкции и физику процессов в них (в предыдущей фразе говорится только об одном приборе).

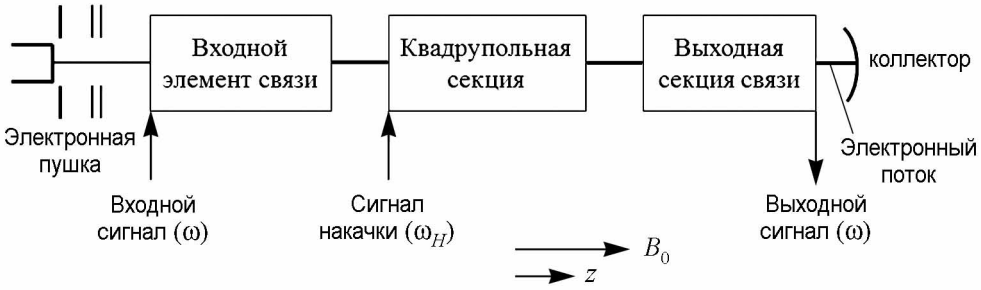



Рис. 1. Схематическое изображение лампы Адлера

© А.П. Кузнецов, И.Р. Сатаев, Д.И. Трубецков, Е.С. Селиверстова

Именно эти работы вылились впоследствии в самостоятельное научное направление в сверхвысокочастотной электронике [11]. Во входной и выходной секциях этого прибора используется взаимодействие высокочастотного (ВЧ) поперечного электрического поля с электронным потоком, в котором возбуждаются циклотронные волны. Возрастание поперечных смещений достигается за счет использования внешнего источника энергии, работающего на частоте накачки $\omega_H$, которая выше частоты сигнала $\omega$. Необходим также вспомогательный резонансный элемент, работающий на частоте $(\omega - \omega_H)$ (за исключением особого случая, когда $\omega_H = 2\omega$). Во входной и выходной секциях применяются резонаторы, через которые проходит электронный поток, фокусируемый однородным магнитным полем, напряженность которого выбрана так, что циклотронная частота $\omega_c = \omega$. Параметрическое усиление происходит в квадрупольной системе электродов, к которой приложен сигнал накачки с частотой $2\omega_c$. В таком приборе периодически изменяющимся параметром является кинетическая энергия электронов, движущихся по спиральной траектории. ВЧ сигнал, подаваемый во входную секцию, приводит к появлению ВЧ поперечных смещений электронов, движущихся по расширяющейся спирали. Длина входной секции подбирается такой, чтобы на выходе ее имело место полное подавление входного сигнала. В этом случае поперечные ВЧ смещения электронов становятся максимальными, поскольку энергия входного сигнала полностью переходит в энергию поперечных колебаний электронов.

Квадрупольная секция предназначена для постепенного увеличения амплитуды ВЧ поперечных смещений электронов (радиуса электронных траекторий). Степень возрастания последних характеризует коэффициент усиления прибора. В квадрупольной секции, показанной на рис. 2, поле на оси отсутствует и при удалении от оси возрастает линейно с расстоянием, поэтому, чем больше радиус окружности, по которой движется электрон, тем большей кинетической энергией он обладает.

Электроны, движущиеся по спиральной траектории и попадающие в ускоряющий полупериод поля, естественно назвать правильнофазными, а попадающие в отрицательный полупериод, – неправильнофазными. Синхронизм электронов и ВЧ поля имеет место из-за равенства частоты сигнала циклотронной частоте. Это условие обеспечивает эффективное взаимодействие электронов и поля, приводя к экспоненциальному изменению переменных величин вдоль $z$. В среднем результирующий выходной сигнал будет больше входного, так как экспоненциальное нарастание всегда преобладает над экспоненциальным ослаблением.

Из квадрупольной секции электронный поток поступает в выходную секцию. Электроны, движущиеся по спирали, возбуждают электромагнитное поле, и, если секция правильно нагружена, то это поле приводит к движению электронов по суживающейся спирали и, следовательно, к полной отдаче полю их кинетической энергии.

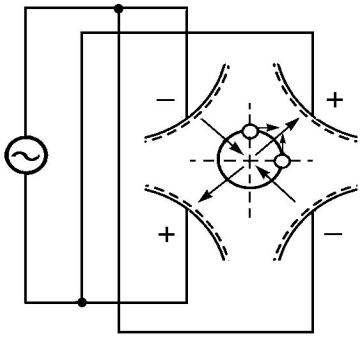


Рис. 2. Схематическое изображение квадрупольной секции

Уже в первых статьях [3,4] Адлер с соавторами указал, что такой усилитель является малошумящим,

© А.П. Кузнецов, И.Р. Сатаев, Д.И. Трубецков, Е.С. Селиверстова

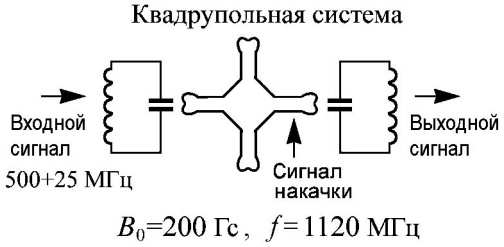



Рис. 3. Схема резонансной лампы Адлера

поскольку, если входная секция – резонатор, то он, будучи правильно нагруженным источником сигнала с омическим внутренним сопротивлением, поглощает шумовую мощность, содержащуюся в электронном потоке. В идеальном случае шумы полностью подавляются.

Один из первых экспериментов описан в статье [4]. Он относится к резонансному прибору, схема которого приведена на рис. 3.

Использовалось очень низкое напряжение $V_0$ потока, чтобы в короткой лампе уместилось значительное число циклотронных орбит. При $V_0 = 6$ В, число орбит, приходящихся на 1 см, равнялось четырем. Квадрупольная секция была длиной 1 см. При мощности накачки в несколько милливатт был получен коэффициент усиления до 20 дБ.

В одном из макетов лампы коэффициент шума составлял 1.3 дБ, причем 0.4 дБ авторы отнесли к влиянию нерегулярностей в электронном потоке, вторичной электронной эмиссии и ряда других явлений, не имеющих принципиального значения, так что полученный коэффициент шума при устранении подобных нерегулярностей может быть снижен. Еще одно достоинство лампы Адлера в том, что описанный прибор однонаправленный и чрезвычайно стабильный.

Изложим простейшую теорию усилителя Адлера, следуя [12] и [10]. В лампе Адлера принцип параметрического усиления используется для получения нарастающей быстрой циклотронной волны, поскольку ее усиление выгодно с точки зрения получения низкого уровня шумов. В классической конструкции лампы Адлера процесс собственно параметрического усиления происходит в области резонатора, называемого резонатором накачки. Как уже указывалось, электрические поля в резонаторе должны быть такими, чтобы радиусы орбит электронов увеличивались после того, как электроны покинут входной элемент связи, а следовательно, увеличивалась энергия электронов. Подобным резонатором может быть отрезок квадратного волновода, в котором возбуждается $\mathrm{TE}_{11}$-волна, или отрезок круглого волновода при возбуждении в нем $\mathrm{TE}_{21}$-волны. В таких резонаторах реализуется квадрупольная структура поля.

Пусть в системе накачки созданы квадрупольные электрические поля вида

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{V_0}{a^2} 2x \cos \omega_H t, \\ E_y &= \frac{V_0}{a^2} 2y \cos \omega_H t, \end{aligned} \tag{1}$$

где $V_0$ и $a$ – постоянные. Поля (1) могут, в частности, соответствовать статическому потенциалу квадрупольной структуры в форме

$$V = \frac{V_0}{a^2} \left(y^2 - x^2\right),$$

причем, $y^2$–$x^2 = \mathrm{const}$ описывает эквипотенциальную поверхность. Тогда $y^2$–$x^2 = a^2$, $V_0$ – потенциал электродов; размер $a$ показан на рис. 4.

© А.П. Кузнецов, И.Р. Сатаев, Д.И. Трубецков, Е.С. Селиверстова

С учетом соотношений (1) линеаризованные уравнения движения электронов в области накачки (см. рис. 2) запишем в следующем виде:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{\upsilon}_x}{\partial t} + \upsilon_0 \dfrac{\partial \tilde{\upsilon}_x}{\partial z} + \omega_c \tilde{\upsilon}_y = \Omega^2 \tilde{x} \left( e^{j\omega_H t} + e^{-j\omega_H t} \right), \\ \dfrac{\partial \tilde{\upsilon}_y}{\partial t} + \upsilon_0 \dfrac{\partial \tilde{\upsilon}_y}{\partial z} - \omega_c \tilde{\upsilon}_x = -\Omega^2 \tilde{y} \left( e^{j\omega_H t} + e^{-j\omega_H t} \right), \end{cases} \tag{2}$$

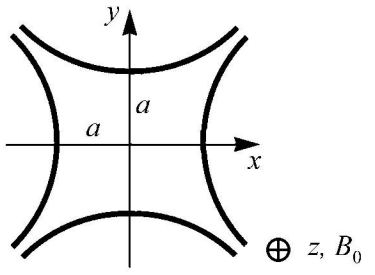


Рис. 4. К объяснению структуры полей в квадруполе

где $\tilde{\upsilon}_x, \tilde{\upsilon}_y$ – переменные составляющих скорости электронов в $x$ и $y$ направлениях, соответственно; $\Omega^2 = \eta V_0/a^2$, $\partial\tilde{x}/\partial t = \tilde{\upsilon}_x$, $\partial\tilde{y}/\partial t = \tilde{\upsilon}_y$, $\eta = e/m$; $e,\ m$ – заряд и масса электрона, $\upsilon_0$ – постоянная составляющая скорости вдоль оси $z$; $\omega_c = \eta B_0$; $\vec{B} = B_0\vec{z}$, $\vec{B}$ – вектор индукции магнитного поля.

Решения системы уравнений (2) будем искать в виде [12]

$$\tilde{\upsilon}_x = \sum_{-\infty}^{\infty} \upsilon_{xn}(z)\, e^{j\omega_n t}, \quad \tilde{\upsilon}_y = \sum_{-\infty}^{\infty} \upsilon_{yn}(z)\, e^{j\omega_n t}, \tag{3}$$

где $\omega_n = n\omega_H + \omega$.

Подставляя соотношения (3) в уравнения (2), учитывая связь между $\tilde{\upsilon}_x$, $\tilde{\upsilon}_y$ и $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, а также используя соотношение ортогональности

$$\int_0^T e^{j\omega_n t} e^{j\omega_m t} = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ T, & m = n \end{cases}$$

перепишем (2) в виде

$$\begin{cases} \Delta_n \upsilon_{xn} + \omega_c \upsilon_{yn} - \Omega^2 \left[ \Delta_{n-1}^{-1} \upsilon_{xn-1} + \Delta_{n+1}^{-1} \upsilon_{xn+1} \right] = 0, \\ \Delta_n \upsilon_{yn} + \omega_c \upsilon_{xn} + \Omega^2 \left[ \Delta_{n-1}^{-1} \upsilon_{yn-1} + \Delta_{n+1}^{-1} \upsilon_{yn+1} \right] = 0, \end{cases} \tag{4}$$

где $(j\omega_n + \upsilon_0(\partial/\partial z)) = \Delta_n$, $\quad (j\omega_{n\mp1} + \upsilon_0(\partial/\partial z))^{-1} = \Delta_{n\mp1}^{-1}$ – операторы обратные $\Delta_{n\mp1}$. Полагая, что можно ограничиться случаем $n = 0, -1$ [20] и считая, что все переменные величины изменяются вдоль $z$ по закону $e^{-\beta z}$, получим из (4) следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} &\big(j\omega - \upsilon_0\beta\big)\upsilon_{x0} + \omega_c y_{y0} - \Big[\frac{\Omega^2}{j(\omega - \omega_H) - \upsilon_0\beta}\Big]\upsilon_{x-1} = 0, \\ &-\omega_c\upsilon_{x0} + \big(j\omega - \upsilon_0\beta\big)\upsilon_{y0} + \Big[\frac{\Omega^2}{j(\omega - \omega_H) - \upsilon_0\beta}\Big]\upsilon_{y-1} = 0, \\ &-\Big[\frac{\Omega^2}{j(\omega - \omega_H) - \upsilon_0\beta}\Big]\upsilon_{x0} + \Big[j(-\omega_H + \omega - \upsilon_0\beta)\Big]\upsilon_{x-1} + \omega_c\upsilon_{y-1} = 0, \\ &\Big[\frac{\Omega^2}{j(\omega - \omega_H) - \upsilon_0\beta}\Big]\upsilon_{y0} - \omega_c\upsilon_{x-1} + \Big[j(\omega - \omega_H) - \upsilon_0\beta\Big]\upsilon_{y-1} = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Из условия совместности системы уравнений (5), находим дисперсионное уравнение анализируемой схемы

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\upsilon_0}{\Omega}\right)^4 = \frac{(j\beta_e-\beta)\left[j\left(\beta_e-\beta_H\right)-\beta\right]+\beta_c^2}{(j\beta_e-\beta)[j(\beta_e-\beta_H)-\beta][(j\beta_e-\beta)^2+\beta_c^2]\{[j(\beta_e-\beta_H)-\beta]^2+\beta_c^2\}}, \quad (6)$$

где $\beta_e = \omega/\upsilon_0, \quad \beta_H = \omega_H/\upsilon_0, \quad \beta_c = \omega_c/\upsilon_0$. Будем искать решение уравнения (6), предполагая, что фазовая скорость искомой нарастающей волны близка к фазовой скорости быстрой циклотронной волны электронного потока, то есть

$$\beta = j\left(\beta_e-\beta_c\right) - \left(\frac{\Omega^2}{\upsilon_0\omega_c}\right)\delta, \quad (7)$$

где $\Omega^2\delta/(\upsilon_0\omega_c)$ – малая величина. С учетом (7) уравнение (6) принимает вид

$$\delta\big(\delta+jb\big) = 1, \quad (8)$$

где $b = \dfrac{2\omega_e-\omega_H}{\Omega^2/\omega_c}$. Из уравнения (8) следует, что

$$\delta_{1,2} = -j\frac{b}{2} \pm \left[1-\left(\frac{b}{2}\right)^2\right]^{1/2}. \quad (9)$$

Как видно из (9), для существования нарастающей парциально волны необходимо, чтобы $|b/2| < 1$ или $|2\omega_c-\omega_H| < 2\Omega^2/\omega_c$. Максимальное значение действительной части $\delta$ достигается при $b = 0$, то есть при $\omega_H = 2\omega_c$ имеем $\delta = \pm 1$ и $\mathrm{Re}\ \beta = \pm\Omega^2/(\upsilon_0\omega_c)$. Асимптотическая формула для коэффициента усиления на частоте сигнала $(n = 0)$ и на так называемой «холостой частоте» $(n = -1)$ имеет вид

$$G_{\text{дБ}} = -6.02 + 8.68\Big(\frac{\Omega^2}{\upsilon_0\omega_c}\mathrm{L}\Big), \quad (10)$$

где $L$ – длина секции накачки. Формула (10), соответствующая только нарастающей парциальной волне, получена в предположении, что при $b = 0$ амплитуды парциальных волн в секции накачки равны между собой и каждая равна половине соответствующего значения переменной на входе.

Теория лампы Адлера и один из экспериментов изложены здесь для поддержания историчности статьи в стиле и на основании ранних работ.

Современное состояние, проблемы и перспективы использования поперечных (циклотронных и синхронных) волн электронного потока в различных устройствах СВЧ электроники изложены в обстоятельном обзоре В.А. Ванке [11]. В обзоре описаны устройства, которые произошли от лампы Адлера – защитные устройства, параметрические и электростатические усилители, перестраиваемые усилители – фильтры, лампы с бегущей циркулярно поляризованной волной, преобразователи СВЧ энергии в энергию постоянного тока, клистроны с комбинированным взаимодействием.

## 3. Уравнение Адлера или фазовая синхронизация по Роберту Адлеру [5,13]

Цели своих исследований в статье [2] Р. Адлер формулирует следующим образом.

«Целью настоящей статьи является вывод выражения для скорости вращения фазы напряжения генератора в произвольный момент времени исходя из соотношений между

фазами и амплитудами напряжений генератора и внешнего сигнала в этот момент времени. Иными словами, задача заключается в отыскании дифференциального уравнения для фазы генератора как функции времени. Это уравнение должно описывать случай синхронизации, когда всякое кратковременное возмущение затухает во времени и система входит в установившийся режим, в котором разность фаз генератора и внешнего сигнала постоянна. Оно должно также определять частоту и форму сигнала биений и тогда, когда синхронизация не происходит. Чтобы охватить оба эти случая, уравнение должно содержать параметр, который позволяет судить, затухает ли переходный член во времени, то есть представляет собой эквивалент критериев синхронизации, получаемых иными методами. Наконец, это уравнение должно приводить к механической аналогии, в достаточной степени простой для создания ясной картины явлений, протекающих при подаче на генератор внешнего сигнала.

Проводимый ниже анализ исходит из предположения, что внешний сигнал и собственные колебания имеют близкие частоты».

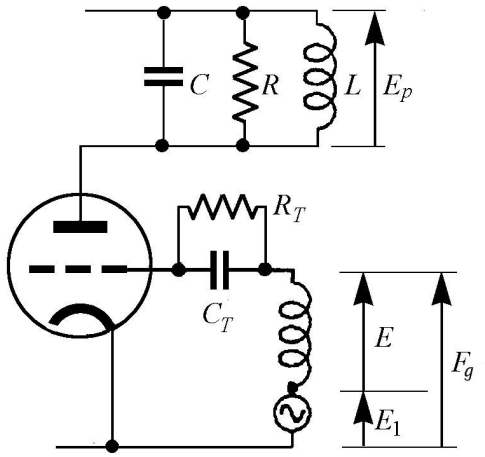



Рис. 5. Схема анализируемого генератора: $E$ – ЭДС, наводимая на сеточную обмотку; $E_1$ – внешний сигнал ($E_1 \ll E$); $E_g$ – результирующее сеточное напряжение; $E_p$ – напряжение на анодной нагрузке [5]

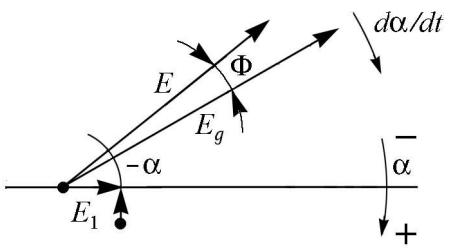



Рис. 6. Векторная диаграмма мгновенных напряжений [5]

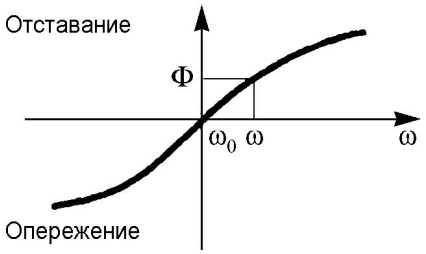



Рис. 7. Зависимость фазы от частоты для колебательного контура [5]

Анализ Адлера относится к схеме генератора, изображенной на рис. 5.

Предположим, вслед за Адлером, что напряжение в цепи сетки некоторый момент времени можно изобразить векторной диаграммой (рис. 6). Пусть вектор $E_1$ неподвижен и отображает, следовательно, угловую частоту $\omega_1$ внешнего сигнала. Вектор, вращающийся по часовой стрелке с угловой скоростью $d\alpha/dt$, будет соответствовать угловой частоте $(\omega_1 + d\alpha/dt)$ или угловой частоте биений

$$\Delta\omega = \frac{d\alpha}{dt}, \tag{11}$$

отсчитываемой от внешнего сигнала. С учетом того, что $E_1 \ll E$, из векторной диаграммы находим Φ – отставание по фазе в анодном контуре $E$ относительно $E_g$ в следующем виде:

$$\Phi = \frac{[E_1 \sin(-\alpha)]}{E} = -(E_1/E)\sin\alpha. \tag{12}$$

Типичная зависимость фазового сдвига от частоты для одиночного колебательного контура приведена на рис. 7. Применительно к анализируемой схеме можно счи-

© А.П. Кузнецов, И.Р. Сатаев, Д.И. Трубецков, Е.С. Селиверстова

тать, что эта кривая выражает опережение или отставание по фазе напряжения $E$ по отношению к $E_g$ в зависимости от частоты. Если бы генератор работал на частоте собственных колебаний $\omega_0$, указанного отставания не было бы. Но теперь частота в этот момент времени превышает $\omega_0$ (частоту колебания без внешнего воздействия) на величину, которая создаст в анодном контуре отставание по фазе, равное Ф.

Из рис. 7 можно определить мгновенную частоту $\omega$. Для одиночного колебательного контура $\omega_0/(2Q) \gg \Delta\omega_0$, где $Q$ – добротность контура $LCR$, образующего анодную нагрузку, $\Delta\omega_0 = \omega_0 - \omega_1$ – «невозмущенная» частота биений, если контур должен воспроизводить изменения $\omega$ без заметной задержки. Иными словами, полоса пропускания анодного контура настолько широка, что все частоты оказываются вблизи ее центра. Можно поэтому воспользоваться небольшой центральной частью зависимости Ф от $\omega$, приближенно выразив ее прямой линией с наклоном

$$A = \frac{d\Phi}{d\omega}. \tag{13}$$

Фазовый угол для любой частоты $\omega$, близкой к $\omega_0$, равен

$$\Phi = A\,(\omega - \omega_0) \tag{14}$$

или

$$\Phi = A\,(\omega - \omega_0) = A\,[(\omega - \omega_1) - (\omega_0 - \omega_1)] = A\,(\Delta\omega - \Delta\omega_0)\,, \tag{15}$$

где $\Delta\omega$ есть разность между $\omega$ и частотой внешнего сигнала $\omega_1$. Подставляя теперь (12) в левую, а (11) в правую часть соотношения (15), получим

$$-\left(\frac{E_1}{E}\right)\sin\alpha = A\left[\left(\frac{d\alpha}{dt}\right) - \Delta\omega_0\right]$$

или

$$\frac{d\alpha}{dt} = -B\sin\alpha + \Delta\omega_0, \tag{16}$$

где $B = (E_1/E)(1/A)$.

Уравнение (16) можно переписать в виде

$$\omega = -B\sin\alpha + \omega_0, \tag{17}$$

если добавить к обеим частям (16) частоту внешнего сигнала $\omega_1$. Комментируя соотношение (17), Адлер пишет следующее.

«Физический смысл этого соотношения заключается в том, что мгновенная частота испытывает сдвиг относительно частоты собственных колебаний на величину, пропорциональную синусу фазового угла между напряжениями генератора и внешнего сигнала. Этот сдвиг также пропорционален внешнему сигналу $E_1$, но обратно пропорционален амплитуде сеточного напряжения генератора $E$ и наклону $A$ линии, выражающей зависимость фазы от частоты для используемой колебательной системы».

В любом учебнике по теории колебаний для одиночного колебательно контура можно найти формулу

$$\operatorname{tg}\Phi = 2Q(\omega - \omega_0)/\omega_0, \tag{18}$$

а для малых углов

$$\Phi = 2Q(\omega - \omega_0)/\omega_0. \tag{19}$$

© *А.П. Кузнецов, И.Р. Сатаев, Д.И. Трубецков, Е.С. Селиверстова*

Подставляя (19) в формулу (13), находим

$$A = \frac{d\Phi}{d\omega} = 2Q/\omega_0 \tag{20}$$

и, следовательно,

$$B = \left(\frac{E_1}{E}\right)\omega_0/(2Q). \tag{21}$$

Окончательно в случае одиночного колебательного контура уравнение (16) с учетом (21) примет вид

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\left(\frac{E_1}{E}\right)\left[\frac{\omega_0}{2Q}\right]\sin\alpha + \Delta\omega_0. \tag{22}$$

В стационарном состоянии $d\alpha/dt = 0$ и

$$\sin\alpha = 2Q\left(\frac{E}{E_1}\right)\Delta\omega_0/\omega_0. \tag{23}$$

Так как $\sin\alpha$ может принимать значения между $+1$ и $-1$, стационарное состояние невозможно, если правая часть (23) окажется вне этих пределов. Отсюда условие синхронизации имеет вид

$$\left|2Q\left(\frac{E}{E_1}\right)\Delta\omega_0/\omega_0\right| < 1 \tag{24}$$

или

$$\frac{E_1}{E} > 2Q\left|\Delta\omega_0/\omega_0\right|. \tag{25}$$

Для генератора, у которого анодная нагрузка не простой колебательный контур, условие синхронизации записывается так:

$$\frac{E_1}{E} > \left|A\Delta\omega_0\right|, \tag{26}$$

где $A = d\Phi/d\omega$.

В обсуждаемой работе общие соотношения использованы для приближенного представления процесса захватывания и анализа явлений за пределами области захватывания. Дан также точный анализ процесса захватывания. На наш взгляд, самостоятельный интерес представляет механическая модель Адлера, иллюстрирующая весь диапазон явлений синхронизации. Очевидно, чтобы эта модель обеспечила полную аналогию, она должна описывается уравнением

$$\frac{d\alpha}{dt} = -B\sin\alpha + \Delta\omega_0.$$

Дабы не заниматься пересказом, обратимся к тексту статьи Адлера.

«На время забудем о $\Delta\omega_0$. Оставшаяся часть уравнения будет описывать маятник в вязкой жидкости, причем $\alpha$ – угол между маятником и вертикальной линией. Если мы примем, что вязкость жидкости столь велика, что нет необходимости учитывать инерцию маятника, то угловая скорость этого маятника $d\alpha/dt$ окажется пропорциональной силе, которая приводит его в движение. Форму маятника мы можем подобрать таким образом, что одна единица силы будет давать одну единицу скорости. Тогда, если $B$ – вес маятника, то сила, вынуждающая маятник возвращаться в состояние покоя, будет физически равна $-B\sin\alpha$.

Чтобы учесть член $\Delta\omega_0$, мы должны ввести постоянную силу. Мы можем также перенести $\Delta\omega_0$ в левую часть уравнения; поскольку $d\alpha/dt$ выражает угловую скорость,

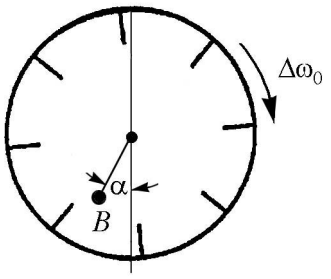



Рис. 8. Механическая модель: маятник во вращающемся сосуде, заполненном вязкой жидкостью [5]

$-\Delta\omega_0$ в левой части будет соответствовать постоянному вращательному движению маятника в обратном направлении относительно жидкости. Такую же силу создаст вращательное движение жидкости относительно маятника в прямом направлении с постоянной скоростью. Именно такой интерпретацией мы и воспользуемся в нашей модели, которая представлена на рис. 8.

Вязкая жидкость заключена в барабан, вращающийся с угловой скоростью $\Delta\omega_0$. Снова предполагается, что вязкость жидкости столь велика, что она будет полностью следовать за вращающимся барабаном. Примем, кроме того, что наличие маятника не оказывает заметного влияния на вращение жидкости.

Вспомним теперь, что вертикальное направление выражает фазу приложенного сигнала, тогда как положение маятника соответствует относительному фазовому сдвигу сеточного напряжения генератора. Учитывая сказанное, мы можем, вращая барабан с различными скоростями, соответствующими невозмущенным частотам биений $\Delta\omega_0$, проследить за всем диапазоном явлений.

При малой скорости барабана маятник придет в состояние покоя, характеризуемое определенным углом $\alpha_\infty$, который по мере повышения скорости барабана будет увеличиваться. При воздействии возмущения маятник будет «спадать» в исходное положение; поскольку инерционные эффекты отсутствуют, он никогда не пройдет мимо положения покоя.

Если мы будем поднимать маятник в направлении по часовой стрелке, перемещая его в любую точку ниже $\alpha_1 = \pi - \alpha_\infty$, он будет возвращаться, поворачиваясь против часовой стрелки; если же мы поднимем его, проходя за это предельное положение либо еще далее вправо, маятник будет возвращаться, поворачиваясь по часовой стрелке. Этим объясняется существование двух различных решений для переходного режима.

При некоторой критической скорости барабана $\omega_{\max} = B$ маятник займет горизонтальное положение; если еще более повысить скорость барабана, «маятник выйдет из синхронизма» и начнет описывать круги, вращаясь быстро вправо и очень медленно влево, причем он будет совершать значительно меньшее число полных оборотов, чем жидкость.

Однако при дальнейшем увеличении скорости быстро вращающаяся жидкость будет увлекать маятник за собой независимо от его веса. Движение будет выглядеть значительно более равномерным, и скорость маятника станет почти равной скорости барабана: средняя частота биений $\overline{\Delta\omega}$ будет приближаться к невозмущенному значению $\Delta\omega_0$».

## 4. Исследование обобщенного уравнения Адлера и некоторые его приложения

**4.1. Обобщённое уравнение Адлера.** В теории колебаний уравнение Адлера непосредственно получается в фазовом приближении для задач о гармоническом возбуждении осциллятора ван дер Поля и для двух диссипативно связанных осцилляторов [14]. Например, для уравнений двух таких осцилляторов

$$\begin{aligned} &\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \mu(\dot{x} - \dot{y}) = 0, \\ &\ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + (1 + \Delta)y + \mu(\dot{y} - \dot{x}) = 0, \end{aligned} \tag{27}$$

© А.П. Кузнецов, И.Р. Сатаев, Д.И. Трубецков, Е.С. Селиверстова

действуя стандартным методом медленно меняющихся амплитуд [14], можно получить уравнение для относительных фаз осцилляторов – уравнение Адлера

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\Delta}{2} - \mu \sin\theta.$$

Учет дополнительных факторов позволяет получить более общее уравнение. Обратимся к уравнению двух осцилляторов, для которых учтем следующее:

- возможность диссипативной связи;
- возможность реактивной (консервативной) связи;
- дополнительную кубическую нелинейность по типу осциллятора Дуффинга, отвечающую за неизохронность малых колебаний;
- неидентичность по параметру отрицательного трения.

Уравнения (27) с учетом всех этих факторов примут вид

$$\begin{aligned} &\ddot{x} - (\lambda_1 - x^2)\dot{x} + x + \beta x^3 + \varepsilon(x - y) + \mu(\dot{x} - \dot{y}) = 0, \\ &\ddot{y} - (\lambda_2 - y^2)\dot{y} + (1 + \Delta)y + \beta y^3 + \varepsilon(y - x) + \mu(\dot{y} - \dot{x}) = 0. \end{aligned} \tag{28}$$

Здесь $\lambda_i$ – параметры, отвечающий за отрицательное трение в каждом осцилляторе; $\beta$ – параметр нелинейности по типу осциллятора Дуффинга; $\mu$ и $\varepsilon$ – коэффициенты диссипативной и реактивной связи; $\Delta$ – относительная частотная расстройка осцилляторов. Частота первого осциллятора принята за единицу.

Действуя по стандартной для метода медленно меняющихся амплитуд схеме и используя перенормированные параметры, можно прийти к укороченным уравнениям Ландау–Стюарта[2]:

$$\begin{aligned} 2\frac{dR}{dt} &= (1 + 2\delta - \mu)R - R^3 + \mu r\cos\theta - \varepsilon r\sin\theta, \\ 2\frac{dr}{dt} &= (1 - \mu)r - r^3 + \mu R\cos\theta + \varepsilon R\sin\theta, \\ \frac{d\theta}{dt} &= -\frac{\Delta}{2} + \frac{\chi}{2}(r^2 - R^2) + \varepsilon\left(\frac{r}{2R} - \frac{R}{2r}\right)\cos\theta - \mu\left(\frac{r}{2R} + \frac{R}{2r}\right)\sin\theta. \end{aligned} \tag{29}$$

Здесь $\chi = 3\beta$, $\delta = 1/2\,(\lambda_1/\lambda_2 - 1)$. Для возмущений $\tilde{R}$, $\tilde{r}$ стационарных орбит $R = r = 1$ из первых двух уравнений (29) получаем

$$\begin{aligned} \tilde{R} &= \frac{1}{2}[\mu(\cos\theta - 1) - \varepsilon\sin\theta + \delta], \\ \tilde{r} &= \frac{1}{2}[\mu(\cos\theta - 1) + \varepsilon\sin\theta - \delta]. \end{aligned} \tag{30}$$

Подставляя $R = 1 + \tilde{R}$ и $r = 1 + \tilde{r}$ в фазовое уравнение (29) с учетом (30), получаем

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\Delta + 2\chi\delta}{2} - (\mu + \chi\varepsilon)\sin\theta - \frac{1}{2}\varepsilon^2\sin(2\theta) - \varepsilon\delta\cos\theta. \tag{31}$$

Это обобщение уравнения Адлера на случай всех существенных факторов. Их влияние приводит к следующим особенностям динамики. Диссипативная связь стремится синхронизовать осцилляторы в фазе. Смена ее знака (активная связь) приводит к

[2]Детали см. в [14-19].

© А.П. Кузнецов, И.Р. Сатаев, Д.И. Трубецков, Е.С. Селиверстова

противофазной синхронизации. Реактивная связь проявляется во втором порядке по величине связи, при этом для нее характерна фазовая бистабильность: возможность сосуществования устойчивого синфазного и противофазного режимов. Остальные факторы проявляются только в комбинации с реактивной связью и также являются эффектами второго порядка. Так неизохронность приводит к притяжению или отталкиванию осцилляторов в зависимости от комбинации знаков соответствующих параметров. В комбинации же с реактивной связью неидентичность по управляющим параметрам дает еще один механизм синхронизации. Он отвечает устойчивому режиму синхронизации со сдвигом фаз между вторым и первым осцилляторами на $3\pi/2$. В неизохронной системе неидентичность также дает еще и аддитивную добавку к частотной расстройке: $\Delta + 2\chi\delta$.

Общая картина эффектов в системе (31) достаточно сложна и обсуждается в [14–19].

**4.2. Неавтономное уравнение Адлера.** Рассмотрим теперь случай возбуждения осцилляторов, когда внешний сигнал модулирует частоту одного из них [19],

$$\begin{aligned} &\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \mu(\dot{x} - \dot{y}) = 0, \\ &\ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + (1 + \Delta + \varepsilon\cos\omega t)\, y + \mu(\dot{y} - \dot{x}) = 0. \end{aligned} \tag{32}$$

Здесь частота первого осциллятора фиксирована и принята за единицу, $\Delta$ – постоянная часть расстройки осцилляторов, $\varepsilon$ – амплитуда модуляции частоты второго осциллятора, $\omega$ – частота этой модуляции.

Пусть частота воздействия $\omega$ мала по сравнению с собственными частотами осцилляторов: $\omega \ll 1$. Тогда можно применить метод медленно меняющихся амплитуд. Действуя стандартным образом, нетрудно получить соответствующие уравнения для фаз первого и второго осцилляторов

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= \frac{\mu}{2}\sin(\psi_2 - \psi_1), \\ \dot{\psi}_2 &= \frac{\Delta + \varepsilon\cos\omega t}{2} + \frac{\mu}{2}\sin(\psi_1 - \psi_2). \end{aligned} \tag{33}$$

Отметим, что здесь все параметры нормированы на $\lambda$. Для относительной фазы $\theta = \psi_2 - \psi_1$ теперь можно записать

$$\dot{\theta} = \frac{\Delta}{2} - \mu\sin\theta + \frac{\varepsilon}{2}\cos\omega t. \tag{34}$$

Таким образом, мы получили неавтономное уравнение Адлера с возбуждением в виде гармонического сигнала. Неавтономное уравнение Адлера может быть получено также для сильно демпфированного за счет затухания маятника с нелинейностью синуса и с постоянным вращающим моментом. Оно также появляется в теории контактов Джозефсона [14]. Отметим, что случай возбуждения в виде прямоугольных импульсов может быть рассмотрен аналитически [19].

При анализе неавтономного уравнения Адлера также следует выделять два случая: захвата и биений автономных осцилляторов, которые реализуются, соответственно, при $2\mu > |\Delta|$ и $2\mu < |\Delta|$.

Карта ляпуновских показателей[3] для режима захвата автономных осцилляторов для системы (34) представлена на рис. 9. Здесь и далее тип режима определялся в стробоскопическом сечении через период внешнего воздействия, так что темным цветом показаны периодические режимы, а серым – квазипериодические. Примеры реализаций, то есть зависимости фазы от времени $\theta(t)$ для трех характерных точек плоскости параметров приведены на рис. 10. Черные точки на реализациях отмечают стробоскопические сечения, построенные через период внешнего воздействия, рядом справа приведены портреты в стробоскопическом сечении $(\theta_n, \theta_{n+1})$.

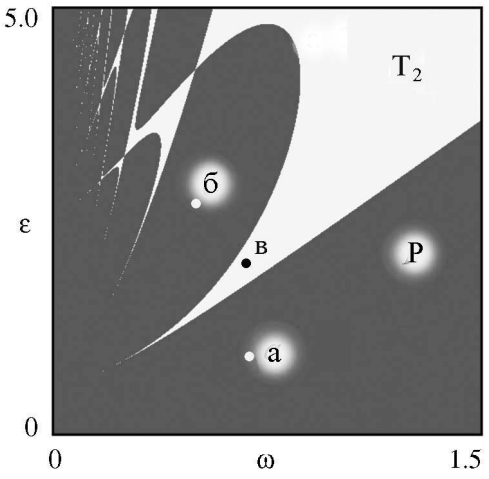



Рис. 9. Ляпуновская карта возбуждаемой системы (34) для режима захвата в автономной модели, $\mu = 0.75$, $\Delta = 1$

Нижнюю часть карты занимает область, для которой портреты режимов представлены на рис. 10, *а*. В этом случае амплитуда сигнала невелика. Однако

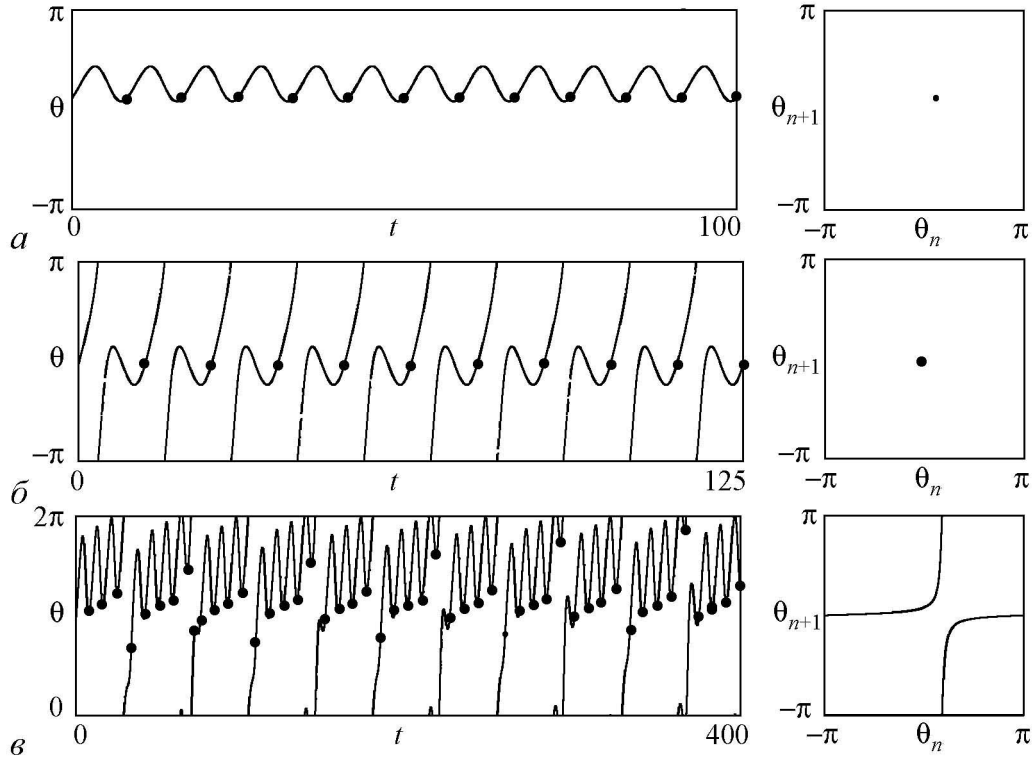



Рис. 10. Реализации и портреты в стробоскопическом сечении системы (34) в режиме захвата в автономной модели: *а* – $\omega = 0.75$, $\varepsilon = 1$; *б* – $\omega = 0.5$, $\varepsilon = 2.4$; *в* – $\omega = 0.75$, $\varepsilon = 2$. Остальные параметры $\mu = 0.75$, $\Delta = 1$

[3]О ляпуновских картах см., например, [20].

© *А.П. Кузнецов, И.Р. Сатаев, Д.И. Трубецков, Е.С. Селиверстова*

точный захват осцилляторов разрушается, и относительная фаза $\theta$ колеблется около равновесного значения $\theta = 0$, отвечающего синфазному режиму автономных осцилляторов. Таким образом, при наличии внешнего сигнала наблюдается режим частичного взаимного захвата осцилляторов. В тоже время в стробоскопическом сечении реализуется неподвижная точка, то есть осцилляторы захвачены внешним сигналом.

Выше указанной области на карте располагается система периодических режимов другого типа. Для основного языка такого типа реализация $\theta(t)$ показана на рис. 10, *б*. В этом случае относительная фаза «бежит», то есть внешний сигнал разрушает взаимный захват осцилляторов. В стробоскопическом сечении, однако, также наблюдается неподвижная точка. Это означает, что осцилляторы синхронизованы внешним сигналом.

В свою очередь, в точке $B$ фаза неограниченно нарастает, а портрет в стробоскопическом сечении отвечает уже квазипериодической динамике. Соответственно изменяется и цвет на ляпуновской карте.

Карта ляпуновских показателей и примеры реализаций для случая биений автономных осцилляторов даны на рис. 11 и 12. В этом случае исчезают периодические режимы при малых амплитудах воздействия, и вместо них возникает область квазипериодических колебаний. В нее встроена система языков периодических режимов, имеющая характерные «перемычки» при возрастании амплитуды.

Пример реализации внутри основного языка приведен на рис. 12, *а*. В этом случае фаза монотонно нарастает, то есть относительного захвата осцилляторов нет, но в стробоскопическом сечении наблюдается неподвижная точка. Рис. 12, *б* иллюстрирует изменение динамики внутри этого же языка, но выше «перемычки». Теперь амплитуда сигнала велика, и осцилляции фазы увеличивают размах настолько, что он превышает $2\pi$.

Отметим, что для второго языка динамика фазы аналогична рис. 12, *а*, но полный набег фазы между точками стробоскопических сечений уже не $2\pi$, а $4\pi$. Для третьего языка имеем полный набег фазы $6\pi$ и т.д.[4] На рис. 12, *в* приведен пример динамики для квазипериодического режима, наблюдающегося в промежутке между языками.

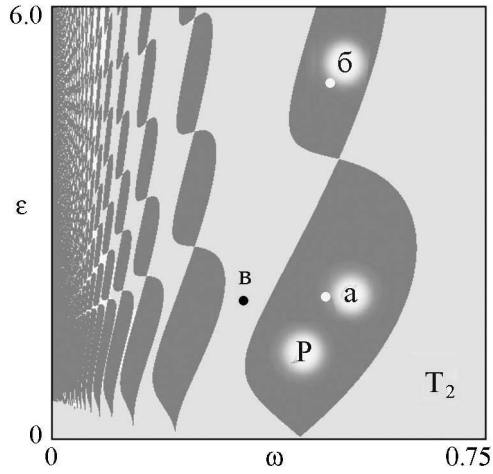


Рис. 11. Ляпуновская карта возбуждаемой системы (34) для режима биений в автономной модели, $\mu = 0.25$, $\Delta = 1$

Перейдем теперь к исходной системе (32). Рассмотрим случай небольшого значения управляющего параметра $\lambda = 0.1$. Ляпуновская карта для наиболее интересного случая биений автономных осцилляторов представлена на рис. 13. Величина связи и частотная расстройка выбраны равными $\mu = 0.025$ и $\Delta = 0.1$. Эти значения отвечают случаю фазовой модели на рис. 11. (В соответствии с правилами нормировки на

[4]Или, иначе говоря, число существенных пересечений графика $\theta(t)$ с границами рисунка в промежутке между стробоскопическими сечениями последовательно увеличивается с одного (см. рис. 12, *а*) до двух, трех и т.д.

© *А.П. Кузнецов, И.Р. Сатаев, Д.И. Трубецков, Е.С. Селиверстова*

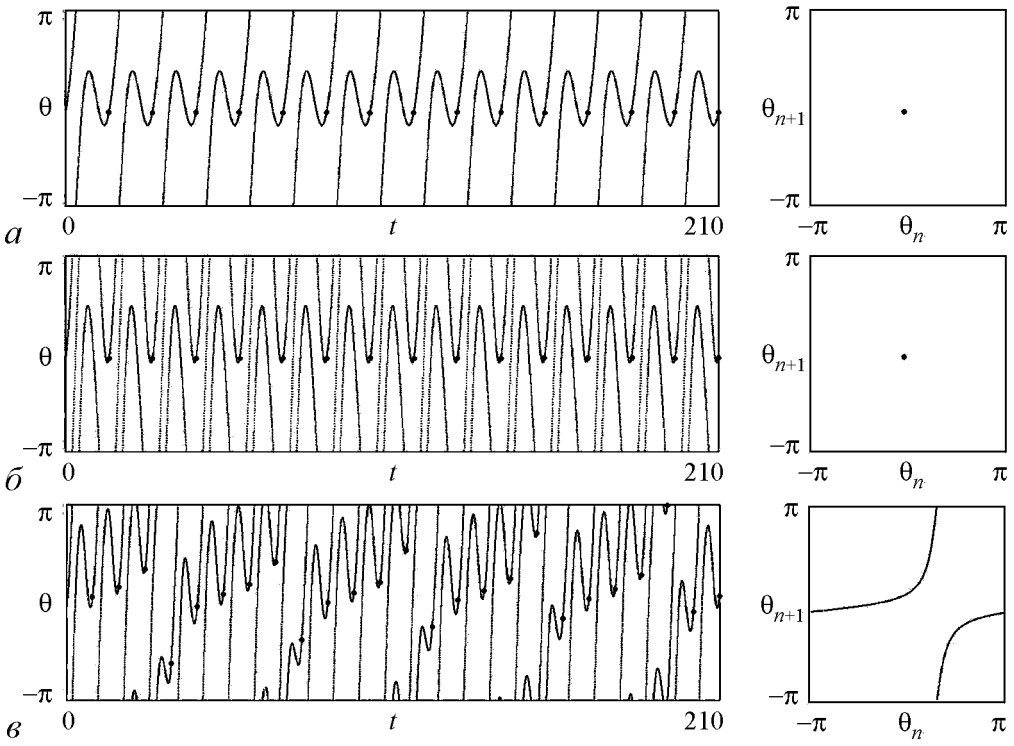



Рис. 12. Реализации и портреты в стробоскопическом сечении системы (34) в режиме биений в автономной модели: *а* – $\omega = 0.45$, $\varepsilon = 2$; *б* – $\omega = 0.45$, $\varepsilon = 5$; *в* – $\omega = 0.37$, $\varepsilon = 2$. Остальные параметры $\mu = 0.25$, $\Delta = 1$

значение $\lambda = 0.1$ параметры фазовой модели уменьшены в 10 раз.) При сопоставлении рисунков только следует иметь в виду, что изменен масштаб по частоте возбуждения $\omega$. На рис. 13 он уменьшен, так что использовано максимальное значение $\omega = 0.025$, что отвечает левой трети рис. 11. Это сделано для того, чтобы лучше визуализировать систему мелкомасштабных языков.

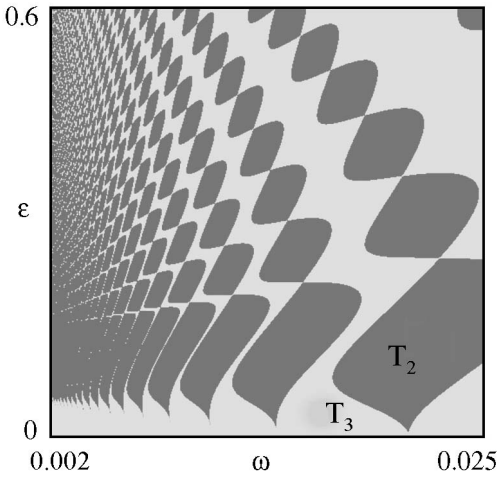



Рис. 13. Ляпуновская карта двух диссипативно связанных осцилляторов ван дер Поля с модулированной частотной расстройкой (32) в случае биений автономных осцилляторов. Значения параметров $\lambda = 0.1$, $\mu = 0.025$, $\Delta = 0.1$

Отмечаем, что для исходной системы (32) произошло изменение типов режимов, а именно: периодическим режимам неавтономного уравнения Адлера (34) теперь соответствуют двухчастотные квазипериодические режимы $\mathrm{T}_2$, а двухчастотным – трехчастотные $\mathrm{T}_3$. Причина понятна – она состоит в том, что для неавтономного уравнение Адлера тип режима определялся для фазы в стробоскопическом сечении. В остальном неавтономное уравнение Адлера очень хорошо дает картину режимов диссипативно связанных осцилляторов ван дер Поля с модуляцией частоты (32) при значении управляющего параметра $\lambda = 0.1$.

© *А.П. Кузнецов, И.Р. Сатаев, Д.И. Трубецков, Е.С. Селиверстова*

**4.3. Связанные уравнения Адлера: неидентичные контакты Джозефсона.** Несколько контактов Джозефсона[5], включенных в общую цепь, при определенных условиях приводят к *связанным уравнениям Адлера*. В этом случае можно считать, что волновые функции для каждого из образующих контакт сверхпроводников не зависят от времени и характеризуются своей фазой. Уравнение для $N$ контактов имеют вид [14,21–23]

$$\begin{aligned} &\frac{\hbar}{2e}\dot{\varphi}_n + I_n \sin\varphi_n = I - \varepsilon\dot{Q}, \\ &L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{Q}{C} = \frac{\hbar}{2e}\sum_{n=1}^{N}\dot{\varphi}_n. \end{aligned} \tag{35}$$

Здесь $\hbar$ – постоянная Планка; $e$ – заряд электрона; $I_n \sin\varphi_n$ – сверхпроводящий ток; $I_n$ – критический ток через соответствующий контакт; $R$, $L$, $C$ – элементы цепи, в которую включены контакты; $I$ – внешний ток; $\dot{Q}$ – ток через параллельную $RLC$-нагрузку.

Первое уравнение (35) описывает $n$-й контакт, а второе представляет собой уравнения Кирхгофа для электрической цепи, в которую включены контакты. Выполнив соответствующую перенормировку, можно получить следующие безразмерные уравнения [23]:

$$\begin{aligned} &\dot{\varphi}_n = I - I_n \sin\varphi_n - \varepsilon\dot{Q}, \\ &L\ddot{Q} + \gamma\dot{Q} + \omega_0^2 Q = I - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} I_n \sin\varphi_n. \end{aligned} \tag{36}$$

В случае двух контактов с разными критическими токами получаем

$$\begin{aligned} &\dot{\varphi}_1 = I - \sin\varphi_1 - \varepsilon\dot{Q}, \\ &\dot{\varphi}_2 = I - (1+\xi)\sin\varphi_2 - \varepsilon\dot{Q}, \\ &\ddot{Q} + \gamma\dot{Q} + \omega_0^2 Q = I - \frac{1}{2}[\sin\varphi_1 + (1+\xi)\sin\varphi_2]. \end{aligned} \tag{37}$$

Здесь в силу правила нормировки критический ток в первом контакте принят за единицу, а параметр $\xi$ характеризует неиденичность контактов по величине критического тока.

Плоскость параметров $(\xi, I)$ и ее увеличенный фрагмент приведены на рис. 14. На рисунке представлена ляпуновская карта, на которой разными цветами показаны область периодических режимов P (все показатели отрицательные), квазипериодичности $T_2$ (один нулевой показатель) и хаоса C (один положительный показатель). Также буквами Eq обозначена область, где система приходит в устойчивое состояние равновесия.

При выключенной связи уравнения (37) распадаются на два уравнения Адлера. Границы области синхронизации для них даются очевидными соотношениями

$$I = 1, \quad I = 1 + \xi. \tag{38}$$

[5] Эффект Джозефсона состоит в протекании тока через контакт двух сверхпроводников, разделенных потенциальным барьером [14]. Ток образуют куперовские пары, туннелирующие через барьер. Этот эффект находит широкое применение в генераторах и приемниках сигналов очень высокой частоты.

По свойствам уравнения Адлера, ниже первой линии (рис. 14, *а*) первый контакт захвачен, а ниже второй линии – захвачен второй контакт. Из рисунка можно видеть, что фактически эти же линии ограничивают основные области периодических режимов и состояние равновесия и в связанной системе. Однако имеется и множество узких языков периодических режимов другого типа, погруженных в область квазипериодической динамики.

Примеры портретов на плоскости двух фаз $(\varphi_1, \varphi_2)$ даны на рис. 15. Случай, приведенный на рис. 15, *а* отвечает инвариантной кривой, для которой первая фаза почти постоянна, а вторая меняется во всем диапазоне от нуля до 2π. Таким образом, это режим частичного захвата первого контакта. Соответственно, рис. 15, *б* отвечает частичному захвату второго контакта. Рис. 15, *в* дает пример более сложных режимов, реализующихся в узких резонансных языках. Эти режимы допускают топологическую классификацию по числу существенных пересечений вертикальной и гори-

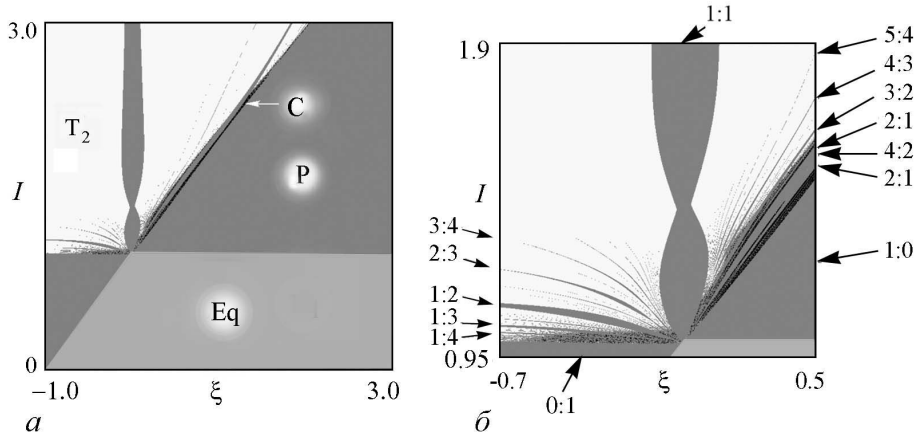



Рис. 14. Плоскость параметров двух неидентичных контактов Джозефсона (37) и ее увеличенный фрагмент, $\varepsilon = 0.5$, $\gamma = 1$, $\omega_0^2 = 1.2$

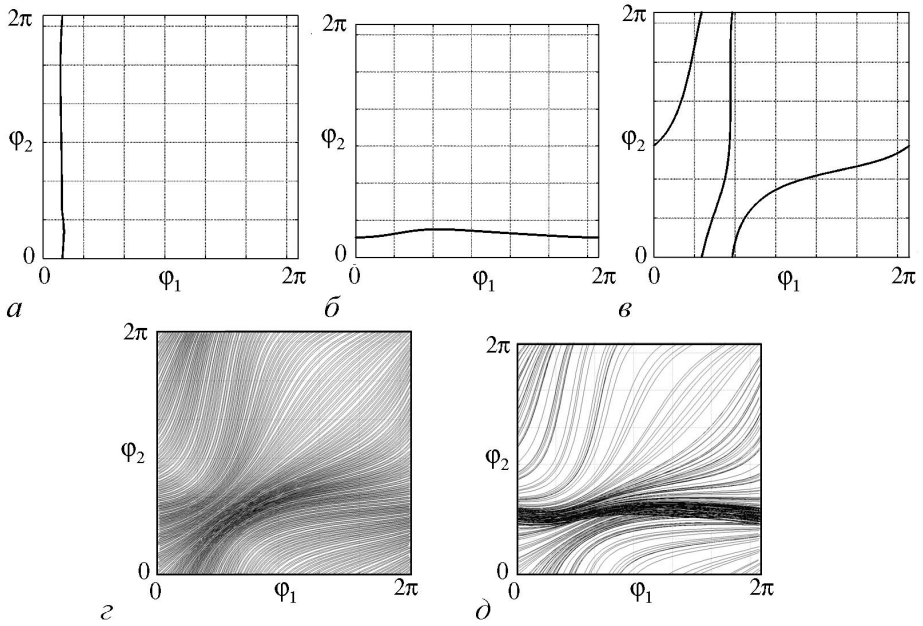



Рис. 15. Фазовые портреты системы (37) на плоскости двух фаз

© *А.П. Кузнецов, И.Р. Сатаев, Д.И. Трубецков, Е.С. Селиверстова*

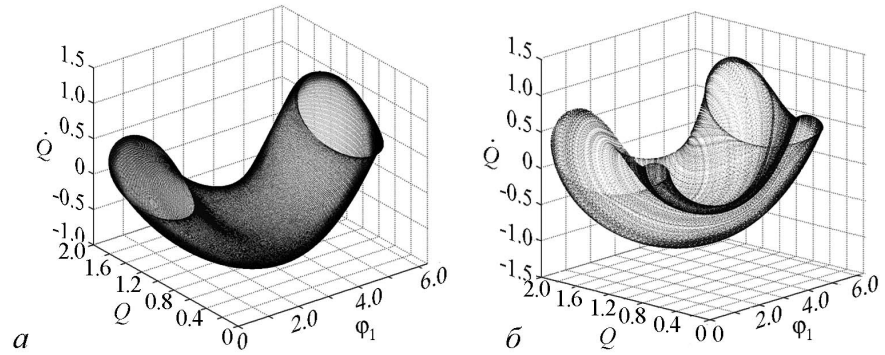



Рис. 16. Фазовые портреты системы (37) в квазипериодическом режиме (*а*) и хаоса (*б*)

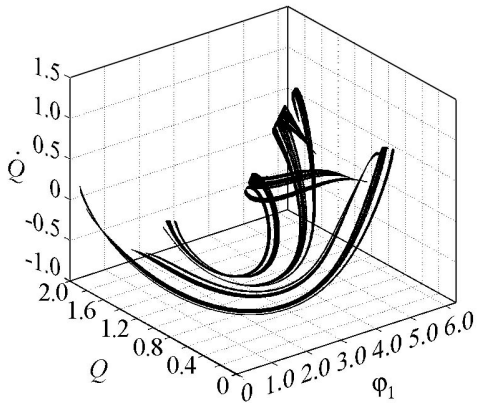



Рис. 17. Фазовый портрет системы (37) в области фейгенбаумовского хаоса

зонтальной сторон фазового квадрата. Так показанный на рис. 15, *в* режим характеризуется фактором 1 : 2. Такие числа вращения подписаны у некоторых основных языков на рис. 14, *б*. Отметим, что режимы частичного захвата можно классифицировать, как 0 : 1 и 1 : 0. На рис. 15, *г* показан квазипериодический режим – теперь фазовые траектории всюду плотно покрывают фазовый квадрат. В системе возможен также хаос в некоторых узких областях пространства параметров. Соответствующий фазовый портрет приведен на рис. 15, *д*.

На рис. 16, *а* показан фазовый портрет такого квазипериодического режима в расширенном фазовом пространстве с учетом переменных, характеризующих внешнюю цепь. Можно видеть инвариантный тор, который образуется при замыкании картинки по фазовой переменной[6]. На рис. 16, *б* приведен хаотический режим, отвечающий разрушению тора.

В системе в узком диапазоне изменения параметров возможны удвоения периода и переход к хаосу по Фейгенбауму. Это кажется несколько неожиданным с точки зрения динамики двух фаз связанных уравнений Адлера, но объясняется тем, что система (19) в целом имеет размерность четыре. В результате таких удвоений на плоскости фазовых переменных из режима типа 2 : 1 в озникают режимы 4 : 2, 8 : 4 и т.д. (см. обозначения по правому краю рис. 14, *б*.) На рис. 17 показан формирующийся хаотический режим в расширенном фазовом пространстве. Его интересно сравнить с разрушенным тором на рис. 16, *б*.

Вместо Заключения мы повторим эпиграф к нашей статье: «For everything you have done your life from your years to your 90s, we thank you Robert Adler!» [1, p. 17].

*Работа выполнена при государственной поддержке ведущих научных школ России, грант НШ-828.2014.2 и грант НШ-1726.2014.2, и при поддержке грантов РФФИ № 12-02-00342, 13-02-01209, 14-02-00329 и 14-02-00085*.

[6]Подробнее о динамике неидентичных контактов, правда, для несколько иной формы уравнений, можно ознакомиться в [22].

© *А.П. Кузнецов, И.Р. Сатаев, Д.И. Трубецков, Е.С. Селиверстова*

**Библиографический список**


1. *Kent J., Fakeuchi M., Laux G.* Robert Adler's touchscreen inventions // IEEE Ultrasonics Symposium. 2007. P.9.
2. *Adler R.* Parametric amplification of the fast electron wave // Proc. IRE. 1958. Vol. 46, №6. P. 1300.
3. *Adler R., Hrbek G., Wade G.* A low noise electron-beam parametric amplifier // Proc. IRE. 1958. Vol. 46, №10. P.1756.
4. *Adler R., Hrbek G., Wade G.* The quadrupole amplifier a low noise parametric device // Proc. IRE. 1959. Vol. 47. P.1713.
5. *Adler R.A.* Study of locking phenomena in oscillators // Proc. IRE. 1946. Vol. 34, June. P. 351.
6. *Люиселл У.* Связанные и параметрические колебания в электронике. М.: Изд-во иностранной литературы, 1963.
7. *Лопухин В.М., Рошаль А.С.* Электронно-лучевые параметрические усилители поперечных волн // УФН. 1965. Т. 85, №2. С. 297.
8. *Лопухин В.М., Магалинский В.Б., Мартынов В.П., Рошаль А.С.* Шумы и параметрические явления в электронных приборах сверхвысоких частот. М.: Наука, 1966.
9. *Лопухин В.М., Рошаль А.С.* Электроннолучевые параметрические усилители. М.: Сов. радио, 1968.
10. *Шевчик В.Н., Трубецков Д.И.* Аналитические методы расчета в электронике СВЧ. М.: Сов. радио, 1970.
11. *Ванке В.А.* Поперечные волны электронного потока в микроволновой электронике // УФН. 2005. Т. 175, № 9. С. 957.
12. Johnson C.C. Theory of fast-wave parametric amplification // J. Appl. Phys. 1960. Vol. 31, № 2. P. 338.
13. *Трубецков Д.И.* Синхронизация: Ученый и время. Лекции на школах «Нелинейные дни в Саратове для молодых». Вып. 2. Саратов: Изд-во Гос УНЦ «Колледж», 2006. С. 51.
14. *Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю.* Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 494 с.
15. *Ivanchenko M., Osipov G., Shalfeev V., Kurths J.* Synchronization of two non-scalar-coupled limit-cycle oscillators // Physica D. 2004. Vol. 189, № 1–2. P. 8.
16. *Rand R., Holmes P.J.* Bifurcation of periodic motions in two weakly coupled van der Pol oscillators // Int. J. Non-Linear Mechanics. 1980. Vol. 15. P. 387.
17. *Кузнецов А.П., Станкевич Н.В., Тюрюкина Л.В.* Связанные осцилляторы ван дер Поля и ван дер Поля–Дуффинга: Фазовая динамика и компьютерное моделирование Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика // 2008. Vol. 16, № 4. P. 101.
18. *Kuznetsov A.P., Stankevich N.V., Turukina L.V.* Coupled van der Pol–Duffing oscillators: Phase dynamics and structure of synchronization tongues // Physica D. 2009.Vol. 238, 14. P. 1203.
19. *Ланда П.С.* Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980. 360 с.


© *А.П. Кузнецов, И.Р. Сатаев, Д.И. Трубецков, Е.С. Селиверстова*

20. *Wiesenfeld K., Colet P., Strogatz S.H.* Synchronization Transitions in a Disordered Josephson Series Array // Phys. Rev. Lett. 1996. Vol. 76, № 3. P. 404.
21. *Valkering T.P., Hooijer1 C.L.A., Kroon M.F.* Dynamics of two capacitively coupled Josephson junctions in the overdamped limit // Physica D. 2009. Vol. 135. P. 137.
22. *Vlasov V., Pikovsky A.* Synchronization of a Josephson junction array in terms of global variables // Phys. Rev. 2013. Vol. 88. P. 022908.
23. *Emelianova Yu.P., Kuznetsov A.P., Sataev I.R., Turukina L.V.* Synchronization and multi-frequency oscillations in the low-dimensional chain of the self-oscillators // Physica D. 2013. Vol. 244, № 1. P. 36.

**References**

1. *Kent J., Fakeuchi M., Laux G.* Robert Adler's touchscreen inventions // IEEE Ultrasonics Symposium. 2007. P.9.
2. *Adler R.* Parametric amplification of the fast electron wave // Proc. IRE. 1958. Vol. 46, № 6. P. 1300.
3. *Adler R., Hrbek G., Wade G.* A low noise electron-beam parametric amplifier // Proc. IRE. 1958. Vol. 46, № 10. P.1756.
4. *Adler R., Hrbek G., Wade G.* The quadrupole amplifier a low noise parametric device // Proc. IRE. 1959. Vol. 47. P.1713.
5. *Adler R.A.* Study of locking phenomena in oscillators // Proc. IRE. 1946. Vol. 34, June. P. 351.
6. *Louisell William.* Coupled Mode and Parametric Electronics. New York, Willey, 1960.
7. *Lopukhin V.M., Roshal' A.S.* Electron-beam transverse-wave parametric amplifiers of the transverse waves // Phys. Usp. 1965. Vol. 85. P. 297.
8. *Lopukhin V.M., Magalinskii V.B., Martynov V.P., Roshal' A.S.* Noise and parametric phenomena in high-frequency electronic devices. M.: Nauka, 1966 (in Russian)
9. *Lopukhin V.M.,Roshal A.S.* Electron-beam parametric amplifiers. M.: Sov. Radio, 1968 (in Russian).
10. *Shevchik V.N., Trubetskov D.I.* Analytical calculation methods in microwave electronics M.: Sov. Radio, 1970 (in Russian).
11. *Vanke V.A.* Transverse electron-beam waves for microwave electronics // Phys. Usp. 2005. Vol. 48. P. 917.
12. *Johnson C.C.* Theory of fast-wave parametric amplification // J. Appl. Phys. Vol. 31, № 2. P. 338.
13. *Trubetskov D.I.* Sunchronization: scientist and hronology. Lectures on scholes «Nonlinear Days in Saratov for Younges.» Book 2. Saratov: Izd. Gos. UNTs «Kolledg», 2006. 112 s. (In Russian)
14. *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences. Cambridge university press, 2001. 432 p.
15. *Ivanchenko M., Osipov G., Shalfeev V., Kurths J.* Synchronization of two non-scalar-coupled limit-cycle oscillators // Physica D. 2004. Vol. 189, № 1–2. P. 8.

© *А.П. Кузнецов, И.Р. Сатаев, Д.И. Трубецков, Е.С. Селиверстова*

16. *Rand R., Holmes P.J.* Bifurcation of periodic motions in two weakly coupled van der Pol oscillators // Int. J. Non-Linear Mechanics. 1980. Vol. 15. P. 387.
17. *Kuznetsov A.P., Stankevich N.V., Turukina L.V.* Coupled van der Pol and van der Pol–Duffing oscillators: Dynamics of phase and computer simulation // Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics // 2008. Vol. 16, № 4. P. 101 (in Russian).
18. *Kuznetsov A.P., Stankevich N.V., Turukina L.V.* Coupled van der Pol–Duffing oscillators: Phase dynamics and structure of synchronization tongues // Physica D. 2009.Vol. 238, № 14. P. 1203.
19. *Landa P.S.* Self-Oscillations in Systems with Finite Number of Degrees of Freedom. Moscow: Nauka, 1980. 360 p. (In Russian).
20. *Wiesenfeld K, Colet P., Strogatz S.H.* Synchronization Transitions in a Disordered Josephson Series Array // Phys. Rev. Lett. 1996. Vol. 76, № 3. P. 404.
21. *Valkering T.P., Hooijer1 C.L.A., Kroon M.F.* Dynamics of two capacitively coupled Josephson junctions in the overdamped limit // Physica D. 2009. Vol. 135. P. 137.
22. *Vlasov V., Pikovsky A.* Synchronization of a Josephson junction array in terms of global variables // Phys. Rev. 2013. Vol. 88. P.022908
23. *Emelianova Yu.P., Kuznetsov A.P., Sataev I.R., Turukina L.V.* Synchronization and multi-frequency oscillations in the low-dimensional chain of the self-oscillators // Physica D. 2013. Vol. 244, № 1. P. 36.

*Поступила в редакцию 4.06.2015*

## AMAZING ROBERT ADLER

### Adler's tube, Adler's equation, and more

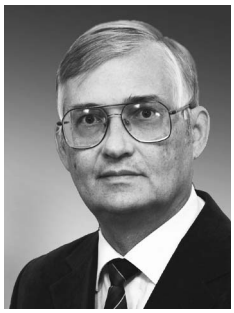
*A. P. Kuznetsov*[1,2], *I. R. Sataev*[1],
*D. I. Trubetskov*[2,3], *E. S. Seliverstova* [2]

[1]Kotel'nikov Institute of Radio-engineering and Electronics of RAS, Saratov Branch
[2]Saratov State University
[3]National Research Nuclear University MEPhI

The article is devoted to Robert Adler, the man who combined activities as theoretical physicist, an experimental physicist and engineer-inventor, the owner of more than 200 patents. Brief biographical information about this remarkable man is presented, and a more detailed presentation of the results of his two famous studies is given, known as Adler's gated-beam tube and Adler's equation. For those who are interested in the Adler's contribution to acoustoelectronics, it is important to read the article Kent J., Fakeuchi M., Laux G. Robert Adler's Touchscreen Inventions (IEEE Ultrasonics Symposium. 2007), the material which gave impetus to write this article. In addition, the original results are presented of generalization of the Adler's equation and analysis of generalized models using modern methods of nonlinear dynamics.

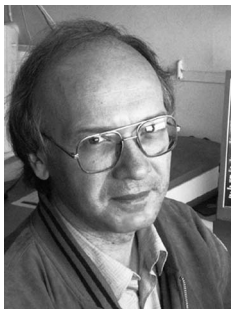
*Keywords:* Adler's tube, parametric amplifier, microwave acoustic, synchronization, generalized Adler's equation, Josephson junctions.

© *А.П. Кузнецов, И.Р. Сатаев, Д.И. Трубецков, Е.С. Селиверстова*



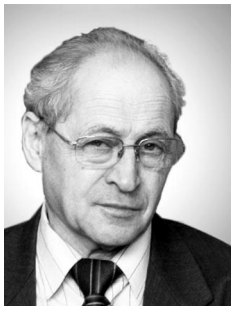
*Кузнецов Александр Петрович* – родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала ИРЭ РАН, заведующий базовой кафедрой динамических систем Саратовского госуниверситета. Область научных интересов: динамические системы, теория бифуркаций, синхронизация, квазипериодические колебания и их приложения. Лауреат гранта Президента Российской Федерации, Соросовский профессор (2000, 2001). Опубликовал более 100 статей в российских и международных научных журналах и 12 монографий, учебников и задачников по нелинейной динамике, теории колебаний и физике. Научный руководитель студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика». Автор оригинальных учебных курсов для факультета нелинейных процессов СГУ и Лицея прикладных наук.

410019 Саратов, ул. Зеленая, д. 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники
им. В.А. Котельникова РАН
410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
www.sgtnd.narod.ru
E-mail:apkuz@rambler.ru



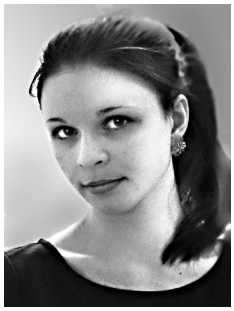
*Сатаев Игорь Рустамович* – родился в 1959 году. Окончил Московский физико-технический институт (1982). Кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН. Область научных интересов: моделирование динамики на пороге хаоса, гиперболический хаос, критические явления и метод ренормгруппы, приложения в механике. Опубликовал более 50 статей в российских и международных журналах и монографию «Физика квазипериодических колебаний» (в соавторстве).

410019 Саратов, ул. Зеленая, д. 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники
им. В.А. Котельникова РАН
www.sgtnd.narod.ru
E-mail: sataevir@rambler.ru



*Трубецков Дмитрий Иванович* – родился в Саратове (1938). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1960). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата (1965) и доктора физико-математических наук в СГУ (1978) в области радиофизики. Заведующий кафедрой электроники, колебаний и волн факультета нелинейных процессов СГУ, профессор кафедры прикладной математики НИЯУ МИФИ, член-корреспондент Российской академии наук, заслуженный деятель науки РФ, лауреат премии Президента РФ в области образования. Научный руководитель Лицея прикладных наук и факультета нелинейных процессов СГУ. Область научных интересов: вакуумная электроника и микроэлектроника сверхвысоких частот, теория колебаний и волн, нелинейная динамика, история науки. Автор более двадцати учебных пособий и монографий, а также более двухсот статей в периодической печати.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
115409 Москва, Каширское шоссе, 31
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
E-mail: dtrubetskov@yahoo.com



*Селиверстова Екатерина Сергеевна* – родилась в Энгельсе Саратовской области (1993), где окончила среднюю школу №16 с золотой медалью (2010). Студентка 5 курса факультета нелинейных процессов СГУ им. Н.Г. Чернышевского. Область научных интересов – теория колебаний и волн. По данной тематике опубликовала две статьи (одну в соавторстве) в российских реферируемых журналах.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: esseliverstova@yandex.ru

© *А.П. Кузнецов, И.Р. Сатаев, Д.И. Трубецков, Е.С. Селиверстова*