

## Лекция 17

### Параметрические генераторы электромагнитных колебаний

Основная область практического применения параметрической неустойчивости — это усиление, генерация и преобразование частоты электромагнитных колебаний. Первые параметрические устройства, основанные на механически перестраиваемых колебательных контурах, были разработаны еще перед Первой мировой войной. Однако, механическая перестройка возможна лишь на достаточно низких частотах. Более перспективным является периодическое изменение частоты контура при помощи нелинейных элементов. Пусть, например, в контур включен нелинейный элемент, емкость которого зависит от приложенного напряжения:  $C = C(u)$ . Воздействуя на этот элемент гармоническим внешним сигналом  $u = U \cos \omega t$ , можно добиться изменения емкости во времени с частотой  $\omega$ .

В качестве нелинейных элементов в современных параметрических устройствах обычно используются специальные полупроводниковые диоды, называемые *варикапами* (от англ. variable — переменный и capacity — емкость). Мы не будем обсуждать физические причины появления нелинейной емкости. Укажем лишь, что варикап представляет собой *p-n* переход при обратном постоянном смещении.

Схемы простейших одноконтурных параметрических генераторов приведены на рис. 17.1. Генератор включает в себя колебательный контур, диод  $D$  и источник внешнего сигнала, приводящий к модуляции параметров контура. В теории параметрических генераторов его называют *накачкой*. Частота накачки  $\omega$  должна быть близка к удвоенной собственной частоте контура.

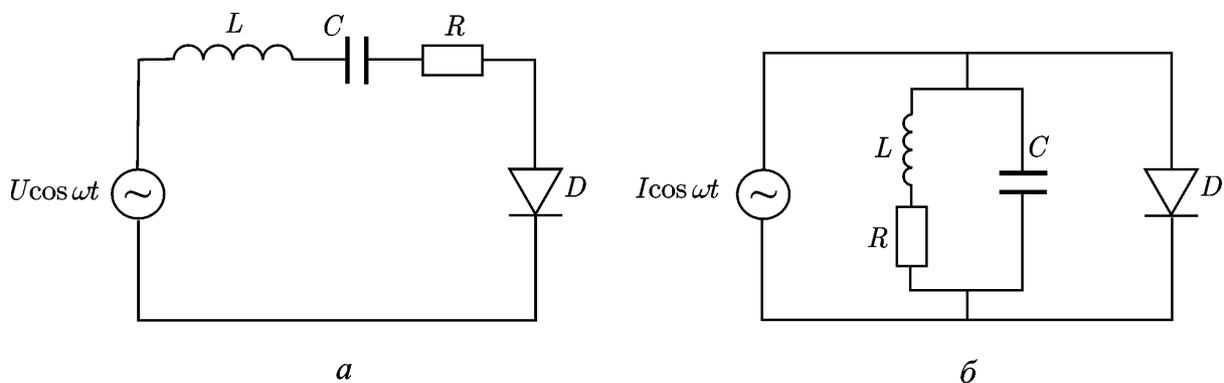


Рис. 17.1. Схемы одноконтурного параметрического генератора с последовательным (а) и параллельным (б) контуром.

Разумеется, использование колебательных контуров возможно только на относительно низких частотах. В сверхвысокочастотном диапазоне в качестве колебательных систем применяют *объемные резонаторы* — металлические полости, в которых возбуждаются электромагнитные колебания на определенных частотах. Отметим, что современные варикапы работают на частотах до 100 ГГц. На сверхвысоких частотах используются также *электронно-лучевые* генераторы и усилители, в которых в роль нелинейного элемента выполняет пучок электронов. Особенно перспективны так называемые *лазеры на свободных электронах*<sup>1</sup>.

Получим укороченные уравнения одноконтурного параметрического генератора. Диод представим в виде параллельно включенных нелинейных емкости и проводимости. Независимо от того, рассматривается генератор с последовательным или параллельным контуром, его эквивалентная схема генератора имеет вид, представленный на рис.17.2. Нелинейные функции  $q_c(u)$  и  $i_g(u)$  аппроксимируем полиномами

$$\begin{aligned} q_c(u) &= C_0 u + c_1 u^2 + c_2 u^3 + \dots \\ i_g(u) &= g_0 u + g_1 u^2 + g_2 u^3 + \dots \end{aligned} \quad (17.1)$$

Отметим, что в коэффициенты  $C_0$  и  $g_0$ , вообще говоря, входят и параметры колебательного контура.

Уравнения Кирхгофа для контура имеют вид (обозначения пояснены на рисунке)

$$\begin{aligned} L \frac{di}{dt} + u + U \cos \omega t &= 0, \\ i &= \frac{dq_c}{dt} + i_g. \end{aligned} \quad (17.2)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \tilde{q}(u) &= q_c(u) - C_0 u = c_1 u^2 + c_2 u^3 + \dots \\ \tilde{i}(u) &= i_g(u) - g_0 u = g_1 u^2 + g_2 u^3 + \dots \end{aligned} \quad (17.3)$$

Тогда из уравнений (17.2) получаем

---

<sup>1</sup> Принцип действия и устройство лазеров на свободных электронах кратко обсуждаются в книге «Линейные колебания и волны», входящей в состав настоящего курса.

$$C_0 \frac{d^2 u}{dt^2} + g_0 \frac{du}{dt} + \frac{u}{L} = -\frac{U \cos \omega t}{L} - \frac{d^2 \tilde{q}}{dt^2} - \frac{d\tilde{i}}{dt}. \quad (17.4)$$

Обозначая  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ ,  $g_0/C_0 = 2\varepsilon\gamma$ , где  $\varepsilon \ll 1$  — малый параметр, приведем уравнение (17.4) к виду

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + 2\varepsilon\gamma \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = -\omega_0^2 U \cos \omega t - \frac{1}{C_0} \left( \frac{d^2 \tilde{q}}{dt^2} + \frac{d\tilde{i}}{dt} \right). \quad (17.5)$$

Нелинейные добавки  $\tilde{q}$ ,  $\tilde{i}$  будем также полагать малыми (порядка  $\varepsilon$ ).

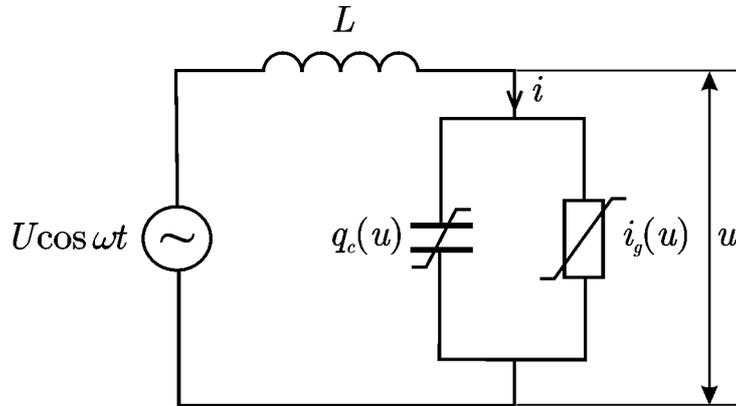


Рис. 17.2. Эквивалентная схема одноконтурного параметрического генератора.

Для получения укороченного уравнения вновь воспользуемся методом многих масштабов (лекция 9). Будем искать решение уравнения (17.5) в виде ряда по степеням  $\varepsilon$

$$u = u_1 + \varepsilon u_2 + \varepsilon^2 u_3 + \dots \quad (17.6)$$

и введем новые временные переменные  $T_n = \varepsilon^n t$ . Будем рассматривать основной параметрический резонанс, полагая

$$\omega = 2\omega_0 + \varepsilon\delta, \quad (17.7)$$

где  $\varepsilon\delta$  — малая расстройка. Подставим эти соотношения в уравнение (17.5) и выделим члены одинаковых порядков малости. В нулевом порядке получим уравнение гармонического осциллятора под внешним воздействием

$$\hat{D}_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = -\omega_0^2 U \cos \omega t. \quad (17.8)$$

Поскольку с учетом соотношения (17.7) можно записать, что

$$\omega t = 2\omega_0 T_0 + \delta T_1, \quad (17.9)$$

решение уравнения (17.8) будет иметь вид

$$u_1 = A(T_1) \exp(i\omega_0 T_0) + \frac{U}{6} \exp[i(2\omega_0 T + \delta T_1)] + \text{к.с.} \quad (17.10)$$

Члены порядка  $\varepsilon$  в (17.5) приводят к уравнению

$$\hat{D}_0^2 u_2 + \omega_0^2 u_2 = -2\hat{D}_0 \hat{D}_1 u_1 - 2\gamma \hat{D}_0 u_1 - \frac{1}{C_0} [\hat{D}_0^2 \tilde{q}(u_1) + \hat{D}_0 \tilde{i}(u_1)]. \quad (17.11)$$

Подставляя в правую часть этого уравнения выражение (17.10) и приравнявая к нулю секулярные члены, пропорциональные  $\exp(i\omega_0 T_0)$ , получаем

$$2i\omega_0(A' + \gamma A) + \frac{1}{C_0} [-\omega_0^2 \tilde{q}_{\omega_0} + i\omega_0 \tilde{i}_{\omega_0}] = 0. \quad (17.12)$$

Здесь символами  $\tilde{q}_{\omega_0}$ ,  $\tilde{i}_{\omega_0}$  обозначены составляющие на частоте  $\omega_0$ , входящие в  $\tilde{q}(u_1)$ ,  $\tilde{i}(u_1)$ , штрихи означают дифференцирование по «медленному времени»  $T_1$ .

Нелинейные добавки (17.3) включают в себя как квадратичные, так и кубические члены. Возводя выражение (17.10) в квадрат и в куб, после несложных, но достаточно громоздких вычислений, находим

$$\begin{aligned} (u_1^2)_{\omega_0} &= \frac{UA^*}{3} e^{i\delta T_1}, \\ (u_1^3)_{\omega_0} &= 3|A|^2 A + \frac{U^2 A}{6}. \end{aligned} \quad (17.13)$$

С учетом этих соотношений уравнение (17.12) приводится к виду

$$\begin{aligned} A' + \gamma A + \frac{i\omega_0}{2C_0} \left[ \frac{c_1 UA^*}{3} e^{i\delta T_1} + c_2 \left( 3|A|^2 A + \frac{U^2 A}{6} \right) \right] + \\ + \frac{1}{2C_0} \left[ \frac{g_1 UA^*}{3} e^{i\delta T_1} + g_2 \left( 3|A|^2 A + \frac{U^2 A}{6} \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (17.14)$$

В уравнение (17.21) входят нелинейные слагаемые двух типов. Члены, пропорциональные  $c_{1,2}$ , появляются за счет нелинейной зависимости заряда от приложенного напряжения (так называемая *реактивная нелинейность*). Как видно из уравнения (17.14), квадратичная нелинейность обеспечивает параметрическую связь колебаний на частотах  $\omega_0$  и  $2\omega_0$ . Кубическая нелинейность приводит к сдвигу частоты колебаний (нелинейная расстройка). С ростом амплитуды колебаний расстройка увеличивается и ре-

зональные условия нарушаются. Вследствие этого происходит насыщение неустойчивости и установление стационарного режима. В теории параметрических генераторов данный механизм ограничения амплитуды получил название *расстройного*. Аналогичный механизм действует в нелинейном осцилляторе, рассмотренном в Лекции 14. Члены, пропорциональные  $g_{1,2}$ , связаны с нелинейным характером проводимости диода. Такая нелинейность называется *активной* (нелинейные потери). Она приводит к *диссипативному* механизму насыщения. Далее рассмотрим действие обоих механизмов по отдельности.

### **Расстройный механизм ограничения неустойчивости**

При учете только расстройного механизма уравнение (17.14) принимает вид

$$A' + \gamma A + \frac{i\omega_0}{2C_0} \left[ \frac{c_1 U A^*}{3} e^{i\delta T_1} + c_2 \left( 3|A|^2 A + \frac{U^2 A}{6} \right) \right] = 0. \quad (17.15)$$

Из (17.15) следуют уравнения для вещественных амплитуды и фазы:

$$\begin{aligned} a' + \gamma a - \frac{\omega_0 c_1 U a}{6C_0} \sin(\delta T_1 - 2\varphi) &= 0, \\ \varphi' + \frac{\omega_0 c_1 U}{6C_0} \cos(\delta T_1 - 2\varphi) + \frac{\omega_0 c_2}{2C_0} \left( \frac{3a^2}{4} + \frac{U^2}{6} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (17.16)$$

Вводя резонансную фазу  $\psi = \delta T_1 - 2\varphi$ , превратим неавтономную систему (17.16) в автономную

$$\begin{aligned} a' + \gamma a &= \frac{\omega_0 c_1 U a}{6C_0} \sin \psi, \\ \psi' &= \delta + \frac{3\omega_0 c_2 a^2}{4C_0} + \frac{\omega_0 c_2 U^2}{6C_0} + \frac{\omega_0 c_1 U}{3C_0} \cos \psi. \end{aligned} \quad (17.17)$$

Сравнивая уравнения (17.17) с укороченными уравнениями для параметрического осциллятора Дуффинга (14.20), нетрудно убедиться, что они отличаются только слагаемым, пропорциональным  $U^2$ , во втором уравнении (разумеется, в уравнениях (14.20) величина  $f$  имеет тот же смысл, что и  $U$  в (17.17)). Это слагаемое играет роль дополнительной нелинейной расстройки

$$\delta_0 = -\frac{\omega_0 c_2 U^2}{6C_0}. \quad (17.18)$$

Причина ее появления заключается в том, что в контуре возбуждены интенсивные колебания на частоте накачки, что приводит к дополнительному изменению средней емкости диода.

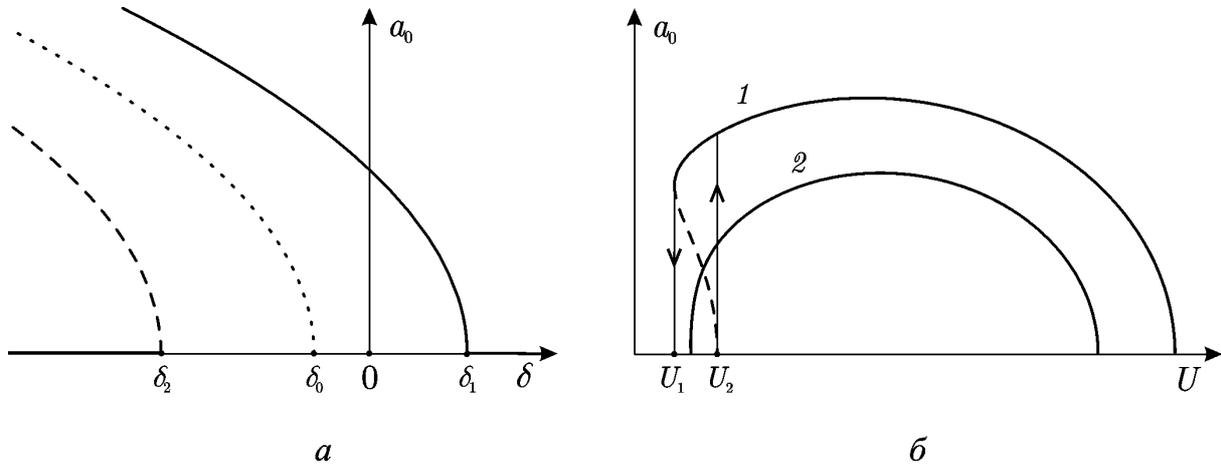


Рис. 17.3. Резонансные кривые одноконтурного параметрического генератора при расстроенном механизме ограничения неустойчивости: а — зависимости  $a_0(\delta)$  при  $U = \text{const}$ ; б — зависимости  $a_0(U)$  при  $\delta = \text{const}$ . Устойчивые участки показаны сплошными линиями, неустойчивые — штриховыми.

Рассматривая стационарные решения системы (17.17), нетрудно получить уравнение резонансной кривой

$$\left( \delta + \frac{\omega_0 c_2 U^2}{6C_0} + \frac{3\omega_0 c_2 a_0^2}{4C_0} \right)^2 = \left( \frac{\omega_0 c_1 U}{3C_0} \right)^2 - 4\gamma^2. \quad (17.19)$$

Резонансные кривые представлены на рис. 17.3а. Они практически аналогичны кривым на рис. 14.4, за тем исключением, что наклонены в другую сторону<sup>2</sup>. Кроме того, резонансные кривые приобретают дополнительный сдвиг на величину  $\delta_0$  в сторону низких частот. Мы не будем останавливаться на анализе устойчивости резонансных кривых, поскольку он полностью аналогичен проведенному ранее в лекции 16. В области  $\delta_2 < \delta < \delta_1$ , где

$$\delta_{1,2} = -\frac{\omega_0 c_2 U^2}{6C_0} \pm \sqrt{\left( \frac{\omega_0 c_1 U}{3C_0} \right)^2 - 4\gamma^2}, \quad (17.20)$$

<sup>2</sup> Разумеется, такая картина будет только в случае  $c_2 > 0$ , т.е. если емкость диода  $C(u)$  увеличивается с ростом  $u$ . При этом, очевидно, с ростом амплитуды колебаний резонансная частота будет уменьшаться. Если же  $c_2 < 0$ , резонансные кривые будут наклонены вправо.

возбуждение колебаний носит мягкий характер, в области  $\delta < \delta_2$  — жесткий, в области  $\delta > \delta_1$  возбуждение параметрических колебаний вообще отсутствует.

Зависимость  $a_0(U)$  приведена на рис.17.3б. Она изменяется более существенно (ср. рис. 14.5). Наличие дополнительной расстройки  $\delta_0$ , пропорциональной квадрату амплитуды накачки, приводит к тому, что при слишком больших  $U$  (при фиксированной  $\delta$ , т.е. при фиксированной частоте накачки) самовозбуждение становится невозможным. По-прежнему имеются две качественно различные ситуации. При достаточно больших отрицательных расстройках  $\delta < \delta_2$  зависимость  $a_0(U)$  является неоднозначной (кривая 1). Нижняя ветвь соответствует неустойчивым состояниям, верхняя — устойчивым. При плавном изменении амплитуды накачки будет наблюдаться гистерезис, т.е. возбуждение и срыв генерации в зависимости от направления движения будут происходить при различных значениях  $U_1$  и  $U_2$ , которые несложно определить из уравнения (17.18). Если же  $\delta > \delta_2$ , то зависимость  $a_0(U)$  имеет более простой вид (кривая 2). Важно отметить, что для любого значения расстройки имеется некоторое оптимальное значение амплитуды накачки, при которых колебания имеют максимальную амплитуду.

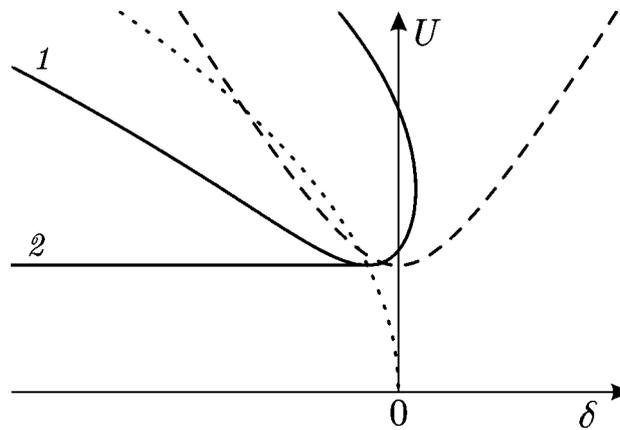


Рис. 17.4. Границы областей мягкого (1) и жесткого (2) возбуждения на плоскости параметров  $(\delta, U)$ . Пунктиром показана «скелетная кривая» — зависимость  $\delta = \delta_0(U)$ . Штриховая линия — граница неустойчивости для уравнения Матьё.

Полезно также построить границы области самовозбуждения на плоскости параметров  $(U, \delta)$ . Границу области мягкого возбуждения получим, полагая в уравнении (17.18)  $a_0 = 0$ :

$$\left( \delta + \frac{\omega_0 c_2 U^2}{6C_0} \right)^2 = \left( \frac{\omega_0 c_1 U}{3C_0} \right)^2 - 4\gamma^2. \quad (17.21)$$

Уравнение (17.20) отличается от соответствующего условия для уравнения Матьё (14.34) вторым слагаемым в левой части, т.е. наличием дополнительной расстройкой  $\delta_0$ , причины появления которой обсуждались выше. В результате границы самовозбуждения на плоскости параметров загибаются влево (рис. 17.4). Таким образом, область самовозбуждения является ограниченной по  $U$  при  $\delta = \text{const}$ , что согласуется с рис. 17.3б). Также на рис 17.4 изображена область жесткого возбуждения колебаний.

### **Диссипативный механизм ограничения неустойчивости**

Чтобы исследовать диссипативный механизм, положим в уравнении (17.21)  $c_2 = 0$  (но  $c_1 \neq 0$ , так как именно этот член отвечает за параметрическую связь накачки и сигнала). Получим

$$A' + \left[ \gamma + \frac{g_2}{2C_0} \left( 3|A|^2 + \frac{U^2}{6} \right) \right] A + \frac{ic_1\omega_0 + g_1}{6C_0} UA^* e^{i\delta T_1} = 0. \quad (17.22)$$

Поскольку

$$c_1\omega_0 - ig_1 = \frac{c_1\omega_0}{\cos\theta} e^{-i\theta}, \quad (17.23)$$

где  $\theta = \arctg(g_1/c_1\omega_0)$ , перепишем уравнение (17.22) в виде

$$A' + \left[ \gamma + \frac{g_2}{2C_0} \left( 3|A|^2 + \frac{U^2}{6} \right) \right] A + \frac{ic_1\omega_0}{6C_0 \cos\theta} UA^* e^{i(\delta T_1 - \theta)} = 0. \quad (17.24)$$

Далее будем считать, что угол  $\theta$  достаточно мал, так что  $\cos\theta \sim 1$ .

Построим резонансные кривые. Из уравнения (17.24) получаем укороченные уравнения для вещественных амплитуды и фазы

$$a' + \left[ \gamma + \frac{g_2}{4C_0} \left( \frac{3a^2}{2} + \frac{U^2}{3} \right) \right] a = \frac{\omega_0 c_1 U a}{6C_0 \cos\theta} \sin\psi, \quad (17.25)$$

$$\psi' = \delta + \frac{\omega_0 c_1 U}{3C_0 \cos\theta} \cos\psi.$$

Здесь по-прежнему  $\psi = \delta T_1 - 2\varphi$  — резонансная фаза. Нетривиальные стационарные решения системы (17.25), определяющие амплитуду и фазу стационарных одночастотных колебаний, находятся из уравнений

$$\begin{aligned} \gamma + \frac{g_2}{4C_0} \left( \frac{3a_0^2}{2} + \frac{U^2}{3} \right) &= \frac{\omega_0 c_1 U}{6C_0 \cos \theta} \sin \psi_0, \\ \delta &= -\frac{\omega_0 c_1 U}{3C_0 \cos \theta} \cos \psi_0. \end{aligned} \quad (17.26)$$

Отсюда следует уравнение резонансной кривой

$$\delta^2 = \left( \frac{\omega_0 c_1 U}{3C_0 \cos \theta} \right)^2 - 4 \left[ \gamma + \frac{g_2}{4C_0} \left( \frac{3a_0^2}{2} + \frac{U^2}{3} \right) \right]^2. \quad (17.27)$$

В данном случае резонансные кривые выглядят существенно проще (рис. 17.5). Они симметричны относительно оси ординат, что обусловлено отсутствием фазовой нелинейности (нелинейного сдвига частоты). Стационарные состояния всюду устойчивы. Области мультистабильности и гистерезиса отсутствуют, следовательно, жесткое возбуждение колебаний невозможно.

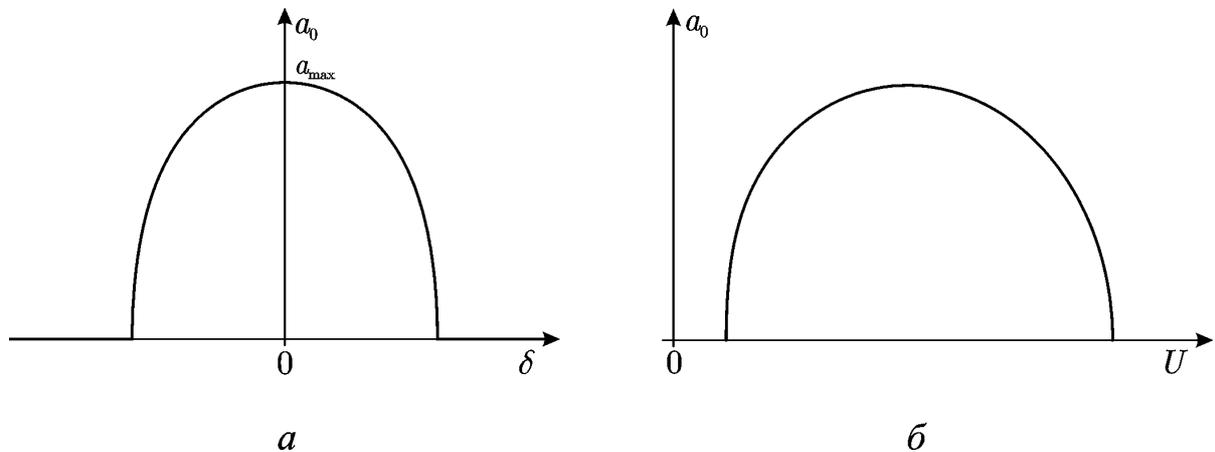


Рис. 17.5. Резонансные кривые одноконтурного параметрического генератора при диссипативном механизме ограничения неустойчивости: а — зависимость  $a_0(\delta)$  при  $U = \text{const}$ ; б — зависимость  $a_0(U)$  при  $\delta = \text{const}$ .

Амплитуда колебаний, очевидно, максимальна при нулевой расстройке

$$a_{\max}^2 = \frac{4\omega_0 c_1 U}{9g_2 \cos \theta} - \frac{8C_0 \gamma}{3g_2} - \frac{2U^2}{9}. \quad (17.28)$$

Зависимость  $a_{\max}(U)$  имеет максимум

$$(a_{\max})_{\max} = \sqrt{\frac{2}{9} \left( \frac{\omega_0 c_1}{g_2 \cos \theta} \right)^2 - \frac{8C_0 \gamma}{3g_2}} \quad (17.29)$$

при  $U = U_{\max} = \omega_0 c_1 / g_2 \cos \theta$ . Эти соотношения определяют максимально возможную амплитуду генерации.

Форму границы области самовозбуждения на плоскости  $(U, \delta)$  можно найти, полагая в уравнении (17.27)  $a_0 = 0$ , что дает

$$\delta^2 = \left( \frac{\omega_0 c_1 U}{3C_0 \cos \theta} \right)^2 - 4 \left( \gamma + \frac{g_2 U^2}{12C_0} \right)^2. \quad (17.30)$$

В данном случае отличие от уравнения (14.34) заключается в слагаемом, пропорциональным  $g_2 U^2$ . Оно учитывает дополнительную нелинейную диссипацию, появляющуюся из-за того, что на диод действует напряжение накачки с амплитудой  $U/6$ . В результате область самовозбуждения оказывается ограниченной замкнутой кривой (рис. 17.6).

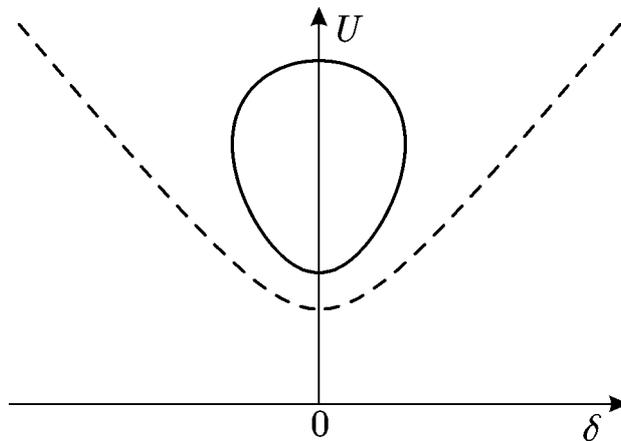


Рис. 17.6. Граница области самовозбуждения возбуждения параметрического генератора на плоскости параметров  $(\delta, U)$  при диссипативном механизме ограничения неустойчивости. Штриховая линия — граница неустойчивости для уравнения Матьё.

Теперь нетрудно представить, как будут выглядеть резонансные кривые и границы области самовозбуждения в случае, когда действуют и расстроечный, и диссипативный механизмы. Соответствующие зависимости приведены на рис. 17.7 и 17.8. Если влияние расстроечного механизма достаточно существенно, возможны мультистабильность и гистерезис. Соответственно, на плоскости параметров  $(\delta, U)$  появляется область жесткого возбуждения колебаний.

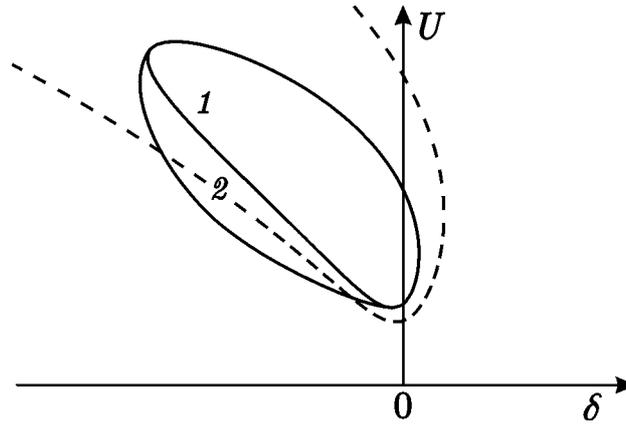


Рис. 17.7. Границы областей мягкого (1) и жесткого (2) самовозбуждения возбуждения при одновременном действии расстрочного и диссипативного механизмов. Штриховая линия — граница при действии только расстрочного механизма.

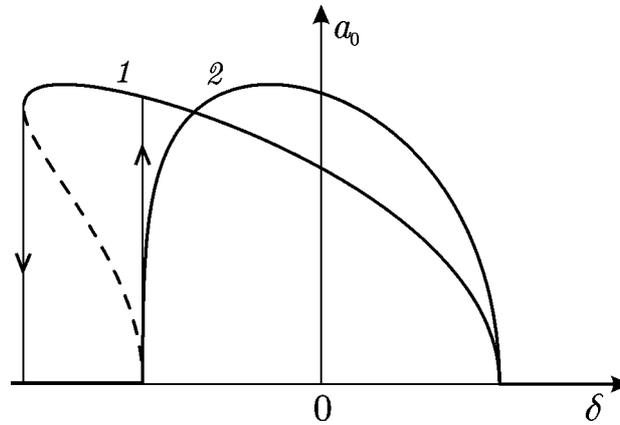


Рис. 17.8. Резонансные кривые одноконтурного параметрического генератора при преобладающем влиянии расстрочного (1) и диссипативного (2) механизмов ограничения неустойчивости.

**Задача 17.1.** Исследуйте возможность самовозбуждения параметрических колебаний, когда модулируется только проводимость диода (т.е. считается, что емкость диода линейна,  $q_c = C_0 u$ ).

*Решение.* Условие самовозбуждения формально найдем из укороченного уравнения (17.22). Полагая в нем  $c_1 = 0$  и линеаризуя, получим

$$A' + \left[ \gamma + \frac{g_2 U^2}{12 C_0} \right] A + \frac{g_1 U A^*}{6 C_0} e^{i\delta T_1} = 0. \quad (17.31)$$

Отсюда можно найти уравнение, определяющее границу самовозбуждения на плоскости параметров  $(\delta, U)$  (ср. (17.30)):

$$\delta^2 = \left( \frac{g_1 U}{3 C_0} \right)^2 - 4 \left( \gamma + \frac{g_2 U^2}{12 C_0} \right)^2. \quad (17.32)$$

Таким образом, необходимое для самовозбуждения условие (при отсутствии расстройки) есть

$$2\gamma + \frac{g_2 U^2}{6 C_0} \leq \frac{g_1 U}{3 C_0}. \quad (17.33)$$

С другой стороны, очевидно, что в колебательной системе с затуханием, зависящим от времени, самовозбуждение колебаний невозможно. В этом легко убедиться, рассматривая, например, линейный осциллятор вида

$$\ddot{x} + 2\gamma(t)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (17.34)$$

Такое уравнение описывает, в частности,  $RLC$ -контур, в котором сопротивление зависит от времени. Если  $\gamma(t) > 0$  в любой момент времени, то энергия все время убывает и состояние равновесия  $x = 0$  устойчиво.

С чем связано такое противоречие? Дело в том, что при аппроксимации вольтамперной характеристики диода кубическим полиномом появляется падающий участок в области отрицательных напряжений. Как было показано в Лекции 11, элемент с отрицательной дифференциальной проводимостью является активным и его включение в контур приводит к самовозбуждению. Условие (17.33) как раз отражает тот факт, что в определенные моменты времени напряжение на диоде соответствует падающему участку. Действительно, учитывая выражения (17.13), можно показать, что амплитуда спектральной составляющей тока на частоте  $\omega_0$  в линейном режиме есть

$$i_{\omega_0} = g_0 A + \frac{g_1 U A^*}{3} e^{i8T_1} + \frac{g_2 U^2 A}{6}. \quad (17.35)$$

При выполнении неравенства (17.33) это выражение (а, следовательно, и мощность потерь на частоте сигнала, пропорциональная  $i_{\omega_0} A^*$ ) может быть отрицательным.

В действительности вольтамперная характеристика варикапа не имеет падающего участка. Приближенно она описывается выражением

$$i(u) = I_0 \left[ \exp\left(\frac{eu}{kT}\right) - 1 \right], \quad (17.36)$$

которое пригодно и в области отрицательных напряжений. Здесь  $e$  — заряд электрона,  $k$  — постоянная Больцмана,  $T$  — температура. Таким образом, вывод о возможности возбуждения параметрических колебаний при модуляции лишь одной проводимости основан на некорректной аппроксимации выражения (17.36) кубическим полиномом в области больших отрицательных напряжений. Разумеется, включение в контур элемента, действительно обладающего отрицательной дифференциальной проводимостью, например, туннельного диода, приведет к самовозбуждению.

### Двухконтурный параметрический генератор.

#### Соотношения Мэнли — Роу

Более сложную систему представляет собой *двухконтурный* генератор, принципиальная схема которого приведена на рис. 17.9<sup>3</sup>. Генератор содержит два колебательных контура, собственные частоты которых равны  $\omega_{1,2} = 1/\sqrt{L_{1,2}C_{1,2}}$ . Параллельно им включен полупроводниковый диод, который мы, как и прежде, представим в виде нелинейных емкости и проводимости, соединенных параллельно. Генератор возбуждается источником тока накачки  $I_3 \sin \omega_3 t$ .

Условие параметрического резонанса в двухконтурной системе принимает вид

$$\omega_3 \approx \omega_1 + \omega_2 \quad (17.37)$$

В частном случае, когда  $\omega_1 = \omega_2$ , это соотношение совпадает с (17.7). Такой генератор называется *вырожденным*. Колебание на одной частоте одного из контуров (для определенности — на частоте  $\omega_1$ ) является *полезным сигналом*, другое носит название *холостого*. Двухконтурный генератор обладает рядом преимуществ по сравнению с одноконтурными, в частности, более высокой стабильностью частоты. Кроме того, в специфическом случае, когда частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  кратны, он может быть использован в качестве *делителя частоты*.

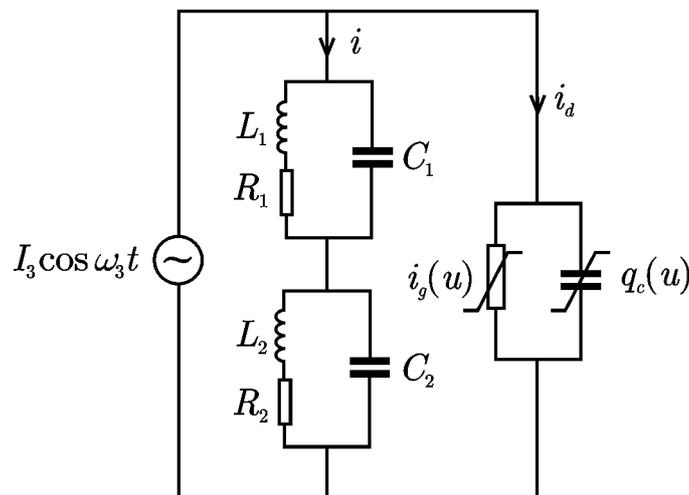


Рис. 17.9. Принципиальная схема двухконтурного параметрического генератора

<sup>3</sup> Ряд вопросов, касающихся теории двухконтурного генератора (соотношения Мэнли — Роу, переход к нормальным модам двухконтурной системы и т.д.) подробно обсуждается в курсе линейных колебаний и волн.

Важную роль при анализе колебаний в многочастотных параметрических системах играют соотношения Мэнли — Роу

$$\frac{P_1}{\omega_1} = \frac{P_2}{\omega_2} = -\frac{P_3}{\omega_3}, \quad (17.38)$$

где  $P_j$  — активные мощности, выделяющиеся на частотах  $\omega_j$ . При этом мощность, которая отбирается от источника накачки, считается отрицательной. Соотношения (17.38) показывают, в какой пропорции перераспределяется мощность накачки между сигнальным и холостым колебаниями.

Эти соотношения допускают простую квантовую интерпретацию. Если умножить резонансное условие (17.37) на постоянную Планка  $\hbar$ , то полученное соотношение будет иметь смысл закона сохранения энергии в процессе распада кванта накачки на кванты сигнального и холостого колебаний. Поскольку для мощности можно записать  $P_j = \hbar\omega_j N$ , где  $N$  — число актов распада в единицу времени, соотношения Мэнли — Роу показывают, что один квант накачки рождает по одному кванту на сигнальной и холостой частотах.

Получим укороченные уравнения двухконтурного генератора и покажем, что соотношения Мэнли — Роу выполняются. Обозначим напряжения на емкостях  $C_{1,2}$  как  $u_{1,2}$ . Тогда уравнения Кирхгофа дадут

$$L_1 C_1 \frac{d^2 u_1}{dt^2} + R_1 C_1 \frac{du_1}{dt} + u_1 = L_1 \frac{di}{dt} + R_1 i. \quad (17.39)$$

где  $i$  — ток, текущий через контуры, а также аналогичное уравнение для второго контура. Поскольку

$$i + i_d = I_3 \sin \omega_3 t, \quad (17.40)$$

где

$$i_d = i_g(u) + \frac{dq_c(u)}{dt} \quad (17.41)$$

— ток, текущий через диод, уравнение (17.39) можно переписать в виде

$$\frac{d^2 u_1}{dt^2} + \frac{R_1}{L_1} \frac{du_1}{dt} + \frac{u_1}{L_1 C_1} = \frac{1}{C_1} \left( \frac{d}{dt} + \frac{R_1}{L_1} \right) \left( I_3 \sin \omega_3 t - i_g(u) - \frac{dq_c(u)}{dt} \right). \quad (17.42)$$

Для функций  $i_g(u)$ ,  $q_c(u)$  по-прежнему будем использовать выражения (17.1). Здесь  $u = u_1 + u_2$  — напряжение на диоде. Окончательно получим

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 u_1}{dt^2} + \frac{R_1}{L_1} \frac{du_1}{dt} + \frac{u_1}{L_1 C_1} + \frac{C_0}{C_1} \left( \frac{d^2 (u_1 + u_2)}{dt^2} + \frac{R_1}{L_1} \frac{d(u_1 + u_2)}{dt} \right) + \\ & + \frac{g_0}{C_1} \left( \frac{d(u_1 + u_2)}{dt} + \frac{R_1 (u_1 + u_2)}{L_1} \right) = \frac{1}{C_1} \left( \frac{d}{dt} + \frac{R_1}{L_1} \right) \left( I_3 \sin \omega_3 t - \tilde{i} - \frac{d\tilde{q}}{dt} \right) \end{aligned} \quad (17.43)$$

Величины  $\tilde{i}$ ,  $\tilde{q}$  определяются соотношениями (17.3). Аналогичное уравнение (с точностью до перестановки индексов) будем иметь для  $u_2$ .

Если пренебречь нелинейными членами в правых частях, то придем к системе двух связанных линейных осцилляторов. Для дальнейшего анализа необходимо перейти от переменных  $u_{1,2}$  к *нормальным колебаниям* этой системы, чтобы получить уравнения, в которых связь осуществляется только посредством нелинейных членов. Соответствующие преобразования не представляют принципиальной сложности, однако достаточно громоздки. Поэтому позволим себе несколько упростить задачу, предположив, что линейная связь слабая и ей можно пренебречь. Для этого, очевидно, необходимо выполнение условий  $C_0 \ll C_{1,2}$ ,  $g_0 \ll R_{1,2} C_{1,2} / L_{1,2}$ . Также будем пренебрегать величинами  $R_{1,2} / L_{1,2}$  в правых частях, что справедливо в случае достаточно высокодобротных контуров, когда  $R_{1,2} \ll \sqrt{L_{1,2} / C_{1,2}}$ . В результате получим

$$\frac{d^2 u_1}{dt^2} + 2\varepsilon\gamma_1 \frac{du_1}{dt} + \omega_1^2 u_1 = \frac{1}{C_1} \frac{d}{dt} \left( I_3 \sin \omega_3 t - \tilde{i} - \frac{d\tilde{q}}{dt} \right), \quad (17.44)$$

а также аналогичное уравнение для  $u_2$ . Здесь введены обозначения  $\omega_{1,2} = 1/\sqrt{L_{1,2} C_{1,2}}$ ,  $2\varepsilon\gamma_{1,2} = R_{1,2} / L_{1,2}$ ,  $\varepsilon$  — малый параметр.

Получим укороченные уравнения для медленно меняющихся амплитуд колебаний. Для простоты ограничимся только расстройным механизмом ограничения неустойчивости, т.е. положим в (17.44)  $\tilde{i} = 0$ . Поскольку должно выполняться резонансное условие (17.37), запишем

$$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2 + \varepsilon\delta. \quad (17.45)$$

Нелинейные члены в (17.44), как и прежде, будем считать малыми. Решение ищем в виде рядов по степеням  $\varepsilon$

$$u_j = u_j^{(1)} + \varepsilon u_j^{(2)} + \varepsilon^2 u_j^{(3)} + \dots, \quad (17.46)$$

где  $j=1,2$ . Применяя аппарат метода многих масштабов, получим в нулевом порядке малости

$$\hat{D}_0^2 u_j^{(1)} + \omega_j^2 u_j^{(1)} = \frac{\omega_3 I_3}{C_j} \cos \omega_3 t = \frac{\omega_3 I_3}{2C_j} (\exp(i\omega_3 t) + \text{к.с.}) \quad (17.47)$$

Эти уравнения представляют собой уравнения линейных консервативных осцилляторов под внешним воздействием. Поскольку из соотношений (17.45) следует, что

$$\omega_3 t = (\omega_1 + \omega_2) T_0 + \delta T_1, \quad (17.48)$$

решения уравнений (17.47) можно записать в виде

$$u_j^{(1)} = A_j(T_1) \exp(i\omega_j T_0) + F_j \exp\left[i((\omega_1 + \omega_2) T_0 + \delta T_1)\right] + \text{к.с.}, \quad (17.49)$$

где

$$F_j = \frac{\omega_3 I_3}{2C_j (\omega_j^2 - \omega_3^2)}. \quad (17.50)$$

Члены порядка  $\varepsilon$  в (17.44) приводят к уравнениям

$$\hat{D}_0^2 u_j^{(2)} + \omega_j^2 u_j^{(2)} = -2\hat{D}_0 \hat{D}_1 u_j^{(1)} - 2\gamma \hat{D}_0 u_j^{(1)} - \frac{1}{C_j} \hat{D}_0^2 [\tilde{q}(u_1^{(1)} + u_2^{(1)})]. \quad (17.51)$$

Подставляя в правые части этих уравнений выражения (17.49) и приравнявая к нулю секулярные члены на частотах  $\omega_{1,2}$ , получаем укороченные уравнения

$$A_j' + \gamma_j A_j + \frac{i\omega_j}{2C_j} \left[ 2c_1 F A_k^* e^{i\delta T_1} + 3c_2 (|A_j|^2 + 2|A_k|^2 + 2F^2) A_j \right] = 0, \quad (17.52)$$

где  $F = F_1 + F_2$ ,  $j \neq k$ . Отсюда следуют уравнения для вещественных амплитуд и фаз

$$\begin{aligned} a_j' + \gamma_j a_j &= \frac{\omega_j c_1}{C_j} F a_k \sin(\delta T_1 - \varphi_j - \varphi_k), \\ \varphi_j' &= -\frac{3\omega_j c_2}{4C_j} (a_j^2 + 2a_k^2 + 8F^2) - \frac{\omega_j c_1 F}{C_j} \frac{a_k}{a_j} \cos(\delta T_1 - \varphi_j - \varphi_k). \end{aligned} \quad (17.53)$$

Резонансную фазу теперь следует ввести следующим образом:  $\psi = \delta T_1 - \varphi_1 - \varphi_2$ . Тогда вместо (17.53) окончательно получим автономную систему из трех уравнений

$$\begin{aligned} a_1' + \gamma_1 a_1 &= \frac{\omega_1 c_1}{C_1} F a_2 \sin \psi, \\ a_2' + \gamma_2 a_2 &= \frac{\omega_2 c_1}{C_2} F a_1 \sin \psi, \\ \psi' &= \delta + \frac{3c_2}{4} \left[ \left( \frac{\omega_1}{C_1} + \frac{2\omega_2}{C_2} \right) a_1^2 + \left( \frac{\omega_2}{C_2} + \frac{2\omega_1}{C_1} \right) a_2^2 + 8 \left( \frac{\omega_1}{C_1} + \frac{\omega_2}{C_2} \right) F^2 \right] + \\ &\quad + c_1 \left( \frac{\omega_1 a_2}{C_1 a_1} + \frac{\omega_2 a_1}{C_2 a_2} \right) F \cos \psi. \end{aligned} \quad (17.54)$$

Из первых двух уравнений системы следует закон сохранения

$$\frac{1}{\omega_1} \left[ \frac{d}{dT_1} \left( \frac{C_1 a_1^2}{2} \right) + \frac{C_1 R_1 a_1^2}{2L_1} \right] = \frac{1}{\omega_2} \left[ \frac{d}{dT_1} \left( \frac{C_2 a_2^2}{2} \right) + \frac{C_2 R_2 a_2^2}{2L_2} \right]. \quad (17.55)$$

Нетрудно убедиться, что величины в квадратных скобках представляют собой активные мощности, рассеиваемые на частотах  $\omega_{1,2}$ . Таким образом, (17.55) есть ничто иное, как одно из соотношений Мэнли — Роу. Отметим, что оно выполняется не только в установившемся режиме, но и в ходе переходного процесса (если только амплитуды меняются медленно).

Займемся анализом стационарного режима. Полагая  $a_j = a_{j0}$ ,  $\psi = \psi_0$ , где  $a_{j0}, \psi_0 = \text{const}$ , из уравнений (17.54) получаем

$$\begin{aligned} \gamma_1 a_{10} &= \frac{\omega_1 c_1}{C_1} F a_{20} \sin \psi_0, \\ \gamma_2 a_{20} &= \frac{\omega_2 c_1}{C_2} F a_{10} \sin \psi_0, \\ \delta + \frac{3c_2}{4} \left[ \left( \frac{\omega_1}{C_1} + \frac{2\omega_2}{C_2} \right) a_{10}^2 + \left( \frac{\omega_2}{C_2} + \frac{2\omega_1}{C_1} \right) a_{20}^2 + 8 \left( \frac{\omega_1}{C_1} + \frac{\omega_2}{C_2} \right) F^2 \right] + \\ &\quad + c_1 \left( \frac{\omega_1 a_{20}}{C_1 a_{10}} + \frac{\omega_2 a_{10}}{C_2 a_{20}} \right) F \cos \psi_0 = 0. \end{aligned} \quad (17.56)$$

Из первых двух уравнений системы (17.39) получаем следующие соотношения:

$$\frac{\gamma_1 C_1 a_{10}^2}{\gamma_2 C_2 a_{20}^2} = \frac{\omega_1}{\omega_2}, \quad (17.57)$$

$$\frac{\gamma_1 \gamma_2 C_1 C_2}{\omega_1 \omega_2 c_1^2 F^2} = \sin^2 \psi_0. \quad (17.58)$$

Уравнение (17.57), очевидно, представляет собой соотношение Мэнли — Роу для стационарного режима.

Исключив при помощи (17.57), (17.58) величины  $a_{20}$  и  $\psi_0$  из третьего уравнения системы (17.56), найдем уравнение резонансной кривой — зависимость амплитуды сигнала  $a_{10}$  от расстройки  $\delta$ :

$$\left[ \delta + \frac{3c_2}{4} \left( \frac{\omega_1}{C_1} + \frac{2\omega_2}{C_2} + \frac{\gamma_1 C_1 \omega_2}{\gamma_2 C_2 \omega_1} \left( \frac{\omega_2}{C_2} + \frac{2\omega_1}{C_1} \right) \right) a_{10}^2 + 8 \left( \frac{\omega_1}{C_1} + \frac{\omega_2}{C_2} \right) F^2 \right]^2 = \sqrt{\frac{\omega_1 \omega_2}{C_1 C_2}} \left( \sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}} + \sqrt{\frac{\gamma_2}{\gamma_1}} \right) \left( c_1^2 F^2 - \frac{\gamma_1 \gamma_2 C_1 C_2}{\omega_1 \omega_2} \right) \quad (17.59)$$

По своей структуре это выражение аналогично уравнению (17.19) для одноконтурного генератора. Поэтому подробно анализировать резонансные кривые и исследовать их на устойчивость нет необходимости. При учете диссипативного механизма ситуация становится несколько более сложной, поскольку соотношения Мэнли — Роу уже не выполняются: они неприменимы при наличии нелинейного затухания. Однако в целом отличия от одноконтурного генератора по-прежнему невелики.

### **Резонансное взаимодействие связанных слабонелинейных осцилляторов**

Важную роль в теории колебаний играют задачи о взаимодействии нелинейных осцилляторов. В то же время они имеют много общего с параметрическими колебаниями. Рассмотрим систему трех связанных осцилляторов, например три индуктивно связанных колебательных контура, содержащих нелинейные емкости (рис. 17.10). Если амплитуда колебаний настолько мала, что нелинейные эффекты не проявляются, то колебания представляют собой просто суперпозицию трех нормальных мод. Уравнения системы, записанные в нормальных координатах  $x_j$ , будут иметь вид

$$\ddot{x}_j + \omega_j^2 x_j = 0, \quad (17.60)$$

где  $j=1,2,3$ ,  $\omega_j$  — нормальные частоты. Если же нелинейность необходимо учитывать, в правых частях системы (17.60) появятся нелинейные слагаемые, отвечающие за связь осцилляторов (линейная связь исключена при переходом к нормальным колебаниям). Будем полагать, что нелинейность достаточно слабая, так что можно ограничиться квадратичными членами (например, в разложении нелинейной ха-

рактеристики емкости в ряд Тейлора достаточно учитывать только два первых члена  $q(u) \approx C_0 u + c_1 u^2$ .

Тогда вместо уравнений (17.60) будем иметь

$$\ddot{x}_j + \omega_j^2 x_j = \varepsilon \sum_{k,l} \beta_{jkl} x_k x_l, \quad (17.61)$$

где  $j, k, l = 1, 2, 3$ ,  $\varepsilon \ll 1$ . Понятно, что система (17.61) будет описывать широкий класс взаимодействующих слабонелинейных осцилляторов, независимо от их физической природы. Нетрудно также заметить аналогию с параметрическими колебаниями. Если, например, в начальный момент времени возбуждены колебания только одного из осцилляторов, то в первом приближении его движение можно считать заданным. Тогда для двух остальных будем иметь систему связанных параметрических осцилляторов.

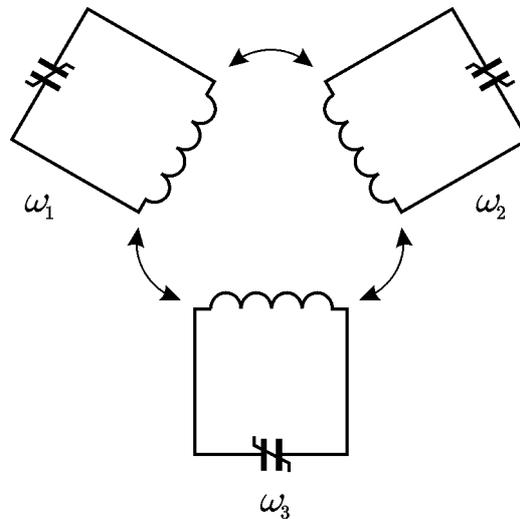


Рис. 17.10. Система трех связанных нелинейных колебательных контуров

Наибольший интерес, очевидно, представляют процессы *резонансного взаимодействия*, когда частоты осцилляторов  $\omega_j$  удовлетворяют резонансному условию

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3, \quad (17.62)$$

совпадающему с (17.37). В этом случае малые нелинейные слагаемые в правых частях (17.61) попадают в резонанс с собственными частотами. Таким образом, нелинейное взаимодействие играет принципиальную роль, и его уже нельзя рассматривать как малую поправку к линейным колебаниям.

Чтобы выяснить, какие новые нетривиальные эффекты появляются при наличии резонанса, представим решение системы (17.61) в виде квазигармонических колебаний  $x_j = A_j \exp(i\omega_j t) + \text{к.с.}$ , где  $A_j$  — медленно меняющиеся амплитуды, и получим укороченные уравнения. Ограничимся случаем точного резонанса (расстройка отсутствует). Поскольку вычисления в целом аналогичны описанным в предыдущих разделах, позволим себе сразу привести результат:

$$2i\omega_1 A_1' = \beta_{123} A_3 A_2^*, \quad 2i\omega_2 A_2' = \beta_{231} A_3 A_1^*, \quad 2i\omega_3 A_3' = \beta_{312} A_1 A_2. \quad (17.63)$$

Штрихи, как и выше, означают дифференцирование по медленному времени. Удобно произвести замену переменных

$$A_j \rightarrow 2A_j \sqrt{\frac{\omega_k \omega_l}{\beta_{klj} \beta_{ljk}}}, \quad (17.64)$$

где  $j \neq k \neq l$ . Тогда система (17.63) принимает вид

$$iA_1' = A_3 A_2^*, \quad iA_2' = A_3 A_1^*, \quad iA_3' = A_1 A_2. \quad (17.65)$$

Вводя вещественные амплитуды и фазы  $A_j = a_j \exp(i\varphi_j)$ , окончательно получаем систему из четырех вещественных уравнений

$$\begin{aligned} a_1' &= a_2 a_3 \sin \Phi, \\ a_2' &= a_1 a_3 \sin \Phi, \\ a_3' &= -a_1 a_2 \sin \Phi, \\ \Phi' &= \left( \frac{a_2 a_3}{a_1} + \frac{a_1 a_3}{a_2} - \frac{a_1 a_2}{a_3} \right) \cos \Phi, \end{aligned} \quad (17.66)$$

где  $\Phi = \varphi_3 - \varphi_1 - \varphi_2$ . Уравнения (17.65) допускают точное решение выражающееся через эллиптические функции Якоби. Они играют важную роль в теории резонансного взаимодействия волн и подробно анализируются в книге «Нелинейные волны», входящей в состав настоящего курса. Здесь мы не будем приводить полное решение, а ограничимся результатами качественного анализа.

Прежде всего, отметим, что из первых трех уравнений системы (17.66) следуют законы сохранения

$$a_1^2 - a_2^2 = I_1, \quad a_1^2 + a_3^2 = I_2, \quad a_2^2 + a_3^2 = I_2 - I_1 \quad (17.67)$$

где  $I_{1,2} = \text{const}$ . Они являются аналогами соотношений Мэнли — Роу.

Найдем особые точки системы (17.65). Кроме тривиального (нулевого) состояния равновесия, которое интереса не представляет, уравнения (17.65) также имеют решения вида

$$A_j = A_0 = \text{const}, \quad A_k = A_l = 0 \quad (17.68)$$

соответствующие ситуации, когда первоначально возбуждены колебания только одного из осцилляторов. Исследуем эти решения на устойчивость. Вначале рассмотрим случай, когда отлична от нуля амплитуда одного из низкочастотных колебаний (для определенности  $j = 1$ ). Положим  $A_1 = A_0 + \alpha_1$ ,  $A_{2,3} = \alpha_{2,3}$ , где  $\alpha_{1,2,3}$  — малые возмущения. Тогда, линеаризуя второе и третье уравнения системы (17.65), получим

$$i\alpha_2' = A_0^* \alpha_3, \quad i\alpha_3' = A_0 \alpha_2. \quad (17.69)$$

Исключая отсюда  $\alpha_3$ , получим уравнение гармонического осциллятора

$$\alpha_2'' + |A_0|^2 \alpha_2 = 0. \quad (17.70)$$

Следовательно, решение устойчиво и представляет собой состояние равновесия типа центр.

В случае, когда возбуждены колебания высокочастотного осциллятора, вместо (17.69) будем иметь

$$i\alpha_1' = A_0\alpha_2^*, \quad i\alpha_2' = A_0\alpha_1^*, \quad (17.71)$$

откуда следует уравнение

$$\alpha_2'' - |A_0|^2 \alpha_2 = 0. \quad (17.72)$$

Это уравнение описывает систему, находящуюся в состоянии с максимумом потенциальной энергии, на фазовой плоскости ей отвечает состояние равновесия типа седло. Таким образом, при  $j = 3$  решение (17.68) неустойчиво. Малые возмущения низкочастотных колебаний будут нарастать экспоненциально. Разумеется, экспоненциальный рост сохраняется лишь на начальном этапе, когда возмущения все еще можно считать малыми.

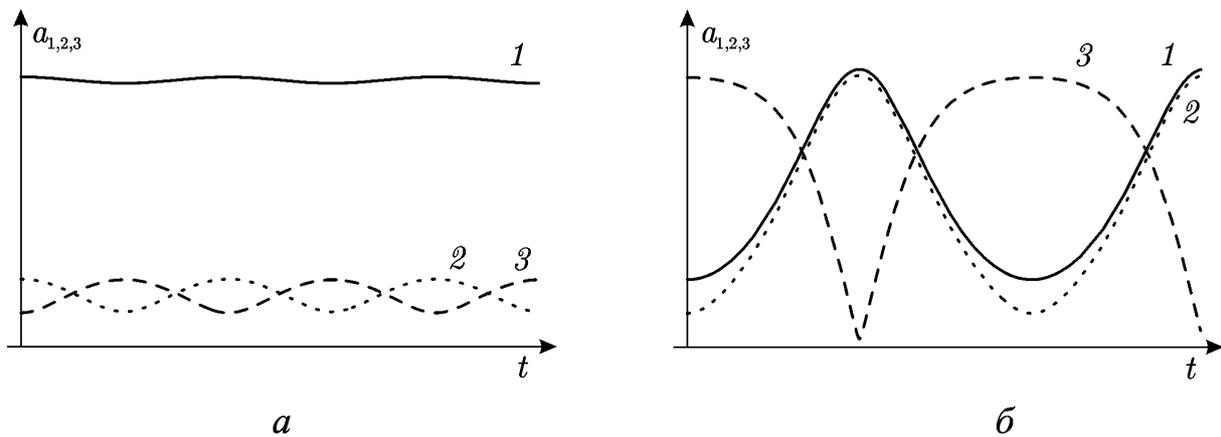


Рис. 17.11. Зависимости амплитуд колебаний от времени: а —  $a_1(0) \gg a_{2,3}(0)$ ; б —  $a_3(0) \gg a_{1,2}(0)$ .

Дальнейшую эволюцию амплитуд можно предсказать, используя соотношения Мэнли — Роу (17.67), которые в данном случае принимают вид

$$|A_1|^2 - |A_2|^2 \approx 0, \quad |A_1|^2 + |A_2|^2 \approx |A_0|^2. \quad (17.73)$$

Отсюда видно, что нарастание амплитуд низкочастотных колебаний должно сопровождаться уменьшением амплитуды высокочастотного, которое играет роль накачки. Следовательно, нелинейные эффекты будут приводить к насыщению неустойчивости. Однако, механизм ограничения отличается от (расстроенного и диссипативного). Его легче всего пояснить на языке обсуждавшейся выше квантовой аналогии. Наряду с процессами распада квантов высокочастотного колебания, происходят также процессы слияния квантов на частотах  $\omega_1$  и  $\omega_2$  с образованием кванта на частоте  $\omega_3$ . На начальной стадии, когда амплитуда накачки велика, доминирует процесс распада. По мере истощения накачки и роста амплитуд низкочастотных колебаний (и, соответственно, роста числа квантов на этих частотах) начинают преобладать процессы слияния. В итоге происходит периодический обмен энергией между высоко- и низкочастотны-

ми колебаниями. В теории волн такую неустойчивость называют *распадной*. На рис. 17.11 приведены типичные зависимости амплитуд  $a_j = |A_j|$  от времени в случаях, когда в начальный момент времени доминирует амплитуда одного из низкочастотных колебаний и неустойчивости нет (а), и в случае, когда  $|A_3(0)| \gg |A_{1,2}(0)|$  и наблюдается интенсивная перекачка энергии от высокочастотного колебания к низкочастотным и обратно (б).

### **Оптические параметрические усилители и генераторы**

Принцип параметрического усиления с успехом используется в оптическом диапазоне. Впервые *параметрические усилители и генераторы света* были предложены в 1962 г. С.А. Ахмановым и Р.В. Хохловым, а также независимо Н. Кроллом и Р. Кингстоном. Основное достоинство параметрических устройств по сравнению с оптическими квантовыми генераторами (лазерами) заключается в возможности перестройки частоты излучения в достаточно широких пределах, что важно для спектроскопических исследований.

В отличие от систем, рассматривавшихся в данной главе, параметрическая генерация света осуществляется за счет взаимодействия не колебаний, а волн. Три электромагнитные волны, частоты и волновые векторы которых связаны резонансными соотношениями

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3, \quad (17.74)$$

$$k_1 + k_2 = k_3, \quad (17.75)$$

распространяются в диэлектрике, в котором поляризация нелинейным образом зависит от напряженности электрического поля. На языке квазичастиц соотношения (17.74), (17.75) представляют собой законы сохранения *энергии* и *импульса* в процессе распада кванта волны накачки на кванты сигнальной и холостой волн. В этом случае нарастание низкочастотных волн можно трактовать как параметрическую неустойчивость при распространении в периодически неоднородной среде, промодулированной высокочастотной волной накачки.

Мы не будем подробно обсуждать вопросы параметрического взаимодействия волн, поскольку этот материал содержится в соответствующих разделах курса «Нелинейные волны». Укажем лишь, что укороченные уравнения, описывающие динамику амплитуд волн, являются уравнениями в частных производных. Однако в случае, когда на границу нелинейной среды падают волны с постоянной амплитудой, устанавливает-

ся *стационарный режим* параметрического усиления, когда амплитуды перестают зависеть от времени. Стационарный режим описывается уравнениями, тождественными (17.65), но с тем отличием, что производные в этих уравнениях берутся не по времени, а по координате. Таким образом, результаты, полученные в предыдущем разделе, можно непосредственно перенести на случай стационарного режима усиления. Графики, представленные на рис. 17.11, дают представление о том, как меняются амплитуды волн вдоль длины системы. В случае, когда амплитуда накачки на входе в систему велика (рис. 17.11б), возможно эффективное усиление. При этом длину кристалла нужно подобрать таким образом, чтобы на выходе достигалась максимальная перекачка энергии из высокочастотной волны в низкочастотные.

При *вырожденном резонансе*, когда  $\omega_1 = \omega_2$ , фактически происходит взаимодействие между основной волной и ее второй гармоникой. В этом случае возможно еще одно интересное явление: *генерация второй гармоники*. Действительно, когда на входе в систему велика амплитуда низкочастотной волны, будет происходить интенсивная перекачка энергии во вторую гармонику. Именно генерацией второй гармоники объясняется один из наиболее впечатляющих нелинейно-оптических эффектов: превращение красного луча лазера в голубой при прохождении через кристалл, обладающий нелинейной диэлектрической восприимчивостью.

Для превращения параметрического усилителя в генератор необходимо обеспечить обратную связь. Обычно для этого кристалл помещают в резонатор Фабри — Перо, образуемый, например, двумя параллельными зеркалами. Зеркала, как правило, прозрачны на частоте накачки, но имеют высокий коэффициент отражения на частотах одной или обеих низкочастотных волн (частотно-селективное отражение обеспечивается многослойными диэлектрическими зеркалами). Простейшая схема генератора приведена на рис. 17.12.

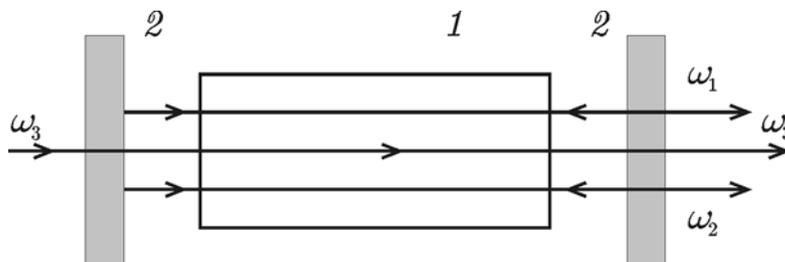


Рис. 17.12. Простейшая схема параметрического генератора света: 1 — нелинейный кристалл, 2 — зеркала.