

А. П. Кузнецов,
С. П. Кузнецов,
Н. М. Рыскин,
О. Б. Исаева

**Нелинейность:
от колебаний к хаосу
(задачи и учебные программы)**



Москва ♦ Ижевск

2006

Интернет-магазин

MATHESIS

<http://shop.rcd.ru>

- физика
- математика
- биология
- нефтегазовые технологии

Кузнецов А. П., Кузнецов С. П., Рыскин Н. М., Исаева О. Б.

Нелинейность: от колебаний к хаосу (задачи и учебные программы). — М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2006. — 184 с.

В сборнике представлено около 450 задач по нелинейным колебаниям, катастрофам, динамическим системам, бифуркациям, хаосу, нелинейным волнам, фракталам и комплексной аналитической динамике. Каждый раздел содержит как теоретические задачи, так и задачи исследовательского характера, решаемые при помощи компьютера. Исследовательские задачи могут использоваться для постановки компьютерных практикумов, как курсовые работы и для самостоятельного решения. Представлен комплекс взаимосвязанных учебных программ по перечисленным дисциплинам. Задачи и учебные программы апробированы на Факультете нелинейных процессов Саратовского госуниверситета. При разработке сборника использовались научные результаты, полученные в группах проф. Кузнецова А.П., Кузнецова С.П. и Рыскина Н.М., а также опыт интеграции академической (Саратовский филиал ИРЭ РАН) и вузовской науки (ФНП СГУ). Сборник будет полезен преподавателям и студентам, интересующимся нелинейной теорией колебаний и волн и нелинейной динамикой. Может быть использован для построения системы образования, основанной на идеях и подходах нелинейной теории.

Использованы результаты исследований по грантам РФФИ №00-02-17509, №03-02-16074, №03-02-16192, РФФИ-ННИО №04-02-0411, а также по гранту Американского фонда гражданских исследований и развития.

ISBN 5-93972-514-7

© А. П. Кузнецов, С. П. Кузнецов, Н. М. Рыскин, О.Б.Исаева, 2006

© Рисунки Д. В. Соколов, С. П. Кузнецов, 2006

© НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2006

<http://rcd.ru><http://ics.org.ru>

Оглавление

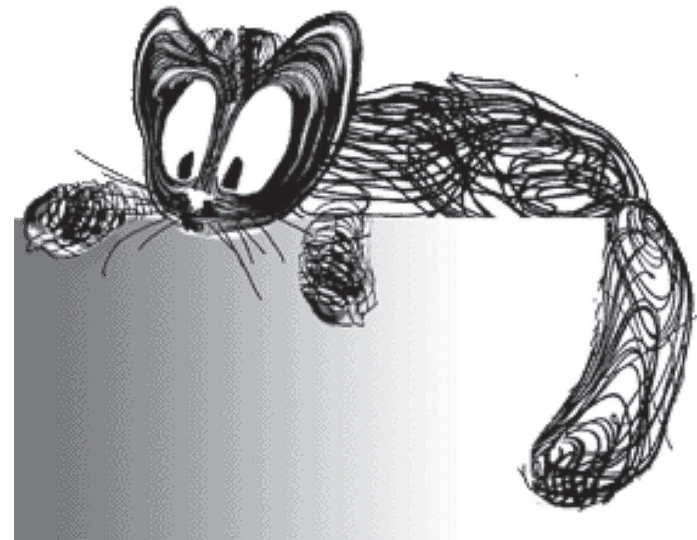
Предисловие	9
Из предисловия к книге А. П. Кузнецова «Колебания, катастрофы, бифуркации, хаос»	12
ГЛАВА 1. Нелинейные колебания	15
Линейность и нелинейность. Нелинейные элементы	16
Зависимость периода нелинейных колебаний от амплитуды	19
Особенности спектров нелинейных систем	20
Мультистабильность и гистерезис	22
Динамические системы. Консервативные и диссипативные системы	24
Фазовые портреты нелинейных систем	25
Нелинейный осциллятор. Приближение слабой нелинейности	29
Нелинейный осциллятор. Движение вблизи сепаратрисы	31
Метод медленно меняющихся амплитуд	32
Быстрые и медленные движения в случае сильной диссипации	33
Автоколебательные системы	33
Уравнения Ван-дер-Поля и Рэлея	35
Жесткое возникновение автоколебаний	37
Релаксационные автоколебания	38
Сечение Пуанкаре. Одномерные дискретные отображения	39
Нелинейные колебания неавтономных систем. Синхронизация	40
Нелинейные колебания. Задачи для компьютерного исследования.	41
ГЛАВА 2. Катастрофы	45
Ряд Тейлора и модели	46
Понятия типичности и коразмерности	47
«Игрушки» теории катастроф	48
Критические точки функций одной переменной	49
Критические точки функций двух переменных	51
Катастрофа коразмерности один — складка	52
Катастрофа коразмерности два — сборка	53
Катастрофа коразмерности три — ласточкин хвост	55

Каспидные катастрофы в двумерных системах	56
Катастрофа коразмерности три — эллиптическая омбилика	58
Катастрофа коразмерности три — гиперболическая омбилика	59
Катастрофы и теория упругости	59
Катастрофы и физика фазовых переходов	60
Кривые и их особенности. Эволюты и эвольвенты	61
Каустики	61
Волновые фронты и их особенности	62
Колебания. Эффект смягчения мод	62
Нелинейный резонанс	63
Автоколебания и синхронизация	64
Катастрофы. Задачи для компьютерных исследований	64
ГЛАВА 3. Динамические системы и бифуркации	69
Классификация и примеры динамических систем	70
Бифуркации одномерных потоков	74
Бифуркация Андронова—Хопфа	75
Бифуркации предельных циклов	77
Бифуркации одномерных отображений коразмерности один	79
Бифуркации двух- и трехпараметрических одномерных отображений	81
Бифуркации двумерных отображений	83
Неустойчивое и устойчивое многообразие	85
Квазипериодические режимы и синхронизация в двумерных и од- номерных отображениях	86
Бифуркации и синхронизация в системах типа Ван-дер-Поля	87
Динамические системы и бифуркации. Задачи для компьютерных исследований	89
ГЛАВА 4. Хаос	99
Хаос и его свойства	100
Устойчивость и ляпуновские показатели	105
Геометрия странных аттракторов	107
Удвоения периода и теория Фейгенбаума	108
Переменяемость	111
Квазипериодические явления	111
Хаос в Интернете	114
Демонстрации хаоса	114

ГЛАВА 5. Нелинейные волны	115
Эвристический подход к нелинейным волновым уравнениям	116
Простые волны и образование разрывов	116
Стационарные нелинейные волны	119
Получение уравнения КдВ и других «длинноволновых» уравнений в конкретных физических задачах	121
Точные методы в теории солитонов	123
Модулированные волны в нелинейных средах	129
Нелинейные волны. Задачи для компьютерных исследований	131
ГЛАВА 6. Фракталы и комплексная аналитическая динамика	135
Фракталы	136
Комплексная аналитическая динамика	139
ГЛАВА 7. Учебные программы	147
Нелинейные колебания	148
Теория катастроф	153
Динамические системы и бифуркации	155
Приложения теории катастроф и бифуркаций	160
Динамический хаос	163
Нелинейные волны	168
Фракталы и комплексная аналитическая динамика	171
Литература к комплексу учебных программ «Нелинейность: от ко- лебаний к хаосу»	178
Книги серии «Современная теория колебаний и волн»	178
Учебники	178
Книги	180
Книги серии «Нелинейные волны»	183
Статьи в Соросовском образовательном журнале	186

У моря видел дуб зеленый;
Под ним сидел, и кот ученый
Свои мне сказки говорил.
Одну я помню: сказку эту
Поведаю теперь я свету...

А.С. Пушкин



Предисловие

Настоящее пособие представляет собой развитие книги А. П. Кузнецова «Колебания, катастрофы, бифуркации, хаос». Поэтому мы сочли возможным привести ниже предисловие к ней, которое не утратило свою актуальность. Настоящее издание, однако, существенно расширилось — увеличился коллектив авторов, добавились новые задачи и главы и соответственно изменилось название. Теперь мы представляем систему задач по восьми взаимосвязанным курсам нелинейной теории:

- нелинейные колебания,
- теория катастроф,
- динамические системы и бифуркации,
- приложения теории катастроф и бифуркаций,
- динамический хаос,
- от порядка к хаосу,
- нелинейные волны,
- фракталы и комплексная аналитическая динамика,

разработанных и читаемых авторами на факультете нелинейных процессов Саратовского госуниверситета.

Мы сочли, что будет полезным представить и учебные программы по этим курсам, которые вошли в главу 7. Заметим, что появление курса «Приложения теории катастроф и бифуркаций» обусловлено тем, что, как оказалось, после прочтения теории нелинейных колебаний, а затем теории катастроф и бифуркаций необходимо вновь вернуться к некоторым вопросам теории колебаний, чтобы на новом «уровне» обсудить их. (Например, не общеизвестным в учебной литературе является тот факт, что с нелинейным резонансом связана катастрофа сборки, важно дать четкую картину всех возможных бифуркаций в задачах синхронизации и т.д.) Это относится и к физическим аспектам приложений теории катастроф, таким как геометрическая оптика, физика фазовых переходов и т.д. Это необходимо и потому, что на факультете нелинейных процессов СГУ происходит раннее знакомство с нелинейной теорией — так, курс «нелинейные колебания» читается

уже на втором курсе. При составлении задач, однако, выяснилось, что их более удобно поместить в главы «теория катастроф» и «динамические системы и бифуркации», поскольку в этом случае система задач выглядит более стройно. Мы представляем здесь и курс «нелинейные волны» вместе с соответствующими задачами. Отметим, что курсы «динамический хаос» и «от порядка к хаосу» в рамках учебной программы объединены также для удобства восприятия в одну главу. Весьма обширным (отчасти неожиданно) получился курс, связанный с комплексной аналитической динамикой. Здесь наряду с привлекательным для студентов материалом по множествам Мандельброта, Жюлиа и т.д. обнаруживаются весьма нетривиальные и интересные физические приложения.

Отметим также, что мы добавили новые задачи исследовательского характера, которые требуют для решения применения компьютера. Они могут использоваться как в компьютерных практикумах, так и при выполнении курсовых работ и различных учебно-исследовательских практик. Заметим, что некоторые из них допускают очень глубокое исследование на уровне не только дипломной работы, но и аспирантских исследований (например, задачи 100 и 101 из главы 3 о синхронизации в автогенераторе типа Ван-дер-Поля—Дуффинга с жестким возбуждением и их развитие).

В текст «вкраплены» и оригинальные результаты. Например, в задаче 94 из главы «динамические системы и бифуркации» появляются новые оригинальные отображения — «отображения катастроф». Также в задачах 95 и 103 (и в тексте учебной программы) можно видеть оригинальное отображение, названное «универсальным двумерным отображением». Его особенность — демонстрация всех основных бифуркаций двумерных отображений на плоскости след — якобиан линеаризованной матрицы, которые выбраны как его параметры, а также всех характерных сценариев перехода к хаосу. Его исследование также может быть проведено на «аспирантском» уровне. Весьма интересными, на наш взгляд, являются задачи 28 и 29 из 6-ой главы, которые позволяют дать физический пример множества Мандельброта (включая возможный эксперимент) в виде системы связанных систем с удвоениями периода.

При разработке сборника использовались научные результаты, полученные в группах проф. Кузнецова А.П., Кузнецова С.П. и Рыскина Н.М., а также опыт интеграции академической (Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН) и вузовской науки (Саратовский госуниверситет). Мы использовали результаты исследований по грантам РФФИ №00-02-17509, №03-02-16074, №03-02-16192, РФФИ-ННИО №04-02-0411, а также по гранту Американского фонда гражданских исследований и развития REC-006.

К комплексу учебных программ добавлена и литература. Заметим, что основными учебниками могут служить книги серии «Современная теория колебаний и волн», хотя они все же не находятся во взаимно-однозначном соответствии с настоящим задачником. (Например, в серии отсутствуют книги по теории катастроф, комплексной аналитической динамике и др.) Для удобства читателя мы сгруппировали литературу в отдельные блоки: учебники, книги, обзоры и т.д. Отметим, что очень привлекательными являются также образующие некоторую серию статьи в Соросовском образовательном журнале.

Мы надеемся, что сборник будет полезен преподавателям и студентам, интересующимся нелинейной теорией колебаний и волн и нелинейной динамикой. Он может быть использован для построения системы образования, основанной на идеях и подходах нелинейной теории.

Авторы выражают глубокую благодарность члену-корреспонденту РАН, проф. Д.И. Трубецкову за возможность реализации представленных задач в Саратовском государственном университете. Авторы весьма благодарны проф. Аркадию Пиковскому (университет Потсдама, Германия) за возможность обсуждения вопросов и проблем нелинейной динамики, некоторые из которых нашли отражение и в настоящей книге. Мы благодарны декану ФНП Ю.И. Левину за многолетнее взаимодействие. Авторы благодарны всем преподавателям ФНП СГУ, которые вместе с нами участвовали в апробации задач на семинарах и компьютерных практикумах: Ю.В. Седовой, А.С. Ивановой, Л.В. Тюрюкиной, А.В. Савину, А.А. Балякину, А.А. Короновскому, Л.В. Красичкову, Е.С. Мчедловой и всем студентам факультета нелинейных процессов, принявшим активное участие в этих занятиях. Мы благодарны нашим ученикам и аспирантам, элементы работы над курсовыми, дипломными работами и кандидатскими диссертациями которых нашли отражение в настоящем сборнике. Мы благодарны Д.В. Соколову за рисунок «хаотического кота», открывающего книгу, а также И.Р. Сатаеву за помощь в подготовке компьютерного макета.

Компьютерные рисунки, представленные в начале каждой главы, демонстрируют соответственно конденсацию изображающих точек на фазовой плоскости на предельный цикл уравнения Ван-дер-Поля, систему нормалей к параболе, демонстрирующую катастрофу сборки, бифуркационное дерево логистического отображения, карту ляпуновских показателей кубического отображения, столкновение двух солитонов и фрагмент множества Мандельброта. Рисунок кота и мыши, изучающих логистическое отображение, принадлежит проф. С. П. Кузнецову.

Авторы

Из предисловия к книге А. П. Кузнецова «Колебания, катастрофы, бифуркации, хаос»

Вынесенные в заголовок этой книги термины — колебания, катастрофы, бифуркации, хаос — стали основными для современного междисциплинарного подхода, известного как нелинейная динамика. Их можно услышать среди математиков, физиков, химиков, биологов, специалистов по экономике. Эти термины не только образовали основу нового «интернационального» языка науки, но стали элементами фундаментальных представлений о природе.

К сожалению, схемы образования более консервативны, чем живая наука. Поэтому современные концепции проникают обычно лишь на вершину «пирамиды» образовательной системы. В этом случае трудно говорить о раннем воспитании мышления, основанного на идеях нелинейной динамики. По мнению чл.-корр. РАН Д.И. Трубецкого, возглавляющего авторский коллектив, такое мышление можно воспитать не только у студентов старших курсов, но и у младшекурсников, и даже учащихся средних школ. О возможности этого говорят успехи системы непрерывного образования, состоящей из лицея Колледжа прикладных наук и Высшего Колледжа прикладных наук (ныне факультет нелинейных процессов) Саратовского государственного университета.

Автор принимал активное участие в становлении этой системы непрерывного образования. Для учащихся лицея был разработан четырехлетний курс, в рамках которого представлены такие понятия, как оценки, методы размерностей, подобия и другие. На основе этого курса была подготовлена и издана книга «Как работают и думают физики». Настоящая же книга явилась итогом создания соответствующей системы знаний на базе нелинейной динамики уже для студентов университета.

Педагогический опыт учит, что мало познакомить молодых людей с новыми понятиями. Надо, чтобы сформировался «активный» багаж знаний и навыков работы. Этому можно научиться, лишь решая задачи. В этой книге представлено более 300 задач, которые были разработаны для факультета нелинейных процессов как четыре последовательные ступеньки «нелинейного» образования. Они основываются на четырех учебных курсах: «Нелинейные колебания», «Теория катастроф», «Динамические системы и бифуркации», «Динамический хаос». Подавляющее большинство задач оригинальны.

Создавая задачник по нелинейной динамике, нельзя игнорировать использование компьютеров. Изобретение компьютера — одно из наиболее значительных интеллектуальных событий XX века. Сейчас уже ясно, что

просто учить программированию, не решая задач, для которых характерно органичное использование компьютера, нельзя. Использование компьютера формирует новую сторону профессии ученого, которая дополняет традиционное деление на теоретиков и экспериментаторов. Успехи нелинейной динамики являются одним из наиболее ярких примеров синтеза математических, физических и компьютерных подходов. Поэтому каждую главу книги завершает подборка задач для решения с использованием компьютера. Все такие задачи имеют свое название. Подчеркну, что это задачи исследовательского характера, требующие соответствующей теоретической и компьютерной подготовки. В этом существенное отличие от компьютерных практикумов, в рамках которых студент фактически выполняет лабораторную работу на компьютере, не программируя сам в соответствии с логикой решения задачи.

Весьма существенной была необходимость глубокой взаимосвязи с курсом общей физики. Поэтому многие задачи имеют характерный для обычных физических задач антураж. Однако вопросы, которые ставятся, требуют решения в другом контексте, характерном именно для нелинейной динамики. Такой подход дал прекрасные результаты и обеспечил активность и заинтересованность студентов.

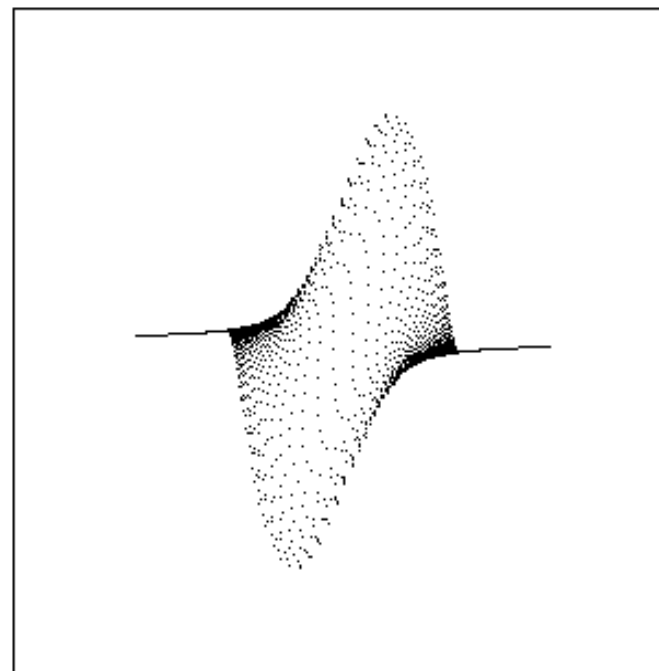
Ряд задач являются «информационными», т.е. не просто содержат собственно условие, но и несут новую информацию, иногда опережающую лекционный материал, а иногда и совершенно новую. Это, по моему мнению, очень важно, поскольку услышать новую информацию, механически записывая лекцию или усвоить ее, интенсивно решая задачи, — существенно разные вещи. Думается, что такой подход весьма перспективен. Его развитие может дать большие резервы учебного времени, которого всегда не хватает в рамках традиционных учебных планов.

Несколько задач своим появлением обязаны научным исследованиям, проводимым в Саратовском филиале Института радиотехники и электроники РАН. Особенно это относится к задачам для компьютерного решения в главах «Бифуркации» и «Хаос». Структура же задачника обязана этим исследованиям еще в большей степени. Именно благодаря им понятия типичности, коразмерности, случая общего положения, универсальности приобретают статус общих для всей нелинейной теории. Эти понятия появляются очень рано и «отрабатываются» с помощью на первый взгляд привычных задач по физике и математике (начало главы «Катастрофы»).

А. П. Кузнецов

Глава 1

Нелинейные колебания



Линейность и нелинейность. Нелинейные элементы

1. Считая, что в описанных ниже системах нелинейность является слабой, представьте их уравнения движения в форме осциллятора с нелинейностью степени n

$$\ddot{x} + \omega_0^2 (x + \mu x^n) = 0.$$

Определите в каждом случае константы μ и n .

- Массивное колесо с моментом инерции I может вращаться вокруг оси, проходящей через центр колеса (рис. 1). На ободе колеса укреплен груз массы m на расстоянии R от оси.

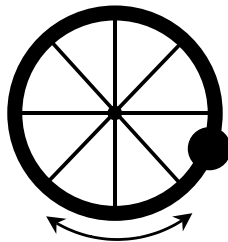


Рис. 1

- Сосуд объемом $2V_0$ разделен подвижным поршнем площади S на две равные части (рис. 2). Начальное давление газа p_0 . При колебаниях поршня процесс в газе считать адиабатическим. Масса поршня равна m .

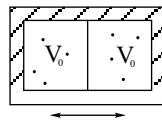


Рис. 2

- Резиновый жгут натянут с силой F . Посередине жгута прикреплен шарик массы m (рис. 3). Шарик может совершать лишь поперечные колебания. Жгут подчиняется закону Гука, его длина в ненатянутом

состоянии l_0 , коэффициент жесткости k . Колебания происходят в невесомости.

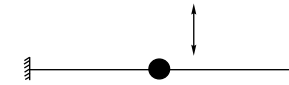


Рис. 3

- 2. Небольшой грузик массы m прикреплен к концу легкой пружины, вращающейся в невесомости вокруг другого ее конца с угловой скоростью ω , и совершает малые радиальные колебания около положения равновесия (рис. 4).

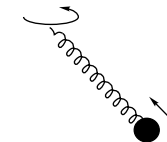


Рис. 4

Длина недеформированной пружины l_0 . Покажите, что в рамках модели линейной пружины с коэффициентом жесткости k такое поведение системы можно описать лишь при не очень больших значениях частоты вращения. Найдите критическую частоту ω_c , при которой линейная модель полностью теряет смысл. Покажите, что учет нелинейности пружины позволяет дать описание поведения системы и при $\omega \geq \omega_c$. Считайте, что зависимость упругой силы от деформации имеет вид $F = kx + cx^3$, где k и c — положительные коэффициенты. (Указание. Определите положение равновесия системы графическим методом.)

- 3. Шарик массы m подвешен в поле тяжести на пружине, зависимость упругой силы которой от деформации имеет вид $F = kx + cx^3$, где k и c — положительные коэффициенты. Получите уравнение, описывающее колебания шарика около положения равновесия и покажите, что оно содержит как кубическую, так и квадратичную нелинейности. Выясните условия, при которых свойства пружины линейны и колебания также линейны; свойства пружины нелинейны, а колебания линейны; колебания нелинейны.

4. Для описания динамики популяции в 1838 году Ферхюльст предложил следующую модель:

$$\frac{dN}{dt} = aN - bN^2.$$

Здесь N — численность популяции, a и b — коэффициенты. Найдите решение этого уравнения и постройте график зависимости $N(t)$. Начальное число особей равно N_0 . Покажите, что если начальное число особей невелико, то можно выделить «линейную» стадию процесса, на которой исходное дифференциальное уравнение заменяется соответствующим линейным. По какому закону изменяется число особей N на линейной стадии? Через какое характерное время начнут сказываться нелинейные эффекты? К чему приведет воздействие нелинейности по истечении достаточно большого времени? Используя полученные результаты, дайте интерпретацию коэффициентам a и b .

5. Конденсатор с нелинейной характеристикой $q = CU + aU^2$ замкнут на резистор с сопротивлением R . Получите зависимость напряжения на конденсаторе от времени, если его начальное значение равно U_0 . Оцените характерное время τ , в течение которого существенны нелинейные эффекты. Найдите закон изменения напряжения на линейной стадии процесса разряда конденсатора.

6. Получите дифференциальное уравнение, описывающее процессы в колебательном контуре, образованном емкостью C и катушкой с нелинейной индуктивностью. Магнитный поток Φ , пронизывающий катушку, связан с током I соотношением $\Phi = LI + kI^3$.

7. Проявляет ли парамагнетик нелинейные свойства во внешнем магнитном поле? Если да, то какова природа нелинейности?

8. В соленоид с поперечным сечением S и индуктивностью L вставляют ферромагнитный сердечник. Получите выражение для потока, пронизывающего соленоид, в приближении слабой нелинейности в виде ряда, содержащего линейный и кубичный по току члены. Считайте, что ферромагнетик описывается моделью Вейса, в рамках которой нормированная намагниченность $\eta = M/M_0$ связана с магнитным полем H соотношением

$$\text{th} \eta = \frac{T}{T_c} \eta - \frac{\mu_B}{kT} \cdot H.$$

Здесь T — температура, μ_B, k, M_0, T_c — постоянные коэффициенты, причем T_c представляет собой температуру в точке Кюри. Ферромагнетик плотно входит в соленоид, температура среды выше точки Кюри. Покажите, что

при приближении температуры к точке Кюри и линейная модель, и модель слабой нелинейности оказываются несостоятельными. (Указание. Следует искать решение уравнения Вейса $\eta = \eta(H)$ в виде соответствующего ряда по H .)

Зависимость периода нелинейных колебаний от амплитуды

9. На рис. 5 изображены три варианта симметричной потенциальной ямы, характеризующихся одним и тем же периодом линейных колебаний T . Пунктир соответствует закону $U = kx^2$. Возрастает или убывает период колебаний с ростом амплитуды при движении частицы в двух других ямах?

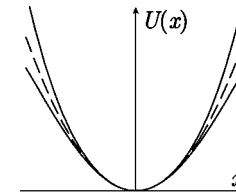


Рис. 5

10. Определите зависимость периода колебаний от амплитуды при движении частицы массы m в потенциальной яме вида $U(x) = U_0 \text{tg}^2 \alpha x$, постройте соответствующий график и нарисуйте фазовый портрет осциллятора. Найдите период линейных колебаний и укажите его значение на графике. С какими особенностями рассматриваемой потенциальной ямы связано то, что с ростом амплитуды период колебания уменьшается по сравнению со значением, предсказанным линейной теорией?

11. Решите задачу, аналогичную предыдущей, для потенциала $U(x) = U_0 \text{th}^2 \alpha x$.

12. Постройте фазовый портрет осциллятора с потенциальной энергией вида $U(x) = ax^2 + b/x^2$ и найдите его период колебаний.

13. Исследуйте колебания материальной точки массы m в потенциальной яме вида $U(x) = k|x|^n$. Определите период колебаний с точностью до константы. Покажите, что для $n = 2$ и малые и большие колебания

изохронны. Покажите, что для $n \neq 2$ как большие, так и малые колебания неизохронны. Определите для $n \neq 2$ характер зависимости периода колебаний от амплитуды при её стремлении к нулю.

14. Опишите, как зависит период колебаний от амплитуды для систем, представленных в задаче 1. Для случая в) укажите значения параметров, при которых период колебаний стремится к бесконечности при уменьшении амплитуды. По какому закону обращается в бесконечность период колебаний?

15. Проволочка изогнута так, что ее профиль задан функцией $y = \operatorname{ch} x$ — цепной линией. Ось x горизонтальна. По проволочке без трения скользит маленькая бусинка. Трение отсутствует. Получите «эффективный» потенциал $U(x)$, описывающий колебания бусинки. Возрастает или убывает период нелинейных колебаний с ростом амплитуды? Как должна быть изогнута проволочка, чтобы колебания были изохронными?

16. Посередине между двумя идеально проводящими плоскостями, находящимися под нулевым потенциалом, расположена сетка, находящаяся под положительным потенциалом V_0 . Расстояние между плоскостями $2d$. В систему помещается электрон с зарядом $-e$ и массой m . Построить фазовый портрет системы. Найти зависимость периода колебаний от энергии и построить ее график. Поле считается однородным, а сетка — проницаемой для электрона. Считать, что, попав на сплошной электрод, заряд оседает на нем.

17. Массивная сфера радиуса $2R$ состоит из двух частей. Внутренняя имеет радиус R и плотность ρ , внешняя — плотность 2ρ . Вдоль диаметра сферы просверлен тонкий канал. В канал помещается тело массы m , которое можно считать материальной точкой. Найти зависимость силы, действующей на тело, и потенциальной энергии от координаты. Построить фазовый портрет, найти зависимость периода колебаний и построить его график. (Указание: подобрать простую аппроксимацию зависимости силы от расстояния во внешней области сферы.)

Особенности спектров нелинейных систем

18. Нелинейный элемент описывается квадратичной вольтамперной характеристикой $I = aU + bU^2$. Напряжение на элементе изменяется по следующим законам:

- $U = U_0 \cos(\omega t)$,

- $U = U_1 \cos(\omega_1 t) + U_2 \cos(\omega_2 t)$,
- $U = U_1 \cos(\omega_1 t) + U_2 \sin(\omega_2 t)$,
- $U = U_1 \cos(\omega_1 t) + U_2 \cos(\omega_2 t) + U_3 \cos(\omega_3 t)$.

Какие частоты присутствуют в спектре тока?

19. Нелинейная пружина одним концом прикреплена к стенке (рис. 6). Второй конец пружины перемещают вдоль горизонтальной оси по закону $x = x_0 \cos(\omega t)$. Определите спектр силы, действующей на стенку. Пружина невесома, сила упругости F зависит от координаты x по закону $F = kx + cx^3$. Сколько будет компонент в спектре, если координата изменяется по закону $x = x_1 \cos(\omega t) + x_2 \cos(2\omega t)$?

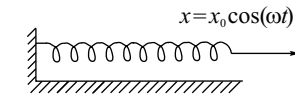


Рис. 6

20. На обложке журнала “Scientific American” за июль 1963 года изображена эффектная фотография, на которой показан пучок красного цвета с длиной волны $6940 \text{ \AA}$, падающий на кристалл. С противоположной стороны кристалла выходит пучок синего цвета с длиной волны $3470 \text{ \AA}$. Каков характер нелинейности, которая приводит к подобному преобразованию света?

21. В книге Ф. Крауфорда «Волны» описан следующий опыт. Возьмем два камертона, соответствующие двум нотам с частотами 440 Гц и 523 Гц. Возбудив их, можно услышать не только две эти ноты, но и колебание, близкое к частоте некоторой третьей ноты. Частота третьей ноты 349 Гц. Объяснение этого эффекта состоит в нелинейности уха. Каков характер нелинейности, проявившейся в этом опыте?

22. Можно ли изготовить радиоприемник, содержащий только линейные элементы? Является ли нелинейным элементом громкоговоритель? Может ли быть электрический звонок линейным элементом?

23. Вольтамперная характеристика некоторого элемента имеет вид

$$I = \begin{cases} 0, & U < 0, \\ U/R, & U \geq 0. \end{cases}$$

На элемент подано напряжение $U = U_0 \cos(\Omega t)$. Определите спектр тока. По какому закону спадают с ростом частоты ω далекие Фурье-компоненты тока? С какими особенностями нелинейного преобразования связан этот закон?

24. Грузик массы m прикреплен к пружине жесткости k и может двигаться по горизонтальной плоскости без трения (рис. 7).

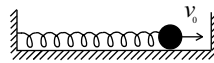


Рис. 7

Грузику ударом сообщают скорость v_0 . Расстояние от грузика до стенки l , удары о стенку абсолютно упругие. Исследуйте зависимость спектра колебаний системы от величины v_0 . По какому закону в нелинейном режиме колебаний спадают с ростом частоты ω далекие Фурье-компоненты? С какими особенностями нелинейности системы связан этот закон?

Мультистабильность и гистерезис

25. На рис. 8 показана система, представляющая собой маятник в верхнем положении равновесия, прикрепленный к пружине. Покажите, что если пружина линейна и ее коэффициент жесткости k невелик, то положение равновесия неустойчиво. Покажите, что если пружина нелинейная, то в системе возможна бистабильность — реализуются два положения устойчивого равновесия. Считайте, что нелинейность пружины описывается соотношением $F = kx + cx^3$, где k и c — положительные коэффициенты, а угол отклонения маятника от вертикали мал. Длина стержня l , масса шарика m . (Указание. Получите в явном виде зависимость потенциальной энергии маятника от координаты x .)

26. В системе, описанной в предыдущей задаче, точка прикрепления пружины C может перемещаться вдоль горизонтали влево-вправо. Изобразите график зависимости деформации пружины x , отвечающей положениям равновесия, от величины смещения точки прикрепления пружины x_0 . Опишите трансформации графика зависимости потенциальной энергии $U(x)$ при вариации x_0 . Обсудите возможность гистерезиса в системе.

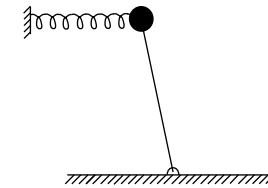


Рис. 8

27. На рис. 9 показана вольтамперная характеристика полупроводникового радиотехнического элемента — туннельного диода. Такой диод включен в цепь, содержащую регулируемую э.д.с. $\mathcal{E}$ с внутренним сопротивлением R . Графически решив уравнение, соответствующее закону Ома, покажите, что существуют такие значения $\mathcal{E}$ и R , при которых в системе реализуется бистабильность. Рассмотрите эту же задачу аналитически, используя кубическую аппроксимацию вольтамперной характеристики $I = a(U - U_0)^3 - b(U - U_0) + c$, где a , b и c — коэффициенты. Покажите, что при вариации э.д.с. бистабильность возможна лишь при выполнении условия $bR > 1$.

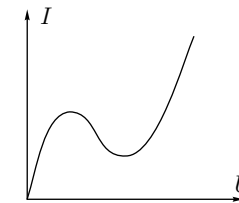


Рис. 9

28. Для модели ферромагнетика Вейса постройте графики зависимости намагниченности образца M от внешнего поля H . Покажите, что эти графики имеют качественно разный вид при температуре T большей и меньшей точки Кюри. Обсудите возможность мультистабильности и гистерезиса в системе. Свяжите Ваши рассуждения с известной Вам информацией о поведении ферромагнетиков.

29. Резонатор Фабри—Перо, представляющий собой два плоскопараллельных полупрозрачных зеркала, заполнен средой с нелинейным показате-

телем преломления (рис. 10). Свойства нелинейности таковы, что полный набег фазы волны между зеркалами зависит от интенсивности света по формуле $\varphi = \varphi_0 + \alpha I$, где φ_0 и α — константы, I — интенсивность выходящего излучения. Используя известное в оптике соотношение

$$I = \frac{\alpha I_0}{1 + b \sin^2(\varphi/2)},$$

где I_0 — интенсивность на входе в интерферометр, a и b — константы, покажите, что в системе существует мультистабильность. Для этого постройте график зависимости интенсивности света на выходе I от интенсивности на входе I_0 . Покажите на полученном графике петли гистерезиса.

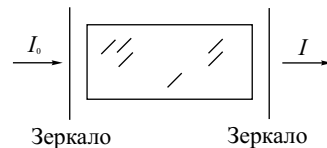


Рис. 10

Динамические системы. Консервативные и диссипативные системы

30. Найдите матрицу эволюции для гармонического осциллятора, позволяющую определить вектор-столбец, составленный из величин x и $\dot{x}$, в любой момент времени по его начальному значению. Вычислите определитель этой матрицы и покажите, что рассматриваемая система является консервативной.

31. Представьте уравнение линейного осциллятора с затуханием в «стандартной» форме, отвечающей определению динамической системы. Покажите, что рассматриваемая система является диссипативной, для чего вычислите дивергенцию соответствующего векторного поля на фазовой плоскости.

32. Одной из первых систем, для которых был обнаружен динамический хаос, являлась простая модель тепловой конвекции в атмосфере,

исследованная Э. Лоренцем (1963 г.):

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x), \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= xy - bz.\end{aligned}$$

Здесь σ, r, b — параметры. Установите значения параметров, при которых модель Лоренца является диссипативной.

33. Простейший генератор электромагнитных колебаний, содержащий электронную лампу, описывается уравнением Ван-дер-Поля

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = 0.$$

Представьте это уравнение в «стандартной» форме. Укажите области в фазовом пространстве, для которых имеет место сжатие фазового объема. Что можно сказать об остальных областях?

Фазовые портреты нелинейных систем

34. Шарик массы m может колебаться в невесомости на пружине, зависимость упругой силы которой от деформации имеет вид $F = kx + cx^3$, где k и c — положительные коэффициенты. Постройте фазовый портрет системы. В чем его отличие от фазового портрета соответствующей линейной системы? Укажите область на фазовой плоскости, в пределах которой систему можно считать линейной.

35. Найдите уравнение фазовых траекторий для колебательного контура, составленного из конденсатора емкости C и нелинейной индуктивности, для которой зависимость магнитного потока от тока I дается соотношением $\Phi = LI + kI^3$. Постройте соответствующий фазовый портрет. (Указание. Найдите выражение для энергии, запасенной индуктивностью.)

36. Небольшое тело массы m может скользить без трения по горизонтальному стержню (рис. 11). Тело прикреплено пружиной жесткости k к точке O , находящейся на расстоянии l от стержня. Длина пружины в нерастянутом состоянии l_0 , причем $l_0 > l$. Найдите положения равновесия и соответствующие им значения потенциальной энергии. Постройте график функции $U(x)$, дающий зависимость потенциальной энергии от координаты тела, и с его помощью определите, какие из положений равновесия устойчивы. Постройте фазовый портрет системы. Укажите характерные элементы фазового портрета: особые точки, типичные траектории, сепаратрисы.

Напишите уравнение сепаратрисы в явной форме. Используя график потенциальной энергии, опишите поведение тела, отвечающее перечисленным элементам фазового портрета.

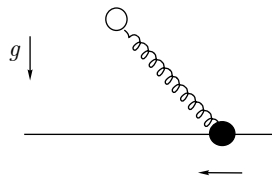


Рис. 11

37. Молекула может совершать колебательные движения в поле, заданном потенциалом Ленарда-Джонса

$$U(r) = 4a \left[\left(\frac{b}{r} \right)^{12} - \left(\frac{b}{r} \right)^6 \right].$$

Постройте фазовый портрет системы и проведите его исследование по схеме, описанной в предыдущей задаче. Масса молекулы m , параметры a и b считайте известными. Какую физическую интерпретацию можно дать для движения по сепаратрисе?

38. Шарик массы m , несущий заряд q , может без трения скользить по непроводящей спице. Спица проходит через центры двух неподвижных колец перпендикулярно их плоскости (рис. 12). Кольца несут заряды противоположных знаков $-Q$ и Q и расположены на расстоянии $2a$ друг от друга. Радиусы колец R . Постройте фазовый портрет системы.

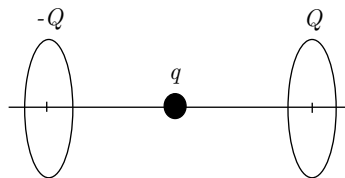


Рис. 12

39. На рис. 13 показан график функции $U(x)$. Изобразите соответствующий ему фазовый портрет консервативной системы.

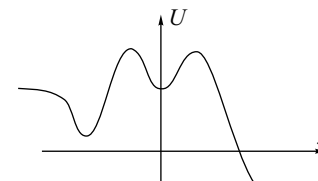


Рис. 13

40. На рис. 14 показан фазовый портрет системы. Изобразите соответствующий ему график функции $U(x)$.

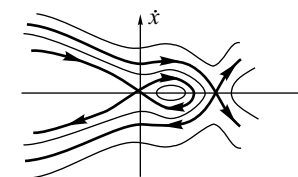


Рис. 14

41. Частица движется в потенциальной яме $U(x)$. На фазовой плоскости представлена система фазовых траекторий, для которых полные энергии отличаются на малую величину ΔE . Оцените расстояние между точками, в которых соседние траектории пересекают ось x . Рассмотрите два случая: когда обе траектории являются типичными и когда одна из них является сепаратрисой. Сгущаются или разрежаются фазовые траектории при приближении к сепаратрисе?

42. На рис. 15 показаны три фазовые траектории. Одна из них относится к консервативной системе. Какая из двух остальных может относиться к этой же системе при включении небольшой диссипации? Ответ обоснуйте.

43. Частица массы m движется в потенциальной яме $U(x)$ по некоторой типичной траектории, причем ее координата изменяется по закону $x(t)$. В момент времени, когда координата частицы равна x_0 , а скорость — нулю, в системе появляется очень небольшое затухание. Сила сопротивления пропорциональна скорости с известным коэффициентом γ . Покажите, что благодаря затуханию частица не вернется в точку x_0 , а пройдет от нее на

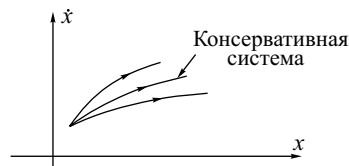


Рис. 15

расстоянии порядка

$$\Delta x \approx \frac{\gamma \int_0^T \dot{x}^2(t) dt}{U'(x_0)}.$$

Проверьте вашу оценку для случая линейной системы, когда $U(x) = kx^2/2$. Изобразите траектории частицы без затухания и с затуханием на фазовой плоскости.

44. На рис. 16 изображена петля сепаратрисы некоторой консервативной системы. Изобразите вид сепаратрисы при включении небольшой диссипации. (Указание. Восстановите вид функции $U(x)$ и выясните характер движения и его модификацию при включении диссипации для каждой из ветвей сепаратрисы.)

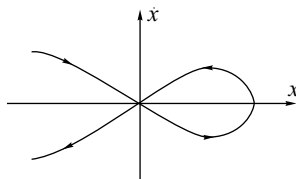


Рис. 16

45. В системе, описанной в задаче 36, имеется затухание, причем сила сопротивления, действующая на шарик, пропорциональна его скорости с известным коэффициентом γ . Изменятся ли при введении диссипации координаты положений равновесия? Найдите значение параметра затухания γ_0 , при котором происходит изменение типа устойчивых неподвижных точек. Постройте фазовый портрет системы для случая $\gamma < \gamma_0$. Сколько

аттракторов имеет система? Заштрихуйте на отдельном рисунке на фазовой плоскости соответствующие бассейны притяжения. Обсудите роль сепаратрис с точки зрения определения бассейнов притяжения.

Нелинейный осциллятор. Приближение слабой нелинейности

46. Квадратная рамка, по которой течет ток I , может вращаться без трения вокруг оси OO' (рис. 17). Рамка помещена в однородное магнитное поле с индукцией B , перпендикулярное оси рамки. Покажите, что колебания рамки описываются уравнением математического маятника. Масса рамки m .

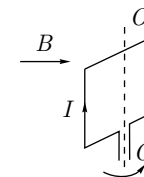


Рис. 17

47. Приведите приближенно задачу о движении частицы массы m в потенциальной яме вида $U(x) = U_0 \operatorname{tg}^2(ax)$ к модели осциллятора с кубической нелинейностью. В рамках этой модели найдите зависимость периода колебаний от частоты. Сравните полученный результат с точным (задача 10), построив соответствующую таблицу.

48. Шарик массы m , несущий положительный заряд q , может без трения скользить по непроводящей спице (рис. 18).

Спица проходит через центр неподвижного кольца перпендикулярно его плоскости. Кольцо несет отрицательный заряд $-Q$. Радиус кольца равен R . Представьте эту систему в виде модели нелинейного осциллятора с кубической нелинейностью. Какие особенности динамики системы такая модель передает верно, а какие нет? Оцените относительное изменение частоты колебаний по сравнению с линейным случаем, если амплитуда колебаний равна $R/3$.

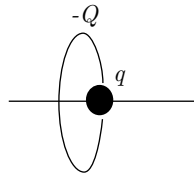


Рис. 18

49. С помощью модели осциллятора с кубической нелинейностью оцените угловую амплитуду колебаний математического маятника, для которой период на 1 % отличается от значения, предсказанного линейной теорией.

50. С помощью модели осциллятора с кубической нелинейностью оцените отношение первой и третьей гармоник в спектре математического маятника, совершающего колебания с угловыми амплитудами $\pi/6$ и $\pi/2$.

51. Найдите поправку к частоте линейных колебаний для математического маятника. Покажите, что в первом порядке по квадрату амплитуды полученная оценка согласуется с известным результатом, отвечающим аппроксимации математического маятника осциллятором с кубической нелинейностью. Оцените период колебаний с угловой амплитудой $\pi/2$.

Сравните найденное значение с точным и оценкой для осциллятора с кубической нелинейностью. (Указание. Используйте формулу для разложения функции $\sin(x \sin \theta)$ в ряд по функциям Бесселя.)

52. Маятник в верхнем положении равновесия прикреплен к нелинейной пружине (см. задачу 25). Нелинейность пружины описывается соотношением $F = kx + cx^3$, где k и c — положительные коэффициенты. Угол отклонения маятника от вертикали мал, длина стержня l , масса шарика m . Какой из универсальных моделей нелинейного осциллятора следует пользоваться при $lk > mg$ и при $lk < mg$? Получите уравнения соответствующих моделей в явном виде, оцените поправку к частоте и величину смещения центра колебаний относительно положения равновесия. Амплитуда колебаний A .

53. Молекула может совершать колебательные движения в поле, заданном потенциалом Ленарда—Джонса. Представьте такую систему в виде модели нелинейного осциллятора с квадратичной нелинейностью. Используя эту модель, оцените увеличение расстояния между молекулами, совершающими колебания с амплитудой a . На основании полученной оценки объясните механизм теплового расширения твердых тел.

54. Найдите поправку к частоте линейных колебаний для осциллятора, описываемого уравнением

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \mu x^5 = 0.$$

Нелинейный осциллятор. Движение вблизи сепаратрисы

55. Массивное колесо радиуса $R = 30$ см массы $M = 1$ кг может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через центр колеса. На ободе колеса укреплен груз массы $m = 100$ г. Колесо находится в покое. Какую линейную скорость необходимо сообщить колесу, чтобы возникло движение, соответствующее сепаратрисе? Масса колеса сосредоточена в его ободе, трение отсутствует.

56. Для математического маятника $\ddot{x} + \sin x = 0$ покажите, что движение по сепаратрисе дается соотношениями $x = -\pi + 4 \operatorname{arctg} e^t$, $v = 2/\operatorname{ch} t$. Используя этот результат, найдите спектр скорости ротационных и колебательных движений вблизи сепаратрисы. Для этого считайте, что закон изменения скорости дается в виде ряда приведенных выше импульсов, отстоящих на период T .

57. Математический маятник длины $l = 1$ м отклонили на угол $\alpha = 1^\circ$ от верхнего положения равновесия и отпустили. Оцените период возникших колебаний. Для этого найдите закон изменения координаты от времени вблизи положения неустойчивого равновесия в линейном приближении, получите его асимптотику и «сшейте» полученное решение с законом изменения координаты от времени, который соответствует движению по сепаратрисе.

58. Математический маятник длины $l = 1$ м находится в верхнем положении равновесия. Маятнику сообщили начальную скорость $v_0 = 10^{-3}$ м/с. Оцените период колебаний. (Указание. Действуйте по аналогии с задачей оценки периода колебаний маятника, отклоненного на определенный угол.)

59. Для осциллятора с кубической нелинейностью, описываемого уравнением $\ddot{x} + x - x^3 = 0$, найдите закон изменения координаты и скорости, соответствующий движению по сепаратрисе.

60. Осциллятор с кубической нелинейностью, описываемый уравнением $\ddot{x} + x - x^3 = 0$, совершает колебательное движение вблизи сепаратрисы. Оцените период колебаний. Начальное значение координаты x_0 , а начальная скорость равна нулю.

61. Найдите приближенно спектр скорости для осциллятора с кубической нелинейностью, совершающего колебательное движение вблизи сепаратрисы.

Метод медленно меняющихся амплитуд

62. Покажите, что если $A(t)$ — комплексная амплитуда, соответствующая действительной переменной $x(t)$, определенной из $x = \frac{Ae^{i\omega_0 t} + \text{к.с.}}{2}$ при дополнительном условии $\dot{A}e^{i\omega_0 t} + \text{к.с.} = 0$, то справедливы следующие соотношения:

- $\dot{x} = i\omega_0 (A/2) \exp(i\omega_0 t) + \text{к.с.},$
- $\ddot{x} + \omega_0^2 x = i\omega_0 \dot{A} \exp(i\omega_0 t).$

63. Покажите, что для линейного осциллятора с затуханием $\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ уравнение для комплексной амплитуды имеет вид

$$\dot{A} + \alpha A = AA^* \exp(-2i\omega_0 t).$$

Запишите укороченное уравнение для амплитуды A в предположении о медленности ее изменения во времени и решите это уравнение. Сравните закон изменения координаты осциллятора от времени, полученный методом медленно меняющихся амплитуд, с точным.

64. Покажите, что укороченное уравнение для комплексной амплитуды в случае диссипативного осциллятора с кубической нелинейностью

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = 0$$

имеет вид $\dot{A} = -\alpha A + \frac{3}{8} \frac{i\beta}{\omega_0} A |A|^2$. Используя его, найдите уравнения для модуля a и фазы φ комплексной амплитуды $A = a \exp(i\varphi)$. Покажите, что в отсутствие диссипации полученные уравнения позволяют найти правильное выражение для поправки к частоте линейных колебаний.

65. Колебательный контур состоит из последовательно соединенных индуктивности L , емкости C и нелинейного резистора, характеризующегося вольт-амперной характеристикой $U = IR + kI^3$. Найдите закон изменения заряда на обкладках конденсатора с помощью метода медленно меняющихся амплитуд.

Быстрые и медленные движения в случае сильной диссипации

66. Для линейного колебательного контура, состоящего из последовательно соединенных индуктивности L , емкости C и резистора R , получите условие сильной диссипации в явной форме.

67. Линейный осциллятор с затуханием, находящийся в положении равновесия, получил ударом скорость v_0 . Найдите закон изменения координаты от времени и выполните в полученном соотношении предельный переход к случаю сильной диссипации. Постройте график зависимости координаты от времени и укажите на нем участки быстрого и медленного движения. Покажите, что закон изменения координаты на фазе быстрого движения может быть получен, если в исходном уравнении отбросить инерционный член, а на фазе медленного движения — если отбросить член, соответствующий упругой возвращающей силе.

68. Математическому маятнику длины l и массы m , находящемуся в покое в положении устойчивого равновесия в среде с сильной вязкостью (сопротивление пропорционально скорости), сообщили ударом большую скорость v_0 . Найдите зависимость угла отклонения маятника от времени. Оцените максимальный угол отклонения. (Указания. Выполните предварительно оценки, которые уточняют понятия «сильная вязкость» и «большая скорость» для данной задачи. Найдите решения, соответствующие фазам быстрого и медленного движений, постройте их суперпозицию и подчините ее начальным условиям.)

69. Получите решение, описывающее колебания осциллятора Дуффинга с сильным затуханием, при помощи метода многих масштабов. Сравните с результатами метода разделения быстрых и медленных движений.

Автоколебательные системы

70. В сосуд с поперечным сечением S_1 из крана с сечением S_2 поступает со скоростью V вода. Вода может выливаться через узкую сифонную трубку с поперечным сечением S_3 (рис. 19). Высота левого колена трубки равна h , а правого — H . Постройте график зависимости уровня воды в сосуде от времени и обоснуйте автоколебательный характер поведения системы. Найдите период установившихся автоколебаний. Считайте, что

скорость вытекания воды через трубку определяется формулой Торричелли.

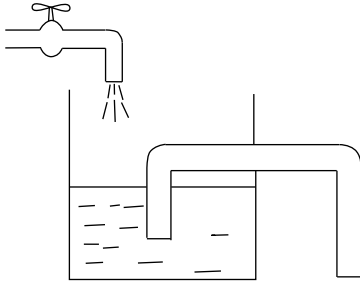


Рис. 19

71. Придумайте схему автогенератора, содержащую неоновую лампочку, э.д.с. E , резистор R , конденсатор C . Неоновая лампочка зажигается, если напряжение на ней превышает U_0 и гаснет, если оно близко к нулю. Найдите период колебаний генератора.

72. Если провести по струне скрипки смычком, то она зазвучит. Почему? К какому типу колебаний следует отнести такой процесс (вынужденные колебания, параметрические колебания, автоколебания)?

73. Прodelайте следующий эксперимент. Пустите в ванну воду из под крана. Внесите под струю воды шарик от пинг-понга. Пронаблюдайте поведение шарика. Проведите наблюдения для разных значений скорости струи, вытекающей из крана. Опишите поведение шарика на языке теории колебаний. Попробуйте объяснить поведение шарика.

74. Почему скрипит плохо смазанная дверь?

75. Почему гудят провода? (Указание. Гудение проводов является чисто механическим эффектом.)

76. Модифицированная модель «хищник-жертва» описывается уравнениями

$$\dot{N}_1 = \alpha N_1 - \frac{\beta N_1 N_2}{1 + AN_1} - BN_1^2,$$

$$\dot{N}_2 = -\gamma N_2 + \frac{\delta N_1 N_2}{1 + AN_1}.$$

Найдите состояния равновесия при различных значениях параметров и исследуйте их устойчивость. При каких условиях реализуются периодические автоколебания? Считайте, что все параметры и переменные могут принимать только положительные значения.

77. Найти условие самовозбуждения автоколебаний для простой модели гликолиза (Дж. Хиггинс, 1967) $\dot{x} = 1 - xy$, $\dot{y} = ay \left(x - \frac{1+b}{y+b} \right)$. Переменные x, y и параметры a, b считаются положительными.

Уравнения Ван-дер-Поля и Рэля

78. Каким свойством должна обладать вольт-амперная характеристика нелинейного элемента в схеме автогенератора, показанного на рис. 20, чтобы автоколебания описывались уравнением Ван-дер-Поля?

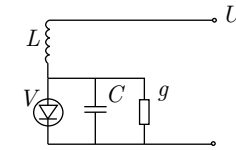


Рис. 20

79. На рис. 21 изображена полученная экспериментально вольт-амперная характеристика туннельного диода. В эксперименте измерены значения максимума и минимума тока I_1, I_2 и соответствующие значения напряжения V_1 и V_2 . На этом диоде собран автогенератор по схеме, приведённой на рис. 20. Параметры схемы L, C и g считайте известными. Найдите величину амплитуды напряжения установившихся квазигармонических автоколебаний на туннельном диоде. При каком условии автоколебания будут квазигармоническими? Пусть величина проводимости g может регулироваться. При каком значении g возникнут автоколебания? Чему равна максимально возможная амплитуда автоколебаний?

80. На ленте транспортера, движущегося с постоянной скоростью V , находится тело массы m , прикрепленное к пружине жесткости k (рис. 22). Зависимость силы трения от относительной скорости движения ленты и

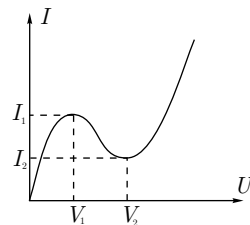


Рис. 21

транспортера при $v > 0$ дается формулой

$$f(v) = f_1 + \frac{f_2}{1 + v^2/u^2},$$

где f_1, f_2, u — постоянные коэффициенты. Масса груза m , коэффициент жесткости пружины k . Сопротивление воздуха очень мало. Найдите скорость транспортера V , при которой уравнение движения груза может быть приближенно приведено к уравнению Рэля. Оцените амплитуду квазигармонических автоколебаний груза. Оцените амплитуду колебаний, для которой справедливо уравнение Рэля.

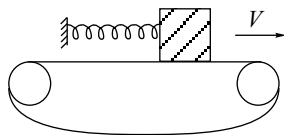


Рис. 22

81. Покажите, что для уравнения Ван-дер-Поля $\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = 0$ подстановка $x = (Ae^{it} + \text{к.с.})/2$ после усреднения приводит к действительному укороченному уравнению $\dot{A} = \frac{\lambda}{2}A - \frac{1}{8}A^3$. Получите его решение при $\lambda > 0$ и постройте соответствующий график.

82. Покажите, что решение укороченного уравнения Ван-дер-Поля в случае $\lambda < 0$ при больших временах отвечает экспоненциальному затуха-

нию. Соответствует ли множитель перед экспонентой начальной амплитуде колебаний? Почему?

83. В рамках метода медленно меняющихся амплитуд оцените время установления квазигармонических колебаний в системе, описываемой уравнением Ван-дер-Поля. Начальная амплитуда A_0 много меньше амплитуды установившихся колебаний. Как ведет себя время установления при приближении параметра к бифуркационному значению?

84. Для системы, описываемой уравнением Ван-дер-Поля—Дуффинга

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \beta x^3 = 0,$$

получите укороченное уравнение. Покажите, что оно соответствует обобщенному уравнению для бифуркации Андронова-Хопфа.

85. Напишите уравнение типа уравнения Ван-дер-Поля, в котором наблюдается субкритическая бифуркация Андронова-Хопфа.

Жесткое возникновение автоколебаний

86. Покажите, что уравнение $\ddot{x} - (\varepsilon + \mu\dot{x}^2 - \dot{x}^4)\dot{x} + x = 0$ приводится к традиционной модели автогенератора с жестким возбуждением $\ddot{x} - (\lambda + kx^2 - x^4)\dot{x} + x = 0$.

87. Приведите приближенно уравнение $\ddot{x} - (\varepsilon + \cos x)\dot{x} + x = 0$ к традиционной модели автогенератора с жестким возбуждением и найдите в этом приближении значение параметра ε , отвечающее жесткому возникновению предельного цикла.

88. Для модели автогенератора

$$\ddot{x} - (\lambda + kx^2 - x^4)\dot{x} + x = 0$$

укажите значения параметров, при которых возникающий жестким образом предельный цикл будет иметь заданный размер R_0 .

89. Для модели автогенератора с жестким возбуждением

$$\ddot{x} - (\lambda + kx^2 - x^4)\dot{x} + x = 0$$

изобразите разбиение k, λ плоскости на области, отвечающие различным возможными типами динамики. Изобразите фазовые портреты для каждой из областей. Укажите устойчивые и неустойчивые предельные множества.

90. Для той же модели постройте графики зависимости амплитуды колебаний от параметра λ для $k < 0$, $k = 0$ и $k > 0$. В каком случае наблюдается гистерезис? Покажите, что вблизи точки жесткого перехода зависимость амплитуды от параметра λ имеет корневой характер. На полученных графиках покажите пунктиром зависимость амплитуды неустойчивого предельного цикла от λ .

91. Постройте зависимости амплитуды автоколебаний от параметра k для $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ и $\lambda > 0$.

Релаксационные автоколебания

92. Исследуйте релаксационные колебания, описываемые уравнением Рэлея в форме, соответствующей малому параметру перед старшей производной, $\varepsilon \ddot{x} - (1 - \dot{x}^2) \dot{x} + x = 0$.

- Постройте линию медленных движений на фазовой плоскости и фазовый портрет.
- Найдите диапазон изменения координаты x и скорости $\dot{x}$ на участке медленных движений.
- Найдите связь между скоростью $\dot{x}$ и временем t на фазе медленных движений. Постройте график зависимости скорости от времени.
- Оцените период колебаний.

93. Используя результат предыдущей задачи, получите выражение для периода релаксационных колебаний для уравнения Рэлея в «стандартной» форме

$$\ddot{x} - (\lambda - \dot{x}^2) \dot{x} + x = 0.$$

94. Изобразите предельные циклы для автогенератора с жестким возбуждением, описываемого уравнением $\ddot{x} - (\varepsilon + \mu \dot{x}^2 - \dot{x}^4) \dot{x} + x = 0$, в случае релаксационных колебаний. Обсудите бифуркации циклов, возможные в этой системе.

95. На ленте транспортера, движущегося с постоянной скоростью V , находится тело массы m , прикрепленное к пружине жесткости k . Зависимость силы трения от относительной скорости движения груза и транспортера при $v > 0$ дается соотношением $f(v) = a - b \ln(1 + v^2/u^2)$, где

a, b, u — некоторые положительные константы. Коэффициент вязкого трения груза о воздух α . Найдите линию медленных движений и постройте фазовый портрет в случае релаксационных колебаний. Найдите диапазон изменения скорости и координаты груза в режиме релаксационных колебаний. Описываются ли эти колебания уравнением Рэлея?

Сечение Пуанкаре. Одномерные дискретные отображения

96. Дискретное отображение $x_{n+1} = f(x_n)$ имеет неподвижную точку x^* такую, что $f'(x^*) \neq 0$. Покажите, что поведение последовательности $y_n = x_n - x^*$ в малой окрестности этой точки соответствует сходящейся геометрической прогрессии, если $|f'(x^*)| < 1$, и расходящейся при $|f'(x^*)| > 1$.

97. Покажите, что отображение $x_{n+1} = (x_n + a/x_n)/2$ можно использовать для вычисления квадратного корня из числа a (такой способ применяли еще в древнем Вавилоне). Найдите первые пять членов последовательности x_n , порождаемой этим отображением при $a = 2$. Величину x_0 положите равной единице. Проиллюстрируйте решение задачи с помощью итерационной диаграммы. Покажите, что неподвижная точка этого отображения устойчива. Можно ли использовать отображение $x_{n+1} = a/x_n$?

98. Найдите неподвижные точки отображения $x_{n+1} = \varepsilon \log(1 + x_n)$ и исследуйте их устойчивость. Решение проиллюстрируйте итерационной диаграммой.

99. Используя укороченное уравнение Ван-дер-Поля, исследуйте его на устойчивость. Покажите, что соответствующее дискретное отображение имеет вид $x_{n+1} = \frac{x_n}{\sqrt{x_n^2(e^{2\pi\lambda} - 1)/4\lambda + 1}}$, и изобразите соответствующие итерационные диаграммы.

100. Получите отображение, соответствующее укороченному уравнению для колебательного контура с нелинейным резистором из задачи 65. Изобразите для него итерационную диаграмму.

101. Получите отображение, соответствующее укороченному уравнению для автогенератора с жестким возбуждением $\ddot{x} - (\lambda + kx^2 - x^4) \dot{x} + x = 0$, в случае $k = 0$.

102. Постройте итерационную диаграмму для одномерного отображения, отвечающего представленным на рис. 23 фазовому портрету системы и секущему лучу.

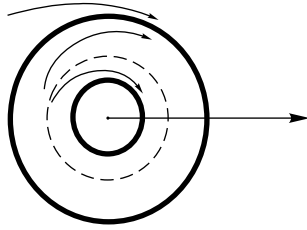


Рис. 23

103. Получите точечное отображение для триодного генератора Ван-дер-Поля в случае, когда анодно-сеточную характеристику лампы можно аппроксимировать ступенчатой функцией $i_a(u) = \begin{cases} I_0, & u > 0 \\ 0, & u < 0 \end{cases}$, и проанализируйте установление колебаний в генераторе.

Нелинейные колебания неавтономных систем. Синхронизация

104. Используя метод Ван-дер-Поля, получите укороченное уравнение, описывающее нелинейный резонанс в осцилляторе с кубической нелинейностью $\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = b \cos \omega t$, считая, что $\omega \approx \omega_0$ (основной резонанс). Найдите неподвижную точку укороченного уравнения и получите уравнение для резонансной кривой

$$\left[\left(\omega - \omega_0 + \frac{3}{8} \frac{\beta}{\omega_0} |A|^2 \right)^2 + \frac{\alpha^2}{4} \right] |A|^2 = \frac{b^2}{4\omega_0^2}.$$

105. При помощи метода многих масштабов получите укороченное уравнение для вынужденных колебаний осциллятора с квадратичной нелинейностью $\ddot{x} + 2\varepsilon\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x + \varepsilon x^2 = \varepsilon^2 f \cos \omega t$, где ε — малый параметр, при основном резонансе $\omega \approx \omega_0$. Найдите уравнение резонансной кривой. Сравните с результатами, полученными для осциллятора с кубической нелинейностью.

106. В осцилляторе, собственная частота которого зависит от времени в соответствии с уравнением Матьё $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 [1 + \varepsilon \cos(2\omega t)] x = 0$, при условии, что $\omega = \omega_0 + \Delta$, где Δ — малая величина, возможна

параметрическая неустойчивость. Считая, что $x = \text{Re}(A \exp i\omega t)$, получите соответствующее укороченное уравнение. Покажите, что в системе действительно возможна неустойчивость, и определите инкремент нарастающих колебаний. Найдите область на плоскости параметров Δ, ε , внутри которой наблюдается параметрическая неустойчивость.

107. Получите укороченное уравнение, описывающее параметрическую неустойчивость в осцилляторе с кубической нелинейностью

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 (1 + f \cos \omega t) x + \beta x^3 = 0.$$

108. Рассмотрите систему Ван-дер-Поля под гармоническим воздействием $\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = b \sin \Omega t$, положив $x = (A e^{i\Omega t} + \text{к.с.})/2$, получите укороченное уравнение

$$\dot{A} + i\Delta A = \frac{\lambda}{2} A - \frac{1}{8} |A|^2 A - \frac{b}{2}.$$

Здесь $\Delta = \Omega - 1$ — отстройка частоты внешнего воздействия от собственной; величина Ω близка к единице. Представьте это уравнение в декартовых координатах (x, y) , считая $A = x + iy$, и в полярных, считая $A = a \exp(i\varphi)$, где a — действительная амплитуда, φ — фаза колебаний.

109. Используя укороченное уравнение для системы Ван-дер-Поля под гармоническим воздействием, покажите, что в случае воздействия с малой амплитудой уравнения для амплитуды и фазы колебаний можно считать независимыми:

$$\dot{a} = \frac{\lambda}{2} - \frac{1}{8} a^3,$$

$$\dot{\varphi} = -\Delta + \varepsilon \sin \varphi,$$

где $\varepsilon = b/4\sqrt{\lambda}$. Обсудите эволюцию фазового портрета при фиксированных λ и b с ростом ε . Какой случай соответствует режимам захвата, а какой биениям? Укажите разграничительную линию (границу языка Арнольда) на плоскости безразмерных частоты Δ и амплитуды воздействия ε .

110. Проинтегрируйте уравнение $\dot{\varphi} = -\Delta + \varepsilon \sin \varphi$, описывающее фазовую синхронизацию. Обсудите его свойства с точки зрения этого явления.

Нелинейные колебания. Задачи для компьютерного исследования.

111. Фазовые портреты нелинейных систем. Постройте фазовые портреты перечисленных ниже систем. Для этого можно рекомендовать

следующий метод: выбранный фрагмент фазовой плоскости равномерно покрывается решеткой из точек. Затем исходные уравнения решаются вперед и назад во времени, пока соответствующие фазовые траектории не выйдут за границы области или не придут к предельному притягивающему множеству. Этот метод обеспечивает адекватное заполнение области траекториями.

Динамические системы для исследования.

- Осциллятор с кубической нелинейностью

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = 0.$$

- Осциллятор с квадратичной нелинейностью

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \omega_0^2 x + \gamma x^2 = 0.$$

- Осцилляторы из задач 36, 37, 38.

Обсудите вид фазовых портретов, характерные особенности этих портретов, их трансформации при вариации параметров, а также устройство бассейнов притяжения неподвижных точек.

112. Нелинейные преобразования сигналов и спектров. Исследуйте преобразование гармонического сигнала $x = A \cos \omega t$ нелинейным элементом, т.е. рассмотрите его преобразование $y = f(x)$ при различном выборе функции $f(x)$, например, $f(x) = a + bx$, x^2 , x^3 , $x^2 + x^3$, $\sin x$, xe^{-x^2} . Выберите подходящий шаг дискретизации времени и постройте графики зависимости входного и выходного сигнала от времени при разных значениях амплитуды A . Как трансформируется при увеличении амплитуды спектр выходного сигнала?

113. Математический маятник. Проведите следующее исследование уравнения математического маятника $\ddot{x} + \sin x = 0$.

- Создайте анимационную программу, демонстрирующую движение маятника.
- Постройте зависимость от времени координаты и скорости. Пронаблюдайте колебания с малой амплитудой и движение вблизи сепаратрисы. Для случая умеренных колебаний постройте другим цветом график, отвечающий решению, полученному методом медленно меняющихся амплитуд, и сравните его с точным. То же для движения вблизи сепаратрисы.

- Постройте график зависимости периода колебаний от амплитуды. Для этого используйте точное выражение через эллиптический интеграл либо метод Эно, в рамках которого исходное уравнение численно решается до начала повторений. Постройте соответствующий график и сравните его с выражением в приближении слабой нелинейности.
- Постройте спектр Фурье скорости колебаний и наблюдайте его эволюцию с ростом амплитуды: от малых колебаний до движения вблизи сепаратрисы. В последнем случае сравните численный результат с соответствующим аналитическим решением (задача 56).
- Постройте фазовый портрет консервативного и диссипативного осцилляторов. Пронаблюдайте его эволюцию с ростом параметра диссипации.

114. Нелинейный резонанс. Постройте систему резонансных кривых для нелинейного осциллятора с кубической нелинейностью $\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = b \cos \omega t$ (см. задачу 103) для различных значений параметра диссипации. Покажите другим цветом линию $\omega = \omega_0 - \frac{3}{8} \frac{\beta}{\omega_0} |A|^2$. Обсудите возможность гистерезиса. Чем отличаются случаи положительных и отрицательных значений параметров нелинейности β ? Решая численно исходное уравнение, получите фазовый портрет на плоскости $(x, \dot{x})$, отвечающий колебаниям осциллятора точно на частоте внешней силы. Параметры осциллятора подберите самостоятельно. Обратите внимание на трансформацию фазового портрета при изменении параметров, не описывающуюся в рамках приближения, для которого получено уравнение резонансной кривой. (Можно рекомендовать построить рядом истинный фазовый портрет установившегося движения и портрет, который восстанавливается из метода медленно меняющихся амплитуд.)

115. Система Ван-дер-Поля. Для осциллятора Ван-дер-Поля $\ddot{x} - (\lambda - x^2) \dot{x} + x = 0$ постройте для различных значений параметра λ графики зависимостей $x(t)$. Нанесите другим цветом приближенное решение, полученное методом медленно меняющихся амплитуд, и сравните его с точным (задача 81). Постройте предельные циклы и наблюдайте их эволюцию с ростом λ . Отметьте существование релаксационных колебаний.

116. Жесткое возникновение автоколебаний. Для модели автогенератора с жестким возбуждением $\ddot{x} - (\lambda + kx^2 - x^4) \dot{x} + x = 0$ постройте все характерные фазовые портреты на (λ, k) плоскости, на которую предварительно нанесите линии прямой и обратной бифуркаций Андронова—

Хопфа и рождения цикла из сгущения фазовых траекторий, полученную с помощью метода медленно меняющихся амплитуд (задача 89). Обсудите трансформации фазового портрета. Не ограничивайте исследование областью малых значений параметров. В чем особенности поведения системы вне её?

117. Фазовая синхронизация. Постройте семейство функций, являющихся решениями канонического уравнения $\dot{\varphi} = -\Delta + \varepsilon \sin \varphi$, описывающего синхронизацию, для различных начальных значений фазы (см. задачи 108, 109). Варьируя ε , наблюдайте фазовые захваты и их превращение в режимы биений. Постройте спектры колебаний величины $x(t) = \cos(\Omega t + \varphi(t))$. Обсудите их устройство в режиме биений. Определите частоту биений.

118. Метод дискретных (точечных) отображений. С помощью метода сечений Пуанкаре постройте одномерные отображения для двумерных потоков. Выберите прямую линию или луч, пересечение с которым определит сечение Пуанкаре. (Для этого может понадобиться предварительно построить аттрактор на фазовой плоскости.) Изучите трансформацию вида одномерного отображения при вариации параметров. Для полученного численно отображения постройте несколько итерационных диаграмм, характеризующих типичные режимы динамики.

Системы для исследования.

- Уравнение Ван-дер-Поля:

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = 0.$$

- Автогенератор с жестким возбуждением:

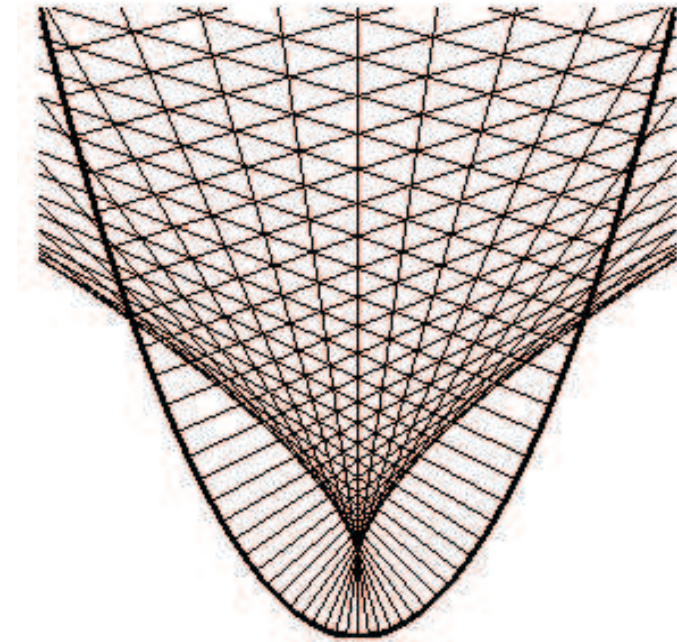
$$\ddot{x} - (\lambda + kx^2 - x^4)\dot{x} + x = 0.$$

- Трехпараметрическая модель автогенератора с жестким возбуждением:

$$\ddot{x} - (\lambda + kx^2 + px^4 - x^6)\dot{x} + x = 0.$$

Глава 2

Катастрофы



Ряд Тейлора и модели

1. Маленькое тело массы m движется по плоской кривой $y = f(x)$. Какая математическая аппроксимация этой кривой достаточна, чтобы верно задать скорость тела в некоторой точке кривой? Силы, действующие на тело в этой точке?

2. Эллипс задан уравнением $y^2/a^2 + x^2/b^2 = 1$. Получите аппроксимацию эллипса кубической параболой и параболой четвертой степени в окрестности точки $x = 0$. С помощью этой аппроксимации определите ординату точки пересечения эллипса с осью абсцисс и сравните полученный результат с точным значением.

3. Свойства некоторой системы определяются функцией

$$f(x) = Ax + Bx^2 + C \sin x + Dx \cos x + E \operatorname{sh} x,$$

зависящей от пяти параметров. Найдите число существенных параметров, которые необходимы при использовании аппроксимации с помощью двух первых членов ряда Тейлора. Что означает свойство «полноты» аппроксимирующей «модельной» функции в применении к обсуждаемой задаче?

4. Точки A и B расположены на фиксированном расстоянии друг от друга. Точки соединены некоторым путем, заданным гладкой функцией $f(x)$. Используя разложение функции $f(x)$ в ряд Тейлора, постройте систему моделей, позволяющих охарактеризовать путь из точки A в точку B . Каково число параметров этих моделей? Расстояние AB примите за единицу.

5. Линза из материала с показателем преломления n образована плоской поверхностью и поверхностью, полученной вращением вокруг оси y некоторой четной функции $y(x)$ с единственным квадратичным экстремумом, расположенным в точке $x = 0$. Обоснуйте универсальные свойства такой фокусирующей системы.

6. Консервативный осциллятор характеризуется некоторой потенциальной функцией $U(x)$. Сколько членов ряда Тейлора надо учесть в разложении функции $U(x)$, чтобы получить существенно двухпараметрическую модель консервативного нелинейного осциллятора? Постройте такую модель.

7. Используя примеры, обсудите понятие универсальности применительно к модели осциллятора с кубической нелинейностью.

8. Обсудите, что означает свойство «полноты» модели, содержащей параметры, на примере автогенератора с жестким возбуждением.

9. Отображение $x_{n+1} = f(x_n)$ задано некоторой гладкой функцией $f(x)$. Используя разложение функции $f(x)$ в ряд Тейлора, а также замены переменных и параметров, получите одно- и двухпараметрические универсальные модельные отображения.

Понятия типичности и коразмерности

10. Кубическое уравнение $x^3 + px + q = 0$ может иметь три, два или один действительный корень. Изобразите плоскость параметров p, q , разбитую на соответствующие области и исследуйте вопрос о типичности и коразмерности каждой из возможных ситуаций.

11. Как известно, космическая станция в поле массивной звезды может двигаться по эллипсу, параболе или гиперболе. Какие из этих траекторий относятся к случаям общего положения, а какие — к вырожденным?

12. Как могут располагаться друг относительно друга плоская кривая и касающаяся ее окружность? Какие из этих вариантов соответствуют случаям общего положения, а какие представляют собой вырожденные ситуации? Какова коразмерность последних?

13. Какие возможны ситуации взаимного расположения тора и плоскости? Какие из них соответствуют случаям общего положения, а какие являются вырожденными? Какова их коразмерность? В своих рассуждениях используйте метод малых шевелений.

14. На доске массы M лежит небольшой брусок массы m (рис. 24). Коэффициент трения между доской и бруском равен μ_1 , а между доской и поверхностью — μ_2 . К бруску приложена горизонтальная сила F . Укажите все возможные качественно разные ситуации поведения системы и изобразите на плоскости параметров μ_1, μ_2 области, соответствующие различным типам динамики. Укажите возможные негрубые ситуации коразмерности один и два.

15. Укажите случаи общего положения, а также вырожденные ситуации коразмерности один и два на фазовых диаграммах состояния вещества.

16. Иголку бросают на плоскость, на которой (а) выделена некоторая область, (б) проведена линия, (в) поставлена точка. Пересечет ли иголка

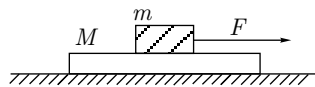


Рис. 24

данный геометрический объект в типичном случае? Охарактеризуйте ко-размерность различных возможных ситуаций.

«Игрушки» теории катастроф

17. Возьмите металлическую линейку и сожмите ее так, чтобы она прогнулась в одну сторону. Попробуйте «ликвидировать» этот прогиб, надавливая на выгнувшуюся линейку другой рукой. Пронаблюдайте происшедшую катастрофу.

18. Изготовьте машину Зимана (рис. 25). Проведите эксперименты с этой машиной и определите примерное расположение области мультистабильности на плоскости x, y , где x, y — координаты конца указки.

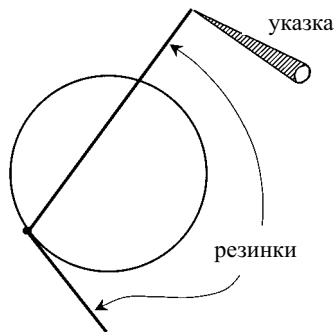


Рис. 25

19. Имеется машина Зимана с параметрами: диаметр диска 1, длина резинок в нерастянутом состоянии 1, расстояние от центра диска до точки прикрепления одной резинки 4. Найдите расположение двух «клювов» об-

ласти мультистабильности — ближайшего и наиболее удаленного от центра диска.

20. Рассмотрите параболическую качалку, форма которой задана уравнением $y = x^2$ (рис. 26). В системе координат, привязанной к качалке, найдите геометрическое место точек, размещение грузика в которых обеспечивает существование такого состояния равновесия, что качалка касается горизонтальной поверхности в точке x_0 . Найдите условия устойчивости этого положения равновесия. Как располагается точка потери устойчивости относительно центра кривизны параболы?

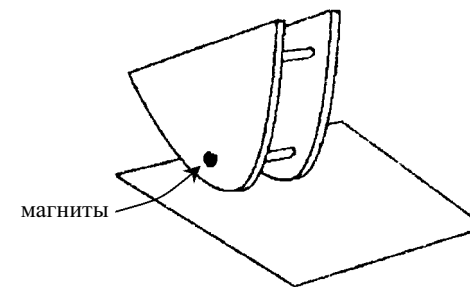


Рис. 26

21. Эволютой кривой называется кривая, представляющая собой геометрическое место центров кривизны для исходной кривой. Найдите эволюту для параболической качалки. Каковы координаты точки «клюва» на эволюте? Проинтерпретируйте эту кривую с точки зрения существования и сосуществования устойчивых состояний равновесия качалки.

22. Изготовьте качалку и проведите с ней эксперименты в духе теории катастроф.

23. Решите задачу Архимеда об устойчивости судна с параболическим профилем.

Критические точки функций одной переменной

24. Какую критическую точку имеет функция $f(x) = x(1 - \cos x)$ в точке $x = 0$? Какие конфигурации функции в окрестности критической

точки возникнут при введении возмущения вида px , где p — некоторый малый параметр? Все ли возможные трансформации $f(x)$ в окрестности кубической точки перегиба можно пронаблюдать, вводя такое возмущение?

25. Массивная платформа движется по прямой вдоль оси x со скоростью V . На платформе находится прикрепленный к пружине жесткости k груз массы m , совершающий колебания вдоль оси x с амплитудой a . Какие критические точки может иметь функция, определяющая зависимость от времени координаты груза относительно неподвижного наблюдателя? Какие из них «более типичны»?

26. Найдите явный вид замены переменной и параметров, приводящий полином $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ к виду, не содержащему член x^3 .

27. Рассмотрите возмущение функции $f(x) = x^4$ вида px , где p — некоторый малый параметр. Какое число квадратичных экстремумов возникает при «малом шевелении» параметра p ?

28. Небольшое тело массы m может скользить без трения по горизонтальному стержню (рис. 27). Тело прикреплено пружиной жесткости k к точке O , находящейся на расстоянии l от стержня. Длина пружины в нерастянутом состоянии l_0 . Как трансформируется график функции $U(x)$ при изменении параметра l ? Какие критические точки имеет функция $U(x)$? Укажите коразмерность вырожденной критической точки. Все ли возможные трансформации, характерные для снятия вырождения такой критической точки, можно пронаблюдать, варьируя l ? Как модифицировать задачу, чтобы все они стали возможны?

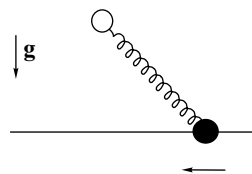


Рис. 27

29. Чему равна коразмерность критической точки x_0 на классе гладких функций?

Критические точки функций двух переменных

30. Найдите матрицу Гессе в критических точках типа «максимум», «минимум», «перевал», «обезьянье седло», «желоб» и «скрещенные желоба» и выясните, какие из них являются вырожденными, а какие нет.

31. Изобразите систему линий уровня, соответствующую всем перечисленным в предыдущей задаче критическим точкам.

32. Найдите в явном виде выражение для потенциала $\varphi(x, y)$ в системе двух параллельных нитей, несущих положительные заряды с одинаковой линейной плотностью q . Постройте картину линий уровня функции $\varphi(x, y)$ — так называемые овалы Кассини. Нити расположены на расстоянии d .

33. Какие критические точки имеет функция $\varphi(x, y)$ из предыдущей задачи? В их окрестности выделите у функции $\varphi(x, y)$ морсовскую часть, выполнив соответствующее разложение в ряд Тейлора.

34. Представьте себе тор в трехмерном пространстве x, y, z . Какие критические точки располагаются на поверхности тора, если считать, что она локально задает некоторую функцию $z(x, y)$? Какие из этих точек являются морсовскими? Рассмотрите различные ориентации тора в пространстве.

35. Какие объекты на фазовой плоскости консервативного осциллятора соответствуют морсовским седлам?

36. Докажите, что квадратичная форма четырех переменных может быть заменой переменных приведена к виду «морсовского седла».

37. К какой из канонических кубик приводится «обезьянье седло» $z = (y^3 - y^2x)$?

38. К какой из канонических кубик приводится кубическая форма $(ax + by)(x^2 - y^2)$ в случаях вырождения?

39. Укажите, какая из канонических кубик соответствует следующим полиномам: а) $x^3 - 3x^2y + 2xy^2$, б) $x^3 - 3x^2y + 6xy^2 - 4y^3$.

40. Покажите, что количество канонических «квартичных» форм от двух переменных, т. е. форм четвертой степени, бесконечно велико.

Катастрофа коразмерности один — складка

41. Как будет вести себя качалка, если прикрепить магнит в точке на границе области устойчивости, т.е. на линии складки?

42. Для системы двух проводов с током, из которых один удерживается упругой пружиной, а другой неподвижен (рис. 28), покажите, что реализуется катастрофа складки и вблизи точки катастрофы зависимость энергии от координаты может быть приведена к соответствующей канонической форме. Величины токов I и i , коэффициент жесткости пружины k , расстояние между проводниками в отсутствие токов l .

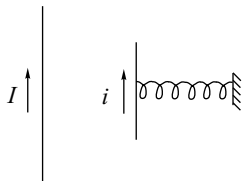


Рис. 28

43. Шарик массы m , несущий заряд q , может скользить без трения по горке, профиль которой задан функцией $y = a \ln(x^2/a^2 + 1)$, в электрическом поле напряженности E , направленном по горизонтали. Проследите за трансформацией зависимости потенциальной энергии шарика от координаты x при изменении параметра mg/qE . Определите тип катастрофы, происходящей в системе, и изобразите ее многообразие.

44. В пробирке под невесомым поршнем находится идеальный газ. Поверх поршня налита ртуть (рис. 29). Газ очень медленно нагревают. При этом поршень поднимается, и ртуть постепенно выливается из пробирки. При превышении некоторого значения температуры T_c происходит «катастрофа»: поршень поднимается вверх и выбрасывает оставшуюся ртуть из пробирки, даже если температура газа больше не увеличивается. Установите тип наблюдающейся катастрофы и постройте ее многообразие. Атмосферное давление p_0 , начальная температура газа T_0 , длина пробирки l , первоначально газом занята часть пробирки l_0 .

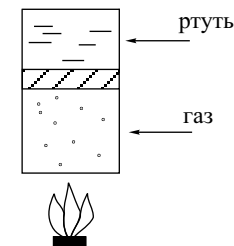


Рис. 29

Катастрофа коразмерности два — сборка

45. Шарик массы m может без трения скользить по стержню, наклоненному под углом α к горизонту. Шарик прикреплен к пружине жесткости k , второй конец которой неподвижно зафиксирован на расстоянии a от стержня в точке, принадлежащей проходящей через стержень вертикальной плоскости (рис. 30). Длина пружины в нерастянутом состоянии l . Как трансформируется при изменении параметров вид зависимости потенциальной энергии от координаты шарика x , отсчитываемой вдоль стержня? Найдите линии складок и точку сборки на плоскости параметров $\alpha, l/a$.

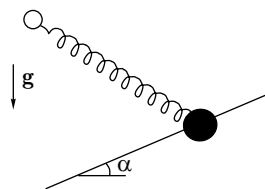


Рис. 30

46. Маленькая бусинка массы m может без трения скользить по тонкому проволочному кольцу радиуса R (рис. 31). Кольцо вращают с частотой ω вокруг вертикальной оси, проходящей через плоскость кольца на расстоянии a от его центра. Проследите за трансформацией зависимости потенциальной энергии бусинки от ее координаты во вращающейся системе отсчета. Найдите линии складок и точку сборки на плоскости параметров $a, \omega^2 R/g$.

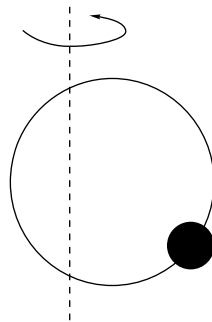


Рис. 31

47. Покажите, что в системе из задачи 26 из главы «Колебания» реализуется катастрофа сборки.

48. Изобразите поверхность, задаваемую уравнением газа Ван-дер-Ваальса в пространстве (давление P , объем V , температура T), и обсудите ее устройство с точки зрения теории катастроф. С помощью компьютера или калькулятора постройте линии складок и точку сборки в координатах P/P_k , T/T_k , где P_k и T_k — известные из термодинамики критические значения температуры и давления. На этом же графике постройте аппроксимацию в виде «полукубического» острия.

49. Для задачи о туннельном диоде (задача 27 из главы «Колебания») найдите координаты точки сборки на плоскости $\mathcal{E}$, R и изобразите расположение вольт-амперной характеристики диода и нагрузочной прямой в различных точках в окрестности этой точки и непосредственно в ней.

50. Параметры системы, демонстрирующей катастрофу сборки, медленно изменяют так, что точка на плоскости параметров обходит сборку 5 раз (рис. 32а). Сколько жестких переходов происходит в системе? Для маршрутов на рис. 32б–г изобразите качественно зависимость состояния системы от параметра, отсчитываемого вдоль этих маршрутов.

51. Как будет вести себя качалка, если прикрепить магнит в точке сборки?

52. Чем отличаются свойства нелинейного осциллятора в случаях, когда зависимость потенциальной энергии от координаты имеет катастрофу сборки и двойственной сборки?

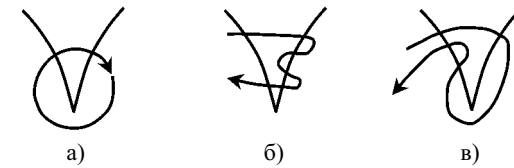


Рис. 32

53. Изобразите различные возможные проекции тора на плоскость. Укажите точки сборки, которые возникают при таком проецировании. Обсудите проблему устойчивости сборок при малом шевелении тора.

54. Покажите, что траектория точки на ободе колеса, катящегося без проскальзывания, имеет острия с характерной «полукубической» особенностью.

Катастрофа коразмерности три — ласточкин хвост

55. Для катастрофы ласточкин хвост, соответствующей потенциальной функции $U(x) = x^5/5 + ax^3/3 + bx^2/2 + cx$, изобразите проекции линий сборок на плоскости (a, b) , (a, c) и (c, b) . Для каждой из проекций укажите показатель степени, который отвечает полученным остриям.

56. Покажите, что в сечениях катастрофы ласточкин хвост плоскостью $a = \text{const}$ линии складок подходят к точкам сборки по универсальному «полукубическому» закону.

57. Изобразите характерные конфигурации потенциальной функции $U(x)$, отвечающие сечению катастрофы ласточкин хвост плоскостью $a = \text{const}$ для $a > 0$.

58. На рис. 33 изображено несколько маршрутов на плоскости параметров b, c , отвечающих сечению катастрофы ласточкин хвост плоскостью $a = \text{const}$. Изобразите, как происходит трансформация потенциальной функции $U(x)$ при движении вдоль этих маршрутов.

59. Пусть потенциальная функция задана полиномом $U(x) = x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx$. Какие геометрические объекты образуют в пространстве параметров A, B, C, D складки, сборки, «линию самопересечения», ласточкин хвост? Дайте ответ, не проводя детальных вычислений, а используя понятие коразмерности.

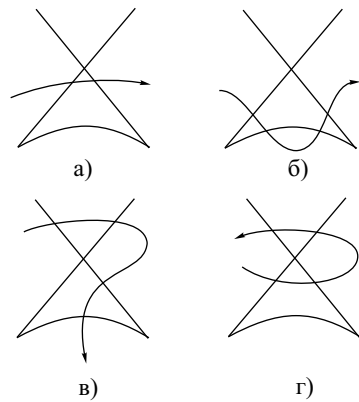


Рис. 33

60. Покажите, что для полинома $U(x) = x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx$ точка катастрофы ласточкин хвост реализуется при выполнении условий $B = 2A^2/5$, $C = 2A^3/25$, $D = A^4/125$.

61. В системе из задачи 26 из главы «Колебания» шарик маятника несёт заряд q . На расстоянии a от него (в ситуации, когда пружина не растянута) помещен неподвижный заряд $-Q$. Нарисуйте график потенциальной энергии $U(x)$ в зависимости от координаты шарика. Сколько критических точек может иметь функция $U(x)$? Покажите, что в системе может наблюдаться катастрофа ласточкин хвост, и найдите соответствующие значения параметров.

62. Для предыдущей задачи получите выражение для потенциальной энергии шарика в виде полинома пятой степени, используя разложение в ряд Тейлора электростатической энергии от функции координаты x . Используя эту аппроксимацию, получите значения параметров, соответствующих точке катастрофы ласточкин хвост. Сравните полученные значения с точными. Можно ли считать полученное приближенное решение приведением катастрофы ласточкин хвост к канонической форме? Почему?

Каспоидные катастрофы в двумерных системах

63. По горизонтальной плоскости может кататься шарик массы m , несущий положительный заряд q . Под плоскостью на расстоянии a от нее и

на расстоянии l друг от друга помещены два отрицательных заряда Q_1 и Q_2 (рис. 34). Найдите значения параметров, отвечающих точке катастрофы самой высокой коразмерности (какая это катастрофа?) и получите уравнение, задающее линии уровня потенциальной энергии шарика в этой точке. Решите эту же задачу в случае, если заряды Q_1 и Q_2 положительны.

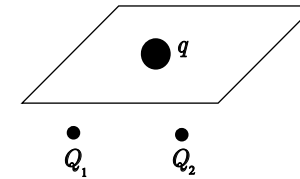


Рис. 34

64. Придумайте физическую систему, для которой в точке катастрофы сливаются максимум и два седла.

65. Изобразите картину линий уровня потенциальной энергии

$$U(x, y) = \frac{x^4}{4} + a\frac{x^2}{2} + bx + y^2$$

в различных характерных точках плоскости параметров вблизи точки сборки.

66. Решите ту же задачу для функции $U(x, y) = \frac{x^4}{4} + a\frac{x^2}{2} + bx - y^2$. Укажите линию на плоскости параметров, соответствующую нелокальному бифуркационному множеству.

67. Установите вид сепаратрис для системы линий уровня в двумерных системах в точках катастроф типа ласточкин хвост и бабочка.

68. Движение консервативного осциллятора задается потенциальной функцией $U(x)$. Какие катастрофы — каспоидные или омбилические — могут происходить с линиями уровня на фазовой плоскости осциллятора? Будут ли «проблемы» с приведением этих катастроф к каноническим формам?

69. Найдите замену переменных, приводящую к канонической форме катастрофы сборки функцию $U(x, y) = y^3/3 - x^2y - 2y^2$. Каков «тип» этой сборки (характерный для задачи 64 или 65)?

70. Рассмотрите функцию $U(x, y) = (x^2 - 1)y - \varepsilon x$. Найдите критические точки на плоскости x, y и «высоту», на которой они расположены. Постройте систему линий уровня для случаев $\varepsilon = 0$, $\varepsilon < 0$, $\varepsilon > 0$, укажите сепаратрисы и покажите, что наблюдается нелокальная бифуркация.

71. Рассмотрите следующую систему: вертикально висящий маятник, несущий заряд q , расположен посередине между двумя вертикальными нитями, несущими заряд с линейной плотностью λ_1 и λ_2 . Колебания могут происходить и в поперечном направлении. Найдите потенциальную энергию маятника как функцию координат x, y . Отклонения маятника от вертикали считайте малыми. Изобразите характерный потенциальный рельеф и картину линий уровня. Покажите, что при $\lambda_1 = \lambda_2$ имеет место нелокальная бифуркация, и изобразите соответствующую картину линий уровня. Покажите, что соответствующая бифуркационная линия при вариации параметра $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ обрывается в точке, отвечающей сборке того же типа, что и в задаче 65. Изобразите соответствующую эволюцию линий уровня.

Катастрофа коразмерности три — эллиптическая омбилика

72. Для эллиптической омбилики, заданной потенциальной функцией $U(x, y) = x^2y - y^3/3 + a(y^2 + x^2) + bx + cy$, получите уравнение для линий сборок в пространстве параметров a, b, c .

73. Найдите выражение для потенциальной функции $U(x, y)$ в точке сборки $a = 1, b = 0, c = 3$. Каков «тип» (см. задачи 64 и 65) этой сборки?

74. Покажите, что линия складок в сечении $a = 1$ является гипоциклоидой — кривой, получаемой при движении точек катящейся окружности по внутренней части другой окружности.

75. Исследуйте эволюцию критических точек на плоскости переменных x, y при движении вдоль линии $a = 1, b = 0$. (Нарисуйте предварительно линию складок, точки сборки и выбранный маршрут.) Покажите, что

- а) при $c < -1$ имеются два седла, которые с ростом c двигаются по линии $y = -1$ навстречу друг другу;
- б) при $c = -1$ в точке $x = 0, y = 1$ рождаются минимум и седло;
- в) при $-1 < c < 3$ эти седло и минимум расходятся по оси x в противоположные стороны, а два исходных седла продолжают сближаться;
- г) при $c = 3$ два седла и минимум сливаются в точке $x = 0, y = -1$;

д) при $c > 3$ остаются два седла, которые расходятся по оси x с ростом c . Дайте соответствующие иллюстрации на плоскости переменных x, y .

76. Изобразите нелокальное бифуркационное множество в пространстве параметров a, b, c .

77. Объясните симметрию бифуркационного множества эллиптической омбилики. Для этого покажите, что повороты системы координат x, y на 1200 и 2400 соответствуют аналогичным поворотам на плоскости параметров b, c . (Указание. Используйте комплексное представление преобразования поворота.)

78. Имеется система трех одинаковых параллельных, равномерно заряженных нитей. Нити располагаются так, что их пересечение с перпендикулярной плоскостью образуют равносторонний треугольник. Покажите, что электростатический потенциал в такой системе как функция координат на этой плоскости имеет критическую точку, отвечающую росту катастрофы эллиптической омбилики.

79. Придумайте, как можно использовать предыдущую задачу, чтобы реализовать систему с катастрофой эллиптической омбилики. (Указание. Используйте маятник, несущий заряд Q .)

Катастрофа коразмерности три — гиперболическая омбилика

80. Проведите исследование гиперболической омбилики, заданной потенциальной функцией $U(x, y) = x^2y + y^3/3 + a(y^2 - x^2) + bx + cy$, по следующей схеме:

- а) получите выражение для критических точек;
- б) найдите уравнение для линий складок в сечении пространства параметров плоскостью $a = 1$;
- в) найдите точки сборки в этом сечении и напишите уравнение для линий сборки в пространстве параметров;
- г) выясните расположение и характер критических точек на плоскости x, y при $a = 1, b = 0$ и различных c ;
- д) сделайте выводы об устройстве бифуркационного множества.

Катастрофы и теория упругости

81. Оцените критическую нагрузку для стального стержня длиной 20 см и диаметром 5 мм.

82. Найдите критическую нагрузку для обычной стальной линейки. На сколько надо превысить эту нагрузку, чтобы линейка выгнулась на 2 см?

83. Получите выражение для энергии упругого стержня как функции амплитуды «выпучивания» a , считая, что конфигурация стержня описывается выражением $y(s) = af(s)$, где $f(s) = 4s(L-s)/L^2$. Здесь s — координата, отсчитываемая вдоль стержня. Найдите с помощью этого приближения критическую нагрузку и соответствующий степенной закон для амплитуды a . Сравните результаты с полученными для случая $f(s) = \sin \pi s/L$.

84. Попробуйте угадать без вычислений структуру выражения для энергии эйлерова стержня в двухмодовом приближении с точностью до членов четвертого порядка. Представляет ли оно собой элементарную катастрофу Тома?

85. Найдите критическую нагрузку в задаче о выпучивании эйлерова стержня в многомодовом приближении в случае, когда он лежит на упругом основании с заданным коэффициентом жесткости.

86. Найдите значения коэффициента жесткости основания, при котором теряют устойчивость сразу две моды.

87. Найдите критические значения нагрузок потери устойчивости мод в случае отсутствия упругого основания. В каком порядке моды теряют устойчивость? Покажите, что соответствующие критические значения соответствуют простому пересчету длины стержня, и объясните, почему это так.

Катастрофы и физика фазовых переходов

88. Изобразите линии фазовых переходов жидкость—газ, жидкость—твердое тело, газ—твердое тело, тройную и критическую точки вещества на P, T -плоскости. Покажите характерные конфигурации зависимости потенциала Гиббса от параметра порядка во всех характерных точках такой диаграммы.

89. Используя теорию Ландау, найдите скачок теплоемкости C_V в точке фазового перехода.

90. Изобразите качественно зависимость термодинамического потенциала от параметра порядка для системы с метастабильным фазовым переходом 1-го рода.

91. Дайте интерпретацию закона соответственных состояний в духе теории катастроф.

92. Какой параметр в задаче о выпучивании стержня является аналогом параметра порядка в физике фазовых переходов?

93. Для модели Гинзбурга—Ландау с так называемым трикритическим термодинамическим потенциалом $\Phi(\eta) = \frac{1}{6}\eta^6 + \frac{a}{4}\eta^4 + \frac{b}{2}\eta^2 + h\eta$ найдите линии фазовых переходов 1-го рода на b, h плоскости при $a = 1$. Здесь h — параметр порядка. Как они трансформируются при вариации a ?

Кривые и их особенности. Эволюты и эвольвенты

94. Докажите, что эволютой циклоиды является циклоида, и получите ее уравнение.

95. Постройте на компьютере семейство нормалей к циклоиде.

96. Нарисуйте циклоиду, изготовьте по ее форме гнутый кусок жести и используйте его для создания изохронного маятника в виде катающегося по нему шарика. Измерьте экспериментально период такого маятника и сравните с теоретическим значением.

Каустики

97. На борту корабля, стоящего у причала, можно наблюдать медленно меняющуюся картину бликов, возникающую из-за отражений солнечного света от воды. Обсудите свойства яркости этой картины с точки зрения теории катастроф.

98. При отражении от цилиндрической поверхности возникает яркая каустика и еще более яркая точка сборки. Проведите экспериментальное исследование этой каустики (в частности, определите положение точки сборки) и сравните с результатами теоретического анализа.

99. Пронаблюдайте картину, возникающую при прохождении света через «гофрированное» стекло. Что будет происходить при шевелении стекла?

100. Обсудите известные вам абберации линз с позиций теории катастроф.

101. В узких заливах океанские волны могут образовывать каустики. Обсудите проблему безопасности плавания в таких заливах.

Волновые фронты и их особенности

102. В момент времени $t = 0$ волновой фронт имеет форму параболы $y = x^2$. Получите уравнение линии, задающей положение волнового фронта в момент времени t . Скорость распространения волны c . Когда волновой фронт претерпит катастрофу ласточкин хвост?

103. Получите аналитическое выражение для волнового фронта, испущенного плоской кривой, заданной параметрическими уравнениями $y = f(t)$, $x = g(t)$.

104. Используя выражение для волнового фронта, испущенного эллипсом, обоснуйте, что волновой фронт будет иметь особенность типа ласточкин хвост. Для этого обсудите структуру разложения в ряд Тейлора, а детальные выкладки можете не проводить.

105. Какие катастрофы волновых фронтов акустических волн наиболее опасны с точки зрения возможных разрушений?

Колебания. Эффект смягчения мод

106. Исследуйте вид поверхности $\omega^2 = \omega^2(a, b)$, дающей зависимость частоты линейных колебаний от параметров для нелинейного осциллятора в окрестности катастрофы сборки $\ddot{x} + ax + b + x^3 = 0$. Сколько листов имеет эта поверхность? Чему это отвечает с точки зрения конфигурации потенциальной функции? Какие листы соответствуют устойчивым, а какие неустойчивым движениям? Каков смысл линии самопересечения? Покажите, что в окрестности линии складки и точки сборки частота зависит от параметров по степенным законам, и найдите соответствующие показатели.

107. Найдите зависимость частоты линейных колебаний от параметров для механической системы из задачи 45. Покажите, что в точках катастроф частота обращается в нуль, а период — в бесконечность (феномен «смягчения мод»). Установите характер зависимости частоты от превышения параметром a значения, отвечающего точке катастрофы, в окрестности точки слияния экстремумов потенциальной функции. Сравните показатель полученной степенной зависимости со значением, полученным в предыдущей задаче для катастрофы сборки.

108. Решите аналогичную задачу для системы из задачи 46.

109. Почему опрокидыванию корабля предшествует долгопериодическая качка?

110. Как наблюдать феномен смягчения мод с помощью качалки?

111. В книге Постона и Стюарта «Теория катастроф» читаем: «Значит, ненагруженный стержень издает «тиньк», при умеренной нагрузке «бумм», а вблизи точки выпучивания — «буинньккк». Это великолепно известно опытным инженерам, а неискушенного читателя должно предостеречь от предпочтения конструкций в тоне сопрано басовым». Обсудите эти утверждения с позиций теории катастроф и феномена смягчения мод.

Нелинейный резонанс

112. Покажите, что укороченное уравнение $\dot{A} + i(\omega - \omega_0)A = -\gamma A/2 + \frac{3}{8} \frac{i\beta}{\omega_0} A |A|^2 - ib/2\omega_0$, описывающее осциллятор Дуффинга под внешним гармоническим воздействием, с помощью замены переменных приводится к комплексному укороченному уравнению в безразмерной форме: $\dot{z} + i\Delta z = -z + i|z|^2 z - iP^{1/2}$. Получите уравнение для действительных амплитуды и фазы. Получите также в безразмерном виде уравнение резонансной кривой.

113. Приведите к каноническому для сборки виду безразмерное уравнение резонансной кривой нелинейного осциллятора. С его помощью определите координаты сборки и получите уравнение для линий складок на плоскости безразмерных отстройки частоты Δ — амплитуды входного сигнала P . Получите вид этой зависимости в окрестности точки сборки. Какие бифуркации (в терминах теории бифуркаций) реализуются при переходе через линии складок на плоскости частота — амплитуда воздействия?

114. Оцените амплитуду внешней силы b , при которой разыгрываются явления, связанные с нелинейным резонансом, для осциллятора Дуффинга с параметрами $\omega_0 = 1$, $\beta = 0.3$, и с параметром диссипации $\gamma = 0.2$. Прodelайте то же самое для параметра диссипации $\gamma = 0.02$.

115. Выполните оценки, аналогичные представленным в предыдущей задаче, для супергармонического резонанса на частотах, близких к $\omega_0/3$.

116. Частота внешнего сигнала точно равна $3\omega_0$. Найдите пороговое значение амплитуды воздействия, при которой возможно жесткое возникновение колебаний на этой частоте, значения параметров $\omega_0 = 1$, $\beta = 0.3$, $\gamma = 0.2$ и $\gamma = 0.02$.

117. Почему при исследовании резонанса на гармониках в осцилляторе Дуффинга выбирают именно частоты $3\omega_0$ и $\omega_0/3$?

Автоколебания и синхронизация

118. Какая катастрофа в укороченном уравнении автогенератора с жестким возбуждением отвечает точке, в которой бифуркация Андронова–Хопфа из прямой превращается в обратную?

119. Для уравнения Адлера для фазы колебаний $\dot{\varphi} = -\Delta + \varepsilon \sin \varphi$, описывающего синхронизацию, введите эффективный потенциал $U(\varphi)$ такой, что $\dot{\varphi} + U'(\varphi) = 0$. Как трансформируется потенциал при вариации ε ? Какие катастрофы наблюдаются? Дайте интерпретацию режимам захвата и биений в этих терминах.

Катастрофы. Задачи для компьютерных исследований

120. Многообразия каспидных катастроф. Постройте многообразия катастроф в следующих случаях:

- для катастрофы сборки в канонической форме;
- для задачи 45 о прикрепленном к пружине шарике, скользящем вдоль стержня;
- для канонической формы катастрофы ласточкин хвост в случае нескольких различных значений параметра a .

121. Бифуркационные множества простейших систем. Постройте бифуркационные множества катастроф в следующих случаях:

- для задачи 49 о туннельном диоде на плоскости $\mathcal{E}$, R ;
- для газа Ван-дер-Ваальса;
- для канонической формы катастрофы ласточкин хвост;
- для задачи 60, демонстрирующей катастрофу ласточкин хвост. Используйте подходящие безразмерные координаты и параметры.

122. Машина Зимана. Постройте многообразие катастроф для машины Зимана. Диаметр диска и длины нерастянутых резинок положите равными 1, а расстояние от неподвижной точки прикрепления резинки до центра диска — 2. Предварительно получите строгое выражение для энергии упругой деформации резинок как функции угла поворота диска.

123. Эллиптическая качалка. Постройте многообразие катастроф эллиптической качалки или поверхность, отвечающую семейству нормалей эллипса. Используйте стандартное уравнение для нормалей. Попробуйте провести исследование других кривых. Изготовьте такую качалку и проведите с ней эксперименты.

124. Колебания осциллятора в потенциале с двумя ямами. Постройте фазовые портреты консервативного и диссипативного осциллятора $\ddot{x} + \alpha \dot{x} + U'(x) = 0$ в потенциале, отвечающем катастрофе сборки $U(x) = x^4/4 + ax^2/2 + bx$. Создайте программу, демонстрирующую вид потенциала и фазовые портреты в различных точках плоскости a , b . Предварительно нанесите на нее линии складок и точку сборки. За эволюцией картинок удобно наблюдать, если изменение параметров (координаты выделенной на экране точки) осуществлять с помощью «мыши».

125. Ласточкин хвост. Изучите эволюцию формы потенциала для катастрофы ласточкин хвост. Для этого предварительно получите на экране дисплея соответствующее бифуркационное множество. Создайте программу, которая демонстрирует вид потенциала в точке, отмеченной на экране с помощью «мыши». Выберите несколько значений параметра a .

126. Трансформации эквипотенциалей. Над поверхностью океана помещена материальная точка массы m . Точка располагается на высоте h над невозмущенным уровнем океана. Постройте «карту» эквипотенциалей гравитационного поля в такой системе. Проследите за ее трансформациями при вариации безразмерного параметра m/gh^2 . (Ось x направьте вдоль невозмущенной поверхности воды.) Что можно сказать о форме возмущенной поверхности воды? Изобразите несколько характерных рельефов потенциальной функции $U(x, y)$.

127. Каспидные катастрофы в двумерных системах. Изучите эволюцию линий уровня для катастроф сборки, заданной потенциальной функцией $U(x, y) = x^4/4 + ax^2/2 + bx + y^2$. Предварительно получите на экране дисплея соответствующее бифуркационное множество. Создайте программу, которая демонстрирует вид эквипотенциалей в точке, отмеченной на экране. Создайте программу, которая демонстрирует рельеф потенциальной функции в выделенной точке.

Решите аналогичную задачу в случае потенциальной функции $U(x, y) = x^4/4 + ax^2/2 + bx - y^2$.

128. Эллиптическая омбилика. С помощью компьютера постройте картину линий уровня потенциальной функции $U(x, y)$ для катастрофы эллиптической омбилики в случае $a = 1$. Подберите характерные точки на плоскости параметров b и c , на которой предварительно получите соответствующее бифуркационное множество. Обратите внимание на точки сборки. Постройте несколько потенциальных рельефов.

Решите эту же задачу в случае $a = 0$.

Постройте бифуркационное множество в трехмерном пространстве параметров.

129. Гиперболическая омбилика. Решите задачу 118 для случая гиперболической омбилики при $a = 1$ и при $a = 0$. Постройте бифуркационное множество этой катастрофы.

130. Двумерный маятник в поле трех притягивающих тел. Рассмотрите движение двумерного маятника с затуханием, помещенного в центре равностороннего треугольника, в вершинах которого находятся три притягивающих центра (магниты, гравитационные массы и др.) Считайте, что потенциал отвечает закону всемирного тяготения. Изобразите картину линий уровня такого потенциала и его рельеф. Покажите, что вблизи центра он отвечает катастрофе эллиптическая омбилика. Постройте несколько характерных траекторий маятника. Найдите бассейны притяжения положений равновесия маятника.

131. Гладкие кривые с особенностями. Постройте простейшие кривые, имеющие особенности в виде точек сборки с характерными полукубическими острями: циклоиду, гипоциклоиду, астроиду. Пополните этот список самостоятельно.

132. Каустики в чашке. В цилиндрическом сосуде (например, в чашке с кофе) можно наблюдать яркую линию с еще более ярким острием. Эта линия — каустика — представляет собой огибающую световых лучей, отраженных от цилиндрической поверхности. Проведите компьютерное моделирование такой каустики. Рассмотрите далее ситуации, когда имеется точечный источник света, который может быть расположен как внутри, так и вне отражающей цилиндрической поверхности. Изучите трансформации каустик. Решите аналогичную задачу в случае эллиптической отражающей поверхности.

133. Миражи. В атмосфере температура изменяется с высотой и соответственно изменяется показатель преломления. Проведите компьютерное

исследование траекторий световых лучей в такой среде. Используйте известные из оптики законы зависимости показателя преломления воздуха от температуры. Рассмотрите некоторые простейшие законы изменения температуры с высотой. Охарактеризуйте наблюдаемые картины в терминах теории катастроф.

134. Радуга. Найдите в справочнике данные по коэффициенту преломления света в воде в диапазоне от красного цвета до фиолетового и воспроизведите на компьютере расчет траекторий лучей света в капле воды (теория радуги Декарта). Пронаблюдайте образование каустик. Определите, под какими углами по отношению к направлению на солнце наблюдатель видит красное и фиолетовое кольца радуги. Используйте цветную графику.

135. Каустики в электронном потоке. Одно из известных устройств микроволновой электроники — клистрон — содержит две близко расположенные металлические сетки, на которые подано переменное напряжение $U = U_0 \cos \omega t$. Через сетки со скоростью v_0 летит пучок электронов (рис. 35). Проведите компьютерное исследование пространственно-временных диаграмм для электронов в области за сетками. Охарактеризуйте полученные результаты в терминах теории катастроф.

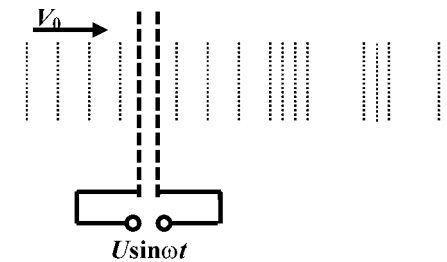


Рис. 35

136. Плоский волновой фронт. Постройте на компьютере картину распространения волнового фронта внутри эллипса в режиме компьютерной мультипликации. Попробуйте в качестве излучающей поверхности другие гладкие кривые.

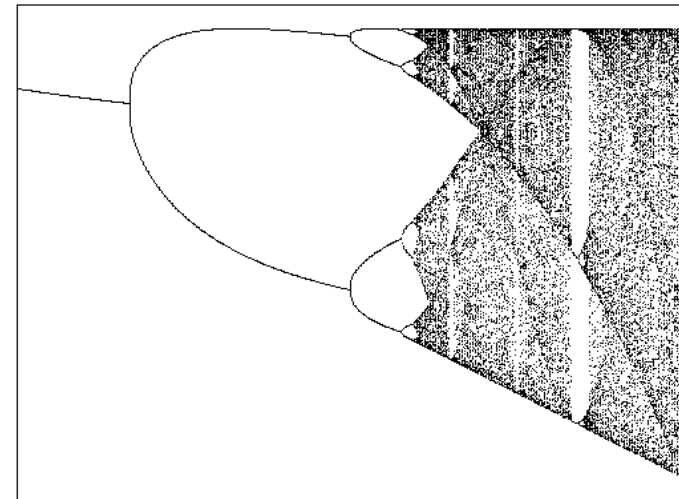
137. Принцип Гюйгенса на компьютере. Создайте программу, иллюстрирующую принцип Гюйгенса и показывающую систему волновых фронтов в виде окружностей одного радиуса с центрами на эллипсе. Что

происходит с этой картиной с ростом радиусов? Как она соотносится с каустиками?

138. Нелинейный резонанс. Напишите программу, которая строит фазовые портреты укороченного уравнения, описывающего нелинейный резонанс, в выбранных точках плоскости параметров безразмерная отстройка частоты Δ — амплитуда воздействия P . На плоскость параметров предварительно нанесите линии складок и точку сборки. Проследите за метаморфозами фазовых портретов при движении по плоскости параметров.

Глава 3

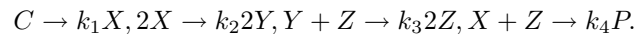
Динамические системы и бифуркации



Классификация и примеры динамических систем

1. Охарактеризуйте с точки зрения классификации следующие динамические системы: уравнение нелинейного осциллятора, уравнение Ван-дер-Поля, уравнение Рэля, уравнение автогенератора с жестким возбуждением.

2. Бриггсом и Раушером в 1973 г. была открыта реакция, названная йодными часами. В процессе этой реакции может периодически изменяться концентрация иода, а цвет раствора меняется с белого на синий, снова на белый и т.д. (Подробнее см. Д. Гарел, О. Гарел, «Колебательные химические реакции».) Схема реакции выглядит следующим образом:



Получите динамическую систему для переменных X, Y, Z , описывающую эту реакцию.

3. Получите отображение для механической системы, являющейся моделью ускорения Ферми (рис. 36). Все удары упругие, стенка колеблется по гармоническому закону. Смещением стенки пренебречь.

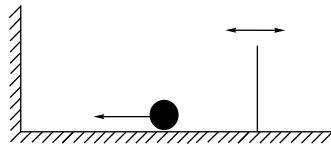


Рис. 36

4. В работе Икеды с соавторами была рассмотрена оптическая система в виде кольцевого резонатора, частично заполненного средой с фазовой нелинейностью (рис. 37). Резонатор возбуждается лучом лазера через одно полупрозрачное зеркало, а выходной сигнал снимается через другое. Как показал Икеда, при некоторых условиях такая система может быть приближенно описана с помощью отображения $z_{n+1} = A + Bz_n \exp(i|z_n|^2)$. Здесь z — комплексная амплитуда света, A — параметр, пропорциональный сигналу лазера, B — параметр диссипации поля в среде. Получите соответствующее действительное отображение и дайте его классификацию.

5. Тенисон, Либерман и Лихтенберг рассмотрели следующую систему: луч света может бежать между двумя зеркалами, одно из которых имеет «гофрировку» в виде синусоидального профиля (рис. 38). Получите двумерное

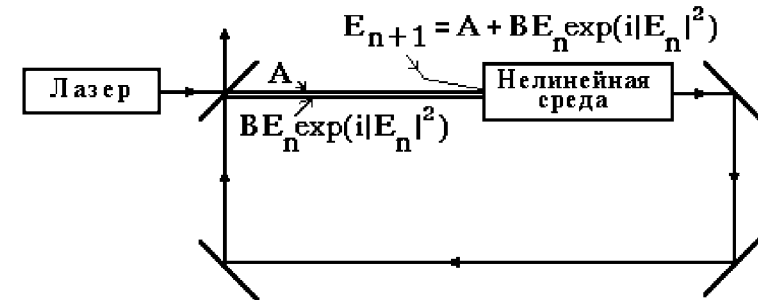


Рис. 37

дискретное отображение, описывающее динамику этой системы. В качестве переменных используйте угол φ и координату x падения луча на нижнее зеркало. Покажите, что в случае слабой гофрировки:

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1} &= \varphi_n - 2a \sin(x_n) \quad (\varphi_n, \text{mod } 2\pi), \\ x_{n+1} &= x_n + h \tan \varphi_{n+1} \quad (x_n, \text{mod } 2\pi). \end{aligned}$$

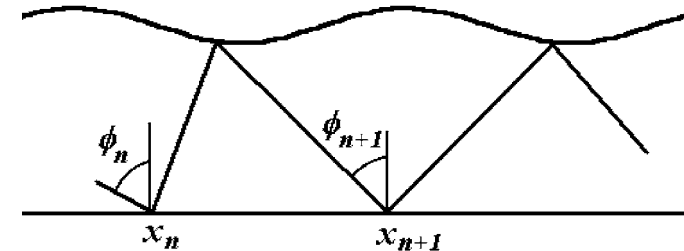


Рис. 38

6. Получите отображение для системы с импульсным воздействием вида:

$$\dot{x} = \sum_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(t - nT).$$

Охарактеризуйте полученное отображение.

7. Рассмотрите движение линейного диссипативного осциллятора под действием внешней периодической импульсной силы, амплитуда которой зависит от координаты осциллятора:

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \sum_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(t - nT).$$

(В качестве физической реализации может выступать железный маятник между полюсами электромагнита.) Охарактеризуйте полученное отображение. Покажите, что при определенном выборе функции $f(x)$ оно приводится к отображению Эно:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \lambda - x_n^2 - by_n, \\ y_{n+1} &= x_n. \end{aligned}$$

8. Покажите, что отображение Эно и обобщенное отображение Эно

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n) - by_n, \\ y_{n+1} &= x_n \end{aligned}$$

обратимы. Когда они консервативны, а когда диссипативны?

9. Нелинейный диссипативный осциллятор находится под импульсным воздействием:

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = C \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t - Tn).$$

Используя в промежутке между ударами решение, полученное методом медленно меняющихся амплитуд, получите дискретное отображение для координаты и скорости осциллятора. Покажите, что оно совпадает с отображением Икеды.

10. Покажите, что система

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} = A + \varepsilon \sin(x) \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT),$$

приводится к двумерному отображению Заславского

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \frac{\Omega}{2\pi} + \frac{K}{\Gamma} (1 - e^{-\Gamma}) \sin(2\pi x_n) + \frac{1 - e^{-\Gamma}}{\Gamma} y_n, \\ y_{n+1} &= e^{-\Gamma} (y_n + \varepsilon \sin 2\pi x_n), \end{aligned}$$

и установите смысл параметров и переменных в этом отображении. Как оно выглядит в консервативном случае?

11. Рассмотрите неавтономный генератор пилообразных колебаний, для которого момент запуска каждого очередного импульса управляется сигналом $U(t) = U_0 + \varepsilon \sin(\omega t)$ (рис. 39). Получите дискретное отображение, дающее зависимость момента начала $(n+1)$ -го импульса от момента начала n -го импульса и покажите, что оно совпадает с отображением окружности. Длительность импульсов в автономном режиме равна T .

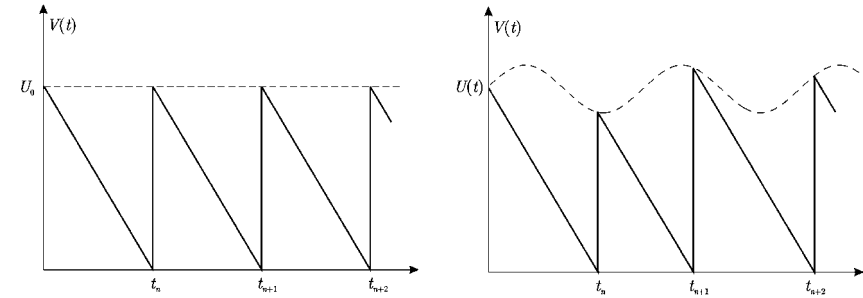


Рис. 39

12. Получите одномерное отображение для генератора пилообразных колебаний из предыдущей задачи в случае, когда «запускающий» сигнал также представляет собой некоторое пилообразное напряжение. Покажите, что при определенном выборе параметров систему можно привести к отображению $x_{n+1} = \{2x_n\}$, известному как сдвиг Бернулли.

13. Получите точечное отображение, описывающее разгон релятивистской частицы в циклическом резонансном ускорителе заряженных частиц — циклотроне. Частица вращается в однородном магнитном поле B_0 с циклотронной частотой $\omega_c = qB_0/m$ (q и m — заряд и масса частицы соответственно), периодически проходя через ускоряющий промежуток (зазор), к которому приложено высокочастотное напряжение $V(t) = V_0 \sin(\omega t)$ (рис. 40). Если частота изменения ускоряющего напряжения ω близка к циклотронной частоте, частица будет каждый раз попадать в ускоряющую фазу, увеличивая свою энергию.

14. Предлагается следующая классификационная схема построения эталонных модельных отображений:

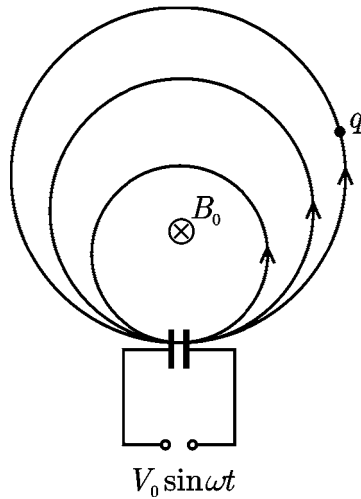


Рис. 40

- логистическое отображение $x_{n+1} = \lambda - x_n^2$;
- кубическое отображение $x_{n+1} = a + bx_n \pm x_n^3$;
- ...

Продолжите этот ряд. Постройте аналогичный ряд двумерных обратимых отображений.

Бифуркации одномерных потоков

15. Покажите, что одномерная потоковая система всегда градиентна. Какие результаты теории катастроф по этой причине можно перенести в теорию бифуркаций?

16. Изобразите бифуркационные диаграммы для бифуркаций седло-узел $\dot{x} = \lambda - x^2$, транскритической $\dot{x} = \mu x - x^2$ и вилки $\dot{x} = \lambda x - x^3$. То же самое для обратных (субкритических) форм этих бифуркаций.

17. Найдите закон изменения во времени переменной $x(t)$ для бифуркаций седло-узел и вилки при $\lambda > 0$ и $\lambda < 0$. Решите аналогичную задачу в случае субкритических бифуркаций.

18. Установите связь бифуркации седло-узел и транскритической бифуркации.

19. Установите связь с катастрофой сборки бифуркаций седло-узел, вилки, а также вилки в случае снятия вырождения. Используйте трехмерный рисунок многообразия катастрофы сборки и бифуркационные диаграммы.

20. Изобразите фазовые портреты двумерной системы, отвечающие бифуркации седло-узел. Рассмотрите случай устойчивого и неустойчивого узла. Изобразите аналогичный рисунок для бифуркации вилки.

Бифуркация Андронова—Хопфа

21. Покажите, что для двумерного потока общего вида:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x; y), \\ \dot{y} &= g(x; y),\end{aligned}$$

порог бифуркации Андронова—Хопфа может быть определен из условия $S = 0$, $J > 0$ где S и J — след и якобиан матрицы, описывающей эволюцию возмущения потока:

$$\begin{pmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{pmatrix},$$

и вычисленной непосредственно в неподвижной точке.

22. Найдите порог бифуркации Андронова-Хопфа в уравнениях брюсселятора:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A - Bx + x^2y - x, \\ \dot{y} &= Bx - x^2y.\end{aligned}$$

23. Приведите уравнения брюсселятора в окрестности неподвижной точки к каноническому для фокуса виду.

24. Одна из популярных в популяционной биологии моделей «хищник-жертва» может быть представлена в виде:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha(x)x - xy, \\ \dot{y} &= xy - my.\end{aligned}$$

Если положить $\alpha = \text{const}$, то мы получим классическую модель Вольтерра. (Подробнее см. Ю.М. Свирижев. «Нелинейные диссипативные структуры и

катастрофы в экологии», где рассмотрены и другие варианты такой системы.) Покажите, что если функция $\alpha(x)$, характеризующая мальтузианский рост «жертвы», имеет вид, показанный на рис. 41а, то в системе невозможна бифуркация Андронова—Хопфа, а если ее вид соответствует рис. 41б, то такая бифуркация возможна. Найдите порог бифуркации в случае $\alpha(x) = a + bx - x^2$. (Предварительно покажите, что для произвольной параболической аппроксимации функции $\alpha(x)$ коэффициент перед членом x^2 действительно можно убрать перенормировкой.)

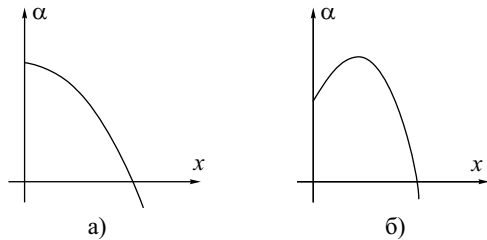


Рис. 41

25. Изобразите качественно фазовые портреты трехмерного потока, демонстрирующего бифуркацию Андронова—Хопфа.

26. Покажите, что для трехмерного потока порогу бифуркации Андронова—Хопфа отвечает соотношение $J = HS$, связывающее три инварианта матрицы для возмущений, вычисленной в неподвижной точке. Здесь J — якобиан, S — след матрицы, а H — третий инвариант, выражающийся через собственные числа матрицы λ_i следующим образом: $H = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_3$.

27. Найдите порог бифуркации Андронова—Хопфа в трехмерном потоке, описывающем генератор Кислова—Дмитриева. Этот генератор состоит из трех замкнутых в кольцо элементов: нелинейного усилителя НУ, инерционного элемента ИЭ и фильтра Φ в виде колебательного контура (рис. 42). Для усилителя предполагается, что сигналы на входе и выходе связаны через функцию $F(z) = Mze^{-z^2}$. Такая система описывается трехмерным потоком:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x/T + F(z)/T, \\ \dot{y} &= x - z, \\ \dot{z} &= y - z/Q.\end{aligned}$$

Здесь M — коэффициент усиления, Q — добротность контура, T — характерное время инерционного элемента. Покажите, что порог бифуркации Андронова—Хопфа дается соотношением:

$$\frac{2 \ln M}{T} = \left(\frac{1}{T} + \frac{1}{Q} \right) \left(1 + \frac{1}{TQ} \right).$$

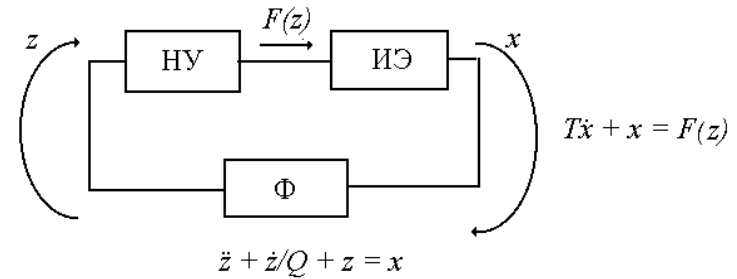


Рис. 42

28. Для модели Рёсслера следующего вида:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -(y + z), \\ \dot{y} &= x + ay, \\ \dot{z} &= bx + z(x - c),\end{aligned}$$

найдите связь между параметрами, соответствующую бифуркации Андронова—Хопфа неподвижной точки $x = y = z = 0$. (Такой вариант модели Рёсслера рассмотрен в книге Г. Николиса и И. Пригожина «Познание сложного».)

Бифуркации предельных циклов

29. Какая бифуркация предельных циклов возможна на фазовой плоскости, если уравнение для медленной амплитуды имеет вид:

$$\dot{a} = -a + \lambda a^3 - a^5.$$

Найдите пороговое значение параметра λ . Предварительно изобразите график искусственно введенного потенциала $U(a)$ такого, что $\dot{a} + \partial U / \partial a = 0$,

и обсудите его трансформации при вариации λ . Покажите, что в системе возможна катастрофа складки. Найдите бифуркационное значение параметра λ и изобразите соответствующий фазовый портрет. Какова коразмерность этой бифуркации? Как она называется в теории бифуркаций?

30. Проведите аналогичное рассмотрение в случае

$$\dot{a} = a - \lambda a^3 + \mu a^5 - a^7,$$

отвечающем катастрофе сборки.

31. Для разности системы Ван-дер-Поля

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + a + (x + 1)^2 = 0,$$

проведите двухпараметрическое исследование бифуркаций. Найдите линию бифуркации Андронова—Хопфа неподвижной точки. Покажите, что она обрывается в точке бифуркации коразмерности два, которая лежит на линии бифуркации седло-узел. Изобразите фазовый портрет в окрестности этой точки. Обратите внимание, что к этой точке подходит ещё и линия нелокальной бифуркации, на которой предельный цикл рождается из петли сепаратрисы. Найдите также линии превращения узлов в фокусы. Исследуйте устойчивость узлов и фокусов.

32. Проведите исследование бифуркаций для модели

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + a + (x + 1)^2 = 0.$$

В чем отличия от системы, рассмотренной в предыдущей задаче?

33. Проведите двухпараметрическое исследование бифуркаций в динамической системе типа «хищник-жертва»:

$$\dot{x} = \alpha(x)x - xy, \dot{y} = V(x)y - my,$$

в случае искусственно выбранных функций $\alpha(x) = 1 + ax - x^2$, $V(x) = x - x^2$. Укажите коразмерность найденных бифуркаций. Обратите внимание на бифуркацию, аналогичную представленной в предыдущих задачах.

34. Найдите линию бифуркации Андронова—Хопфа в укороченном безразмерном уравнении Ван-дер-Поля под гармоническим воздействием (см. также задачу 107 из главы «Колебания»):

$$\dot{z} + i\Delta z = z - |z|^2 z - \varepsilon.$$

Найдите точку, в которой эта линия заканчивается. Какая бифуркация имеет место в этом случае?

Бифуркации одномерных отображений коразмерности один

35. Найдите неподвижную точку и отвечающий ей мультипликатор для логистического отображения $x_{n+1} = \lambda - x_n^2$. Используя этот результат, найдите порог касательной бифуркации, условие максимальной устойчивости неподвижной точки и порог бифуркации рождения 2-цикла. Изобразите соответствующие итерационные диаграммы.

36. Найдите значения параметра, отвечающие касательной бифуркации и бифуркации удвоения периода для неподвижной точки отображения $x_{n+1} = \lambda - x_n^4$.

37. Получите уравнения, определяющие значения переменной x и бифуркационные значения параметра λ для касательной бифуркации неподвижных точек отображения $x_{n+1} = \lambda \cos(x_n)$. Дайте графическое решение уравнения для переменной x . Покажите, что существует множество таких бифуркаций. Приблизительно оцените соответствующие значения параметра λ . Прodelайте то же самое для бифуркации удвоения периода.

38. Оцените число итераций, необходимое для прохождения «коридора» ширины $\Delta x = 0, 1$ для отображения $x_{n+1} = \lambda + x_n - x_n^2$ в случае $\lambda = -0,001$.

39. Изобразите итерационные диаграммы до порога бифуркации типа «вилка» и за ним для отображения $x_{n+1} = \lambda x_n - x_n^3$. Прodelайте то же самое для обратной формы бифуркации.

40. Покажите, что для отображения $x_{n+1} = \lambda x_n / \sqrt{1 + x_n^2}$ имеет место бифуркация типа «вилка». Найдите бифуркационное значение параметра и изобразите итерационные диаграммы для ситуаций до и после бифуркации.

41. Найдите элементы 2-цикла логистического отображения и определите его мультипликатор как функцию управляющего параметра λ . Найдите значения λ , отвечающие рождению 2-цикла, 2-циклу максимальной устойчивости и порогу бифуркации удвоения периода — рождению 4-цикла. Изобразите соответствующие итерационные диаграммы.

42. Постройте функцию $F(x) = f(f(x))$, где $f(x) = \lambda - x^2$. Изобразите её график при различных λ и обсудите его трансформации у порога бифуркации рождения 2-цикла логистического отображения. Укажите элементы 2-цикла на этом рисунке.

43. Покажите, что если отображение $x_{n+1} = f(x_n)$ имеет неподвижную точку x_0 , в которой мультипликатор обращается в минус единицу: $\mu = f'(x_0) = -1$, то двукратно проитерированное отображение $F(x_0) = f(f(x_0))$ обладает следующими свойствами:

- $F'(x_0) = +1$;
- $F''(x_0) = 0$;
- $F'''(x_0) = 2Sf(x_0)$, где $Sf = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''}{f'} \right)^2$ — так называемая производная Шварца функции f .

44. Используя результат предыдущей задачи, покажите, что бифуркация $\mu = -1$ на «языке» двукратно проитерированной функции $F(x) = f(f(x))$ отвечает бифуркации вилки. Изобразите трансформации функции $F(x)$ для прямой и обратной такой бифуркации. Когда происходит бифуркация удвоения периода, а когда жесткий переход через -1 ? Что можно сказать о знаке производной Шварца в этих ситуациях?

45. Найдите производную Шварца для функции $f(x) = a + bx \pm x^3$, соответствующей кубическому отображению. О чем говорят результаты вычислений?

46. Возможны ли жесткие переходы через мультипликатор -1 в квадратном отображении $x_{n+1} = 1 - ax_n^2 - bx_n^4$?

47. Получите уравнение, с помощью которого можно найти 3-цикл максимальной устойчивости логистического отображения и определите соответствующее значение параметра λ , хотя бы приближенно.

48. Изобразите 2, 4 и 8-циклы максимальной устойчивости логистического отображения $x_{n+1} = \lambda - x_m^2$ на итерационной диаграмме.

49. В таблице представлены бифуркационные значения параметра, отвечающие удвоениям периода на базе неподвижной точки логистического отображения. Оцените по этим данным константы K и δ в законе Фейгенбаума.

n	λ_n
0	0.75
1	1.25
2	1.36809894
3	1.39404616
4	1.39963724
5	1.40082874
...	

Бифуркации двух- и трехпараметрических одномерных отображений

50. Для кубического отображения вида $x_{n+1} = a - bx_n + x_n^3$ найдите область устойчивости на плоскости параметров $(a; b)$, ограниченную линией касательной бифуркации и линией удвоения периода. Покажите, что первая имеет точку сборки.

51. Для кубического отображения из предыдущей задачи область устойчивости 2-цикла имеет вид, типичный для циклов всех периодов и для двухпараметрических отображений (рис. 43). Такие конфигурации К. Мира называют «crossroad area». Линии каких бифуркаций изображены на рисунке? Изобразите эволюцию двукратно проитерированной функции при движении по нескольким характерным маршрутам и поясните типичность подобных конфигураций. Найдите координаты точки сборки.

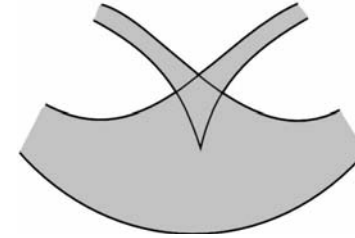


Рис. 43

52. На примере предыдущего отображения установите, как расположены линии, отвечающие отображению максимума в минимум и минимума в максимум. Укажите точку на плоскости параметров, отвечающую 2-циклу, опирающемуся одновременно на два квадратичных экстремума. Покажите, что вдоль найденных линий двукратно проитерированное отображение имеет экстремум четвертой степени.

53. Для неподвижной точки кубического отображения $x_{n+1} = a + bx_n - x_n^3$

- а) найдите линию мультипликатора $\mu = +1$ (касательной бифуркации) на плоскости $(a; b)$. Покажите, что эта линия имеет точку сборки, и укажи-

те её координаты. Изобразите все характерные конфигурации функции $f(x) = a + bx - x^3$ в точке сборки и её окрестности.

- б) Найдите линию мультипликатора $\mu = -1$ и нанесите её на плоскость $(a; b)$. Вычислите производную Шварца вдоль этой линии и укажите, какие её части отвечают бифуркации удвоения, а какие — жесткому переходу. Укажите на плоскости $(a; b)$ точку коразмерности два, в которой производная Шварца обращается в нуль (flip-бифуркация коразмерности два).
- в) Найдите уравнение для линий касательной бифуркации 2-цикла и покажите, что они выходят из найденной выше точки с нулевой производной Шварца и пересекают ось a в точках $a = \pm \sqrt{2/3}$.
- г) Заштрихуйте на рисунке область устойчивости 2-цикла. (Вторая типичная конфигурация двухпараметрических отображений — «spring-area» по терминологии К. Мира.)

54. Изобразите характерную трансформацию двукратно проитерированного отображения из предыдущей задачи в окрестности точки flip-бифуркации коразмерности два.

55. Изобразите качественно бифуркационные диаграммы, соответствующие двум представленным на рис. 44 маршрутам на карте динамических режимов.

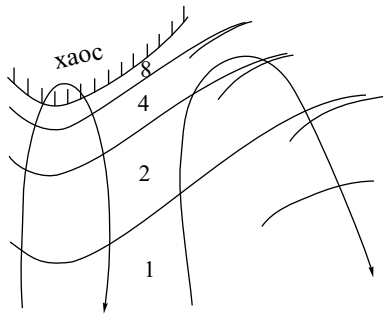


Рис. 44

56. Найдите условие, отвечающее существованию кубической точки перегиба для отображения $x_{n+1} = 1 - ax_n^2 - bx_n^4 - cx_n$. Какой объект зада-

ет это условие в пространстве трех параметров $(a; b; c)$? Найдите условие, отвечающее отображению квадратичного экстремума в кубическую точку перегиба. Какой объект задает это условие в пространстве трех параметров $(a; b; c)$? То же самое для ситуации, когда кубическая точка перегиба отображается в квадратичный экстремум.

57. Покажите, что при условии, что квадратичный экстремум отображается в кубическую точку перегиба, двукратно проитерированное отображение имеет экстремум шестой степени. Изобразите соответствующую ситуацию на итерационной диаграмме. Какова ее коразмерность?

58. Покажите, что при условии, что квадратичный экстремум отображается в другой квадратичный экстремум, а тот — еще в один, то трехкратно проитерированное отображение имеет экстремум восьмой степени. Изобразите соответствующую ситуацию на итерационной диаграмме. Какова ее коразмерность?

Бифуркации двумерных отображений

59. Изобразите качественно динамику изображающей точки на фазовой плоскости двумерного отображения непосредственно в окрестности неподвижной точки в случаях, когда:

- а) оба мультипликатора μ_1 и μ_2 действительны и $0 < \mu_1 < 1, 0 < \mu_2 < 1$; $0 < \mu_1 < 1, -1 < \mu_2 < 0$; $\mu_1 > -1, \mu_2 > -1$; $\mu_1 < -1, \mu_2 < -1$.
- б) Мультипликаторы комплексные, причем модуль близок к единице, а фаза — к нулю; к $\pi/2$; к π .

60. Покажите, что для произвольного двумерного отображения область устойчивости неподвижной точки на плоскости след S — якобиан J линеаризованной матрицы (матрицы монодромии) имеет вид треугольника, ограниченного тремя линиями:

- а) $J = S - 1$, которой отвечает значение одного из мультипликаторов $+1$ и соответственно касательная бифуркация;
- б) $J = -S - 1$, которой отвечает значение одного из мультипликаторов -1 и соответственно бифуркация удвоения периода;
- в) $J = 1$, которой отвечает пара комплексно сопряженных мультипликаторов, модуль которых равен единице, т.е. бифуркация Неймарка рождения инвариантной кривой.

Изобразите эти линии и «треугольник устойчивости» на $(S; J)$ плоскости.

61. Укажите, как располагаются точки, отвечающие всем ситуациям из задачи 59 относительно «треугольника устойчивости».

62. Укажите точки бифуркаций коразмерности два, не имеющие аналога в одномерном случае, на рисунке «треугольника устойчивости».

63. Найдите диапазон значений параметра μ , в котором является устойчивой нетривиальная неподвижная точка отображения Гукенхеймера и Холмса

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= y_n, \\ y_{n+1} &= \mu y_n(1 - x_n).\end{aligned}$$

Определите фазовый угол θ (аргумент мультипликатора), отвечающий обращению якобиана отображения в единицу.

64. Для отображения Эно $x_{n+1} = \lambda - x_n^2 - by_n$, $y_{n+1} = x_n$ найдите неподвижные точки, матрицу монодромии, а также её след и якобиан как функции параметров b и λ . Найдите линии касательной бифуркации, бифуркации удвоения периода и нанесите их на плоскость $(b; \lambda)$. Укажите также области действительных и комплексных мультипликаторов.

65. Опишите эволюцию мультипликаторов неподвижной точки отображения Эно на комплексной плоскости при фиксированном $b > 0$ при увеличении λ .

66. Покажите, что для неподвижной точки отображения Эно матрица монодромии представляется в виде:

$$\begin{pmatrix} S & -J \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

67. Покажите, что векторы—столбцы

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

являются собственными векторами матрицы монодромии неподвижной точки отображения Эно. Здесь λ_1 и λ_2 — её собственные значения. Найдите соответствующие собственные числа. Покажите, что эти векторы задают на плоскости $(x; y)$ систему координат, для которой матрица монодромии диагональна. (Используйте результат предыдущей задачи.) Найдите эволюцию в дискретном времени произвольной начальной точки $(x_0; y_0)$.

68. Найдите элементы 2-цикла отображения Эно как функции параметров λ и b . Покажите, что при условии $\lambda = 3(1+b)^2/4$, соответствующем обращению одного из мультипликаторов неподвижной точки в -1 , рождается 2-цикл. Исследуйте устойчивость этого цикла, для чего найдите матрицу монодромии, вычислите след S и якобиан J этой матрицы. Найдите аналитическое выражение для линии удвоения периода 2-цикла и нанесите ее на $(b; \lambda)$ плоскость.

69. Чему равен якобиан N -цикла отображения Эно? Уменьшается или увеличивается радиус окружности, по которой движутся в комплексной плоскости мультипликаторы циклов отображения Эно при удвоениях периода?

70. Для консервативного отображения Эно опишите эволюцию мультипликаторов на комплексной плоскости при удвоениях периода.

71. Рассмотрите два идентичных связанных одномерных отображения:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= f(x_n) + \varepsilon(y_n - x_n), \\ y_{n+1} &= f(y_n) + \varepsilon(x_n - y_n).\end{aligned}$$

Исследуйте симметричные режимы, т.е. такие, для которых $x_n = y_n$. Покажите, что аттракторы симметричного режима определяются соответствующими решениями для автономной системы. Покажите, что мультипликаторы неподвижной точки связанных систем даются выражениями $\mu_1 = f'(x)$ и $\mu_2 = \mu_1 - 2\varepsilon$. Исходя из этих результатов, найдите линии касательной бифуркации и бифуркации удвоения периода неподвижной точки на плоскости $(\lambda; \varepsilon)$ в случае двух связанных логистических отображений, т.е. при $f(x) = \lambda - x^2$.

Неустойчивое и устойчивое многообразие

72. Изобразите на фазовой плоскости эволюцию устойчивого и неустойчивого многообразий неподвижной точки, 2-цикла и 4-цикла при последовательных удвоениях периода.

73. Изготовьте лист Мёбиуса из бумажной полосы. Изготовьте бумажную модель неустойчивого многообразия цикла удвоенного периода в трехмерном пространстве на базе 3-цикла, показанного на рис. 45.

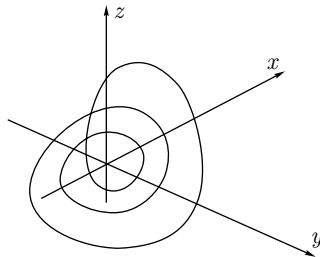


Рис. 45

Квазипериодические режимы и синхронизация в двумерных и одномерных отображениях

74. Для квадратичного отображения вида

$$x_{n+1} = Sx_n - y_n - (x_n^2 + y_n^2),$$

$$y_{n+1} = Jx_n - (x_n^2 + y_n^2)/5$$

покажите, что область устойчивости неподвижной точки имеет вид треугольника из задачи 60. Укажите линию бифуркации Неймарка рождения инвариантной кривой на плоскости параметров $(S; J)$. Изобразите качественно картину языков синхронизации, примыкающих к этой линии. Где расположены острия языков с числами вращения $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$?

75. Найдите линию бифуркации Неймарка на базе симметричного 2-цикла для двух связанных логистических отображений из задачи 71. Для этого, используя свойства якобиана произведения матриц, найдите якобиан матрицы монодромии такого цикла и приравняйте его единице. (Указание. Используйте выражения для произведения и суммы элементов 2-цикла логистического отображения.)

76. Выпишите все числа вращения, отвечающие резонансному циклу периода 5. Изобразите качественно все соответствующие правила обхода элементов цикла. То же самое для цикла периода 7.

77. Для неавтономной системы Ван-дер-Поля в сечении Пуанкаре наблюдается бифуркация Неймарка рождения инвариантной кривой. Какая

бифуркация отвечает этой ситуации, если она описывается укороченным уравнением?

78. Есть ли бифуркация Неймарка в отображении Заславского? В отображении Эно?

79. Как соотносятся отображения Заславского, кольца и окружности, описывающие явления синхронизации?

80. Изобразите качественно итерационные диаграммы для отображения окружности (без взятия модуля), отвечающие числам вращения $w = 1/3$ и $w = 2/3$.

81. Приведите рисунок зависимости напряжения релаксационного генератора пилообразных колебаний из задачи 11 от времени и дайте интерпретацию числа вращения для такой системы. Какие режимы генератора соответствуют иррациональным, а какие — рациональным числам вращения?

82. Для отображения окружности $x_{n+1} = x_n + \Omega + k \sin(2\pi x_n)$ найдите границы основного языка синхронизации и изобразите их на плоскости $(\Omega; K)$. Найдите линию, отвечающую циклам максимальной устойчивости, и укажите на ней точку, отвечающую циклу, опирающемуся одновременно на максимум и на минимум. Найдите линию удвоения периода, лежащую внутри этого языка, и также изобразите ее на плоскости параметров.

83. Получите (в неявном виде) уравнения, определяющие для отображения окружности границы языка синхронизации с числом вращения $w = 1/2$.

Бифуркации и синхронизация в системах типа Ван-дер-Поля

84. Проведите полный бифуркационный анализ укороченного уравнения Ван-дер-Поля под гармоническим воздействием (см. также задачу 107 из главы «Колебания» и 34 из настоящей главы):

$$\dot{z} + i\Delta z = z - |z|^2 z - \varepsilon.$$

Представьте результаты исследования на плоскости параметров Δ, ε . Покажите, что в системе может быть три неподвижные точки, и укажите линию, на которой возможно их слияние в результате бифуркации седло-узел. Обратите внимание, что эта линия имеет точку сборки. Найдите далее линию

бифуркации Андронова—Хопфа. На ней также расположена точка бифуркации Богданова—Тakens коразмерности два, к которой подходит вторая ветвь линии седло-узловой бифуркации и линия рождения предельного цикла из петли сепаратрисы.

85. Получите укороченное уравнение для субгармонического резонанса в уравнении Ван-дер-Поля с внешним гармоническим воздействием:

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = b \sin(\omega t),$$

когда частота внешнего сигнала ω примерно равна утроенной собственной частоте: $\omega \approx 3$. Для этого сначала найдите нерезонансный отклик на этой частоте, для чего вполне достаточно линейного приближения: $x(t) = -A \cos(\omega t)$, где $A = b/8$. Положите далее:

$$x = \frac{1}{2} \left(a e^{i\omega t/3} - A e^{i\omega t} + k.c. \right).$$

Выделяя резонансные члены порядка $e^{i\omega t/3}$ и переходя к подходящим безразмерным переменным, получите

$$\dot{z} = z - |z|^2 z - i\Delta z - 2\varepsilon^2 z + \varepsilon(z^*)^2.$$

86. Покажите, что в случае малой амплитуды воздействия, когда динамика амплитуды и фазы независима, для фазы укороченного уравнения из предыдущей задачи получается уравнение Адлера с утроенной частотой. Найдите в этом приближении границы языка синхронизации, отвечающего резонансу 1 : 3, на плоскости частотная отстройка Δ — амплитуда ε , и покажите, что язык в этом случае представляет собой замкнутую кривую с округлой вершиной.

87. Рассмотрите укороченное уравнение автогенератора типа Ван-дер-Поля—Дуффинга с жестким возбуждением:

$$\dot{z} + i\Delta z = -z + |z|^2 z - k|z|^4 z + i\chi|z|^2 z + \varepsilon.$$

Покажите, что в такой системе вершины устойчивого и неустойчивого языков синхронизации разнесены по оси частот. Найдите расстояние между ними.

88. Получите уравнение для амплитуды и фазы автогенератора типа Ван-дер-Поля—Дуффинга с жестким возбуждением. Используя разложения

в ряд в окрестности точки бифуркации слияния циклов в автономной системе $k = 0.25 + \tilde{k}$ и $R = \sqrt{2} + \tilde{R}$, покажите, что для величины $\tilde{R}$ в стационарном случае приходим к канонической форме катастрофы ласточкин хвост. Нарисуйте (можно качественно) устойчивый и неустойчивый языки синхронизации и покажите, как на них образуется катастрофа ласточкин хвост.

Динамические системы и бифуркации. Задачи для компьютерных исследований

89. Эволюция облака изображающих точек в фазовом пространстве для потоковых систем. Задайте облако изображающих точек в фазовом пространстве в виде прямоугольной «решетки» из набора точек. Напишите программу, позволяющую наблюдать за эволюцией этого облака во времени для представленных ниже потоковых систем. Проследите за эволюцией облака. Ответьте на вопросы: консервативна или диссипативна система? Есть ли в ней аттракторы? Какого типа эти аттракторы? Проведите компьютерное моделирование для различных значений параметров. Изменяется ли при этом характер эволюции облака? Что происходит с аттракторами? Попробуйте изменить форму облака и его начальное положение. *Динамические системы для исследования.*

- Нелинейный осциллятор вблизи катастрофы сборки

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + ax + b + x^3 = 0.$$

- Уравнение Ван-дер-Поля

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = 0.$$

- Уравнение Рэлея

$$\ddot{x} - (\lambda - \dot{x}^2)\dot{x} + x = 0.$$

- Уравнение автогенератора с жестким возбуждением

$$\ddot{x} - (\lambda + kx^2 - x^4)\dot{x} + x = 0.$$

- Брюсселятор

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A - Bx + x^2 y - x, \\ \dot{y} &= Bx - x^2 y. \end{aligned}$$

- Система Рёсслера

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -(y + z), \\ \dot{y} &= x + ay, \\ \dot{z} &= b + z(x - c).\end{aligned}$$

90. Эволюция облака изображающих точек в фазовом пространстве для отображений. Проведите исследование, аналогичное описанному в предыдущей задаче, для представленных ниже дискретных отображений.

Динамические системы для исследования.

- Отображение Эно

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= 1 - \lambda x_n^2 - by_n, \\ y_{n+1} &= x_n.\end{aligned}$$

- Шарик на вибрирующем столе:

$$\begin{aligned}v_{n+1} &= (1 - \varepsilon)v_n + K \sin(\varphi_n), \\ \varphi_{n+1} &= \varphi_n + v_{n+1} \text{!!!}(\text{mod} 2\pi).\end{aligned}$$

- Система Икеды

$$z_{n+1} = A + Bz_n \exp(i|z_n|^2).$$

- Отображение Теннисона, Либермана и Лихтенберга, описывающее отражение света от гофрированного зеркала

$$\begin{aligned}\varphi_{n+1} &= \varphi_n - 2a \sin(x_n) \text{!!!}(\varphi_n, \text{mod} 2\pi), \\ x_{n+1} &= x_n + h \operatorname{tg} \varphi_{n+1} \text{!!!}(x_n, \text{mod} 2\pi).\end{aligned}$$

Если система может быть консервативной, особо рассмотрите соответствующие значения параметров.

91. Однопараметрический анализ потоковых систем. Бифуркация Андронова—Хопфа. Создайте программу, строящую портреты для представленных ниже динамических систем. Пронаблюдайте бифуркацию Андронова—Хопфа рождения предельного цикла, его эволюцию при дальнейшем увеличении параметра. Определите порог бифуркации Андронова—Хопфа из линейного анализа и сравните с результатами компьютерного моделирования.

Динамические системы для исследования.

- Брюсселятор при фиксированном $A = 1$ и различных B .

- Система, описывающая колебания в гликолизе

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 1 - xy^\gamma, \\ \dot{y} &= \alpha(xy^\gamma - y).\end{aligned}$$

(Зафиксируйте какой-либо из параметров.)

- Уравнения колебаний самолета

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= \rho - \cos(\varphi), \\ \dot{\rho} &= 2\rho(\lambda - \mu\rho - \sin(\varphi)).\end{aligned}$$

(Зафиксируйте какой-либо из параметров.)

- Модель «хищник-жертва» вида

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (a + bx - x^2)x - xy, \\ \dot{y} &= xy - my\end{aligned}$$

при $a = b = 1$.

- Система Рёсслера при $b = 2$, $c = 4$ и различных a . Для системы Рёсслера постройте как проекции аттракторов на какую-либо координатную плоскость, так и аттракторы в трехмерном пространстве.

- Генератор Кислова—Дмитриева:

$$\begin{aligned}T\dot{x} + x &= F(z), \\ \dot{y} &= x - z, \\ \dot{z} &= y - z/Q,\end{aligned}$$

где $F(z) = Mz \exp(-z^2)$ для $Q = 10$ и $T = 1$.

92. Двухпараметрическое исследование двумерных потоковых систем. Постройте плоскость параметров вашей системы, содержащую аналитически определенные линии и точки бифуркаций — свои для каждой

динамической системы. Постройте портреты аттракторов (или фазовые портреты) в выбранных вами точках на плоскости параметров. Проведите компьютерные эксперименты, иллюстрирующие динамику системы вблизи линий и точек бифуркаций, а также внутри характерных областей на плоскости параметров. Не демонстрирует ли ваша система каких-либо иных бифуркаций, не представленных на плоскости параметров?

Динамические системы для исследования.

- Модель «хищник-жертва»

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (a + bx - x^2)x - xy, \\ \dot{y} &= xy - my\end{aligned}$$

в случае $a = 1$. Нанесите на плоскость $(b; m)$ линию бифуркации Андронова—Хопфа. Есть ли в анализируемой системе бифуркации коразмерности два? Если да, то какие (см. задачу 33)?

- Уравнение типа Ван-дер-Поля с нелинейностью, характерной для осциллятора с катастрофой складки:

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + a + (x + 1)^2 = 0.$$

Нанесите на плоскость параметров линии бифуркаций седло-узел, Андронова—Хопфа и точку бифуркации коразмерности два (см. задачи 31 и 32). Постройте все характерные фазовые портреты грубых систем в окрестности точки бифуркации коразмерности два. Попробуйте по результатам компьютерного моделирования нанести на плоскость параметров линию, отвечающую петле сепаратрисы.

93. Двухпараметрическое исследование одномерных отображений.

Постройте карту динамических режимов одного из предложенных отображений — т.е. плоскость параметров, на которой оттенком серого цвета обозначены циклы определенного периода. Линии каких бифуркаций коразмерности один можно обнаружить на вашей карте? Какие точки бифуркаций коразмерности два? Укажите ситуации типа «crossroad area» и «spring area». Создайте дополнительную программу, которая строит итерационные диаграммы в задаваемых вами точках карты. С помощью этой программы проведите следующее исследование:

- а) выберите маршрут, пересекающий несколько линий удвоения, и наблюдайте каскад удвоений периода на итерационной диаграмме;

- б) получите циклы с небольшими периодами, например 3 или 5, в островах устойчивости в области хаоса;
- с) выберите точку вблизи линии касательной бифуркации (до ее порога) и наблюдайте соответствующую эволюцию изображающей точки;
- д) наблюдайте хаотические режимы;
- е) исследуйте эволюцию аттракторов в окрестности точки сборки;
- ф) исследуйте эволюцию аттракторов в окрестности критической точки линии удвоения периода (flip-бифуркации коразмерности два).

«Просмотрите» увеличенные фрагменты карты, внутри которых можно наблюдать интересную динамику.

Примеры динамических систем для исследования.

- Кубическое отображение вида

$$x_{n+1} = a - bx_n + x_n^3.$$

- Кубическое отображение вида

$$x_{n+1} = a + bx_n - x_n^3.$$

- «Квартичное» отображение

$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2 - bx_n^4.$$

- Любое другое двух- (и более) параметрическое отображение.

94. Двухпараметрическое исследование двумерных отображений.

Постройте карты динамических режимов двумерного двухпараметрического отображения. Идентифицируйте бифуркационные линии коразмерности один и точки коразмерности два, а также характерные композиции бифуркаций на карте. «Просмотрите» увеличенные фрагменты карты, внутри которых можно наблюдать интересную динамику. Создайте программу, которая демонстрирует аттракторы отображения. С ее помощью наблюдайте эволюцию аттракторов при вариации параметров, в частности каскады удвоений периода, а также хаотические аттракторы и их эволюцию. Особое внимание уделите фейгенбаумовским критическим аттракторам. Просмотрите увеличенные фрагменты критических и хаотических аттракторов. С

помощью программы, демонстрирующей эволюцию изображающей точки на фазовой плоскости, наблюдайте последовательные «прыжки» этой точки, приближающейся к неподвижной точке, а также последовательные «прыжки» изображающей точки, приближающейся к циклу.

Динамические системы для исследования.

- Отображение Эно

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= 1 - \lambda x_n^2 - by_n, \\ y_{n+1} &= x_n.\end{aligned}$$

- Шарик на вибрирующем столе

$$\begin{aligned}v_{n+1} &= (1 - \varepsilon)v_n + K \sin(\varphi_n), \\ \varphi_{n+1} &= \varphi_n + v_{n+1} \pmod{2\pi}.\end{aligned}$$

- Система Икеды

$$z_{n+1} = A + Bz_n \exp(i|z_n|^2).$$

- Отображения «катастроф», отвечающие гиперболической и эллиптической омбиликам

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + U'_x(x; y), \\ y_{n+1} &= y_n + U'_y(x; y).\end{aligned}$$

Здесь потенциальная функция $U(x; y)$ отвечает соответствующей катастрофе. (Это новые, искусственно сконструированные отображения, которые получаются из уравнения градиентной системы при замене соответствующих производных на разности типа $x_{n+1} - x_n$. Исследуйте характерные сечения пространства параметров при вариации третьего параметра.)

95. Квазипериодические движения, синхронизация и бифуркация Неймарка. Получите карты динамических режимов для представленных ниже систем. Идентифицируйте на картах линию бифуркации Неймарка (линию нейтральности) и языки синхронизации. Постройте портреты аттракторов в окрестности какого-либо языка синхронизации. Варьируя параметры, наблюдайте инвариантную кривую и цикл, отвечающий синхронизации. Пронаблюдайте «прыжки» изображающей точки, приближающейся к инвариантной кривой и к некоторому циклу. Определите число вращения, соответствующее этому циклу. Идентифицируйте точки бифуркации коразмерности два, характерные для двумерных отображений, если они имеются в вашей системе.

Динамические системы для исследования.

- Универсальное двумерное отображение

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= Sx_n - y_n - (x_n^2 + y_n^2), \\ y_{n+1} &= Jx_n - (x_n^2 + y_n^2)/5.\end{aligned}$$

(Это новое, искусственно сконструированное отображение. Оно построено так, чтобы в линейном случае получался «треугольник устойчивости» на плоскости параметров, которые в этом случае совпадают с якобианом J и следом S линеаризованной матрицы. Таким образом, на плоскости этих параметров отображение демонстрирует все основные бифуркации коразмерности один и два. Это и позволяет называть его универсальным. А. П. Кузнецов и др. Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2003, №1, с. 12–18.)

- Два идентичных логистических отображения с линейной связью

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= \lambda - x_n^2 + \varepsilon(y_n - x_n), \\ y_{n+1} &= \lambda - y_n^2 + \varepsilon(x_n - y_n).\end{aligned}$$

- Неидентичные связанные логистические отображения с квадратичной связью

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= 1 - \lambda x_n^2 - Cy_n^2, \\ y_{n+1} &= 1 - Ay_n^2 - Bx_n^2\end{aligned}$$

для фиксированных $B = 0.375$, $C = -0.25$.

96. Неустойчивое и устойчивое многообразие. Создайте программу, которая строит устойчивое и неустойчивое многообразие неподвижной точки. Алгоритм может выглядеть следующим образом. В очень малой (за пределами разрешения экрана) окрестности неподвижной точки выбирается случайным образом стартовая точка, которая подвергается последовательным итерациям. Затем процедура повторяется для другой стартовой точки и т.д. В результате на экране компьютера прорисовывается неустойчивое многообразие. Чтобы построить устойчивое многообразие, необходимо реализовать ту же процедуру, итерируя отображение в обратном времени. Для реализации этого метода необходимо очень точно знать координаты неподвижной точки. Если она не ищется аналитически, то предварительно необходимо

организовать соответствующий численный поиск с помощью метода Ньютона. Пронаблюдайте трансформацию многообразий при вариации параметров. Зафиксируйте момент образования гомоклинической структуры и наблюдайте ее эволюцию. Исследуйте две системы: дискретное отображение и поток, причем в последнем случае используйте результаты решения предыдущей задачи.

Дискретные отображения:

- отображение Эно,
- кубическое отображение типа Эно

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= a - bx_n + x_n^3 - cy_n, \\ y_{n+1} &= x_n,\end{aligned}$$

- отображение кольца

$$\begin{aligned}\theta_{n+1} &= \theta_n + \Omega - k \sin(\theta_n) + br_n, \\ r_{n+1} &= br_n - k \sin(\theta_n).\end{aligned}$$

97. Синхронизация в системе Ван-дер-Поля при больших амплитудах. Используя решение задачи 84, постройте линии всех бифуркаций для укороченного уравнения Ван-дер-Поля с гармоническим воздействием. С помощью компьютера постройте фазовые портреты во всех возможных характерных областях этой плоскости. Обратите внимание на возможность нелокальной бифуркации. Особенно тщательно изучите окрестность точки сборки.

98. Субгармонический резонанс в системе Ван-дер-Поля. Выполните аналогичное исследование для субгармонического резонанса, используя укороченное уравнение из задачи 85.

99. Резонанс 1:2. Проведите аналогичное исследование для уравнения

$$\dot{z} = z - |z|^2 z - i\Delta z - 2\varepsilon^2 z + \varepsilon z^*,$$

представляющего собой частный случай нормальной формы резонанса 1 : 2.

100. Автогенератор с жестким возбуждением за порогом слияния циклов. Проведите бифуркационный анализ задачи о синхронизации автогенератора типа Ван-дер-Поля—Дуффинга с жестким возбуждением:

$$\dot{z} + i\Delta z = -z + |z|^2 z - k|z|^4 z + \chi i|z|^2 z + \varepsilon$$

по аналогии с задачей 84. Постройте линии и точки основных бифуркаций и характерные фазовые портреты за порогом бифуркации слияния циклов при $k = 0, 29$ и $\chi = 0.3$. (Слиянию циклов в автономной системе отвечает $k_\delta = 0.25$.) Обратите внимание на возможность устойчивых квазипериодических режимов. Какую особенность по терминологии теории катастроф образуют линии седло-узловых бифуркаций в этом случае?

101. Автогенератор с жестким возбуждением до порога слияния циклов. Решите аналогичную задачу до порога бифуркации слияния циклов в автономной системе при $k = 0.23 < k_\delta = 0.25$ и $\chi = 0.3$.

102. Бифуркации в Интернете. Используя Интернет, создайте обзор ресурсов, дающих возможности для численного исследования бифуркаций.

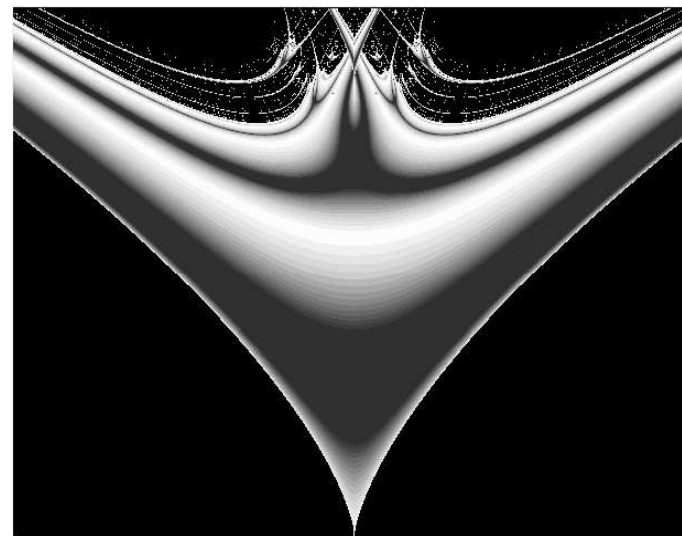
103. Численное исследование бифуркаций. Используя какую-либо программу для численного исследования бифуркаций, проведите бифуркационный анализ универсального двумерного отображения

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= Sx_n - y_n - (x_n^2 + y_n^2), \\ y_{n+1} &= Jx_n - (x_n^2 + y_n^2)/5.\end{aligned}$$

Обратите внимание на особенности внутреннего устройства языков синхронизации. Особенно тщательно изучите языки, отвечающие основным резонансам. Используйте предварительную информацию, полученную методом карт динамических режимов при решении задачи 95.

Глава 4

Хаос



Хаос и его свойства

1. Природа хаоса в простейшей модели. Задайте случайный код из двух символов достаточно большой длины N , для чего используйте стандартную процедуру генерации случайных чисел. Затем

- а) для логистического отображения $x' = 1 - \lambda x^2$ при $\lambda = 2$ методом итераций в обратном времени получите значение x , с которого надо стартовать, для того чтобы последовательность знаков переменной при прямых итерациях воспроизвела вашу случайную последовательность. До каких N компьютер правильно воспроизводит последовательность?
- б) Воспроизведите расчеты для меньших значений λ , например, $\lambda = 1.8$. Оцените, какой процент кодов определенной длины составляют запрещенные, приводящие на некотором шаге к появлению отрицательного числа под знаком квадратного корня.
- в) При $\lambda = 2$ сопоставьте результаты прямых итераций, начиная от $x_0 = \sqrt{3/2}$, и расчета по аналитической формуле

$$x_n = -\cos(2^n \arccos(-x_0)).$$

При каких n наступает расхождение?

2. Перемешивание. Продемонстрируйте на экране компьютера несколько шагов итераций двумерных консервативных отображений — как деформируется закрашенная область, в качестве которой возьмите изображение кота, как у Арнольда. Прodelайте это для:

- для отображения «кот Арнольда», заданного уравнениями

$$x' = x + y, y' = x + 2y \pmod{1},$$

- для отображения пекаря

$$x' = 2x, y = y/2, x \leq 1/2,$$

$$x' = 2x - 1, y' = (y + 1)/2, x \leq 1/2.$$

В чем выражается наличие свойства перемешивания?

3. Система Лоренца. Проведите следующее исследование системы Лоренца.

- а) Составьте анимационную программу, показывающую вращение жидкости в конвективной петле, описываемое уравнениями Лоренца при $b = 1$. Распределение температуры кодируйте цветом. Пронаблюдайте качественно разные режимы динамики при различной интенсивности подогрева.
- б) Составьте программу численного решения уравнений Лоренца

$$\begin{aligned} dx/dt &= \sigma(y - x), \\ dy/dt &= rx - y - xz, \\ dz/dt &= xy - bz \end{aligned}$$

стандартным методом Рунге—Кутты четвертого порядка. Постройте графики временной зависимости для динамических переменных от времени и проекции фазового портрета на плоскости (x, y) , (y, z) , (z, x) . Используйте «классический» набор параметров: $r = 28$, $b = 8/3$, $\sigma = 10$.

- в) Запуская траекторию системы Лоренца из окрестности начала координат, отслеживайте ее поведение при $r = 5, 12, 13.927, 20, 24.06, 28$. Остальные параметры стандартные: $\sigma = 10$, $b = 8/3$. Обсудите результаты в контексте бифуркационного анализа.
- г) Пронаблюдайте переход к хаосу через удвоения периода в системе Лоренца. Для этого постройте «бифуркационное дерево» на плоскости (r, z) , где по оси ординат откладывайте максимумы z . Положите $\sigma = 10$, $b = 8/3$, а интервал изменения параметра r от 98 до 100. (Проверьте, обеспечивает ли выбранный шаг интегрирования достаточную точность!)
- д) Пронаблюдайте переход к хаосу через перемежаемость в системе Лоренца. Для этого постройте графики зависимости $z(t)$ в интервале времени порядка 200 для системы Лоренца при $\sigma = 10$, $b = 8/3$ и значениях $r = 166, 166.15, 166.3$. Получите для указанных параметров также фазовые портреты аттрактора в проекциях на три координатные плоскости.

4. Регулярные режимы и хаос в трехмерных потоках. Постройте фазовые портреты аттракторов для следующих систем.

- а) Система Рёслера при $a = 0.2$, $b = 0.2$ и различных c в интервале от 2 до 5.

б) Генератор с инерционной нелинейностью Анищенко—Астахова:

$$\begin{aligned} dx/dt &= mx + y - xz, \\ dy/dt &= -x, \\ dz/dt &= g(-z + \Phi(x)), \end{aligned}$$

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x^2, & x > 0 \end{cases}$$

при $g = 0.6$ и различных значениях m от 0.4 до 1.5.

в) Схема Чуа

$$\begin{aligned} dx/dt &= \alpha(y - h(x)), \\ dy/dt &= x - y + z, \\ dz/dt &= -\beta y, \\ h(x) &= \begin{cases} (2x - 3)/7, & x \geq 1, \\ -x/7, & |x| \leq 1, \\ (2x + 3)/7, & x \leq -1 \end{cases} \end{aligned}$$

при α и β , изменяющихся в пределах от 2 до 5.

г) Несколько систем Спротта:

$$\begin{aligned} dx/dt &= yz, & dy/dt &= x - y, & dz/dt &= 1 - xy, \\ dx/dt &= -y, & dy/dt &= x + z, & dz/dt &= xz + 3y, \\ dx/dt &= yz, & dy/dt &= x^2 - y, & dz/dt &= 1 - 4x, \\ dx/dt &= -0.2y, & dy/dt &= x + z, & dz/dt &= x + y^2 - z, \\ dx/dt &= xy - z, & dy/dt &= x - y, & dz/dt &= x + 0.3y, \\ dx/dt &= -2y, & dy/dt &= x + z^2, & dz/dt &= 1 + y - 2z, \end{aligned}$$

5. Неавтономные потоковые системы. Проведите исследование одной из представленных ниже неавтономных систем по следующей схеме

а) Постройте несколько различных реализаций $x(t)$ для значений параметров, отвечающих периодическим и хаотическим режимам.

- б) Продемонстрируйте существование чувствительной зависимости от начальных условий, для чего слегка измените эти условия для хаотической реализации; подберите эту вариацию так, чтобы на экране дисплея реализации на начальном участке совпадали, а затем — разошлись.
- в) Продемонстрируйте чувствительную зависимость от начальных условий для фазовых траекторий на плоскости $(x, \dot{x})$.
- г) Создайте программу, рисующую проекцию портрета аттрактора на плоскость $(x, \dot{x})$, и наблюдайте трансформацию аттрактора при вариации параметров.
- д) Продемонстрируйте возможность сосуществования аттракторов при фиксированных значениях параметров.
- е) Создайте программу, которая рисует не только фазовые траектории на плоскости $(x, \dot{x})$, но и точки в сечении Пуанкаре (соответствующие сечения должны быть проведены через период внешнего воздействия) и наблюдайте различные режимы с помощью таких сечений.
- ж) Используя программу построения отображения Пуанкаре, получите карту динамических режимов на плоскости параметров (как правило, используйте плоскость амплитуда — частота воздействия).

Неавтономные системы для исследования.

- Система Уеды

$$\ddot{x} + k\dot{x} + x^3 = B \cos(t).$$

- Осциллятор Дуффинга

$$\ddot{x} + k\dot{x} + x - x^3/6 = A \sin(\omega t).$$

- Система Ван-дер-Поля

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = A \sin(\omega t).$$

- Брюсселятор

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A - Bx + x^2y - x + A \cos(\omega t), \\ \dot{y} &= Bx - x^2y \end{aligned}$$

(положите $A = 0.4$).

6. Сечение Пуанкаре и метод Эно. Создайте программу, позволяющую строить сечения Пуанкаре для трехмерных потоков. Для определения координат точки пересечения с секущей плоскостью используйте метод Эно. Получите вид аттракторов в сечении Пуанкаре и пронаблюдайте их эволюцию при вариации параметров. Сопоставьте вид сечений с соответствующими фазовыми портретами. Модифицируйте программу так, чтобы она демонстрировала также и отображение первого возвращения, используя в качестве переменной одну из координат точки пересечения фазовой траектории с плоскостью. Что можно сказать о динамике системы на основе полученных иллюстраций? Постройте бифуркационные деревья для той же переменной в зависимости от одного из параметров. Сопоставьте исследование аттракторов и вид бифуркационного дерева.

Динамические системы для исследования.

- Система Рёсслера.
- Генератор с инерционной нелинейностью.
- Генератор Кияшко—Пиковского—Рабиновича.
- Генератор Кислова—Дмитриева.

$$T\dot{x} + x = F(x),$$

$$\dot{y} = x - z,$$

$$\dot{z} = y - z/Q,$$

где $F(z) = Mz \exp(-z^2)$ для $Q = 10$ и $T = 1$.

7. Двухпараметрическое исследование трехмерных потоков. Используя предыдущую программу и программу построения карт динамических режимов двумерных отображений, постройте карты для трехмерных потоков. Постройте трехмерные портреты аттракторов в характерных точках плоскости параметров. Пронаблюдайте каскад удвоений периода, хаотические аттракторы, аттракторы, отвечающие «островкам устойчивости» хаотической области.

Динамические системы для исследования те же, что и в предыдущей задаче.

Устойчивость и ляпуновские показатели

8. Ляпуновские показатели. Составьте программы, позволяющие вычислять старший ляпуновский показатель для одномерных отображений, двумерных отображений и потоков. Получите графики зависимости этого показателя от какого-либо параметра для трех систем (по одной из каждого класса). Самостоятельно подберите диапазон изменения управляющего параметра и значения остальных параметров, чтобы зафиксировать интересные особенности динамики (удвоения периода, хаос и др.). Отметьте точки циклов максимальной устойчивости, точки бифуркаций удвоения периода, области хаоса.

Одномерные отображения.

- Логистическое.
- Кубическое.
- Окружности.
- $x_{n+1} = \lambda \cos(x_n)$.

Двумерные отображения.

- Отображение Эно.
- Система Икеды.
- Нелинейное модельное отображение с бифуркацией Неймарка:

$$x_{n+1} = Sx_n - y_n - (x_n^2 + y_n^2),$$

$$y_{n+1} = Jx_n - (x_n^2 + y_n^2)/5.$$

Потоки.

- Система Рёсслера.
- Система Лоренца.
- Система Уеды.
- Генератор с инерционной нелинейностью.
- Одна из систем Спротта: $\ddot{x} + \lambda x - \dot{x}^2 + x = 0$, $2.12 < \lambda < 2.18$.

9. Спектр ляпуновских показателей. Составьте программу вычисления спектра ляпуновских показателей для системы Рёсслера с использованием процедуры ортогонализации по Грамму—Шмидту. Проведите аккуратные вычисления с оценкой погрешности при $c = 5$, $a = 1/5$, $b = 1/5$. Какова сигнатура спектра ляпуновских показателей в этом случае?

10. Двухпараметрический ляпуновский анализ. Составьте программу по построению карт ляпуновского показателя, на которой оттенком серого цвета отобразите его величину. Постройте такие карты для одной из следующих систем.

- Кубическое отображение.
- Логистическое отображение вида $x_{n+1} = r_n x_n (1 - x_n)$ под действием бинарного сигнала для следующих законов изменения r_n : $b, a, \dots; b, b, a, b, a, \dots; b, b, b, b, b, a, a, a, a, a, \dots$. Попробуйте подобрать другие интересные варианты последовательности r_n .
- Логистическое отображение под действием гармонического сигнала $x_{n+1} = \lambda - x_n^2 + \varepsilon \cos(2\pi\omega n)$, где частота ω принимает значения $1/3$, $1/5$, $1/7$.
- Отображение окружности.
- Отображение Эно.
- Система Икеды.
- Универсальное отображение с бифуркацией Неймарка из задачи 95 главы «Динамические системы и бифуркации». Как представлены на таких картах циклы максимальной устойчивости? Области crossroad area? Языки синхронизации?

11. Устойчивость по Пуассону и возвраты Пуанкаре.

- а) Для одной из систем с хаотической динамикой (Лоренца, Рёсслера или любой другой) отследите последовательность возвратов Пуанкаре, взяв несколько значений ε , задающих точность возврата. Какой характер носит последовательность временных интервалов между возвратами?
- б) Рассмотрите систему двух осцилляторов с несоизмеримыми частотами. Отследите последовательность возвратов Пуанкаре, взяв несколько значений ε , задающих точность возврата. Какой характер носит последовательность временных интервалов между возвратами?

Геометрия странных аттракторов

12. Геометрия странных аттракторов.

- а) Для отображения Эно

$$\begin{aligned}x' &= 1 - ax^2 - by, \\y' &= x\end{aligned}$$

при $b = 0.3$, $a = 1.4$ получите изображение странного аттрактора на плоскости $(x; y)$, а также в увеличенном масштабе фрагменты этого изображения, позволяющие рассмотреть кантороподобную поперечную структуру аттрактора. Рассмотрите далее аналогичным образом критический аттрактор в точке $b = 0.3$, $a_c = 1.9516465$. В чем отличие этих случаев?

- б) Придумайте способ графического изображения на экране компьютера процедуры последовательного построения аттрактора Смейла—Вильямса. Этот аттрактор имеет место в трехмерном отображении, определение которого в цилиндрических координатах $(r; \varphi; z)$ таково:

$$\begin{aligned}r' &= 1 + 0.2(r - 1) + 0.1 \cos(\varphi), \\z' &= 0.1 \sin(\varphi), \\ \dot{\varphi} &= 2\varphi \pmod{2\pi}.\end{aligned}$$

Связь цилиндрических координат с декартовыми: $x = r \cos(\varphi)$, $y = r \sin(\varphi)$, $z = z$. Тор, фигурирующий на начальном этапе построения, в сечении имеет окружность радиуса 0.3.

13. Фрактальная размерность. Следующая процедура позволяет генерировать последовательность точек, принадлежащих двумасштабному канторову множеству с масштабными факторами a и b :

$$\begin{aligned}x_{2n} &= b(x_n + 1), \\x_{2n+1} &= -a(x_n + 1), \\x_0 &= b/(1 - b).\end{aligned}$$

Опробуйте на этом множестве алгоритм вычисления размерности по Grassberger-Pocaccia. Специально рассмотрите случай $a = b = 1/3$, что соответствует классическому канторову множеству, а также $a = 2.5029\dots$,

$b = a^2$, что отвечает аппроксимации аттрактора Фейгенбаума двухмасштабным канторовым множеством. Сравните значение размерности с теоретическим.

14. Бассейны притяжения. Постройте бассейны притяжения отображения Эно $x_{n+1} = \lambda - x_n^2 - by$, $y_{n+1} = x_n$ при $b = 0.3$ и значениях параметра $\lambda = 1.15, 1.395$ и 1.405 . Укажите другими цветами аттракторы системы и все седловые точки и циклы. Пронаблюдайте эволюцию границы бассейнов притяжения и ее фрактализацию. Постройте многообразия всех седловых режимов. Как они связаны с границами бассейнов?

Удвоения периода и теория Фейгенбаума

15. Удвоения периода. Создайте программу, демонстрирующую бифуркационное дерево для системы с удвоениями периода и одновременно — портрет аттрактора в выбранной с помощью «мыши» точке на дереве. Пронаблюдайте удвоения периода, хаотические режимы, основные периодические окна в хаотической области и каскад удвоений на их базе, бифуркации слияния полос. Исследование проведите параллельно для одномерного необратимого, двумерного обратимого отображений и потока:

- логистическое отображение,
- отображение Эно,
- система Рёслера.

Что общего, а что различного обнаруживается для этих классов систем?

16. Скейлинг для систем с удвоениями периода. Представьте иллюстрации скейлинга на бифуркационном дереве и графике ляпуновского показателя для одномерного отображения, демонстрирующего удвоения периода. Предварительно определите положение критической точки.

Системы для исследования.

- Логистическое отображение.
- Отображение $x_{n+1} = \lambda \cos(x_n)$.
- Отображение окружности внутри одного из языков синхронизации.

17. Спектры для систем с удвоениями периода. Постройте спектр дискретного отображения в области изменения одного из параметров, отвечающей удвоениям периода. Проследите за эволюцией спектра при удвоениях. Постройте спектр точно в критической точке. Оцените уровень перепада между субгармониками разного уровня и сравните с предсказанием теории Фейгенбаума. Постройте спектр для одного из окон устойчивости в закритической точке и в точке, отвечающей хаотическому режиму.

Системы для исследования.

- Логистическое отображение, $\lambda_c = 1.4011552$.
- Отображение Эно для $b = 0.3$, $\lambda_c = 1.9516465$.

18. Фрактальные свойства критического аттрактора при переходе к хаосу через удвоения периода.

- Составьте программу, позволяющую находить неустойчивые циклы периода $2, 4, 8, \dots, 2^k$ для логистического отображения $x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2$ в критической точке $\lambda_c = 1.401155189092$, и вычислите мультипликаторы этих циклов. Для нахождения циклов используйте хорошо сходящуюся рекуррентную схему $x^{n+1} = x + (f(x^n) - x^n)/2.6$, где $f(x)$ обозначает результат 2^k -кратной итерации логистического отображения при старте из точки x .
- Для логистического отображения получите на экране компьютера несколько первых уровней построения критического аттрактора как кантороподобного множества.
- Постройте график сигма-функции Фейгенбаума.
- Вычислите размерность Хаусдорфа критического аттрактора Фейгенбаума D . Для этого составьте программу, вычисляющую сумму l_i^D , где l_i — длины интервалов, отвечающие k -му уровню построения аттрактора, и подберите D так, чтобы значения суммы для k -ого и $k + 1$ -го уровней совпадали. Как зависит точность расчета от уровня k ?
- Составьте программу, позволяющую получить спектр обобщенных размерностей Реньи D_q и скейлинг—спектр $f(\alpha)$. Постройте графики этих зависимостей при различном выборе уровня k . Сравните результаты с расчетами по модели двухмасштабного канторова множества. Вычислите по возможности точно информационную и корреляционную размерности критического аттрактора.

19. Воздействие шума на системы с удвоениями периода.

- а) Постройте бифуркационное дерево и график ляпуновского показателя для логистического отображения под действием шума $x_{n+1} = \lambda - x_n^2 + \varepsilon y_n$, где y_n — случайная последовательность, генерируемая компьютером. Покажите, что шум разрушает тонкую структуру дерева тем сильнее, чем более глубокий уровень организации дерева мы рассматриваем. Как влияет шум на положение границы хаоса?
- б) Продемонстрируйте скейлинг на бифуркационном дереве и графике ляпуновского показателя. Для этого действуйте аналогично задаче 16, но пересчитывайте амплитуду шума на каждом шаге преобразования подобия в $\mu_F = 6.618 \dots$ раз. (Константа μ_F найдена Кратчфильдом с соавторами.)
- в) Продумайте, как можно использовать свойство скейлинга для оценки константы μ для отображений $x_{n+1} = \lambda - x_n^N + \varepsilon y_n$ с другим порядком экстремума. Сделайте такие оценки для $N = 4, 6, 8$.
- г) Постройте карты ляпуновских показателей для кубического отображения $x_{n+1} = a - bx_n + x_n^3 + \varepsilon y_n$ при различных значениях амплитуды шума. Как трансформируется граница хаоса и режимы максимальной устойчивости?

20. Нефейгенбаумовские удвоения и трикритические точки в двухпараметрических отображениях. Для кубического отображения $x_{n+1} = a - bx_n + x_n^3$ найдите условие, когда максимум отображается в минимум и нанесите соответствующую линию на карту динамических режимов (см. также задачу 52 из главы «Динамические системы и бифуркации»). Определите визуально точку, в которой эта линия подходит к границе хаоса на основе фейгенбаумовских удвоений. Сравните вашу оценку с точными значениями $a_T = 0.24269876 \dots$, $b_T = 1.95138576 \dots$. Постройте бифуркационное дерево и графики ляпуновского показателя вдоль этой линии. В чем их отличие от фейгенбаумовского случая? Продемонстрируйте скейлинг на этих графиках, используя константы $\delta_T = 7.248$ по оси управляющего параметра, $a_T^2 = 2.876$ по оси переменной x . Константа δ_T характерна для удвоений в отображении $x_{n+1} = \lambda - x_n^4$. Для объяснения ее появления в данном случае покажите, что при условии отображения экстремума в экстремум двукратно проитерированное отображение имеет экстремум четвертого порядка. Обсудите универсальный характер полученных результатов для двухпараметрических одномерных отображений. Какой способ можно

рекомендовать на их основе для поиска концевых точек фейгенбаумовских линий на плоскости параметров?

Перемежаемость

21. Пронаблюдайте переход к хаосу через перемежаемость в логистическом отображении $x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2$ при выходе из окна периода 3 в сторону уменьшения параметра λ (начните с $\lambda = 1.76$). Постройте графики зависимости x от дискретного времени n для нескольких значений параметра λ , меньших порога возникновения перемежаемости. Пронаблюдайте присутствие ламинарных и турбулентных стадий и изменение их длительности в зависимости от параметра λ .

Квазипериодические явления

22. Разложите в цепную дробь $157/225$.

23. Разложите в цепную дробь: $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$. Попробуйте самостоятельно подумать о свойствах цепных дробей, которые получаются при разложении $\sqrt{n}$, где n — натуральное число, не являющееся квадратом натурального числа.

24. Найдите значения периодических цепных дробей: $[0; a, a, a \dots]$, $[0; a, b, a, b, \dots]$.

25. Некоторые восточные народы пользуются смешанным солнечно-лунным календарем. Месяцы у них имеют то 29, то 30 дней. Месяцы из 29 дней называются «пустыми», а из 30 дней «полными». Календарный год состоит то из двенадцати, то из тринадцати месяцев. Греческий математик Метон (433 г. до н.э.) предложил замечательное решение проблемы солнечно-лунного календаря. По Метону из каждых 19 лет семь имеют по тринадцать месяцев, а остальные двенадцать лет — по двенадцать месяцев. Из общего числа 235 лунных месяцев, помещающихся в «золотом» девятнадцатилетнем периоде, 110 пустых и 125 полных. Здесь люди столкнулись с более сложной задачей одновременного приближения к отношениям трех величин: длины суток, длины лунного месяца и длины солнечного года. С достаточно хорошим приближением 1 солнечный год составляет 365.2422 суток, 1 лунный месяц — 29.5306 суток. Разложите в цепную дробь отношение $(1 \text{ солнечный год}) / (1 \text{ лунный месяц})$ и получите объяснение удачи

изобретения Метона. Разложите в цепную дробь и отношение длины лунного месяца к суткам.

26. Синхронизация и квазипериодические режимы для отображения окружности. Постройте карту динамических режимов для отображения окружности. Получите так называемую «чертову лестницу», дающую зависимость числа вращения от параметра при $K < 1$ и $K = 1$. Укажите на этой лестнице ступеньки, отвечающие нескольким последовательным уровням построения дерева Фарей. Получите увеличенный фрагмент чертовой лестницы в окрестности иррационального числа вращения, $\omega = (\sqrt{5} - 1)/2$, известного как «золотое сечение» при $K = 1$. Идентифицируйте ступеньки этой лестницы, отвечающие аппроксимации золотого сечения при помощи чисел Фибоначчи. Получите итерационные диаграммы, демонстрирующие циклы с числами вращения $1/3$ и $2/5$. Получите итерационную диаграмму, отвечающую какому-либо квазипериодическому режиму. Используйте для определения соответствующих параметров чертову лестницу. Постройте спектр в этой точке. Как в структуре спектра проявляется квазипериодический характер режима?

27. Разрушение инвариантной кривой. Проследите за эволюцией инвариантной кривой вдоль границ языков синхронизации с числами вращения $w = 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5$ для отображения кольца

$$\begin{aligned}\theta_{n+1} &= \theta_n + \Omega - k \sin \theta_n + br_n, \\ r_{n+1} &= br_n - k \sin \theta_n.\end{aligned}$$

(Если это удобно, можно использовать языки $2/3, 2/5$ и т.д.) Как из инвариантной кривой возникает хаотический аттрактор? Обсудите устройство многообразий соответствующих основных циклов внутри языков. Однотипно ли оно для разных языков, или имеются принципиальные отличия? Используйте как построение многообразий, так и технику «конденсации» облака изображающих точек в фазовом пространстве.

Затем проведите аналогичное рассмотрение для универсального двумерного отображения с бифуркацией Неймарка

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= Sx_n - y_n - (x_n^2 + y_n^2), \\ y_{n+1} &= Jx_n - (x_n^2 + y_n^2)/5.\end{aligned}$$

В чем отличие наблюдаемой картины для этих двух отображений? Обсудите, как только возможно детально, внутреннее устройство каждого языка в обоих случаях (удвоения периода, хаос на их основе, точки бифуркаций коразмерности два и т.д.).

28. Глобальные бифуркации в системе с квазипериодическими режимами. Постройте карту динамических режимов неавтономного броселятора

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A - (B + 1)x + x^2y + b \cos \omega t, \\ \dot{y} &= Bx - x^2y\end{aligned}$$

на плоскости параметров амплитуда воздействия b , частота воздействия ω при $b = 1.2, A = 0.4$. Укажите точку бифуркации коразмерности два, в которой смыкаются два основных языка синхронизации с числами вращения $w = 1$ и $w = 1/2$. Постройте сечение Пуанкаре в окрестности этой точки. Попытайтесь восстановить хотя бы качественно полную картину бифуркаций на основе такого исследования. Пронаблюдайте более подробно глобальную бифуркацию исчезновения инвариантной кривой в результате ее столкновения с неустойчивым многообразием седлового 2-цикла при $b = 0.02$ и $\omega = 0.62, 0.6288, 0.62889$. Для последнего значения увеличьте «ломаный» участок инвариантной кривой и покажите, что он имеет складки. При $\omega = 0.629$ наблюдайте, как изображающие точки в сечении Пуанкаре «убегают» с инвариантной кривой. К какому множеству они при этом движутся?

29. Удвоения торов. Для логистического отображения под квазипериодическим воздействием

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= \lambda - x_n^2 + \varepsilon \cos(2\pi y_n), \\ y_{n+1} &= y_n + \omega \pmod{1}, \\ \omega &= (\sqrt{5} - 1)/2,\end{aligned}$$

пронаблюдайте при небольших ε ($\varepsilon \leq 0.1$) инвариантные кривые (торы). С помощью отображения первого возвращения для переменной x продемонстрируйте удвоения торов с ростом управляющего параметра λ при фиксированной амплитуде ε . Могут ли пересекаться инвариантные кривые, отвечающие удвоенному тору? Как изображающая точка «прыгает» по 2-тору? 4-тору? Определите примерное положение линий удвоения торов на плоскости (λ, ε) . Какие значения параметра λ отвечают точкам, в которых эти линии подходят к оси λ ? Обсудите связь бифуркации удвоения торов с обычными удвоениями. Как вы думаете, возможны ли удвоения разрушенных торов?

30. Странные нехаотические аттракторы. Для логистического отображения под действием квазипериодического воздействия с частотой,

отвечающей золотому сечению

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= \lambda - x_n^2 + \varepsilon \cos(2\pi y_n + \varphi), \\y_{n+1} &= y_n + \omega \pmod{1}, \\ \omega &= (\sqrt{5} - 1)/2,\end{aligned}$$

постройте отображения первого возвращения для переменной x при $\varepsilon = 0.3$, $\lambda = 0.9$; $\varepsilon = 0.15$, $\lambda = 0.9$; $\varepsilon = 0.45$, $\lambda = 0.8$; $\varepsilon = 0.45$, $\lambda = 0.9$. Какие из полученных объектов обладают фрактальной структурой? Найдите в каждом случае показатели Ляпунова. Классифицируйте соответствующие аттракторы. Значения $\lambda_c = 1.1580968$, $\lambda_c = 0.3602485$, $\lambda_c = 2.48323$ отвечают критической ситуации, в которой сходятся области существования странного нехаотического аттрактора, хаоса и различных торов. Постройте фазовый портрет аттрактора в этой точке. С помощью программы, рисующей фазовые портреты, просмотрите возможные режимы в окрестности критической точки на плоскости (λ, ε) .

Хаос в Интернете

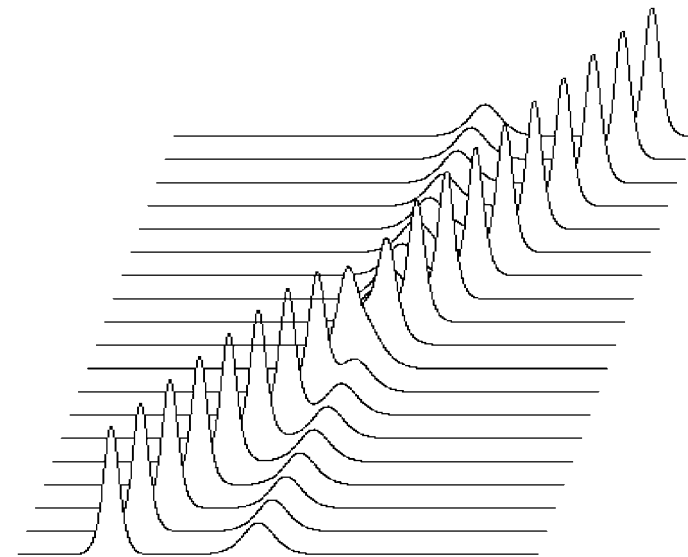
31. Подготовьте Интернет-страницу по нелинейной динамике, фракталам и аналогичной тематике. Она может отражать Ваши личные научные интересы; быть посвящена какому-либо избранному вопросу нелинейной динамики; содержать, например, исторические сведения, персоналии, элементы учебного характера, литературу и т.д. Предварительно, используя поисковые системы и ссылки, которые можно найти на уже известных Вам страницах, найдите и ознакомьтесь в сети Интернет с аналогичными сайтами. Используйте Интернет для накопления материала для Вашего сайта и ссылок. Используйте знания и материалы, полученные Вами при обучении в университете, — от лекций до решения задач (с указанием автора и с соответствующей ссылкой. Необходимо получить и согласие автора.) Тема сайта может быть как достаточно глобальной (бифуркации, катастрофы и их приложения и др.), так и более частной (золотое сечение, математический маятник и др.). Дизайн страницы может быть как предельно простым и лаконичным, так и изысканным — по Вашим вкусам и возможностям.

Демонстрации хаоса

32. Подготовьте несколько анимационных программ, иллюстрирующих явления нелинейной динамики (различные бильярды, «прыгающий шарик», двойной маятник, система Лоренца и т.д.). Сделайте программы удобными для демонстраций и пользования.

Глава 5

Нелинейные волны



Эвристический подход к нелинейным волновым уравнениям

1. Получить волновые уравнения, описывающие слабонелинейные процессы в средах со следующими законами дисперсии:

- $\omega = c_0 k - \beta k^3$;
- $\omega = \frac{c_0 k}{1 + \beta k^2}$;
- $\omega^2 = c_0^2 k^2 - \beta k^2$;
- $\omega^2 = \frac{c_0^2 k^2}{1 + \beta k^2}$;
- $\omega^2 = \omega_0^2 + c_0^2 k^2$.

Здесь β , c_0 , ω_0 — положительные постоянные параметры. Рассмотреть случаи квадратичной и кубичной нелинейности.

Простые волны и образование разрывов

2. Распространение волн в одномерном потоке электронов при учете кулоновского взаимодействия описывается уравнениями

$$\begin{aligned} v_t + vv_x &= \eta \varphi_x, \\ \rho_t + (\rho v)_x &= 0, \\ \varphi_{xx} &= (\rho - \rho_0)/\varepsilon_0, \end{aligned}$$

где v — скорость электронов, ρ — плотность заряда, ρ_0 — плотность заряда положительного нейтрализующего ионного фона, φ — потенциал поля пространственного заряда, η — удельный заряд электрона, ε_0 — диэлектрическая постоянная. Рассмотреть задачу о распространении гармонического сигнала со следующими граничными условиями:

$$\begin{aligned} v(x=0; t) &= v_0 + a \sin(\omega t), \\ \rho(x=0; t) &= \rho_0, \\ \varphi(x=0; t) &= 0. \end{aligned}$$

Считается, что $a \ll v_0$. Найти координату опрокидывания волны и вычислить спектральный состав конвекционного тока. Построить графики зависимости первых трех гармоник тока от координаты.

3. Распространение волн в холодном гравитирующем газе описывается уравнениями

$$\begin{aligned} v_t + vv_x &= -\varphi_x, \\ \rho_t + (\rho v)_x &= 0, \\ \varphi_{xx} &= 4\pi\gamma\rho, \end{aligned}$$

где v — скорость газа, ρ — плотность, φ — потенциал гравитационного поля, γ — гравитационная постоянная. Рассмотреть задачу об эволюции начального возмущения следующего вида:

$$\begin{aligned} v(x=0; t) &= 0, \\ \rho(x=0; t) &= \begin{cases} \rho_0 \cos k\xi & \text{при } -\pi/2 < x < \pi/2, \\ 0 & \text{при } x < -\pi/2, x > \pi/2. \end{cases} \end{aligned}$$

Найти момент образования особенности. Построить графики зависимости скорости и плотности от координаты в различные моменты времени.

4. Найти условие опрокидывания волны в нелинейной диссипативной среде (поток частиц с учетом столкновений), описываемой уравнением

$$u_t + uu_x = \nu u,$$

где коэффициент ν считается положительным. Рассмотреть задачу с начальным условием $u(x; t=0) = u_0 + a \sin kx$.

5. Исследовать процесс опрокидывания волны в нелинейной активной среде, описываемой уравнением

$$u_t + uu_x = \nu u,$$

где коэффициент ν считается положительным. Рассмотреть задачу с начальным условием $u(x; t=0) = a \sin kx$. Построить зависимость амплитуды разрыва от координаты. Во что превращается синусоидальная волна при $t \rightarrow \infty$?

6. Найти координату разрыва при распространении электромагнитной волны в среде с нелинейной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = \varepsilon(E)$, если при $x=0$ задано гармоническое возмущение $E = E_0 \sin(\omega t)$. Рассмотреть случаи:

- $\varepsilon = \varepsilon_0(1 - 3\alpha E^2)$;
- $\varepsilon = \varepsilon_0(1 + 3\alpha E^2)$.

Считать, что нелинейность является слабой ($|\alpha E_0^2| \ll 1$).

7. Рассмотреть распространение начального возмущения в виде симметричного треугольного импульса

$$u(x; t = 0) = \begin{cases} 2ax/L & \text{при } 0 \leq x \leq L/2, \\ 2a(L-x)/L & \text{при } L/2 \leq x \leq L \end{cases}$$

в нелинейной среде, описываемой уравнением простой волны.

8. Распространение длинных (длина волны много больше глубины жидкости) гравитационных волн на поверхности жидкости описывается уравнениями «мелкой воды» (Дж. Эйри, 1845)

$$\begin{aligned} v_t + vv_x + gh_x &= 0, \\ h_t + (hv)_x &= 0, \end{aligned}$$

где v — скорость, h — глубина, g — ускорение свободного падения. Для уравнений «мелкой воды» решить при помощи метода характеристик задачу со следующими начальными условиями:

$$\begin{aligned} v &= 0 \text{ при } -\infty < x < \infty; \\ h &= 0 \text{ при } 0 < x < \infty; \\ h &= H \text{ при } -\infty < x < 0. \end{aligned}$$

9. Показать, что в уравнениях «мелкой воды» имеет место диссипация энергии, если на разрыве выполняются законы сохранения массы и импульса. Уравнение Бюргерса. Ударные волны.

10. Пользуясь преобразованием Коула—Хопфа, показать, что начальный профиль в виде ступеньки

$$u(x; t = 0) = \begin{cases} u_1 & \text{при } x > 0, \\ u_2 > u_1 & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

с течением времени превращается в стационарную ударную волну.

11. Рассмотреть поведение начального возмущения в виде δ -импульса

$$u(x; t = 0) = S\delta(x),$$

где $S = \text{const}$. При помощи преобразования Коула—Хопфа найти точное решение и показать, что в пределе малого затухания решение на больших временах совпадает с полученным в задаче 7.

12. При помощи метода размерностей решить задачу о сильном точечном взрыве в атмосфере. Найти закон распространения ударной волны как функцию времени, энергии, выделившейся при взрыве, и плотности среды. Оценить давление на фронте ударной волны. Считать, что давление много больше атмосферного.

13. При помощи метода размерностей найти период колебаний газового пузыря, который образуется при затухании ударной волны при взрыве в жидкости. Период искать как функцию выделившейся энергии, плотности и давления в невозмущенной среде.

Стационарные нелинейные волны

14. Проанализировать решения в виде стационарных волн для следующих нелинейных волновых уравнений:

- уравнение КдВ $u_t + uu_x + \beta u_{xxx} = 0$;
- модифицированное уравнение КдВ $u_t + u^2 u_x + \beta u_{xxx} = 0$;
- регуляризованное уравнение длинных волн $u_t + uu_x - \beta u_{xxt} = 0$;
- уравнение Буссинеска $u_{tt} - c^2 u_{xx} - (uu_x)_x - \beta u_{xxx} = 0$;
- улучшенное уравнение Буссинеска $u_{tt} - c^2 u_{xx} - (uu_x)_x + \beta u_{xxtt} = 0$;
- нелинейное уравнение Клейна—Гордона $u_{tt} - c^2 u_{xx} + \omega_0^2 u - \beta u^3 = 0$.

Каждое из этих уравнений привести к виду уравнения консервативного нелинейного осциллятора, найти его потенциальную энергию и построить фазовый портрет. Охарактеризовать возможные типы стационарных волн. На фазовых портретах указать траектории, отвечающие уединенным волнам, и найти соответствующие точные решения.

15. Распространение ленгмюровских волн в холодной бесстолкновительной плазме описывается уравнениями

$$\begin{aligned} v_t + vv_x &= \eta \varphi_x, \\ \rho_t + (\rho v)_x &= 0, \\ \varphi_{xx} &= (\rho - \rho_0)/\varepsilon_0, \end{aligned}$$

где v — скорость электронов, ρ — плотность заряда, ρ_0 — плотность заряда положительного нейтрализующего ионного фона, φ — потенциал поля пространственного заряда, η — удельный заряд электрона, ε_0 — диэлектрическая постоянная. Рассматривая решения в виде стационарных волн, привести эти уравнения к уравнению консервативного нелинейного осциллятора. Найти потенциальную энергию этого осциллятора и построить его фазовый портрет. При каких условиях происходит опрокидывание волны?

16. Распространение ионно-звуковых волн в плазме описывается уравнениями

$$\begin{aligned} v_t + vv_x &= -\frac{e}{M}\varphi_x, \\ \rho_t + (\rho v)_x &= 0, \\ \varphi_{xx} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \left(\rho_0 \exp\left(\frac{e\varphi}{k_B T_e}\right) - \rho \right), \end{aligned}$$

где v — скорость ионов, ρ — плотность заряда, ρ_0 — невозмущенная плотность, φ — потенциал поля пространственного заряда, e и M — заряд и масса иона соответственно, ε_0 — диэлектрическая постоянная, k_B — постоянная Больцмана, T_e — электронная температура. Рассматривая решения в виде стационарных волн, привести эти уравнения к уравнению консервативного нелинейного осциллятора. Найти потенциальную энергию этого осциллятора и построить его фазовые портреты при различных значениях параметров. Определить условия, при которых существуют решения в виде уединенных волн, и указать на фазовой плоскости отвечающие им фазовые траектории.

17. Радиотехническая линия передачи (LC -цепочка) состоит из индуктивностей L и емкостей, заряд на которых Q нелинейным образом зависит от приложенного напряжения V по закону $Q(V) = CV + C_1 V^2$ (рис. 46). Получить из законов Кирхгофа дифференциально-разностное уравнение, описывающее распространение волн в цепочке, затем, считая, что длина волны велика по сравнению с периодом цепочки, свести его к уравнению в частных производных, сохраняя члены, ответственные за дисперсию. Для решений в виде стационарных волн получить из этого уравнения уравнение нелинейного осциллятора и построить его фазовый портрет. Исследовать на фазовой плоскости типы стационарных волн, которые могут распространяться в цепочке. Найти решения в виде уединенных волн и указать на фазовом портрете соответствующие им фазовые траектории.

18. Плоская электромагнитная волна распространяется в среде из нелинейных электромагнитных осцилляторов, собственная частота ω ко-

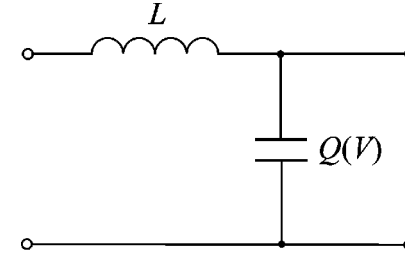


Рис. 46

торых зависит от поляризации среды P по закону $\omega^2 = \omega_0^2 (1 + \alpha P^2)$. Показать, что распространение волны подчиняется уравнениям (уравнения Максвелла—Дуффинга)

$$\begin{aligned} E_{tt} - c^2 E_{xx} &= -\frac{1}{\varepsilon_0} P_{tt}, \\ P_{tt} + \omega_0^2 (1 + \alpha P^2) P &= \varepsilon_0 \Omega^2 E, \end{aligned}$$

где E — напряженность электрического поля, $\Omega^2 = (e^2 N)/(m\varepsilon_0)$, N — число осцилляторов в единице объема, e и m — заряд и масса электрона соответственно, ε_0 — диэлектрическая постоянная. Для решений в виде стационарных волн получить из этих уравнений уравнение консервативного нелинейного осциллятора и построить его фазовый портрет. Найти его решения в виде уединенных волн и указать на фазовом портрете соответствующие траектории.

Получение уравнения КдВ и других «длинноволновых» уравнений в конкретных физических задачах

Во всех задачах этого раздела предлагается получить уравнение КдВ или другие родственные уравнения в пределе слабонелинейных длинноволновых возмущений, пользуясь методом медленно меняющегося профиля.

19. Получите уравнение КдВ из уравнения Буссинеска

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} - (uu_x)_x - \beta u_{xxx} = 0.$$

Сравните солитонные решения уравнений КдВ (задача 14).

20. Получите уравнение КдВ для ионно-звуковых волн в плазме (исходные уравнения приведены в задаче 16) и найдите его солитонные решения. Считая, что нелинейность является слабой, а скорость распространения волны незначительно превышает скорость ионного звука $c_s = \sqrt{k_B T_e / M}$, аппроксимируйте потенциальную энергию, найденную в задаче 16 кубическим полиномом, и найдите приближенное аналитическое решение для уединенной волны. Сравните полученные решения между собой.

21. При распространении ленгмюровских волн в тонком плазменном цилиндре радиуса r_0 , расположенном вдоль оси идеально проводящего металлического волновода радиуса $R \gg r_0$, можно приближенно представить потенциал электростатического поля в виде $\varphi(r, x) \approx \varphi(x) J_0(k_\perp r)$, где r и x — радиальная и продольная координаты соответственно, J_0 — функция Бесселя нулевого порядка, $k_\perp \approx 2.405/R$ — первый корень уравнения $J_0(k_\perp R) = 0$, и модифицировать систему уравнений, приведенную в задаче 15, следующим образом:

$$\begin{aligned} v_t + vv_x &= \eta \varphi_x, \\ \rho_t + (\rho v)_x &= 0, \\ \varphi_{xx} - k_\perp^2 \varphi &= (\rho - \rho_0)/\varepsilon_0 \end{aligned}$$

Получите для этой системы уравнение КдВ.

22. Для волн в нелинейной радиотехнической линии передачи (задача 17) получите уравнение КдВ в случае, когда нелинейность является квадратичной ($Q(V) = C_0 V + C_2 V^2$), и модифицированное уравнение КдВ в случае, когда нелинейность кубичная ($Q(V) = C_0 V + C_3 V^3$). Сравните солитонные решения уравнения КдВ с решениями в виде уединенных волн, найденными в задаче 17.

23. Получите уравнение Бюргерса для волн в нелинейной линии передачи с диссипацией, одно звено которой приведено на рис. 47. Нелинейность считать квадратичной. Сопротивление R считать малым. Найдите решение уравнения Бюргерса в виде стационарной ударной волны.

24. Получите уравнение КдВ для гравитационных волн на поверхности неглубокой жидкости. Для этого модифицируйте уравнения «мелкой воды» (задача 8) таким образом, чтобы учесть дисперсию:

$$\begin{aligned} v_t + vv_x + gh_x + \beta v_{xxx} &= 0, \\ h_t + (hv)_x &= 0. \end{aligned}$$

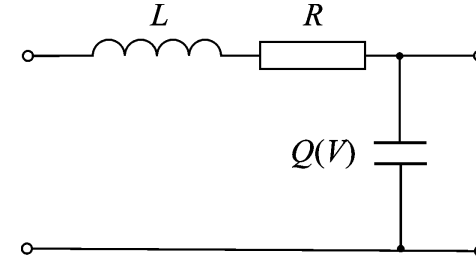


Рис. 47

Коэффициент β подберите таким образом, чтобы дисперсионное соотношение полученной системы совпадало с точным законом дисперсии для слоя жидкости произвольной глубины

$$H\omega^2 = gk \operatorname{th}(kH)$$

с точностью до членов порядка $(kH)^3 \ll 1$.

25. Получите модифицированное уравнение КдВ для системы, описанной в задаче 18. Найдите решения в виде солитонов и сравните с соответствующими решениями, полученными в задаче 18.

Точные методы в теории солитонов

26. Законы сохранения. Преобразование

$$u = w + i\varepsilon w_x + \varepsilon^2 w^2, \quad (1)$$

где ε — произвольный параметр, переводит решение уравнения Гार्днера $w_t + 6(w + \varepsilon^2 w^2)w_x + w_{xxx} = 0$ в решение уравнения КдВ $u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$. Покажите, что из закона сохранения для уравнения Гार्днера

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} w dx = 0$$

следует наличие бесконечного числа законов сохранения для уравнения КдВ. Для этого выразите решение уравнения (1) $w(u)$ в виде ряда по степеням ε :

$$w = w_0(u) + \varepsilon w_1(u) + \varepsilon^2 w_2(u) + \dots$$

Подставляя это выражение в (1) и приравнявая члены при одинаковых степенях ε , последовательно вычислите w_n до $n = 6$. Интегралы движения имеют вид

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} w_n(u) dx.$$

Покажите, что все нечетные интегралы тождественно равны нулю. Найдите нетривиальные I_n для $n = 0, 2, 4, 6$.

27. Метод Хироты. Заменой переменных $u = g/f$ приведите модифицированное уравнение КдВ

$$u_t + 6u^2 u_x + u_{xxx} = 0$$

к системе двух билинейных уравнений относительно функций g и f

$$\begin{aligned} g^2 &= f f_{xx} - f_x^2, \\ g_t f - g f_t + f g_{xxx} - 3f_x g_{xx} + 3f_{xx} g_x - g f_{xxx} &= 0. \end{aligned}$$

Отыскивая решения этой системы в виде рядов

$$\begin{aligned} g &= \varepsilon g_1 + \varepsilon^3 g_3 + \dots, \\ f &= 1 + \varepsilon^2 f_2 + \varepsilon^4 f_4 + \dots \end{aligned}$$

получите односолитонное решение уравнения мКдВ. При этом следует выбрать $g_1 = 2k \exp \theta$, где $\theta = kx - k^3 t$, k — вещественный параметр, найти решение для f_2 и показать, что ряды на этом обрываются, т.е. все члены более высокого порядка равны нулю.

28. Выбирая в предыдущей задаче решение в первом порядке в виде суммы двух экспонент $g_1 = 2k_1 \exp \theta_1 + 2k_2 \exp \theta_2$, где $\theta_{1,2} = k_{1,2}x - k_{1,2}^3 t$, получите решение, описывающее взаимодействие двух солитонов. Последовательно найдите решения для f_2, g_3, f_4 и убедитесь, что члены более высоких порядков обращаются в нуль.

29. Полагая, что в формуле для двухсолитонного решения, полученной в предыдущей задаче, параметры $k_{1,2}$ являются комплексно сопряженными, $k_{1,2} = k_r \pm i k_i$, найдите брызговое решение уравнения мКдВ. Постройте на компьютере зависимости $u(x)$ в различные моменты времени, иллюстрирующие динамику брыззера при различных значениях $k_{r,i}$.

30. Заменой переменных $u = g/f$ приведите нелинейное уравнение Шрёдингера

$$i u_t + u_{xx} + \beta |u|^2 u = 0$$

к билинейной форме

$$\begin{aligned} g g^* &= \frac{2}{\beta} (f f_{xx} - f_x^2), \\ i (g_t f - g f_t) + f g_{xx} - 2 f_x g_x + g f_{xx} &= 0 \end{aligned}$$

и, действуя аналогично задачам 27, 28, найдите одно- и двухсолитонные решения.

31. Покажите, что уравнение sin-Гордона

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0$$

заменой переменных $\xi = (x - t)/2$, $\tau = (x + t)/2$, которая фактически означает переход к интегрированию вдоль характеристик, приводится к виду

$$u_{\xi\tau} = \sin u. \quad (2)$$

Положите $u_{\xi}^2 = 2g/f$ и потребуйте, чтобы

$$g^2 = f f_{\xi\xi} - f_{\xi}^2 \quad (3)$$

(ср. задачи 27, 30), так чтобы

$$u_{\xi}^2 = 4 \frac{\partial^2 \ln f}{\partial \xi^2}. \quad (4)$$

Умножьте (2) на u_{ξ} , подставьте туда это выражение и проинтегрируйте с учетом граничных условий $u \rightarrow 0 \pmod{2\pi}$ при $\xi \rightarrow \infty$. Убедитесь, что при этом

$$\cos u = 1 - 2 \frac{\partial^2 \ln f}{\partial \xi \partial \tau}. \quad (5)$$

Далее, с учетом (4), (5), получите из (2) второе билинейное уравнение

$$g_{\tau}^2 = f_{\tau} f_{\xi\xi\tau} - f_{\xi\tau}^2 + f f_{\xi\tau} - f_{\xi} f_{\tau}. \quad (6)$$

Отыскивая решения системы уравнений (3), (6) в виде рядов

$$\begin{aligned} g &= \varepsilon g_1 + \varepsilon^3 g_3 + \dots, \\ f &= 1 + \varepsilon^2 f_2 + \varepsilon^4 f_4 + \dots, \end{aligned}$$

аналогично задачам 27, 28, 30, найдите одно- и двухсолитонные решения уравнения $\sin$ -Гордона.

32. Альтернативная форма метода Хироты для уравнения $\sin$ -Гордона (R. Hirota, 1972) основана на замене переменных $u = 4 \operatorname{arctg}(g/f)$. Покажите, что при этом из (2) можно получить следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} fg_{\xi\tau} - g_{\xi}f_{\tau} - g_{\tau}f_{\xi} + gf_{\xi\tau} &= fg, \\ gg_{\xi\tau} - g_{\xi}g_{\tau} &= ff_{\xi\tau} - f_{\xi}f_{\tau}. \end{aligned}$$

Отыскивая решения этой системы аналогично предыдущей задаче, покажите, что выбор $g_1 = \exp(\theta)$, где $\theta = k\xi + \tau/k$, приводит к $f_{2,4,\dots} = 0$, $g_{3,5,\dots} = 0$, в результате чего получаем односолитонное решение $u = 4 \operatorname{arctg}[\exp(\theta)]$. Выбирая g_1 в виде суммы двух экспонент

$$g_1 = \exp(\theta_1) + \exp(\theta_2),$$

где $\theta_{1,2} = k_{1,2}\xi + \tau/k_{1,2}$, найдите двухсолитонное решение

$$u = 4 \operatorname{arctg} \left(\frac{k_1 + k_2 \operatorname{sh}[(\theta_1 - \theta_2)/2]}{k_1 - k_2 \operatorname{ch}[(\theta_1 + \theta_2)/2]} \right).$$

33. Полагая, что в выражении для двухсолитонного решения, полученного в предыдущей задаче, параметры $k_{1,2}$ являются комплексно-сопряженными, $k_{1,2} = k_r \pm ik_i$, найдите решение уравнения $\sin$ -Гордона в виде бризера. Постройте на компьютере зависимости $u(x)$ в различные моменты времени, иллюстрирующие динамику бризера при различных значениях $k_{r,i}$.

34. Пример интегрируемой дискретной динамической системы представляет цепочка Тоды (M. Toda, 1970): цепочка связанных частиц, потенциал взаимодействия между которыми экспоненциально зависит от расстояния. Уравнения движения элементов цепочки имеют вид

$$\ddot{u}_n = \exp(u_{n-1} - u_n) - \exp(u_n - u_{n+1}).$$

Введите новую переменную v_n такую, что $u_n = v_{n-1} - v_n$, причем v_n и все ее производные стремятся к нулю при $n \rightarrow \pm\infty$, и покажите, что

$$1 + \ddot{v}_n = \exp(v_{n+1} - 2v_n + v_{n-1}).$$

Найдите замену переменных $v_n = F(f_n)$, приводящую это уравнение к билинейной форме

$$f_n \ddot{f}_n - \dot{f}_n^2 = f_{n+1} f_{n-1} - f_n^2.$$

Отыскивая решения в виде $f_n = 1 + \varepsilon f_n^{(1)} + \varepsilon^2 f_n^{(2)} + \dots$, получите выражения для односолитонных и двухсолитонных решений.

35. Гамильтонов формализм. Покажите, что уравнение $\sin$ -Гордона $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0$ можно представить в форме канонических уравнений Гамильтона

$$u_t = \frac{\delta H}{\delta p}, \quad p_t = -\frac{\delta H}{\delta u},$$

где гамильтонианом является функционал $H = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}(u, u_x, u_t) dx$, плотность гамильтониана равна

$$\mathcal{H} = \frac{u_t^2}{2} + \frac{u_x^2}{2} + 1 - \cos u.$$

Подсчитайте полную энергию для следующих решений:

- кинка;
- двух взаимодействующих кинков;
- взаимодействующих кинка и антикинка;
- бризера.

36. Представьте уравнение Буссинеска

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} - (uu_x)_x - \beta u_{xxx} = 0$$

в гамильтоновой форме

$$u_t = \frac{\delta H}{\delta p}, \quad p_t = -\frac{\delta H}{\delta u}.$$

37. Представьте нелинейное уравнение Шрёдингера

$$iu_t + u_{xx} + \beta |u|^2 u = 0$$

в гамильтоновой форме

$$u_t = \frac{\delta H}{\delta u^*}, \quad u_t^* = -\frac{\delta H}{\delta u}.$$

38. Преобразования Бэклунда. На рис. 48 приведена диаграмма, поясняющая поиск двухсолитонных решений при помощи преобразований Бэклунда (u_0 — тривиальное нулевое решение, $u_{1,2}$ — односолитонные решения, u_3 — двухсолитонное решение). Нарисуйте аналогичную диаграмму для трехсолитонного решения.

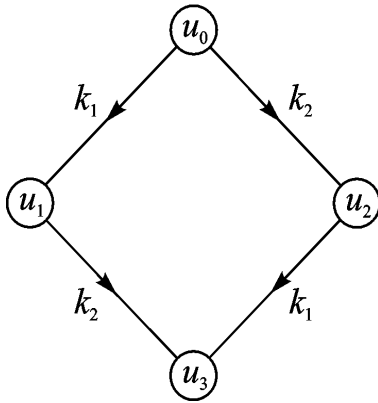


Рис. 48

39. Уравнение КдВ $u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$ заменой переменных $u = 2w_x$ может быть приведено к виду $w_t + 6(w_x)^2 + w_{xxx} = 0$. Два независимых решения этого уравнения w и W связаны преобразованиями Бэклунда

$$(w + W)_x = k^2 - (w - W)^2, \\ (w - W)_t = 6(w - W)^2(w - W)_x - k^2(w - W)_x - (w - W)_{xxx}.$$

Действуя по схеме, описанной в предыдущей задаче, найдите односолитонное и двухсолитонное решения уравнения КдВ.

Модулированные волны в нелинейных средах

40. При помощи метода многих масштабов получите нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) медленно меняющейся огибающей волнового пакета и исследуйте его на наличие модуляционной неустойчивости для систем, которые описываются следующими уравнениями:

- уравнением КдВ $u_t + uu_x + \beta u_{xxx} = 0$;
- уравнением мКдВ $u_t + u^2 u_x + \beta u_{xxx} = 0$;
- уравнением Буссинеска $u_{tt} - c^2 u_{xx} - (uu_x)_x - \beta u_{xxxx} = 0$.

41. При помощи метода многих масштабов получите НУШ для ионно-звуковых волн в плазме и исследуйте его на наличие модуляционной неустойчивости. Исходные уравнения приведены в задаче 16.

42. При помощи метода многих масштабов получите НУШ для медленно меняющейся огибающей волнового пакета электромагнитной волны, распространяющейся в нелинейном диэлектрике. Исходные уравнения приведены в задаче 18. При каких условиях возможна модуляционная неустойчивость?

43. Получите НУШ для медленно меняющейся огибающей волны в нелинейной радиотехнической LC -цепочке (задача 17), причем рассмотрите случаи как квадратичной ($Q(V) = C_0 V + C_2 V^2$), так и кубической ($Q(V) = C_0 V + C_2 V^2$) нелинейности. Выясните, в каких случаях возможна модуляционная неустойчивость. Как эти результаты согласуются с полученными в задаче 40?

Указание. Применение метода многих масштабов к дискретным системам требует некоторой модификации. Прежде всего, приведите уравнения, описывающие цепочку, к виду

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(V_n - \frac{C_j V_n^j}{C_0} \right) - \omega_0^2 (V_{n+1} - 2V_n + V_{n-1}) = 0,$$

где $j = 2$ или 3 , $\omega_0 = 1/\sqrt{LC_0}$. Медленные временные масштабы $T_n = \varepsilon^n t$ вводятся обычным образом, тогда как введение пространственных масштабов требует предварительной подготовки. Решение следует искать

в виде рядов по степеням малого параметра ε , $V_n = \varepsilon V_n^{(1)} + \varepsilon^2 V_n^{(2)} + \dots$. Покажите, что в первом порядке оно имеет вид квазигармонической волны

$$V_n^{(1)} = A_n \exp(i\theta_n) + \text{к.с.},$$

где A_n — медленно меняющиеся амплитуды, $\theta_n = knd - \omega T_0$, d — период цепочки, ω и k связаны дисперсионным соотношением

$$\omega^2 = 4\omega_0^2 \sin^2(kd/2).$$

Считая, что A_n меняются мало на пространственных масштабах порядка d , разложите амплитуды в соседних узлах в ряды Тейлора

$$A_{n\pm 1} \approx A \pm d \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{d^2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \pm \dots$$

Теперь можно ввести медленные пространственные масштабы $X_n = \varepsilon^n x$. Обратите внимание, что переход от дискретных переменных к непрерывным осуществляется не для V_n , как это делалось в задаче 17, а для амплитуд A_n , т.е. считается, что период цепочки d мал по сравнению с характерным пространственным масштабом изменения огибающей, а не по сравнению с длиной несущей волны $\lambda = 2\pi/k$.

44. Решите аналогичную задачу для цепочки частиц массы m , связанных пружинами, возвращающая сила которых $F(x)$ нелинейным образом зависит от деформации. Цепочка описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$m\ddot{u}_n = F(u_{n+1} - u_n) - F(u_n - u_{n-1}),$$

где u_n — смещение n -ой частицы от положения равновесия. Рассмотрите случай квадратичной ($F(x) = \gamma x + \alpha x^2$) и кубической ($F(x) = \gamma x + \beta x^3$) нелинейности.

45. Найдите условия модуляционной неустойчивости для системы связанных НУШ

$$iA_t + \frac{\omega_0''}{2} A_{xx} + (\beta |A|^2 + \gamma |B|^2) A = 0,$$

$$iB_t + \frac{\omega_0''}{2} B_{xx} + (\beta |B|^2 + \gamma |A|^2) B = 0.$$

Покажите, что неустойчивость связанных волн возможна даже в том случае, когда критерий Лайтхилла для каждой из волн в отдельности не выполнен, т.е. $\omega_0''\beta < 0$.

46. В среде могут распространяться два типа волн: высоко- и низкочастотная. В случае, когда групповая скорость высокочастотной волны равна фазовой скорости низкочастотной, их взаимодействие описывается уравнениями (D. Benney, 1978)

$$iA_t + \frac{\omega_0''}{2} A_{xx} + \beta AB = 0,$$

$$B_t + \gamma (|A|^2)_x = 0,$$

где A — медленно меняющаяся комплексная амплитуда ВЧ-волны, B — поле НЧ-волны (вещественное). Найдите решение этой системы в виде уединенной волны.

47. Найдите условия модуляционной неустойчивости для системы взаимодействующих высоко- и низкочастотной волн из предыдущей задачи.

48. Найдите решение уравнений трехволнового взаимодействия

$$A_{1t} + v_1 A_{1x} = A_2 A_3^*,$$

$$A_{2t} + v_2 A_{2x} = A_1 A_3^*,$$

$$A_{3t} + v_3 A_{3x} = -A_1 A_2$$

в виде солитона огибающей. Граничные условия выбирайте следующим образом: $A_{1,2} \rightarrow 0$, $A_3 \rightarrow A_0 = \text{const}$ при $|x| \rightarrow \infty$.

Нелинейные волны. Задачи для компьютерных исследований

49. Схема с разностями «против потоков». Напишите программу численного решения линейного уравнения переноса

$$u_t + cu_x = 0,$$

где $c = \text{const}$, используя схему с разностями «против потоков»

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0,$$

где $u_i^n = u(x = i\Delta x, t = n\Delta t)$ — значения функции u в узлах дискретной пространственно-временной сетки. Разлагая $u(x, t)$ в соседних узлах в ряды Тейлора

$$u_{i\pm 1}^n = u_i^n \pm \Delta x u_x + \frac{\Delta x^2}{2} u_{xx} \pm \dots$$

и т.д. (все производные вычисляются в точке $x = i\Delta x, t = n\Delta t$), покажите, что эта схема имеет первый порядок точности по координате и времени, причем погрешность носит диссипативный характер. Конкретно покажите, что

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = u_t + cu_x - \eta u_{xx} + O(\Delta x^2, \Delta t^2),$$

где $\eta = \frac{c\Delta x(1 - c\Delta t/\Delta x)}{2}$ — так называемый коэффициент искусственной («схемной») вязкости. Отсюда следует, что условие устойчивости имеет вид

$$0 < \frac{c\Delta t}{\Delta x} < 1.$$

С помощью созданной программы пронаблюдайте распространение импульса вида

$$u(x; t = 0) = a \sin^2(x/\Delta)$$

при различных параметрах a, Δ . Как эти результаты зависят от отношения $\Delta t/\Delta x$? Убедитесь, что наибольшая точность достигается при $\Delta x/\Delta t \rightarrow c$. Убедитесь, что при $\Delta t/\Delta x > 1$ схема неустойчива.

50. Напишите аналогичную программу для уравнения простой волны, предварительно переписав его в дивергентной форме (т.е. в виде закона сохранения): $u_t + (u^2/2)_x = 0$. Конечно-разностная схема, таким образом, имеет вид

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{(u_i^n)^2 - (u_{i-1}^n)^2}{2\Delta x} = 0.$$

Рассмотрите задачу о распространении гармонического сигнала, т.е. задачу со следующим граничным условием:

$$u(x = 0; t) = 1 + a \sin(\omega t).$$

Найти аналитически условие устойчивости для нелинейного уравнения не удается, однако по аналогии с предыдущей задачей можно заключить, что

оно будет приближенно иметь вид

$$\frac{u_{\max} \Delta t}{\Delta x} < 1,$$

где $u_{\max}$ — максимальное значение переменной u , которое можно оценить как $u_{\max} \approx 1 + a$. При этом следует выбирать шаг по времени максимально близким к $\Delta x/(1 + a)$, чтобы минимизировать «схемную» вязкость.

Поскольку погрешность схемы с разностями «против потоков» носит диссипативный характер, при ее использовании фактически находится решение уравнения простой волны с разрывами. Пронаблюдайте процессы нелинейного укрупнения волны, образования разрывов и превращения синусоидальной волны в пилообразную.

51. Составьте программы численного решения уравнения Бюргерса

$$u_t + (u^2/2)_x = \nu u_{xx}$$

при помощи следующих конечно-разностных схем:

$$\begin{aligned} \bullet \quad & \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{(u_i^n)^2 - (u_{i-1}^n)^2}{\Delta x} = \nu \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}; \\ \bullet \quad & \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{(u_{i+1}^n)^2 - (u_{i-1}^n)^2}{2\Delta x} = \nu \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}. \end{aligned}$$

Методы имеют погрешность аппроксимации $O(\Delta t, \Delta x)$ и $O(\Delta t, \Delta x^2)$ соответственно. Оценки условия устойчивости имеют вид

$$\Delta t < \frac{\Delta x}{u_{\max}} \left(1 + \frac{2\nu}{u_{\max} \Delta x} \right)$$

для первого метода и

$$\Delta t < \frac{2\nu}{u_{\max}^2}$$

— для второго. Для обеих разностных схем решите задачу об эволюции начального профиля в виде ступеньки

$$u(x; t = 0) = \begin{cases} u_1 & \text{при } x > x_0, \\ u_2 > u_1 & \text{при } x < x_0. \end{cases}$$

Пронаблюдайте его превращение в ударную волну. Сравните результаты в пределе малых ν с аналогичными решениями для уравнения простой волны (задача 50).

52. Проблема Ферми—Пасты—Улама. Повторите численный эксперимент Ферми—Пасты—Улама (E. Fermi, J. Pasta, S. Ulam, 1955). Создайте программу численного моделирования колебаний нелинейной цепочки с квадратичной нелинейностью, которая описывается уравнениями

$$\ddot{u}_n = \gamma(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}) + \alpha \left[(u_{n+1} - u_n)^2 - (u_n - u_{n-1})^2 \right],$$

$$n = 0, 1, \dots, N.$$

Для решения этих уравнений используйте метод Рунге—Кутты 4-го порядка. Рассмотрите цепочку из $N = 64$ элементов с периодическими граничными условиями

$$u_0 = u_N.$$

Начальное условие выберите в виде колебаний на основной собственной моде

$$u_n(t=0) = U_0 \cos \omega t \sin(2\pi n/N),$$

где $\omega = 2\sqrt{\gamma} \sin(\pi/N)$. Пронаблюдайте возвращаемость ФПУ. Повторите эксперименты при различных значениях начальной амплитуды U_0 .

53. Повторите численный эксперимент Забуски и Крускала (N. Zabuski, M. Kruskal, 1965). Создайте программу численного решения уравнения КдВ

$$u_t + uu_x + \beta u_{xxx} = 0$$

при $\beta = 0.022$ с периодическими граничными условиями $u(0) = u(2\pi)$. Начальное условие задайте в виде $u(x; t=0) = \cos x$. Используйте

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{\Delta t} = -\frac{1}{3\Delta x} (u_{i+1}^n + u_i^n + u_{i-1}^n) (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) - \frac{\beta}{\Delta x^3} (u_{i+2}^n - 2u_{i+1}^n + 2u_{i-1}^n - u_{i-2}^n).$$

Условие устойчивости данной разностной схемы имеет вид $\frac{\Delta t}{\Delta x^3} \leq$

$\beta (4 + \Delta x^2 u_{\max})^{-1}$. Пронаблюдайте распад начального профиля на солитоны и возвращаемость ФПУ. Как зависят результаты от амплитуды начального возмущения?

Глава 6

Фракталы и комплексная аналитическая динамика



Фракталы

1. Постройте на компьютере набор изображений таких самоподобных фракталов, как канторово множество, кривая Коха, дерево Пифагора, кривая Гильберта (заполняющая плоскость), «дракон Хартера» и др. Подсчитайте аналитически их фрактальную размерность.

2. Создайте программу для расчета фрактальной размерности (емкости) произвольного геометрического объекта на плоскости. Используйте простейший способ, разбивая плоскость квадратной сеткой, подсчитывая количество ячеек, покрывающих объект и далее оценивая угол наклона графика $\ln N(\ln \varepsilon)$. Протестируйте Вашу программу на гладкой кривой и на каком-нибудь простейшем фрактале.

3. Запрограммируйте расчет последовательных элементов дерева Фарея по принципу «правила двоичника». Задайте возможность нахождения последовательностей аппроксимантов иррациональных чисел при периодическом выборе ветвей дерева.

4. Исследуйте динамику системы линейных итерируемых функций:

$$\begin{aligned} f_1(z) &= z/2, \\ f_2(z) &= z/2 + 1/2, \\ f_3(z) &= z/2 + 1/4 + i\sqrt{3}/4, \end{aligned}$$

где z — комплексная переменная, действительная и мнимая части которой x и y соответствуют абсциссе и ординате изображающей точки на плоскости. Задайте некоторое начальное значение переменной z , например $z_0 = 0$, и произведите итерации этой точки посредством трех отображений, определяемых функциями f_1 , f_2 и f_3 . Таким образом, после первой итерации на плоскости (x, y) возникнет три точки. На второй итерации возникнет по три образа для каждой из этих трех, то есть 9 изображающих точек, и т.д. Накапливая значения, получаемые при итерациях, получите изображение «салфетки» Серпинского.

5. Смоделируйте с помощью компьютера игру «Хаос». Для этого выберите начальную точку внутри равностороннего треугольника и задайте динамику игры таким образом, что каждая последующая точка будет располагаться на середине отрезка, соединяющего предыдущую точку со случайно выбранной вершиной треугольника. Пронаблюдайте аттрактор этой системы в виде «салфетки» Серпинского.

6. Постройте фрактал «лист папоротника» с помощью последовательности аффинных преобразований плоскости:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= ax_n + by_n + e, \\ y_{n+1} &= cx_n + dy_n + f. \end{aligned}$$

На каждом шаге итерирования коэффициенты должны принимать приведенные в таблице численные значения случайным образом с вероятностью p , указанной в последнем столбце. Попробуйте поварьировать значения этих величин.

a	b	c	d	e	f	p
0	0	0	0.16	0	0	0.01
0.85	0.04	-0.04	0.85	0	1.6	0.85
0.2	-0.26	0.23	0.22	0	1.6	0.07
-0.15	0.28	0.26	0.24	0	0.44	0.07

7. С помощью Интернета составьте обзор простейших самоподобных фракталов, а также фракталов, являющихся продуктами систем итерируемых линейных функций. Оформите обзор в виде Интернет-странички или электронной презентации.

8. Исследуйте процесс броуновского случайного блуждания (одномерный случай). Численная модель состоит в задании случайных смещений броуновской частицы по прямой на каждом шаге дискретного времени. При этом величина смещения пусть представляет собой распределенную по гауссову закону случайную величину с нулевым средним и единичной дисперсией. (Для задания гауссовой случайной величины удобно воспользоваться уже существующими в ряде прикладных пакетов программирования процедурами. Можно также задать ее самостоятельно как определенным образом отнормированную сумму конечного количества равномерно распределенных случайных величин.) Проинтерпретируйте понятие «самоподобия» применительно к случайным последовательностям. Для этого постройте реализацию координаты броуновской частицы, отмечая при этом лишь точки через некоторый макроскопический интервал времени 1) t и 2) n^2t (более грубый масштаб). Также постройте зависимость смещения частицы от дискретного времени, суммируя смещения соответственно за интервалы времени t и n^2t . Сопоставьте полученные рисунки. Что можно сказать о дисперсии представленных на этих рисунках случайных величин?

Объясните, почему при пересчете пространственных масштабов в n раз и одновременном пересчете временных масштабов в n^2 раз броуновские диаграммы выглядят одинаково.

9. Смоделируйте на компьютере ограниченную диффузией агрегацию. Для этого задайте двумерную квадратную решетку и поместите на нее точечный (в центре) или линейный (на границе) затравочный элемент агрегата. Запуская с границы решетки случайно блуждающие по ней частицы, прилипающие с определенной вероятностью к агрегату, наблюдайте рост фрактального кластера. Попробуйте рассчитать напряженность диффузионного поля вдоль границы кластера путем запуска пробных частиц. Разметьте ее в окружающей кластер тонкой области различными градиациями какого-нибудь цвета. Исходите из принципа, что величине напряженности диффузионного поля соответствует вероятность прилипания пробной частицы.

10. Изучите модель перколяции. Варьируя основной параметр модели — вероятность протекания узлов (концентрацию протекающих узлов) квадратной двумерной решетки — продемонстрируйте с помощью компьютера возникновение перколяционных кластеров. Попробуйте оценить (путем подбора или придумав более точный численный алгоритм) критическое значение вероятности, соответствующее протеканию всей решетки и возникновению кластеров «бесконечного» характерного размера. Сделайте аналитическую оценку критической концентрации протекающих узлов. Для этого надо найти приближенное соотношение между вероятностью существования кластера с характерным линейным размером 2^{n+1} узлов и вероятностью протекания кластера вдвое меньшего размера, то есть $p_{n+1} = f(p_n)$. Рассматривая полученное соотношение при $n \rightarrow \infty$ как отображение с начальным значением переменной, равным вероятности протекания одного узла p , найдите его притягивающие неподвижные точки (очевидно, что это будут единица и нуль, соответствующие протеканию бесконечной решетки и существованию лишь кластеров ограниченного размера) и границу между областями притяжения этих аттракторов, которая является неустойчивой неподвижной точкой. Сравните численную и аналитическую оценки критической концентрации.

11. Сделайте анимационную программу, демонстрирующую распространение лесных пожаров с помощью модели перколяции. В узлах квадратной решетки с некоторой вероятностью p_1 распределены деревья. С вероятностью p_2 запускаются точечные источники огня на решетке (молнии), причем если молния попала в дерево, то оно сгорает, если же молния попала

в пустую клетку, то ничего не происходит. На каждом интервале дискретного времени огонь распространяется на ближайшие соседние деревья-узлы, которые сгорают за один последующий интервал дискретного времени и вырастают заново через один (или несколько) интервалов времени с вероятностью p_1 . Раскрашивая узлы в различные цвета в зависимости от его состояния (дерево, огонь, пустой узел), наблюдайте динамику развития кластеров. Меняя параметры системы, такие как вероятность роста деревьев и вероятность возгорания, оцените критические значения этих величин, соответствующие распространению пожара на весь лес. Нанесите эти значения на плоскость (p_1, p_2) . Что из себя представляет критическая линия $p_2(p_1)$? Предположите, что будет происходить, если уменьшить скорость роста деревьев?

12. Задайте с помощью компьютера классическую игру «Жизнь» со следующим правилом. На квадратной решетке распределено некоторое количество «живых клеток». В каждый момент дискретного времени в каждом узле решетки рождается (или выживает) клетка, если среди ее ближайших по решетке соседей есть две или три живых клетки. Подберите несколько видов начальных распределений живых клеток таких, чтобы их динамика приводила к: 1) гибели всей популяции; 2) распространению жизни и образованию фрактальных структур; 3) стабильному существованию нескольких клеток; 4) периодической динамике.

13. Сделайте Интернет-обзор по теме «Клеточные автоматы и игра «Жизнь». Найдите информацию по различным «правилам игры» и описываемым ими моделям (например, образование городов, распространение слухов и паник, образование лавин и пр.).

Комплексная аналитическая динамика

14. Для отображения $z_{n+1} = \lambda - z_n^2$ постройте плоскость параметров, отмечая различными цветами области с ограниченной в фазовом пространстве динамикой и области с различными временами убегания на бесконечность. Наблюдайте множество Мандельброта и несамopodobную фрактальную структуру его границы. Попробуйте наблюдать фрактальную структуру множества Мандельброта для других отображений:

- кубического отображения $z_{n+1} = \lambda - z_n^3$;
- отображения четвертой степени $z_{n+1} = \lambda - z_n^4$;

- рационального отображения $z_{n+1} = \lambda z_n^2(z_n - a)/(1 - az_n)$;
- экспоненциального отображения $z_{n+1} = \lambda \exp(z_n)$;
- отображения Эно $z_{n+1} = \lambda - z_n^2 + aw_n$, $w_{n+1} = z_n$.

15. Постройте карту динамических режимов и бассейны притяжения на фазовых плоскостях для отображения $z_{n+1} = \lambda - z_n^2$. Пронаблюдайте «кактус» Мандельброта и множества Жюлиа (связное заполненное множество, пыль Фату, дендрит) при различных характерных значениях комплексного параметра λ : внутри и снаружи «кактуса» Мандельброта, в точках Миэюревича (для чего необходимо предусмотреть возможность оперативного изменения управляющего параметра посредством задания его с клавиатуры и с помощью мыши).

16. Постройте бассейны притяжения отображения $z_{n+1} = \lambda - z_n^2$ при значениях параметра λ , принадлежащих границе «кактуса» Мандельброта (границе областей периодической динамики). Рассмотрите, например, границу области периода 1. Найдите аналитически границу этой области (решив систему уравнений, определяющих неподвижную точку и равенство единице модуля комплексного мультипликатора этой неподвижной точки) и покажите, что это кардиоида. Определите несколько значений параметра, соответствующих рациональной фазе мультипликатора, а также иррациональной фазе, равной «золотому среднему» $(\sqrt{5} - 1)/2$. Укажите на соответствующих им бассейнах притяжения несколько траекторий вблизи нейтральной неподвижной точки. Пронаблюдайте структуру «цветка» Ло–Фату и диска Зигеля. Обобщите Вашу программу на произвольно выбранные значения параметров и включите возможность просматривать видоизменения бассейнов притяжений и многообразий с изменением управляющего параметра в анимационном режиме.

17. Постройте диски Зигеля для других, отличных от «золотого сечения», иррациональных значений числа вращения. Для задания иррациональных чисел попробуйте воспользоваться программой для построения дерева Фарей с периодическими и случайным обходом ветвей. Попробуйте изобразить диск Зигеля для почти недиффантова иррационального числа вращения (так называемый «монстр Лиувилля»), например $1/(3 + 1/(10 + 1/(200000) + 1/\dots))$.

18. Постройте кольцо Арнольда–Эрмана для рационального отображения из задачи 1 при $a = 4$, параметр λ подберите так, чтобы число вращения

равнялось «золотому среднему». Найдите неподвижные точки этого отображения и исследуйте их на устойчивость. Определите все три экстремума отображения и покажите, что один из них соответствует сверхпритягивающей неподвижной точке, а два других определяют фрактальные границы кольца.

19. Исследуйте возможности реализации режима перемежаемости вблизи точек множества Мандельброта с мультипликатором $+1$. Заметьте, что в отличие от действительного логистического отображения, кроме критического значения параметра, соответствующего равенству $+1$ мультипликатора неподвижной точки (в качестве характерной длительности ламинарной фазы будем использовать время убегания на бесконечность), в комплексной плоскости возможно аналогичное поведение вблизи точки рождения «лепестка» периода 2 (мультипликатор цикла 2 в этой точке также равен $+1$, и возможно наблюдение «коридора» убегания на бесконечность при выходе параметра в комплексную область). Воспроизведите задачу Болла, состоящую в расчете глубины впадины большой кардиоиды периода 1 и толщины перешейка между кардиоидой и областью периода 2 множества Мандельброта в зависимости от точности построения, то есть от количества итераций. Получите универсальные зависимости длительности ламинарной фазы (времени убегания на бесконечность N) от расстояния до границы области периодического поведения ε :

- $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} N(\varepsilon)\sqrt{\varepsilon} = \pi$ в точке $\lambda = 0.25 + \varepsilon$,
- $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} N(\varepsilon)\varepsilon = \pi$ в точке $\lambda = -0.75 + i\varepsilon$.

Довольно наглядно это можно сделать, если выводить на экран значения времени убегания на бесконечность в рассматриваемых точках с каждым раз уменьшающимся в 10 раз расстоянием до критической точки ε . Пронаблюдайте удивившее Болла возникновение числа π и возможность получения этого числа с большой точностью. Получите эти зависимости аналитически, решая дифференциальное уравнение, дискретным аналогом которого является квадратичное комплексное отображение (или дважды проитерированное отображение во втором случае).

20. Используя известные критические индексы (см. таблицу) для сценариев перехода к хаосу через последовательности увеличения периода в N раз, характерных для комплексных аналитических отображений, продемонстрируйте скейлинговые свойства множества Мандельброта на плоскости параметра комплексного отображения $z_{n+1} = \lambda - z_n^2$, а также скейлинг

множества Жюлиа на фазовой плоскости. Обратите внимание, что скейлинговые константы являются комплексными величинами (кроме случая критической точки Фейгенбаума).

N	λ_c	α	δ
2	1.40115	-2.50291	4.66920
3	$0.02364 + 0.78366i$	$-2.09692 + 2.35828i$	$4.60022 - 8.98122i$
4	$-0.30981 + 0.49473i$	$-1.131476 + 3.26001i$	$-0.85266 - 18.10972i$
5	$-0.37703 + 0.31173i$	$-0.37996 + 3.55391i$	$-9.51971 - 26.37146i$

21. Постройте непосредственно множество Жюлиа комплексного квадратичного отображения $z_{n+1} = \lambda - z_n^2$ как границу бассейна притяжения с помощью итерирования в обратном времени $z_{n1,2} = \pm \sqrt{\lambda - z_{n+1}}$. Воспользуйтесь одной из следующих методик.

1) Производите обратные итерации и накапливайте значения переменной (их количество будет возрастать в геометрической прогрессии как 2^n и потребует создания большого массива данных) отмечая их на фазовой плоскости.

2) Аппроксимируйте множество Жюлиа совокупностью неустойчивых циклов всевозможных периодов, которые, как известно, всюду плотно распределены на множестве Жюлиа. Для поиска неустойчивого цикла периода N достаточно при обратных итерациях на каждом шаге выбирать одно решение z_{n1} или z_{n2} , но так, чтобы последовательность этих выборов была циклической с периодом равным N (например при использовании последовательности '112112...' или '121121...' обратная орбита сойдется к циклу 3). Продумайте методику автоматического перебора всех возможных последовательностей с фиксированным периодом.

3) Производите выбор решения на каждом шаге дискретного времени случайным образом. Это будет соответствовать неустойчивому циклу бесконечно большого периода.

22. Используя программу (задача 2) для расчета емкости фрактальных объектов на плоскости, рассчитайте размерность множеств Жюлиа отображения $z_{n+1} = \lambda - z_n^2$ для нескольких характерных значений параметра, таких, чтобы множество Жюлиа представляло собой: 1) связанное множество (значения параметра внутри «кактуса» Мандельброта); 2) пыль Фату (параметр вне множества Мандельброта); 3) дендрит (в точках Мизюревича, например $\lambda = i$). Множество Жюлиа получите с помощью обратного итерирования (предыдущая задача). Для малых по модулю значений парамет-

ра проведите сравнение полученных результатов с аналитической оценкой Хаусдорфовой размерности $D_H = 1 + |\lambda|^2 / (4 \ln 2)$.

23. Рассчитайте так называемую скорость убегания множеств Жюлиа. Она характеризует не только геометрические фрактальные свойства множества Жюлиа, но и отражает его динамические характеристики, к тому же очень проста для численного моделирования. Методика расчета состоит в следующем. На фазовой плоскости налагается облако начальных точек, полностью покрывающее множество Жюлиа и ограниченную им область притяжения (например, можно взять облако квадратной или круглой формы с центром в нуле и диаметром 4). Далее это облако точек итерируется в прямом времени, при этом часть из них будет постепенно убегать на бесконечность. Количество точек не покинувшее область Γ , ограничивающую исходное облако, будет уменьшаться по степенному закону $N_n \sim q^{-n}$, где величина q и есть скорость убегания. Рассчитайте ее для различных типов множеств Жюлиа.

24. Постройте карту старшего ляпуновского показателя для комплексного квадратичного отображения со слабой неаналитической добавкой $z_{n+1} = \lambda - z_n^2 + \varepsilon z^*$, ($\varepsilon \ll 1$) и сравните ее с картой ляпуновского показателя для аналитического отображения при $\varepsilon = 0$. Постройте ряд увеличенных фрагментов вблизи различных бифуркационных точек и наблюдайте появление областей квазипериодичности, разрушение «лепестков» множества Мандельброта и преобразование их в языки Арнольда при введении неаналитичности (то есть при переходе к двумерным отображениям общего вида). Опишите бифуркационную структуру этих языков.

25. Сделайте Интернет-обзор по истории открытия и приложениям в различных областях науки обобщенных комплексных чисел (двух- и многокомпонентных).

26. Попытайтесь изобразить двумерные сечения множества Мандельброта для квадратичного отображения, переменная и параметр которого являются кватернионами (четырёхкомпонентными числами) и октавами (восьмикомпонентными числами). Продумайте возможность использования трехмерной графики или анимации для лучшей визуализации структуры обобщенного таким образом на многомерный случай множества Мандельброта.

27. На картах динамических режимов получите изображения обобщенных множеств Мандельброта для квадратичного отображения, переменная

и параметр которого являются двухкомпонентными числами, определяющимися как $z = x + iy$, где $i^2 = a + ib$. Рассмотрите три класса чисел:

- гиперболические ($a + b^2/4 > 0$);
- параболические ($a + b^2/4 = 0$);
- эллиптические ($a + b^2/4 < 0$).

Объясните смысл величины $\Delta = a + b^2/4$ с точки зрения существования делителей нуля в рассматриваемых обобщенных системах двухкомпонентных чисел. Убедитесь, что характерная структура множества Мандельброта реализуется лишь для случая эллиптических чисел.

28. Используя замену переменных $x = \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z$, $y = \operatorname{Re} z - \operatorname{Im} z$, сведите комплексное квадратичное отображение $z_{n+1} = \lambda - z_n^2$ к связанным логистическим отображениям $x_{n+1} = \lambda_1 - x_n^2 + \varepsilon(x_n - y_n)^2$, $y_{n+1} = \lambda_2 - y_n^2 + \varepsilon(y_n - x_n)^2$, где $\varepsilon = 0.5$. Покажите, что другие значения параметра связи соответствуют исходному квадратичному отображению, переменная и параметр которого являются двухкомпонентными числами. Постройте карты динамических режимов на плоскости (λ_1, λ_2) при различных значениях ε . Аналогичным образом получите связанные отображения Эно, связанные кубические отображения (функция связи, очевидно, в этом случае будет отличаться).

29. Постройте множество Мандельброта и множества Жюлиа для связанных квадратичных осцилляторов $\ddot{x}_{1,2} + 0.2\dot{x}_{1,2} + \lambda_{1,2} - x_{1,2}^2 + 0.5(x_{2,1} - x_{1,2})^2 = 0.23 \cos t$.

30. Для множеств Жюлиа отображения $z_{n+1} = f(z_n) = \lambda - z_n^2$ в соответствии с аналитической формулой

$$U(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \ln |f^n(z)|$$

рассчитайте потенциал U в окружающей фрактальное множество области. Проиллюстрируйте результаты путем градиентной раскраски в зависимости от абсолютной величины потенциала. Рассмотрите несколько примеров множеств Жюлиа для различных значений параметра (односвязные наполненные множества, дендриты). Объясните, каким образом можно применить данную модель для описания некоторых физических процессов (электростатический потенциал фрактального катода, диффузионное поле фрактального кластера, образованного ограниченной диффузией агрегации).

31. Исследуйте фазовое пространство для отображения

$$z' = R(z) = \left(\frac{z^2 + q - 1}{2z + q - 2} \right)^2,$$

являющегося, как известно теории фазовых переходов, преобразованием перенормировки переменной температуры для иерархической решетки “diamondlike lattice”. В соответствии с теорией Янга—Ли обобщите это преобразование на случай комплексной переменной z (комплексной температуры). Для различных значений действительного параметра q постройте множества Жюлиа на фазовой плоскости, одновременно размечая различными цветами бассейны притяжения различных аттракторов (их может быть несколько, и их количество может меняться). Пронаблюдайте фрактальные фазовые границы. Укажите точки реальных фазовых переходов. Определите момент появления нового фазового состояния с ростом параметра. Постройте множество Мандельброта на плоскости уже комплексного параметра исследуемого отображения. Проинтерпретируйте его с точки зрения фазовых переходов.

32. Для двух бесконечных иерархических цепочек импедансов, изображенных на рис. 49, получите дискретные отображения, выражающие комплексное сопротивление фрагмента $(n + 1)$ -го уровня от сопротивления

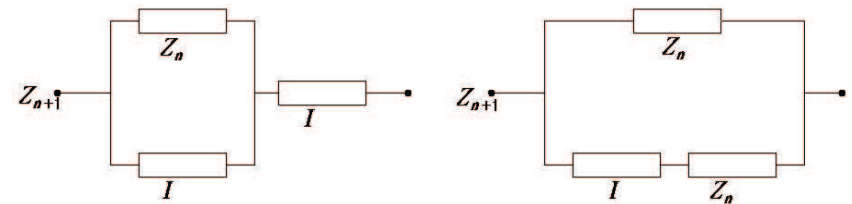


Рис. 49

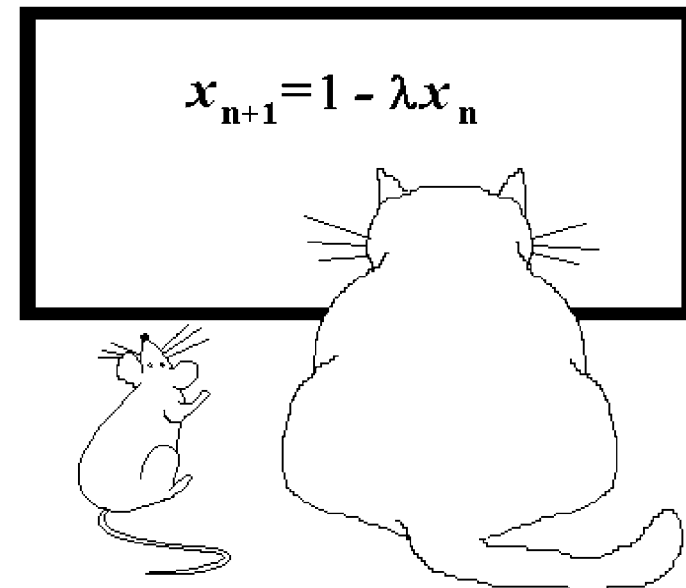
фрагмента n -го уровня построения. Цепочка содержит следующие элементы. Элемент электрической схемы, обозначенный как I , является емкостью с импедансом $I = i/\omega C$ на частоте ω . Начальный элемент иерархической структуры состоит из индуктивности L и активного сопротивления R и имеет импеданс $Z_0 = -i\omega L + R$. При получении отображения для удобства перейдите к безразмерным переменным $z_n = \omega C Z_n$, $z_0 = -iLC\omega^2 + RC\omega$. Постройте численно бассейны притяжения на фазовой плоскости началь-

ных импедансов z_0 для полученных отображений. Исследуйте ее путем поиска аттракторов и разметки динамического расстояния (времени схождения) точек бассейнов притяжения до этих аттракторов. Что интересного можно узнать о свойствах изучаемых электрических цепочек?

33. Запрограммируйте рекурсивную процедуру метода Ньютона (метода касательных) для поиска корней комплексного уравнения $z^3 - 1 = 0$. Постройте бассейны притяжения аттракторов отображения (то есть корней исходного уравнения), соответствующего этой рекурсивной процедуре. Убедитесь, что граница между областями начальных приближений, сходящихся по методу Ньютона к искомым корням, является фрактальной.

Глава 7

Учебные программы



Нелинейные колебания

Раздел 1. Общая характеристика нелинейных систем

Нелинейность. Колебания малой и большой амплитуды, линейные и нелинейные. Нелинейность при упругих деформациях, нелинейность пружин. Нелинейная емкость, нелинейная индуктивность и их характеристики. Другие примеры нелинейных элементов: лампа накаливания, туннельный диод и др. Нелинейные колебательные системы.

Слабая и сильная нелинейность. Слабая нелинейность как малое возмущение линейной системы. Типы нелинейных характеристик (квадратичная, кубичная). Сильная нелинейность. Физические примеры систем со слабой и сильной нелинейностью.

Нелинейные среды. Ферромагнетик как пример нелинейной среды. Нелинейные среды в акустике и оптике. Среда-модели с нелинейностью. Изохронность и неизохронность. Понятие изохронности и неизохронности. Примеры систем с неизохронным движением: «скачущий мячик», математический маятник, кеплерово движение, релятивистский электрон в магнитном поле. Всегда ли изохронны малые колебания?

Ангармоничность и генерация гармоник. Преобразование гармонических сигналов нелинейным элементом со степенной характеристикой. Гармоники и комбинационные частоты. Физические примеры нелинейного преобразования спектра: нелинейность уха, генерация второй гармоники в оптике. Проявление ангармоничности с «временной» точки зрения.

Мультистабильность и гистерезис. Объяснение мультистабильности с помощью модели «шарик в потенциальной яме». Примеры систем, демонстрирующих мультистабильность: механическая система, туннельный диод в схеме с регулируемым э.д.с. и резистором, ферромагнетик. Гистерезис и его объяснение с помощью модели «шарик в потенциальной яме».

Нелинейные динамические системы. Представление уравнений нелинейных колебательных систем в «стандартной» форме теории динамических систем (N дифференциальных уравнений первого порядка). Геометрическая интерпретация нелинейной динамики в фазовом пространстве. Примеры динамических систем разной размерности. Диссипативные и консервативные системы — классификация, основанная на свойствах эволюции облака изображающих точек в фазовом пространстве.

Консервативные нелинейные системы. Примеры консервативных систем второго порядка. Потенциальная функция и интеграл энергии. Трансформации потенциальной энергии при изменении параметров задачи на примере простейшей механической системы.

Фазовые портреты консервативных систем. Стратегия построения и исследования фазового портрета нелинейной системы: график потенциальной энергии и его связь с элементами фазового портрета, особые точки и области линейных движений в фазовом пространстве, сепаратрисы, типичные траектории в фазовом пространстве.

Диссипативные нелинейные системы и их фазовые портреты. Введение диссипации. Системы второго порядка с диссипацией. Энергия системы как функция Ляпунова, ее эволюция во времени и использование для обоснования устойчивости состояний равновесия. Понятие аттрактора. Бассейны притяжения аттракторов. Роль сепаратрис в диссипативной системе как границ раздела бассейнов притяжения.

Раздел 2. Нелинейный осциллятор

Уравнение математического маятника (осциллятор с нелинейностью синуса). Математический маятник, контакт Джозефсона, задача об изгибе упругого стержня (аналогия Кирхгофа), электрон в поле электромагнитной волны. Интеграл энергии и фазовый портрет. Математическое отступление: эллиптические интегралы и эллиптические функции Якоби. Определение периода колебаний математического маятника через эллиптический интеграл. Зависимость периода колебаний от амплитуды. Точные решения для колебательных и ротационных движений. Решение, отвечающее движению по сепаратрисе. Спектр колебаний маятника. Исследование закона движения вблизи сепаратрисы, оценка периода колебаний, особенности спектра ротационных и колебательных движений.

Осциллятор с кубичной нелинейностью. Осциллятор с кубичной нелинейностью (осциллятор Дуффинга) как универсальная модель теории колебаний. Математический маятник и другие примеры. Случаи «мягкой» и «жесткой» пружины. Потенциальная функция и фазовый портрет. Колебания в потенциале с двумя ямами. Асимптотические методы в случае колебаний с умеренными амплитудами. Метод Линштедта—Пуанкаре. Секулярные члены и их устранение. Неизохронность и ангармоничность колебаний осциллятора с кубичной нелинейностью: вычисление поправки к частоте и амплитуды третьей гармоники. Сравнение приближенного и точного решений.

Осциллятор с квадратичной нелинейностью. Осциллятор с квадратичной нелинейностью как универсальная модель теории колебаний. Физические примеры. Потенциальная функция и фазовый портрет. Возникновение нулевой и второй гармоник в спектре. Неизохронность.

Метод медленно меняющихся амплитуд Ван-дер-Поля. Применение метода медленно меняющихся амплитуд на примере диссипативного осциллятора с кубичной нелинейностью. Определение комплексной амплитуды, процедура усреднения, переход к укороченным уравнениям и их решение. Колебания осциллятора с «сухим» трением: анализ методом Ван-дер-Поля. Условия применимости метода медленно меняющихся амплитуд. Другие асимптотические методы: метод многих масштабов, метод Крылова—Боголюбова, их сравнительный анализ.

Осциллятор с сильным затуханием: быстрые и медленные движения. Исследование динамики осциллятора с кубичной нелинейностью в случае сильной диссипации под действием начального импульсного толчка. Сведение к уравнению с малым параметром перед высшей производной и парадокс недостаточного количества начальных условий, возникающий при пренебрежении этим членом. Более аккуратный анализ: фаза быстрого и медленного движений, оценка их характерной длительности. Уравнения для описания быстрого и медленного движений и их решение. Сшивание решений, отвечающих быстрой и медленной стадиям. Быстрые и медленные движения на фазовой плоскости. Сравнение с решением задачи методом многих масштабов.

Раздел 3. Автоколебания

Автоколебания. Примеры автоколебательных систем различной физической природы. Основные черты автоколебательных явлений. Предельный цикл как образ периодических автоколебаний в фазовом пространстве. Предельные циклы как аттракторы диссипативных систем.

Уравнения Ван-дер-Поля и Рэлея. Ламповый генератор Ван-дер-Поля и генератор на активном элементе с отрицательной дифференциальной проводимостью. Описание с помощью уравнения Ван-дер-Поля. Механическая система с нелинейной зависимостью силы трения от скорости (система Кайдановского—Хайкина) и ее описание с помощью уравнения Рэлея. Связь уравнений Рэлея и Ван-дер-Поля. Результаты численного решения уравнения Ван-дер-Поля: зависимости динамической переменной от времени и фазовые портреты. Затухающие, квазигармонические и релаксационные колебания.

Квазигармонические колебания и бифуркация Андронова—Хопфа. Исследование квазигармонических автоколебаний в уравнении Ван-дер-Поля. Анализ методом энергетического баланса. Укороченное уравнение для медленно меняющейся комплексной амплитуды и его решение. «Прямая» (суперкритическая) бифуркация Андронова—Хопфа и ее описание с помощью укороченного уравнения. Обобщенное уравнение для бифуркации Хопфа и его решения.

Релаксационные автоколебания. Сведение уравнения Рэлея при больших значениях параметра к дифференциальному уравнению с малым параметром перед старшей производной. Выделение быстрых и медленных движений. Представление релаксационных колебаний, описываемых уравнением Рэлея, на фазовой плоскости. Определение формы релаксационных колебаний и оценка их периода.

Автоколебания с жестким возбуждением. Построение модельного уравнения, описывающего автогенератор с жестким возбуждением. Анализ этой системы методом энергетического баланса. Укороченное уравнение для медленно меняющейся комплексной амплитуды и его решение. Фазовый портрет и его эволюция при изменении параметра. «Обратная» (субкритическая) бифуркация Андронова—Хопфа и ее бифуркационная диаграмма. Метод сечений Пуанкаре. Идея метода сечений Пуанкаре. Понятие о точечных отображениях. Простейшие свойства одномерных отображений: неподвижные точки и их устойчивость. Диаграммы Ламерея. Примеры: генератор пилообразных колебаний под внешним воздействием, разгон частицы в циклотроне и др. Точечные отображения для генератора Ван-дер-Поля и автогенератора с жестким возбуждением: нахождение численными методами и с помощью метода медленно меняющихся амплитуд. Теория лампового генератора со ступенчатой характеристикой.

Раздел 4. Нелинейные колебания в неавтономных системах

Нелинейный резонанс. Нелинейный осциллятор под периодическим внешним воздействием как пример динамической системы с трехмерным фазовым пространством. Вынужденные колебания нелинейного осциллятора. Основной резонанс. Укороченные уравнения и резонансные кривые. Бистабильность и гистерезис при нелинейном резонансе. Вторичные резонансы. Супергармонический резонанс: умножение частоты. Субгармонический резонанс: деление частоты. Нелинейный осциллятор при бигармоническом воздействии. Комбинационные тона. Резонансы на комбинационных частотах.

Сложная динамика и хаос при вынужденных колебаниях нелинейного осциллятора. Резонансы на фазовом портрете и в сечении Пуанкаре. Перекрывание нелинейных резонансов. Модели стохастического ускорения Ферми. Стандартное отображение Чирикова—Заславского. Хаос при вынужденных колебаниях диссипативного нелинейного осциллятора.

Параметрические колебания нелинейных систем. Параметрический резонанс и параметрическая неустойчивость. Примеры: маятник с изменяющейся длиной подвеса, колебательный контур с нелинейной емкостью. Уравнение Матьё. Нелинейный осциллятор с параметрическим возбуждением. Условия самовозбуждения. Укороченные уравнения и резонансные кривые.

Параметрические генераторы электромагнитных колебаний. Одноконтурный параметрический генератор. Устройство и принцип действия. Расстроочный и диссипативный механизм ограничения неустойчивости. Области самовозбуждения на плоскости параметров. Укороченные уравнения и резонансные кривые. Двухконтурный параметрический генератор. Соотношения Мэнли—Роу. Резонансное взаимодействие трех связанных слабонелинейных осцилляторов. Оптические параметрические усилители и генераторы.

Раздел 5. Синхронизация

Введение. История открытия синхронизации Гюйгенсом. Примеры синхронизации: внутренние биологические ритмы и их суточная синхронизация, светлячки, сверчки, аплодисменты, синхронизация дыхания с частотой движения крыльев у летящих уток, синхронизация движения пальцев, стабилизация частоты мощных генераторов слабым «эталонным по частоте» генератором. Внешняя и внутренняя синхронизация.

Укороченные уравнения и уравнение Адлера. Формулировка задачи о гармоническом воздействии на систему Ван-дер-Поля и получение укороченного уравнения. Приведение укороченных уравнений к безразмерному виду. Уравнения для действительных амплитуды и фазы. Случай малых амплитуд внешнего воздействия. Уравнение Адлера. Анализ уравнения Адлера. Понятие о квазипериодических режимах (режимах биений.) Фазовые слипы. Языки Арнольда. Фазовый портрет и бифуркация, ответственная за возникновение синхронизации. Вид спектра и его эволюция при переходе через границу языка. Разные механизмы разрушения синхронизации при больших и малых амплитудах воздействия (синхронизация «через захват частоты» и «через подавление частоты»).

Синхронизация в связанных системах. Формулировка задачи о связанных системах Ван-дер-Поля—Дуффинга. Два типа связи. Получение укороченных уравнений, исключение фазы отдельных осцилляторов. Приведение к уравнению Адлера для разности фаз. Возможность синфазной и противофазной синхронизации. Эффект «гибели» колебаний.

Теория катастроф

Раздел 1. Основные понятия

Аппроксимации в математике и физике и стратегия конструирования многопараметрических моделей. Идея аппроксимации в математике. Аппроксимации в физике и физические модели. Ряд Тейлора и его использование для конструирования многопараметрических моделей, примеры. Полнота и универсальность моделей, получаемых при помощи тейлоровских аппроксимаций.

Типичность по Пуанкаре и связанные с ней понятия. Интуитивное представление о типичности. Случаи общего положения и вырожденные случаи. Метод «малых шевелений» параметров. Классификация вырожденных ситуаций по коразмерности. Примеры ситуаций различной коразмерности. Стратегия Пуанкаре исследования динамических систем по возрастающей коразмерности. Понятие грубых (структурно устойчивых) систем.

Первые сведения о катастрофах. Примеры систем с катастрофами: материальная точка в одномерном и двумерном потенциальном поле, нагруженная балка, остойчивость судов и др. Машина Зимана и качалки. Связь и отличия теории катастроф и теории бифуркаций.

Критические точки функций одной переменной. Критические точки и их роль при исследовании катастроф и бифуркаций. Некоторые простейшие критические точки функций одной переменной. Исследовательская схема теории катастроф: выявление существенных параметров, роль замен переменных, классификация критических точек по коразмерности на примере анализа простейших полиномов.

Критические точки функций двух переменных. Графическое представление функций двух переменных с помощью линий уровня. Примеры: горизонталы и карты, эквипотенциалы, фазовые портреты. Критические точки функций двух переменных, примеры. Матрица Гессе и примеры ее использования для различения вырожденных критических точек. Квадратичные формы и их классификация.

Кубики и их классификация. Типичные критические точки на картах. Случай n переменных и определение морсовской критической точки (морсовского седла).

Математические основы теории катастроф. Лемма Морса. Лемма расщепления. Классификационная теорема Тома. Ростки и возмущения. Полнота и универсальность моделей теории катастроф.

Раздел 2. Свойства катастроф

Катастрофа складки. Схема исследования катастроф на примере складки (многообразие катастрофы, бифуркационное множество, трансформации потенциальной функции). Катастрофа складки в системе двух притягивающихся токов. Другие примеры систем, демонстрирующих катастрофу складки.

Катастрофа сборки. Исследование катастрофы сборки. Двойственные сборки. Примеры катастрофы сборки: «опрокидывающийся маятник» с нелинейной пружиной, критическая точка газа Ван-дер-Ваальса, туннельный диод в схеме с регулируемым сопротивлением и э.д.с. Другие примеры катастрофы сборки. Катастрофа сборки и теория гладких отображений Уитни. Сборки как особенности простейших кривых. Эволюта параболы и ее описание в терминах многообразия катастрофы сборки. Линейчатые поверхности.

Катастрофа ласточкин хвост. Исследование катастрофы ласточкин хвост. Пример системы, демонстрирующей катастрофу ласточкин хвост.

Каспидные катастрофы в двумерных системах. Катастрофа складки в двумерной системе на примере задачи о «выкатывании» шарика из лунки. Эволюция потенциального рельефа, линий уровня и сепаратрис при катастрофе складки в двумерных системах. Физически различимые типы катастроф сборки в двумерных системах, примеры. Эволюция линий уровня и сепаратрис при катастрофе сборки. Поиск каспидных катастроф в двумерных системах и особенности их приведения к канонической форме (возможность катастрофы сборки в случае кубического потенциала).

Понятие о нелокальных бифуркациях на примере модельного потенциала. Трансформации потенциального рельефа и линий уровня при простейшей нелокальной бифуркации коразмерности один. Почему нелокальные бифуркации не относятся к катастрофам? Понятие нелокального бифуркационного множества. Нелокальное бифуркационное множество при

катастрофе сборки в двумерных системах. Маятник между двух заряженных нитей как пример системы, характеризующейся нелокальным бифуркационным множеством. Катастрофы эллиптической и гиперболической омбилики. Исследование катастрофы эллиптической омбилики. Нелокальное бифуркационное множество катастрофы эллиптической омбилики. Пример системы, демонстрирующей катастрофу эллиптической омбилики. Эксперименты Тейлора, картина течений для n -валковых «мельниц». Исследование катастрофы гиперболической омбилики.

Динамические системы и бифуркации

Раздел 1. Динамические системы. Основные определения, примеры и свойства

О классификации динамических систем. Потокотые системы и отображения. Диссипативные и консервативные системы, характер эволюции облака точек в фазовом пространстве. Аттракторы. Размерность фазового пространства, возрастание многообразия и сложности аттракторов при ее увеличении. Простейшие примеры дискретных отображений: цепочка сопротивлений и биологическая популяция. Метод сечений Пуанкаре. О взаимосвязи потоков и отображений. Обратимые и необратимые отображения. Автономные и неавтономные динамические системы. Вид сечения Пуанкаре для неавтономных систем.

Примеры динамических систем. О мотивации ввода в рассмотрение динамических систем в нелинейной динамике. Кинетические уравнения и закон соответственных состояний. Брюсселятор. Понятие о колебательных химических реакциях. Система Ресслера как искусственная модель химической кинетики. Ускорение Ферми и задачи с соударениями. Модель Улама. Модель Заславского и Чирикова (шарик на вибрирующем столе), построение дискретного отображения в предположении малости амплитуды колебаний, его диссипативность и обратимость. Система с вязким трением под импульсным воздействием, отображения типа Эно и отображение Эно, их диссипативность и обратимость. Логистическое отображение, кубическое отображение, их необратимость. Генератор релаксационных колебаний с регулируемым уровнем срыва. Отображение окружности, представление его динамики на ограниченном участке итерационной диаграммы. Нелинейный осциллятор с импульсным возбуждением. Приведение с помощью метода медленно меняющихся амплитуд к отображению Икеды. Система Ван-дер-Поля с импульсным воздействием, построение приближенных дву-

мерного и одномерного отображений. Одномерное отображение для системы Ван-дер-Поля—Дуффинга с импульсным возбуждением, приведение его к стандартному синус-отображению окружности в случае большой фазовой нелинейности.

Раздел 2. Простейшие бифуркации потоков

Бифуркации одномерных потоковых систем. Связь теории бифуркаций и теории катастроф в случае одномерных систем. Классификация бифуркаций по коразмерности. Бифуркация седло—узел. Транскритическая бифуркация. Бифуркация «вилка». Связь различных бифуркационных диаграмм при двухпараметрическом анализе. Субкритическая и суперкритическая формы бифуркаций.

Бифуркации одномерных потоков в двумерных системах. В чем нетривиальность проблемы (по Пригожину)? Консервативный осциллятор вблизи точек катастроф. Зависимость частоты от параметров и феномен смягчения мод. Физические примеры. Степенные законы вблизи точек катастроф. Случай диссипативного осциллятора. Превращения фокусов в узлы вблизи точек катастроф, или почему не возможна бифуркация «седло—фокус». Замедление времени и универсальность бифуркаций. Фазовые портреты бифуркаций одномерных потоков в двумерных системах.

Бифуркация Андронова—Хопфа. О возможности бифуркаций динамических систем, не имеющих аналогов в теории катастроф. Бифуркация Андронова—Хопфа и ее универсальность. Эволюция точек в трехмерном фазовом пространстве у порога бифуркации Андронова—Хопфа и понятие о центральном многообразии. «Линейная часть» задачи и ее приведение к каноническому виду в формализме медленных амплитуд. Роль нелинейности и универсальные уравнения для медленных амплитуд. Конфигурация родившегося предельного цикла в канонических переменных и в исходном фазовом пространстве. Порог бифуркации Андронова—Хопфа в двумерных системах. Порог бифуркации Андронова—Хопфа в трехмерных системах.

Другие бифуркации двумерных потоков. Бифуркация рождения предельного цикла из сгущения фазовых траекторий и ее объяснения в терминах медленных амплитуд. Нелокальные бифуркации коразмерности один: появление и распад седловой связки, рождение предельного цикла из петли сепаратрисы, рождение предельного цикла из общей сепаратрисы седла и узла. Бифуркации коразмерности два. «Критическая точка» линии бифуркации Андронова—Хопфа (превращение линии субкритической бифуркации в суперкритическую) и ее связь с бифуркацией рождения предельного цикла

из сгущения фазовых траекторий. Сборка линий бифуркаций рождения предельного цикла из сгущения траекторий и аналог бифуркации «вилка» для циклов. Бифуркация «общая точка бифуркаций Андронова—Хопфа и седло—узел», ее связь с рождением предельного цикла из петли сепаратрисы.

От двумерных потоков — к одномерным отображениям. Метод сечений Пуанкаре для двумерных потоков. Различные примеры фазовых портретов и соответствующих итерационных диаграмм. Проблема реконструкции одномерного отображения. Обратимость отображений, связанных с двумерными потоками.

Раздел 3. Отображения и их бифуркации

Простейшие свойства одномерных отображений. Неподвижные точки. Устойчивые и неустойчивые неподвижные точки. Характер сходимости (расходимости) вблизи неподвижной точки. Мультипликатор и его геометрическая интерпретация. Критерий устойчивости неподвижной точки. Примеры итерационных диаграмм для разных значений мультипликатора. Циклы. Связь задачи о поиске N -цикла с задачей поиска неподвижной точки. Мультипликатор цикла и его выражения в виде произведения производных. Примеры вычисления мультипликатора цикла. Понятие о циклах максимальной устойчивости. О многообразии циклов на примере логистического отображения.

Бифуркации коразмерности один. Касательная бифуркация. Движение изображающей точки по «коридору» вблизи порога бифуркации, описание бифуркации с помощью дифференциального уравнения и оценка времени прохождения «коридора». Бифуркация типа «вилка». Субкритические формы касательной бифуркации и бифуркации типа «вилка». Бифуркация удвоения периода. Рождение 2-цикла в логистическом отображении и исследование устойчивости этого цикла. Картина удвоений «в терминах» двукратно проитерированного отображения. Свойства таких отображений и производная Шварца. Бифуркация «жесткий переход через мультипликатор -1 » как альтернатива удвоению периода. Бифуркации циклов. От локального к глобальному бифуркационному анализу: каскады удвоений периода, бифуркационное дерево логистического отображения и обсуждение его структуры.

Бифуркации коразмерности два. Точка сборки касательных бифуркаций. Точка превращения линии удвоения в линию жесткого перехода — flip-бифуркация коразмерности два. Характерные конфигурации области устойчивости циклов на плоскости параметров, ситуации «crossroad area» и

«spring area». Мультистабильность и «многолистная» структура плоскости параметров мультимодальных отображений. От локального к глобальному двухпараметрическому бифуркационному анализу: примеры сосуществования бифуркационных линий и точек различных циклов на плоскости параметров. Карты динамических режимов.

Понятие о критических явлениях. Почему бифуркации удвоения образуют каскад? Накопление удвоений. Критическая точка. Закон Фейгенбаума и его универсальная константа. Законы расщепления на бифуркационном дереве и вторая универсальная константа Фейгенбаума. Понятие о скейлинге. Скейлинг на оси управляющего параметра. Скейлинг на бифуркационном дереве. Удвоения периода в двухпараметрических отображениях. Связь бифуркационных «сценариев» и маршрутов на плоскости параметров. Ситуация коразмерности один, связанная с условием отображения «экстремум в экстремум» на примере кубического отображения. Доказательство наличия экстремума четвертой степени у двукратно проитерированного отображения. Трикритические точки и устройство карт динамических режимов в их окрестности. Двухпараметрический скейлинг.

Двумерные отображения. Неподвижные точки двумерных отображений. Матрица монодромии и мультипликаторы. Примеры различных вариантов динамики на фазовой плоскости в окрестности неподвижной точки, связь с величинами мультипликаторов. Случаи действительных и комплексных мультипликаторов. Устойчивость неподвижной точки. Границы области устойчивости и областей действительных и комплексных мультипликаторов на плоскости след — якобиан матрицы монодромии. Циклы двумерных отображений. Матрица монодромии и мультипликаторы циклов.

Бифуркации, характерные для одномерных отображений в случае двух измерений. Отображения с постоянным якобианом, ограничения на вид бифуркаций для таких отображений. Касательная бифуркация в отображении Эно. Бифуркация удвоения периода неподвижной точки отображения Эно. Эволюция мультипликаторов на комплексной плоскости при изменении параметров от точки касательной бифуркации до бифуркации удвоения периода. Поиск 2-цикла отображения Эно и анализ его устойчивости.

Бифуркация Неймарка. Модельное отображение в случае произвольного якобиана. Карта динамических режимов модельного отображения. Аттракторы в виде инвариантных кривых и циклов, эволюция изображающей точки на этих аттракторах. Языки синхронизации. Число вращения. Рациональные и иррациональные числа вращения. Примеры различных чисел вращения для одинаковой конфигурации цикла. Связь числа вращения с

аргументом мультипликатора на линии $J = 1$. Понятие об устойчивом и неустойчивом многообразии двумерных отображений. Конфигурация многообразий для цикла внутри языка синхронизации. Граница языка синхронизации как касательная бифуркация. Тонкая структура плоскости параметров в окрестности линии инвариантной кривой. Замечания о физической реализации режимов, отвечающих инвариантной кривой.

Синхронизация и отображение окружности. Качественное объяснение перехода к отображению окружности при обсуждении проблемы синхронизации. Карта динамических режимов отображения окружности. Число вращения для отображения окружности. Примеры итерационных диаграмм для различных рациональных чисел вращения. Как меняется итерационная диаграмма при выходе через границы языка синхронизации? Уравнение для поиска элементов цикла и границ языка синхронизации для заданного числа вращения. Границы основного языка.

Раздел 4. Трехмерные потоки

Неавтономные системы. Задача о динамике неавтономного осциллятора как трехмерная потоковая система. Особенности устройства фазового пространства неавтономных систем. Фазовая плоскость и сечение Пуанкаре. Приведение фазового пространства неавтономных систем к виду, характерному для трехмерных потоковых систем. Связь сечения Пуанкаре и решений с помощью метода медленно меняющихся амплитуд.

От двумерных отображений к трехмерным потокам. Различные типы устойчивости предельных циклов в трехмерном пространстве и их объяснение с помощью сечений Пуанкаре. Примеры.

Простейшие бифуркации трехмерных потоков. Бифуркация удвоения периода предельных циклов. Цикл «удвоенного» периода как край ленты Мебиуса. Каскады удвоений в трехмерном фазовом пространстве. Бифуркация рождения тора и ее связь с бифуркацией Неймарка. Два масштаба времени, движения на торе, биения. Эргодические торы и квазипериодические режимы. Резонансные циклы на торах, рациональные числа вращения для трехмерных систем и их связь с числом вращения в сечении Пуанкаре. Как выглядят движение на торе и на резонансном цикле в проекции на координатную плоскость в фазовом пространстве? Торы на базе циклов удвоенного периода и понятие о многообразии бифуркаций торов и связанных с ними циклов.

Приложения теории катастроф и бифуркаций

Катастрофы в механике. Задача о выпучивании упругого стержня. Как описать задачу о выпучивании стержня с помощью конечномерной потенциальной функции? (Метод Рэлея—Ритца). Вырожденная катастрофа сборки в задаче о выпучивании стержня. Степенные законы в окрестности точки катастрофы. Влияние асимметрии. Бифуркационные диаграммы в случаях симметричного и несимметричного выпучивания. Выпучивание стержня в многомодовом приближении.

Фазовые переходы и катастрофы. Теория Ландау фазовых переходов второго рода: термодинамический потенциал и параметр порядка, разложение термодинамического потенциала в ряд по параметру порядка. Вырожденная катастрофа сборки и фазовые переходы второго рода. Законы изменения термодинамических функций в окрестности точки катастрофы. Фазовые переходы во внешнем поле и полная катастрофа сборки («размывание» перехода второго рода, переходы первого рода, метастабильные состояния). Критическая точка фазового перехода второго рода. Эволюция термодинамического потенциала как функции параметра порядка в окрестности этой точки. Трикритический потенциал и трикритическая точка. Устройство пространства параметров в окрестности трикритической точки. Понятие о мультикритических явлениях.

Катастрофы в геометрической оптике. Каустики. Опыты с цилиндрической чашкой. Каустики и сборки при отражении света. Применение принципа Ферма для объяснения природы катастрофы сборки при отражении света от цилиндрической поверхности. Приведение к канонической форме в симметричном случае. Другие примеры каустик иборок в оптике (прохождение лазерного луча через неоднородную каплю, сферическая абберация, миражи, отражение света от кристалла и др.) Абберация линз. Игра бликов и катастрофы. Гигантские океанские волны и их каустики и сборки.

Кривые и их особенности. Эволюты и эвольвенты. Примеры кривых с особенностью типа сборки — циклоида и астроида. Эволюты и эвольвенты. Приведение уравнений нормалей к параболе и к многообразию сборки. Эволюты эллипса. Эволюта произвольной гладкой кривой. Сборки как типичные особенности эволют. Эволюта и эвольвента циклоиды. Изохронный маятник Гюйгенса. Связь эвольвент с задачей об огибании препятствий волновым фронтом.

Волновые фронты и их особенности. Построение волновых фронтов при помощи принципа Гюйгенса. Волновые фронты, испущенные параболической поверхностью. Доказательство возникновения особенности типа ласточкин хвост. Каустики как линии, вдоль которых распространяются особенности волновых фронтов. Волновой фронт, испущенный эллиптической поверхностью: особенности и каустики (качественно). Уравнение волнового фронта для произвольной, заданной параметрически излучающей поверхности. Особенность на волновом фронте. Особенности волновых фронтов в трехмерном пространстве («губы», «клюв к клюву», ласточкин хвост и т. д.).

Катастрофы в теории колебаний. Эффект смягчения мод. Эффект «смягчения моды» для квадратичного осциллятора и осциллятора Дуффинга. Зависимость собственной частоты колебаний осциллятора от параметров. Связь с теорией катастроф. Степенные законы вблизи точек катастроф, универсальные показатели. Введение диссипации. Проявление эффекта смягчения мод в задаче о выпучивании нагруженного стержня и колебаниях судна.

Нелинейный осциллятор с позиций теории катастроф. Основной резонанс. Нелинейный резонанс для осциллятора Дуффинга с гармоническим внешним воздействием. Получение укороченного уравнения с помощью метода медленно меняющихся амплитуд. Амплитудно-частотная характеристика и гистерезис. Качественное обоснование существования катастрофы сборки. Приведение укороченных уравнений к безразмерному виду. Уравнение резонансной кривой в безразмерной форме. Приведение безразмерного уравнения резонансной кривой к канонической для сборки форме. Нахождение линий складок и точки сборки на плоскости безразмерная частота–амплитуда воздействия. Обоснование закона «три вторых» в окрестности точки сборки. Сборка и линии складок на плоскости размерная частота–амплитуда воздействия, их эволюция при изменении параметра диссипации, примеры численных оценок.

Нелинейный осциллятор. Резонансы на гармониках: катастрофы и бифуркации. Укороченное уравнение для супергармонического резонанса на частоте $\omega_0/3$. Уравнение резонансной кривой в безразмерной форме. Точка сборки и линии складок на плоскости размерная частота — амплитуда воздействия. Субгармонический резонанс на частоте $\omega_0/3$. Укороченные уравнения и их приведение к безразмерной форме. Резонансная кривая для субгармонического резонанса. Ее связь с катастрофой складка. Линия складок на плоскости частота — амплитуда воздействия.

Численное исследование сложной динамики неавтономных нелинейных осцилляторов. Некоторые результаты численного анализа неавтономного осциллятора Дуффинга. Карта динамических режимов. Характерные бифуркации линии складок (седло—узловых бифуркаций), линии бифуркации потери симметрии, линии удвоений периода.

Катастрофы и бифуркации в теории синхронизации. Случай малых амплитуд воздействия. Анализ уравнения Адлера с позиции теории катастроф. Приведение к градиентной системе с катастрофой складка. Захват фазы, скользящие фазы, язык синхронизации (язык Арнольда). Бифуркация, ответственная за возникновение синхронизации при переходе через границу языка.

Синхронизация системы Ван-дер-Поля гармоническим сигналом. Случай больших амплитуд воздействия. Синхронизация в случае больших амплитуд внешнего воздействия. Уравнение для поиска неподвижных точек и его анализ. Линии складок (седло—узловой бифуркации) и точка сборки на плоскости параметров. Бифуркация Андронова—Хопфа. Бифуркация коразмерности два — точка Богданова—Тakens. Бифуркации влипания предельного цикла в петлю сепаратрисы. Полная бифуркационная картина устройства языка синхронизации. Фазовые портреты укороченных уравнений в различных характерных точках плоскости параметров и их трансформации при бифуркациях. Вид и эволюция спектра при синхронизации в режиме больших амплитуд воздействия и его отличия от случая малых амплитуд. Особенности возникновения режима биений для реализаций в случае больших амплитуд воздействия.

Синхронизация на субгармониках. Укороченное уравнение для синхронизации на субгармонике в случае ω_0 . Безразмерная форма укороченных уравнений. Уравнения для амплитуды и фазы. Случай малых амплитуд воздействия, приведение к уравнению Адлера. Форма язык синхронизации в случае малых и больших амплитуд воздействия. Отличия от случая основного резонанса. Условия бифуркации Андронова—Хопфа. Полная картина бифуркационных линий на плоскости частота — амплитуда воздействия. Характерные фазовые портреты в окрестности языка синхронизации.

Сильные и слабые резонансы. Нормальные формы для резонансов 1:2, 1:3, 1:4, 1:5. Картина бифуркаций для этих резонансов. Сильные и слабые резонансы. Глобальная картина бифуркаций при синхронизации. Синхронизация в автогенераторе с жестким возбуждением. Укороченное уравнение для автогенератора с жестким возбуждением. Картина слияния устойчивого и неустойчивого языков синхронизации в изохронной систе-

ме. Явление асинхронного возбуждения, обнаруженное Мандельштамом и Папалекси: возможность квазипериодических режимов за порогом бифуркации слияния циклов. Картина бифуркаций за порогом слияния циклов: особенность «губы» и линии бифуркаций Андронова—Хопфа, слияние точек Богданова—Тakens. Слияние языков синхронизации в неизохронной системе. Возможность катастрофы ласточкин хвост и особенности «клюв к клюву».

Синхронизация в системе с бифуркациями удвоения периода. Примеры задач о синхронизации систем с удвоениями периода. Картина языков синхронизации, ее эволюции по мере удвоений периода в автономной системе. Особенности внутреннего устройства языков, конфигурация линий удвоения, наличие бифуркаций, отсутствующих в традиционном отображении окружности. Критическая точка, ответственная за накопление точек, в которых сходятся линии удвоений и линии седло—узловых бифуркаций. Сосуществование устойчивых циклов в этой точке (критический квазиаттрактор).

Динамический хаос

Раздел 1. Динамический хаос и его свойства

Динамические системы и хаос. Историческое введение. Формирование представлений о динамическом хаосе и историческая роль таких дисциплин, как механика, статистическая физика, теория колебаний, радиофизика и электроника, гидродинамика, математика. Роль российских ученых в развитии науки о динамическом хаосе. Обсуждение прикладных аспектов динамического хаоса.

Хаос в искусственно сконструированных динамических системах-моделях. Отображение «зуб пилы». Символическая динамика и сдвиг Бернулли. Логистическое отображение. Замена переменной Улама—фон Неймана и режим развитого хаоса в логистическом отображении. Решение для x_n в явном виде. Итерации в обратном времени и кодирование RL — последовательностью. Треугольное отображение («tent map»). Отображение пекаря как пример консервативной системы с хаотической динамикой. Конструирование отображения пекаря исходя из постулированной символической динамики. Наглядная интерпретация отображения пекаря и свойство перемешивания. Отображение кота Арнольда. Определение и наглядная интерпретация с использованием изображения кота. Бесконечное множество

периодических орбит. Растягивающее и сжимающее собственные направления и перемешиваемость. Подкова Смейла. Конструкция отображения подковы и объяснение кантороподобной структуры множества точек, остающихся в прямоугольной области при бесконечном числе итераций. Соленоид Смейла—Вильямса. Общие свойства модельных систем с хаотической динамикой.

Система Лоренца. Физические ситуации, приводящие к уравнениям Лоренца. Конвекция Рэлея—Бенара (качественно), водяное колесо (качественно), задача о конвекции в замкнутой петле, модель одномодового лазера. Диссипативность системы Лоренца. Обоснование того, что аттрактор располагается в ограниченной области фазового пространства. неподвижные точки и анализ на устойчивость. Бифуркации в модели Лоренца. Результаты численного моделирования динамики системы Лоренца. Представление динамики с помощью одномерного отображения.

Примеры нелинейных систем с хаотической динамикой. Карты динамических режимов как способ наглядного изображения пространства параметров. Модели с дискретным временем. Отображение Эно и его механическая модель. Отображение Икеды как модель нелинейного кольцевого резонатора, возбуждаемого лучом лазера. Типичная структура на плоскости параметров: «область перекрестка» («crossroad area»). Подталкиваемый периодическими импульсами автогенератор и отображение Заславского. Искусственно сконструированные дифференциальные уравнения. Система Ресслера. Системы Спротта. Нелинейные осцилляторы под периодическим внешним воздействием. Осциллятор Уэды и LR-контур с полупроводниковым диодом. Автономные системы — электронные генераторы. Генератор Кияшко—Пиковского—Рабиновича. Генератор с инерционной нелинейностью Анищенко—Астахова. Кольцевой генератор Дмитриева—Кислова. Схема Чуа.

Сечение Пуанкаре, подкова Смейла, теорема Шильникова. Сечение Пуанкаре для автономных систем и стробоскопическое сечение для систем с периодическим воздействием: сведение динамики трехмерных систем к двумерному отображению. Подкова Смейла. Построение модельного отображения и объяснение кантороподобной структуры множества точек, выживающих в прямоугольной области при асимптотически большом числе итераций. Теорема Шильникова: возникновение подковы Смейла и сложной динамики вблизи ситуации, когда реализуется петля сепаратрисы седлофокуса. Версия теоремы, получаемая обращением времени.

Гомоклиническая структура. Устойчивое и неустойчивое многообразие неподвижной точки и возможность их пересечения. Гомоклиническая структура. Подкова Смейла и гомоклиническая структура. Критерий Мельникова появления гомоклинической структуры при вынужденных колебаниях нелинейного осциллятора.

Функция распределения, инвариантная мера, эргодичность и перемешивание. Статистический подход к исследованию хаотической динамики. Ансамбль и его образ в фазовом пространстве (облако изображающих точек). Функция распределения и инвариантная мера. Теорема Крылова—Боголюбова о существовании инвариантной меры. Негиперболические системы и квазиаттракторы. Эргодичность и ее роль в статистической механике. Перемешивание как более сильное свойство, необходимое для объяснения релаксации замкнутой системы к термодинамическому равновесию. Связь перемешивания с затуханием корреляций и чувствительной зависимостью от начальных условий. Одномерные отображения: инвариантные распределения и уравнение Фробениуса—Перрона. Поточковые системы: уравнение для плотности распределения и портреты странных аттракторов в серых тонах.

Устойчивость и неустойчивость. Ляпуновские показатели. Устойчивость по Лагранжу. Устойчивость по Пуассону. Предельные точки α и ω , предельные множества A и Ω . Определение устойчивости по Пуассону через предельные множества и через возвраты Пуанкаре. Как соотносятся свойства возвратов Пуанкаре с характером динамического режима (периодический, квазипериодический, хаос)? Концепция устойчивости по Ляпунову и характеристические показатели Ляпунова. Анализ на устойчивость по линейному приближению. Геометрический смысл ляпуновских показателей и их алгебраическая интерпретация через сингулярные числа матрицы линеаризации. Ляпуновские показатели неподвижных точек и предельных циклов. Другие аттракторы и роль мультипликативной эргодической теоремы. Общие свойства спектра ляпуновских показателей для автономных поточковых систем. Классификация аттракторов по сигнатуре спектра ляпуновских показателей.

Вычисление показателей Ляпунова. Примеры аналитического вычисления показателей Ляпунова для модельных отображений. Численный подход к нахождению ляпуновских показателей. Алгоритм Бенеттина. Использование ортогонализации по Граму—Шмидту при вычислении спектра ляпуновских показателей. Примеры. Двухпараметрический анализ нелинейной динамики и карты ляпуновского показателя на плоскости параметров.

Геометрия странных аттракторов и фрактальная размерность. Фрактальная структура аттрактора в системе Ресслера, отображении Эно, отображении Смейла–Вильямса. Фракталы: определение и простые примеры. Канторово множество, кривая Коха, ковер Серпинского. Пример появления множества Кантора как инвариантного множества в одномерном отображении. Мера и мощность множества Кантора. Емкость и фрактальная размерность. Размерность Хаусдорфа и ее соотношение с емкостью. Информационная размерность и ее роль. Теорема о фрактальной размерности подмножества аттрактора. Корреляционная размерность. Спектр обобщенных размерностей Реньи. Скейлинг-спектр (спектр сингулярностей). Фрактальная размерность аттрактора в обобщенном отображении пекаря. Формула Каплана–Йорке и ляпуновская размерность.

Обработка реализаций: реконструкция аттрактора по наблюдаемой, проблема вложения, вычисление характеристик хаотической динамики. Алгоритм Грассбергера и Прокачиа. Реконструкция фазового пространства методом запаздывания. Изображение портретов аттракторов на основе обработки наблюдаемой реализации и визуальные оценки. Численные расчеты корреляционной размерности. Оценка необходимого объема данных в зависимости по Экманну–Рюэлю. Теорема о вложении и её эвристическое объяснение. Метод оценки показателя Ляпунова по наблюдаемой реализации и оценка требуемого объема данных. Идея реконструкции динамической системы по наблюдаемой реализации: исследовательская программа и трудности на ее пути.

Раздел 2. От порядка к хаосу

Общее представление о сценариях перехода к хаосу. Постановка вопроса о бифуркационных сценариях возникновения хаоса и краткий исторический очерк. Сценарии возникновения турбулентности по Ландау, Рюэлю и Такенсу, Фейгенбауму, три типа перемежаемости по Помо и Манневиллю. Три варианта потери устойчивости предельным циклом как основа классификации сценариев перехода к хаосу.

Каскад удвоений периода и теория Фейгенбаума. Модельная система — логистическое отображение и феноменология сценария перехода к хаосу через удвоения периода. Открытие Фейгенбаумом универсальных констант скейлинга. Критическая точка. Идея метода ренорм-группы (РГ). Циклы в критической точке и универсальный мультипликатор. Вывод функционального уравнения РГ и численный метод нахождения его неподвижной точки. Линеаризация уравнения РГ вблизи неподвижной точки, задача

на собственные функции и собственные значения, понятие о методе решения и спектр собственных чисел. Седловой характер неподвижной точки, ее устойчивое и неустойчивое многообразие. Объяснение скейлинга вблизи критической точки. Свойства динамики в критической точке. Критический аттрактор и его фрактальные свойства. Сигма-функция. Спектр Фурье в критической точке и соотношение между амплитудами субгармоник различного уровня. Спектр размерностей Реньи, скейлинг-спектр.

Перемежаемость. Перемежаемость типа I в системе Лоренца и в логистическом отображении вблизи границы окна периодичности. Касательная бифуркация и условие реинжекции. Качественная картина: образование коридора, ламинарные и турбулентные стадии. Закон скейлинга для протяженности ламинарных стадий в зависимости от надкритичности. РГ-анализ перемежаемости по аналогии с теорией Фейгенбаума. Явное решение уравнения для неподвижной точки и задачи на собственные значения.

Квазипериодическая динамика и переход к хаосу в отображении окружности. Задача о бифуркациях двумерного тора. Отображение окружности: докритический, критический и закритический случай. Карта динамических режимов и языка Арнольда. Чертова лестница. Число вращения и его представление в виде цепной дроби. Подходящие дроби. Золотое сечение и другие квадратичные иррациональности. Числа Фибоначчи и рациональные аппроксиманты для золотого сечения. Траектория на плоскости параметров, отвечающая золотому сечению. Критическая точка GM («golden mean»). РГ-анализ динамики в критической точке GM. Идея РГ-анализа — рассмотрение динамики на интервалах времени, даваемых числами Фибоначчи. Вывод РГ-уравнения и его решение. Сколько неустойчивых направлений у седловой неподвижной точки, и какие из них существенны? Спектр линеаризованного оператора РГ. Свойства скейлинга в фазовом пространстве и пространстве параметров. Фурье-спектр и его представление в логарифмических координатах, делающее наглядным свойство скейлинга.

О возможности классификации сценариев перехода к хаосу по размерности.

Нелинейные волны

Раздел 1. Введение. Основные принципы распространения нелинейных волн.

Об эвристическом подходе к нелинейным волновым уравнениям. Эталонные уравнения теории нелинейных волн. Нелинейные волны в среде без дисперсии. Уравнение простой волны. Укручение и опрокидывание волн. Среда с диссипацией: уравнение Бюргерса. Ударные волны. Среда с высокочастотной дисперсией: уравнение Кортевега—де Вриза (КдВ). Уединенные волны и солитоны. Среда с дисперсией в области низких частот: нелинейное уравнение Клейна—Гордона. Среда с дисперсией и диссипацией: уравнение КдВ—Бюргерса. Распространение огибающей волнового пакета: нелинейное уравнение Шредингера. Солитоны огибающей. Нелинейные волны в средах с неустойчивостью. Уравнение Гинзбурга—Ландау. Неустойчивое уравнение Клейна—Гордона. Обобщение на неоднородный случай: уравнения Хохлова—Заболотской и Кадомцева—Петвиашвили. Обобщение на неполиномиальные дисперсионные соотношения: уравнение Уизема.

Раздел 2. Нелинейные волны в средах без дисперсии.

Уравнение простой волны. Решение методом характеристик. Переменные Эйлера и переменные Лагранжа. Поток невзаимодействующих частиц. О группировке электронов в пролетном клистроне. Решение Римана. Графический анализ опрокидывания профиля волны. Распространение гармонического сигнала. Спектр опрокидывающейся волны: решение Бесселя—Фубини.

Образование разрывов в простой волне. Определение координаты разрыва. Граничное условие на разрыве. Слабые разрывы. Центрированная волна разрежения. Динамика амплитуды разрыва. пилообразная волна и ее спектр. Распространение треугольного импульса. Распространение биполярного импульса: N-волна. Волны от движущегося источника. Взаимодействие разрывов.

Простые волны в примерах. Общий случай системы гиперболических уравнений. Критерий гиперболичности. Примеры гиперболических систем. Простые волны в газовой динамике. Инварианты Римана. Волны на поверхности «мелкой воды». Задача о разрушении плотины. Ионный звук в плазме. Волны в автомобильном потоке. Граничные условия на разрыве в общем случае и их связь с законами сохранения. Законы сохранения уравнений «мелкой воды». Диссипация энергии на разрыве.

Уравнение Бюргерса. Метод точного решения уравнения Бюргерса: преобразование Коула—Хопфа. Предельный переход к уравнению простой волны. Решение в виде стационарной ударной волны. Распространение периодического сигнала: решение Хохлова и его спектр (решение Фэя). Распространение импульсов: одиночный горб, N-волна. Слияние ударных волн. Автомодельные решения.

Примеры ударных волн. Ударные волны. Задача о сильном точечном взрыве в атмосфере и ее решение при помощи метода размерностей. Примеры ударных волн естественного происхождения: гром, землетрясения, извержения вулканов, падение метеоритов. Ударные волны, искусственно создаваемые на земле. Об ударных волнах в космосе: ударные волны в магнитосфере Земли, вспышки на Солнце, взрывы сверхновых.

Раздел 3. Нелинейные волны в диспергирующих средах.

История открытия солитона. Дж. Скотт Рассел и открытие солитона. Проблема Ферми—Пасты—Улама (ФПУ). Ее связь с уравнениями Буссинеска и Кортевега—де Вриза. Возвращаемость ФПУ. Работа Забуски и Крускала и взаимодействие солитонов.

Стационарные нелинейные волны. Уравнение КдВ: кноидальные волны и солитоны. Модифицированное уравнение КдВ. Уравнение Буссинеска. Стационарные ударные волны в среде с диссипацией и дисперсией: уравнение КдВ—Бюргерса. Уравнение Sin—Гордона: стационарные решения и физические примеры. Стационарные ионно-акустические и ленгмюровские волны в плазме. Электромагнитные волны в нелинейной диэлектрической среде.

Уравнение Кортевега—де Вриза в конкретных физических задачах. Ионно-акустические волны в плазме. Гравитационные волны на поверхности мелкой воды. Ленгмюровские волны в тонком плазменном цилиндре. Электромагнитные волны в нелинейных линиях передачи. Газовая динамика и уравнение Бюргерса.

Точные методы интегрирования нелинейных волновых уравнений. Преобразование Миуры—Гарднера и законы сохранения уравнения КдВ. О методе обратной задачи рассеяния для уравнения КдВ. Задача на собственные значения для уравнения Шредингера. Дискретный и непрерывный спектр собственных значений. Обратная задача: уравнение Гельфанда—Левитана—Марченко. Многосолитонные решения. Понятие о полной интегрируемости нелинейных уравнений в частных производных. Обратная

задача рассеяния в формулировке Лакса. Иерархия интегрируемых уравнений. Задача рассеяния Абловица—Каупа—Ньюэлл—Сигура. Другие точные методы решения солитонных уравнений: метод Хироты и многосолитонные решения; преобразования Бэклунда.

Модулированные волны в нелинейных средах. Теория Уизема. Нелинейное дисперсионное соотношение, законы сохранения волнового числа и волнового действия. Критерий Лайтхилла. Модуляционная неустойчивость (неустойчивость Бенджамена—Фейра). Нелинейное уравнение Шредингера (НУШ). Метод многих масштабов. Неустойчивость пространственно-однородного решения. Решение в виде солитона огибающей. «Светлые» и «темные» солитоны. Электромагнитные волны в нелинейном диэлектрике. Солитоны в волоконных световодах. Самофокусировка света. Трехволновой резонанс в квадратично-нелинейной среде. Уравнения трехволнового взаимодействия. Распадная (параметрическая) неустойчивость. Взрывная неустойчивость.

Раздел 4. Нелинейные волны в активных средах.

Уравнение Гинзбурга—Ландау. Анализ на абсолютную и конвективную неустойчивость. Неустойчивость пространственно-однородного решения (модуляционная неустойчивость). Уравнение Гинзбурга—Ландау в конкретных физических примерах: течение Пуазейля, конвекция Рэлея—Бенара, колебательные химические реакции. Об автоколебаниях в распределенных системах. Динамическая модель пространственного развития турбулентности.

Неустойчивости в системах взаимодействующих волн с положительной и отрицательной энергиями. Примеры волн с отрицательной энергией. Различные случаи взаимодействия двух связанных волн. Типичные дисперсионные характеристики. Абсолютная и конвективная неустойчивость. Учет нелинейных эффектов: нелинейное уравнение Клейна—Гордона с неустойчивостью. Примеры. Взаимодействие электронного потока с электромагнитной волной в скрещенных электро- и магнитостатическом полях. Гидродинамическая неустойчивость Кельвина—Гельмгольца. Взаимодействие электромагнитного излучения со средой из двухуровневых частиц. Уравнения Максвелла—Блоха. Усиление ультракоротких лазерных импульсов и самоиндуцированная прозрачность. Предел неподвижных атомов: уравнение Син-Гордона и его автомодельные решения.

Фракталы и комплексная аналитическая динамика

Раздел 1. Фракталы

Первое представление о фракталах.

Фрактальные объекты в природе. Длина береговой линии. Нетривиальное поведение линий уровня. Деревья, горы, облака. Кристаллы и поверхности материалов.

Определение фрактала. Работы Мандельброта («Фрактальная геометрия природы»). Иерархическая организация как основное свойство фракталов. Масштабная инвариантность, свойства подобия, степенные законы. Фрактальные размерности. Хаусдорфова размерность.

Фракталы как математические объекты.

Фрактальные функции. Фрактальные кривые Вейерштрасса — непрерывные, но не дифференцируемые ни в одной своей точке. Задача о массе «канторова стержня» и «чертова лестница».

Простейшие самоаффинные фракталы. Снежинка Коха, ковер Серпинского и т.д. Генераторы фракталов. Фракталы в виде точек, линий, кусков поверхности и объема. Фрактальные кривые, покрывающие плоскость. Кривые Пеано, Гильберта, драконы Хартера (построение дракона с помощью сложенного листа бумаги). Фракталы с недробной размерностью. Размерность кривой Коха (дробная) и кривой Гильберта (целая, но больше топологической).

Деревья и графы. Деревья Кейли и решетка Бете. Компьютерная демонстрация пифагоровых деревьев. Дерево Фарей. Представление рациональных и иррациональных чисел с помощью дерева Фарей. Суммирование дробей по Фарею («правило двоичника») и построение дерева. Бинарные коды. Алгоритм вычисления кода по заданному числу и числа по заданному коду. Связь между представлением Фарей и цепными дробями. Кролики Фибоначчи.

Системы итерируемых функций как генераторы фракталов.

Итерации линейных систем. Конструирование системы отображений, задающих салфетку Серпинского (введение комплексной переменной на плоскости и определение трех отображений, задающих вершины равностороннего треугольника). Салфетка Серпинского как аттрактор системы

линейных отображений. Чтобы воспроизвести весь фрактал, нужно знать вид отображений и стартовать из любой, одной-единственной точки. Приложения: кодирование изображений и фрактальная аппроксимация.

Метод случайных итераций или игра в хаос. Правила игры на треугольнике. Связь с системой итерируемых функций. Игра на квадрате и шестиугольнике. Игры с поворотами: кривая Коха, драконы.

Сжимающие аффинные преобразования. Сжимающие преобразования — общий случай. Фрактал «папоротник» как аттрактор сжимающего преобразования со случайными итерациями.

Популярные фрактальные модели в физике

Теория перенормировок и теория фазовых переходов. Магнитное и немагнитное состояния вещества. Точка Кюри. Когерентные и некогерентные фазы. Самоподобие и фрактальность структуры сосуществования когерентных и хаотических фаз вблизи критической точки фазового перехода. Демонстрация на квадратной решетке. Представление о методе перенормировок Каданова. Модель решеток Изинга и Поттса и их преобразования перенормировок.

Перколяция. Формирование фракталов на плоскости. Теория протекания. Модели узлов и связей. Кластеры. Понятие порога протекания. Зависимость вероятности протекания всей решетки от вероятности протекания ее узлов (связей). Бесконечный кластер. Задачи теории протекания на решетке Бете. Процессы, для описания которых пригодна модель перколяции: лесные пожары, распространение эпидемий, ветер, протекание пористой среды, решетки связанных импедансов, переход проводник-диэлектрик и др.

Клеточные автоматы и игра «Жизнь». Правила существования клеточных автоматов и игра «Жизнь» как один из представителей. Возможности динамики игры: гибель всей популяции в игре, стабильное сосуществование нескольких особей, периодическая динамика, распространение «жизни» на всем пространстве, фрактальные структуры на плоскости.

Ограниченная диффузией агрегация. Описание модели ограниченной диффузией агрегации. Образование фрактальных кластеров и их характерная структура в случае точечного и линейного затравочного элемента. Введение понятия диффузионного поля (вероятности прилипания к различным областям агрегата). Модель управляемого градиентом роста.

Фрактальные модели для описания статистических процессов. Броуновское движение и фрактальная модель статистического описания случайных блужданий на прямой. Свойства подобия одномерных случайных блужданий, заключающиеся в инвариантности нормально распределенной плотности вероятности случайной величины, отвечающей за координату броуновской частицы, при перенормировке пространственного характерного масштаба и одновременной соответствующей перенормировке временного масштаба.

Фрактальные объекты в нелинейной динамике

Простейшие примеры. Примеры известных из курса «Динамический хаос» фракталов: бифуркационное дерево, критический аттрактор Фейгенбаума (канторово множество), «чертова лестница» в теории синхронизации и др.

Фрактальные границы бассейнов притяжения. Бифуркации возникновения фрактальных структур в фазовом пространстве. Гомоклинические структуры. Комплексные фрактальные фазовые границы. Механизмы фрактализации по Мира и МакДональду.

Раздел 2. Комплексная аналитическая динамика (КАД) и ее приложения

Комплексные отображения и ассоциирующиеся с ними фрактальные объекты. Множество Мандельброта и множества Жюлиа

Введение. Основные понятия теории функций комплексного переменного. Дифференцируемые функции комплексного переменного. Условия Коши–Римана. Уравнение Лапласа. Одномерные комплексные аналитические отображения как специальный класс динамических систем. Их связь с двумерными действительными отображениями.

Множество Мандельброта и множества Фату и Жюлиа как феномены КАД. Множество Жюлиа как граница между бассейном притяжения и областью «убегания» на бесконечность квадратичного комплексного отображения. Большинство множеств Жюлиа — фракталы. Понятие времени убегания на бесконечность. Множество Фату. Внешние и внутренние углы, локальная связность и применение множества Фату для описания множества Жюлиа. Оценка размера множества Жюлиа. Связные и несвязные множества Жюлиа. Критерий связности (динамика экстремума отображения).

Множество Мандельброта и его фрактальная структура. Обобщения множеств Мандельброта и Жюлиа на случай других систем (полиномиальных, рациональных, трансцендентных, неявных отображений, систем итерационных функций).

Бифуркационный анализ множества Мандельброта. «Кактус» Мандельброта. Аналогия с бифуркационным деревом. Иные, отличные от удвоений, последовательности усложнения периода. Параметризация комплексного мультипликатора на кардиоиде. Универсальные константы скейлинга и оценка их величины. Граница множества Мандельброта, ее несамоподобный характер. Наполненные и дендритоподобные множества Жюлиа. Сходство множества Мандельброта и множества Жюлиа в точках Мизюревича. Множество Мандельброта и число π .

Классификация множеств Жюлиа. Гиперболическая и параболическая динамика. Параболический случай с рациональным числом вращения (цветок Ло–Фату) и с иррациональным числом вращения (диски Зигеля). Уравнение Шредера и проблема линеаризуемости (проблема «центра»). Точки Зигеля и Кремера. Эквивалентность динамики комплексного отображения на фазовой плоскости в окрестности иррациональной нейтральной неподвижной точки и динамики отображения кольца. Основные теоремы о линеаризуемости: теорема Иоккоза и теорема Брюно. Типы иррациональных чисел (диофантовы числа, числа ограниченного типа, квадратичные иррациональности). Представление иррациональных чисел в виде цепных дробей и посредством дерева Фарея. Дιοфантовы числа (линеаризация возможна) и числа Лиувилля (нелинеаризуемый случай — «монстр Лиувилля», свойство «малых циклов»). Кольцо Арнольда–Эрмана для рациональных комплексных отображений порядка больше 2.

Основные свойства и методы построения множеств Жюлиа. Основные свойства. Существование трех типов гладких множеств Жюлиа. Эквивалентность в прямом и обратном времени. Воспроизводимость по сколь угодно малой части. Хаотическая, эргодическая динамика на множестве. Построение путем обратного итерирования и путем нахождения неустойчивых циклов. Несколько интересных примеров множеств.

Потенциал множества Жюлиа и множества Мандельброта. Отображение множества Жюлиа на окружность. Теорема Римана о конформных отображениях. Потенциал окружности. Итерационная формула для расчета электростатического потенциала цилиндрического проводника с током, сечением которого является множество Жюлиа.

Хаусдорфова размерность фрактальных объектов, возникающих в КАД. Хаусдорфова размерность границы множества Мандельброта и «кактуса» Мандельброта. Хаусдорфова размерность множеств Жюлиа для различных значений параметра (перечисление основных известных результатов). Выведение зависимости от параметра размерности множеств Жюлиа топологически эквивалентных окружности. Скорость убегания на бесконечность. Численные значения фрактальной размерности. Оценка размерности границы диска Зигеля.

Аналитические и неаналитические отображения. Комплексные аналитические отображения как специальный класс двумерных систем. Модельные комплексные отображения с неаналитическим возмущением. Деформация множеств Мандельброта и Жюлиа. Преобразование бифуркационных точек в линии, возникновение областей квазипериодичности и языков Арнольда из лепестков «кактуса» Мандельброта. Механизм фрактализации границ бассейнов притяжения двумерных необратимых систем по Мира. Понятие о критических линиях.

Аналогия с гамильтоновыми системами. Обратимые комплексные отображения. Неявные комплексные отображения как пример обратимых отображений с феноменами КАД.

Обобщения комплексных чисел. Теорема Фробениуса о единственности возможном обобщении системы действительных чисел с сохранением всех ее основных алгебраических свойств, в том числе отсутствия делителей нуля. Вторая теорема Фробениуса о существовании алгебр, которые не имеют делителей нуля, но в которых не выполняется коммутативность или коммутативность и ассоциативность умножения. Гиперкомплексные числа. Изобретение кватернионов У. Гамильтоном (1843 г.). Кватернионы как система четырехмерных комплексных чисел (отказ от коммутативности). Октавы Кэли как восьмеричные числа (отказ от коммутативности и ассоциативности). Невозможность трехмерного обобщения комплексных чисел. Системы чисел с сохранением законов умножения, но с наличием делителей нуля. Двухкомпонентные числа: эллиптические (изоморфны комплексным), гиперболические (двойные), параболические (двойственные). Обобщенная теория функций комплексного переменного. Многокомпонентные числа, смешанные числа, финслеровы пространства. Применения гиперкомплексных чисел для описания пространств с различной симметрией. Множества Мандельброта и Жюлиа для гиперкомплексных отображений. Применение кватернионов для описания вращения (в компьютерной графике и при создании компьютерных игр).

Различные приложения комплексной аналитической динамики. Построение моделей реальных физических систем

Проблема сходимости метода Ньютона (задача Кэли). Уравнение $f(x) = 0$ может иметь комплексные корни. Обобщенный на комплексный случай итерационный численный метод Ньютона (метод касательных) для поиска корней. Исследование сходимости метода в зависимости от начального приближения. Множество Жюлиа как граница между областями сходимости к различным корням. Случай двух корней: граница является равноудаленной от корней прямой. В случае трех корней реализуется не гладкая («пирог Ньютона») граница, а фрактальная (множество Жюлиа, каждая точка которого является трехсторонней). Интерпретация множества Мандельброта на плоскости параметров и плоскости комплексифицированного шага. Области расхождения метода — вне множества Мандельброта. Периодические лепестки M — области «зацикливания» метода. Итерационная формула Ньютона как дискретная Эйлера модель дифференциального уравнения. Переход к непрерывному времени (к обратимости во времени) дает гладкую сепаратрису.

Маятник в поле трех притягивающих центров. Переход к комплексным переменным для описания двумерной задачи о движении осциллятора в поле трех притягивающих центров. Комплексное неаналитическое уравнение движения. Бассейны притяжения и их границы (фрактальные, но дифференцируемые кривые в отличие от множеств Жюлиа). Хаотические режимы и проблема «трех тел».

Динамика движения частицы в магнитном поле (задача Бека). Получение множества Мандельброта в реальной физической системе — популярное и полезное направление современных исследований в области нелинейной динамики (задача Бека — одна из первых попыток). Движение частицы на плоскости под действием непериодических внешних импульсов в зависящем от времени и скорости частицы магнитном поле при наличии нелинейного затухания. Переход к комплексным координатам. Искусственная «подгонка» характеристик системы для получения аналитического комплексного уравнения движения. Возникновение множества Мандельброта на плоскости амплитуд внешних импульсов.

Множество Мандельброта для связанных систем. Экспериментальная реализация. Сведение комплексного отображения к связанным вещественным отображениям (симметричная и антисимметричная замены переменных). Динамика связанных логистических отображений при различных параметрах связи: три характерных типа карт режимов. Аналогия с тре-

мя типами обобщенных комплексных чисел. Получение изображения множества Мандельброта в эксперименте с электронным аналоговым устройством.

Система связанных нелинейных осцилляторов с периодическим воздействием. Преимущества методики конструирования реальных физических систем, демонстрирующих феномены КАД из парциальных систем с удвоениями (достаточно широкий класс систем). Демонстрация для системы связанных нелинейных осцилляторов с гармоническим внешним воздействием (парциальная система, допускающая переход к хаосу через последовательность удвоений).

Электронная эмиссия с фрактального катода. Применение уникальных свойств объектов КАД для описания характеристик реальных физических объектов и упрощения исследования физических процессов. Описание неоднородных эмиссионных поверхностей ряда материалов (алмазоподобные пленки, тубелены, пористый кремний) моделью фрактального катода. Использование возможности вычисления полевых характеристик фрактального катода, заданного множеством Жюлиа. Связь эмиссионных свойств катода с его фрактальной размерностью.

Агрегация фрактальных кластеров. Визуальная аналогия фрактальных кластеров, возникающих для модели ограниченной диффузией агрегации, с дендритоподобными множествами Жюлиа. Проведение аналогии между понятием диффузионного поля и электростатическим полем множества Жюлиа.

Квантовое туннелирование. Использование множества Жюлиа для визуализации некоторых эффектов при квантовом туннелировании в хаотической системе.

Теория фазовых переходов. Теория Ли—Янга о нулях статистической суммы (выход на комплексную плоскость температур). Множество Жюлиа как фрактальная фазовая граница. Термодинамический потенциал — потенциал множества Жюлиа. Фазовые переходы 1-го и 2-го рода. Интерпретация множества Мандельброта. Новые фазовые состояния (модулированная фаза и др.)

Теория перколяции. Комплексификация итерационного вероятностного отображения для модели протекания. Множество Жюлиа как граница области перколяции.

Динамика иерархических цепочек импедансов. Применение множества Фату для демонстрации динамики бесконечных цепочек импедансов.

Литература к комплексу учебных программ «Нелинейность: от колебаний к хаосу»

Книги серии «Современная теория колебаний и волн»

1. Трубецков Д.И., Рожнёв А.Г. Линейные колебания и волны. — М.: Физматлит, 2001.
2. Кузнецов А.П., Рожнёв А.Г., Трубецков Д.И. Линейные колебания и волны. Сборник задач. — М.: Физматлит, 2001.
3. Рыскин Н.М., Трубецков Д.И. Нелинейные волны. — М.: Наука, Физматлит, 2000.
4. Кузнецов С.П. Динамический хаос. — М.: Физматлит, 2001.
5. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М. Нелинейные колебания. — М.: Физматлит, 2002.
6. Трубецков Д.И., Мchedлова Е.С., Красичков Л.В. Введение в теорию самоорганизации открытых систем. — М.: Физматлит, 2002.

Учебники

1. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. — М.: Наука, 1981.
2. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. — М.: Наука, 1990.
3. Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е., Нейман А.Б., Стрелкова Г.И., Шиманский-Гайер Л. Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. — Москва—Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
4. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В. Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. — Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 1999.
5. Арнольд В.И. Теория катастроф. — М.: Наука, 1990.

6. Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. — М.: Мир, 1991.
7. Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1987.
8. Виноградова М.В., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. — М.: Наука, 1990.
9. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф. Кн. 1. — М.: Мир, 1984.
10. Горелик Г.С. Колебания и волны. — М.: Физматгиз, 1959.
11. Горяченко В.Д. Элементы теории колебаний. — Красноярск: Изд-во Красноярск. ун-та, 1995.
12. Гукенхеймер Дж., Холмс П. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. — Москва—Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001.
13. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса. — М.: Наука, 1988.
14. Конторович М.И. Нелинейные колебания в радиотехнике. — М.: Сов. радио, 1973.
15. Крауфорд Ф. Волны. Берклеевский курс физики. Т. III. — М.: Наука, 1974.
16. Ланда П.С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. — М.: Наука, 1980.
17. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. — М.: Наука, Физматлит, 1997.
18. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. — М.: Наука, 1986.
19. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика. — М.: Наука, 1976. Ч. 1.
20. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. — М.: Наука, 1977.
21. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Конформные отображения с приложениями к некоторым вопросам механики. — М.—Л.: Изд-во технико-теоретической литературы, 1946.
22. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и хаотическая динамика. — М.: Мир, 1984.
23. Мандельштам Л.И. Лекции по колебаниям. — М.: Изд-во АН СССР, 1955.
24. Мун Ф. Хаотические колебания. — М.: Мир, 1990.
25. Мигулин В.В., Медведев В.И., Мустель Е.Р., Парыгин В.Н. Основы теории колебаний. — М.: Наука, 1978.
26. Милнор Дж. Голоморфная динамика. — Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2000.
27. Найфэ А. Введение в методы возмущений. — М.: Мир, 1984.

28. Островский Л.А., Потапов А.И. Введение в теорию модулированных волн. — М.: Физматлит, 2003.
29. Пиковский А., Розенблум М., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. — М.: Техносфера, 2003.
30. Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения. — М.: Мир, 1980.
31. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. — М.: Наука, 1984.
32. Стрелков С.П. Введение в теорию колебаний. — М.: Наука, 1964.
33. Трубецков Д.И. Колебания и волны для гуманитариев. — Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 1997.
34. Шредер А. Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая. — Москва—Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001.
35. Шустер Г. Детерминированный хаос. — М.: Мир, 1988.

Книги

1. Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. — М.: Мир, 1987.
2. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978.
3. Балеску Р. Равновесная и неравновесная статистическая механика. — М.: Мир, 1978.
4. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. — М.: Наука, 1976.
5. Блэкьер О. Анализ нелинейных систем. — М.: Мир, 1969.
6. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1974.
7. Божокин С.В., Паршин Д.А., — Фракталы и мультифракталы. — Москва—Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001.
8. Гальперин Г.А., Земляков А.Н. Математические бильярды. (Библиотечка «Квант», вып.77). — М.: Наука, 1990.
9. Гарднер М. А ну-ка, догадайся! — М.: Мир, 1984.
10. Гельфер Я.М. История и методология термодинамики и статистической физики. — М.: Высшая школа, 1969. — В 2-х томах.
11. Гидродинамические неустойчивости и переход к турбулентности. Под ред. Х. Суинни и Дж. Голлаба. — М.: Мир, 1984.
12. Гласс И.И. Ударные волны и человек. — М.: Мир, 1977.

13. Динамические системы (Современные проблемы математики, фундаментальные направления). — М.: ВИНТИ, 1985. — Т. 1,2.
14. Дмитриев А.С., Кислов В.Я. Стохастические колебания в радиофизике и электронике. — М.: Наука, 1989.
15. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. — М.: Мир, 1988.
16. Заславский Г.М. Стохастическая необратимость в нелинейных системах. — М.: Наука, 1970.
17. Заславский Г.М. Стохастичность динамических систем. — М.: Наука, 1984.
18. Кадомцев Б.Б. Коллективные явления в плазме. — М.: Наука, 1988.
19. Калиткин Н.Н. Численные методы. — М.: Наука, 1978.
20. Каплан А.Е., Кравцов Ю.А., Рылов В.А. Параметрические генераторы и делители частоты. — М.: Сов. радио, 1966.
21. Карпман В.И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. — М.: Наука, 1973.
22. Компьютеры и нелинейные явления. Информатика и современное естествознание. — М.: Наука, 1988.
23. Крылов Н.С. Работы по обоснованию статистической физики. — М.—Л.: Изд-во АН СССР, 1950.
24. Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С. Введение в синергетику. — М.: Наука, 1990.
25. Люиселл У. Связанные и параметрические колебания в электронике. — М.: ИЛ, 1963.
26. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. — М.—Л.: ГИТТЛ, 1950.
27. Лэм Дж. Введение в теорию солитонов. — М.: Мир, 1983.
28. Мандельброт Б.Б. Фрактальная геометрия природы. — Москва—Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2002.
29. Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. — М.: Мир, 1980.
30. Наугольных К.А., Островский Л.А. Нелинейные волновые процессы в акустике. — М.: Наука, 1990.
31. Неймарк Ю.И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1972.
32. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. — М.: Наука, 1987.
33. Нелинейные волны. Под ред. С. Лейбовича и А. Сибасса. — М.: Мир, 1977.

34. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. — М.—Л.: ГИТТЛ, 1947.
35. Николис Г., Пригожин И. Познание сложного: Введение. — М.: Мир, 1990.
36. Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике. — М.: Мир, 1989.
37. Ортега Дж., Пул У. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1986.
38. Пайтген Х.-О., Рихтер П.Х. Красота фракталов. — М.: Мир, 1993.
39. Пригожин И. От существующего к возникающему. — М.: Наука, 1985.
40. Пригожин И., Стенгерс И. Порядок из хаоса. — М.: Мир, 1986.
41. Пуанкаре А. Новые методы небесной механики. Избранные труды. — М.: Наука, 1971. — Т. 1,2.
42. Руденко О.В., Солуян С.И. Теоретические основы нелинейной акустики. — М.: Наука, 1975.
43. Скотт Э. Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике. — М.: Сов. радио, 1977.
44. Солитоны. Под ред. Р. Буллафа и Ф. Кодри. — М.: Мир, 1983.
45. Солитоны в действии. Под ред. К. Лонгрена и Э. Скотта. — М.: Мир, 1981.
46. Станные аттракторы. Под ред. Я.Г. Синая и Л.П. Шильникова. — М.: Мир, 1981.
47. Томпсон Дж. М.Т. Неустойчивости и катастрофы в науке и технике. — М.: Мир, 1985.
48. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. — М.: Мир, 1977.
49. Федер Е. Фракталы. — М.: Мир, 1991.
50. Хакен Г. Синергетика. — М.: Мир, 1980.
51. Хакен Г. Синергетика. Иерархия неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. — М.: Мир, 1985.
52. Хинчин А.Я. Цепные дроби. — М.: Наука, 1978.
53. Шарковский А.Н., Майстренко Ю.Л., Романенко Е.Ю. Разностные уравнения и их приложения. — Киев: Наукова Думка, 1986.
54. Beck C. and Schlogl F. Thermodynamics of Chaotic systems. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993.
55. Devaney R.L. An Introduction to Chaotic Dynamical Systems. — N.Y.: Addison-Wesley, 1989.
56. Dorfman J.R. An Introduction to Chaos in Nonequilibrium Statistical Mechanics. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999.
57. Eckmann J.-P., Collet P. Iterated Maps as Dynamical Systems. — Basel: Birkhauser, 1980.

58. Gleick J. Chaos. Making a New Science. — N.Y.: Penguin Books, 1987.
59. Infeld E., Rowlands G. Nonlinear Waves, Solitons and Chaos. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990.
60. Mandelbrot B.B. The Fractal Geometry of Nature. — San Francisco: Freeman, 1982.
61. Ott E. Chaos in Dynamical Systems. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993.
62. Peitgen H.-O., Jurgens H., Saupe D. Chaos and Fractals. New Frontiers of Science. — N.Y.: Springer-Verlag, 1992.
63. Reichl L.E. The Transition to Chaos in Conservative Classical Systems: Quantum Manifestations. — N.Y.: Springer-Verlag, 1992.
64. Schroeder M. Fractals, Chaos, Power Laws. — N.Y.: Freeman, 1991.
65. Thompson J.M.T., Stewart H.B. Nonlinear Dynamics and Chaos. — N.Y.: Wiley, 1986.

Книги серии «Нелинейные волны»

1. Нелинейные волны. Под ред. А.В. Гапонова—Грехова. — М.: Наука, 1979.
2. Нелинейные волны. Стохастичность и турбулентность. Под ред. М.И. Рабиновича. — М.: Наука, 1980.
3. Нелинейные волны. Распространение и взаимодействие. Под ред. А.В. Гапонова—Грехова. — М.: Наука, 1981.
4. Нелинейные волны. Самоорганизация. Под ред. А.В. Гапонова—Грехова и М.И. Рабиновича. — М.: Наука, 1983.
5. Нелинейные волны. Структуры и бифуркации. Под ред. А.В. Гапонова—Грехова и М.И. Рабиновича. — М.: Наука, 1987.
6. Нелинейные волны. Динамика и эволюция. Под ред. А.В. Гапонова—Грехова и М.И. Рабиновича. — М.: Наука, 1989.
7. Нелинейные волны — 2002. Под ред. А.В. Гапонова—Грехова и В.И. Некоркина. — Н. Новгород: ИПФ РАН, 2003.
8. Нелинейные волны — 2004. Под ред. А.В. Гапонова—Грехова и В.И. Некоркина. — Н. Новгород: ИПФ РАН, 2005. — Обзоры
1. Анищенко В.С. Аттракторы динамических систем // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. — 1997. — Т. 5. — №1. — С. 109.
2. Белова Т.И., Кудрявцев А.Е. Солитоны и их взаимодействие в классической теории поля // УФН. — 1997. — Т. 167. — №4. — С. 377.
3. Вул Е.Б., Синай Я.Г., Ханин К.М. Универсальность Фейгенбаума и термодинамический формализм // УМН. — 1984. — Т. 39. — №3. — С. 3.

4. Гапонов А.В., Островский Л.А., Фрейдман Г.И. Ударные электромагнитные волны // Изв. вузов. — Радиофизика. — 1967. — Т. 10. — №9-10. — С. 1376.
5. Гапонов—Грехов А.В., Рабинович М.И. Л.И. Мандельштам и современная теория колебаний и волн // УФН. — 1979. — Т. 128. — №3. — С. 579.
6. Гапонов—Грехов А.В., Рабинович М.И. Хаотическая динамика простых систем // Природа. — 1981. — №2. — С. 54.
7. Гапонов—Грехов А.В., Рабинович М.И. Нелинейная физика. Стохастичность и структуры // В сб.: Физика XX века: Развитие и перспективы. — М.: Наука, 1984. — С. 219.
8. Дьюдни А.К. Аффинные преобразования и фрактальные структуры // В мире науки. 1990. — №7. — С. 82.
9. Заславский Г.М., Чириков Б.В. Стохастическая неустойчивость нелинейных колебаний // УФН. — 1971. — Т. 105. — №1. — С. 3.
10. Захаров В.Е. Гамильтоновский формализм для волн в нелинейных средах с дисперсией // Изв. вузов. — Радиофизика. — 1974. — Т. 17. — №4. — С. 431.
11. Захаров В.Е., Кузнецов Е.А. Гамильтоновский формализм для нелинейных волн // УФН. — 1997. — Т. 167. — №11. — С. 1137-1167.
12. Каданов Л.П. Пути к хаосу // В сб.: Физика за рубежом. Вып. 85. — М.: Мир, 1985. — С. 9.
13. Корпел А., Банерджи П.П. Эвристический подход к нелинейным волновым уравнениям с дисперсией и решениям солитонного типа // ТИИЭР. — 1984. Т. 72. — №9. — С. 6.
14. Кратчфилд Д.П., Фармер Д.Д., Паккард Н.Х., Шоу Р.С. Хаос // В мире науки. — 1987. — №2. — С. 16.
15. Кузнецов А.П. Через экран компьютера — в мир нелинейной динамики // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. — 1998. — Т. 6. — №5. — С. 85.
16. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П. Критическая динамика одномерных отображений. Часть I. Сценарий Фейгенбаума // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1993. Т. 1. №1—2. — С. 15.
17. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Сатаев И.Р. Критическая динамика одномерных отображений. Часть II. Двухпараметрический переход к хаосу // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. — 1993. — Т. 1. — №2. — С. 17.
18. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Сатаев И.Р. Коразмерность и типичность в контексте проблемы описания перехода к хаосу через удвоения

- периода в диссипативных динамических системах // Регулярная и хаотическая динамика, — 1997. — Т. 2. — №3—4. — С. 90.
19. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Иванов Н.Ю., Осин А.А. Скейлинг при переходе к хаосу через разрушение квазипериодического движения с отношением частот, заданным золотым средним (обзор) // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. — 2000. — Т. 8. — №4. — С. 3.
 20. Кузнецов А.П., Милованов С.В. Субгармонический резонанс в уравнении Ван-дер-Поля // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. — 2004. — Т. 12. — №3. — С. 74.
 21. Кузнецов С.П. Хаос: Сценарий Фейгенбаума и его обобщения // Империя Математики. — 2000. — Т. 1. — №1. — С. 1.
 22. Леви Б.Г. Новый глобальный фрактальный формализм описывает различные сценарии перехода к хаосу // В сб.: Физика за рубежом. Вып. 87. — М.: Мир, 1987. — С. 263.
 23. Монин А.С. О природе турбулентности // УФН. — 1978. — Т. 125. — №1. — С. 97.
 24. Монин А.С. Гидродинамическая неустойчивость // УФН. — 1986. — Т. 150. — №1. — С. 62.
 25. Ораевский А.Н. Мазеры, лазеры и странные аттракторы // Квантовая электроника. — 1981. — Т. 8. — №1. — С. 130.
 26. Ораевский А.Н. Динамика одномодовых лазеров и динамический хаос // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. — 1996. — Т. 4. — №1—2. — С. 3.
 27. Рабинович М.И. Стохастические колебания и турбулентность // УФН. — 1978. — Т. 125. — №1. — С. 123.
 28. Рабинович М.И., Сущик М.М. Регулярная и хаотическая динамика структур в течениях жидкости // УФН. — 1990. — Т. 160. — №1. — С. 3.
 29. Руденко О.В. Нелинейные пилообразные волны // УФН. — 1995. — Т. 165. — №9. — С. 1011.
 30. Синай Я.Г. О понятии энтропии динамической системы // ДАН СССР. — 1959. — Т. 124. — №4. — С. 768.
 31. Фейгенбаум М. Универсальность в поведении нелинейных систем // УФН. — 1983. — Т. 141. — №2. — С. 343.
 32. Хаотические системы // Тематический выпуск журнала ТИИЭР. — 1987. — Т. 75. — №8. — 175 с.
 33. Экман Ж.—П. Переход к турбулентности в диссипативных динамических системах // В кн.: Синергетика. Под ред. Б.Б. Кадомцева. — М.: Мир, 1984. С. 190.
 34. Юргенс Х., Пайтген Х.-О., Заупе Д. Язык фракталов // В мире науки. — 1990. — №10. — С. 36.

35. Cvitanovic P. Universality in Chaos (or Feigenbaum for cyclists) // *Acta Physica Polonica*. — 1984. — Vol. A65. — P. 203.
36. Eckmann J.-P. Roads to Turbulence in Dissipative Dynamical Systems // *Rev. Mod. Phys.* 1981. Vol. 53. P. 643.
37. Ott E. Strange Attractors and Chaotic Motion of Dynamical Systems // *Rev. Mod. Phys.* — 1981. — Vol. 53. — P. 655.

Статьи в Соросовском образовательном журнале

1. Анищенко В.С. Устойчивость, бифуркации, катастрофы // *Соросовский образовательный журнал*. — 2000. — №6. — С. 105.
2. Анищенко В.С. Динамические системы // *Соросовский образовательный журнал*. — 1997. — №11. — С. 77.
3. Анищенко В.С. Детерминированный хаос // *Соросовский образовательный журнал*. — 1997. — №6. — С. 70.
4. Белых В.Н. Элементарное введение в качественную теорию и теорию бифуркаций динамических систем // *Соросовский образовательный журнал*. — 1997. — №1. — С. 115.
5. Безручко Б.П. Нелинейные маятники и их модели // *Соросовский образовательный журнал*. — 2000. — №9. — С. 95.
6. Бронштейн Е.М. Новое о квадратном трехчлене // *Соросовский образовательный журнал*. — 1999. — №9. — С. 123.
7. Гуфан Ю.М. Фазовые переходы второго рода // *Соросовский образовательный журнал*. — 1997. — №7. — С. 109.
8. Жиков В.В. Фракталы // *Соросовский образовательный журнал*. — 1996. — №12. — С. 115.
9. Кузнецов А.П. Наглядные образы хаоса // *Соросовский образовательный журнал*. — 2000. — №11. — С. 104.
10. Маневич Л.И. О теории катастроф // *Соросовский образовательный журнал*. — 2000. — №7. — С. 85.
11. Медведева Н.Б. Динамика логистической функции // *Соросовский образовательный журнал*. — 2000. — №8. — С. 121.
12. Неймарк Ю.И. Простые математические модели и их роль в постижении мира // *Соросовский образовательный журнал*. — 1997. — №3. — С. 139.
13. Осипов В.В. Простейшие автоволны // *Соросовский образовательный журнал*. — 1999. — №7. — С. 115.
14. Ряшко Л.Б. Модели динамики популяции: от порядка к хаосу // *Соросовский образовательный журнал*. — 2001. — №10. — С. 122.

15. Трубецков Д.И. Турбулентность и детерминированный хаос // *Соросовский образовательный журнал*. — 1998. — №1. — С. 77.
16. Трубецков Д.И. Уединенные волны в электронном потоке и юбилей одного уравнения // *Соросовский образовательный журнал*. — 2000. — №4. — С. 103.
17. Фейгин М.И. Проявление эффектов бифуркационной памяти в поведении динамических систем // *Соросовский образовательный журнал*. — 2001. — №3. — С. 121.

Интересующие Вас книги нашего издательства можно заказать почтой или электронной почтой:

subscribe@rcd.ru

Внимание: дешевле и быстрее всего книги можно приобрести через наш Интернет-магазин:

http://shop.rcd.ru

Книги также можно приобрести:

1. Москва, ФТИАН, Нахимовский проспект, д. 36/1, к. 307,
тел.: 332–48–92 (почтовый адрес: Нахимовский проспект, д. 34)
2. Москва, ИМАШ, ул. Бардина, д. 4, корп. 3, к. 414, тел. 135–54–37
3. МГУ им. Ломоносова (ГЗ, 1 этаж)
4. Магазины:

Москва: «Дом научно-технической книги» (Ленинский пр., 40)
«Московский дом книги» (ул. Новый Арбат, 8)
«Библиоглобус» (м. «Лубянка», ул. Мясницкая, 6)
Книжный магазин «ФИЗМАТКНИГА» (г. Долгопрудный,
Новый корпус МФТИ, 1 этаж, тел. 409–93–28)
С.-Пб.: «С.-Пб. дом книги» (Невский пр., 28)

А. П. Кузнецов, С. П. Кузнецов, Н. М. Рыскин, О. Б. Исаева

НЕЛИНЕЙНОСТЬ: ОТ КОЛЕБАНИЙ К ХАОСУ (ЗАДАЧИ И УЧЕБНЫЕ ПРОГРАММЫ)

*Дизайнер М. В. Ботя
Технический редактор А. В. Широбоков
Корректор Г. Г. Тетерина*

Подписано в печать 31.03.2006. Формат 60 × 84¹/₁₆.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 10,93. Уч. изд. л. 10,12.
Гарнитура Таймс. Бумага офсетная №1. Заказ №

Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика»
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
http://rcd.ru E-mail: mail@rcd.ru Тел./факс: (+73412) 500–295
