

УДК 533.951.7 : 621.385.6

## ТУРБУЛЕНТНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОННОГО ПОТОКА В СКРЕЩЕННЫХ ПОЛЯХ

С. П. Кузнецов

Из соображений размерности показано, что развитие двумерных турбулентных возмущений в электронном потоке приводит к его расширению поперек магнитного поля пропорционально расстоянию, пройденному в пространстве дрейфа, и что шумы турбулентного происхождения имеют максимум на некоторой частоте, обратно пропорциональной этому расстоянию.

Сформулировано ограничение на применение модели тонкого потока в теории электронных лучевых приборов со скрещенными полями. Показано, что шумовые свойства этих приборов определяются произведением безразмерных параметров длины и пространственного заряда.

Известно, что электронный поток в скрещенных полях обладает так называемой диокотронной неустойчивостью (см. [1], рис. 1). Целый ряд аргументов говорит о том, что в результате развития неустойчивости возникает турбулентное состояние электронного потока, характеризующееся сложным, беспорядочным движением электронов. В их числе назовем аномально высокие шумы в лучевых приборах типа  $M$  [1], результаты численных экспериментов на ЭВМ [2, 3] и укажем на аналогию [4] между диокотронной неустойчивостью и неустойчивостью Кельвина—Гельмгольца, которая, как хорошо известно в гидродинамике [5-7], приводит к развитию турбулентности в зоне перемешивания двух потоков жидкости, движущихся с разными скоростями.

Приняв гипотезу о турбулентном характере движения электронов, будем далее рассматривать только статистические характеристики этого движения, получаемые путем усреднения соответствующих величин по времени или по статистическому ансамблю. Ограничимся анализом двумерной задачи в адиабатическом приближении (это позволяет исключить из числа определяющих параметров задачи заряд и массу электрона; поэтому исследуемые ниже турбулентные шумы не имеют отношения к дробовому эффекту). Считаем далее, что начальная толщина потока в сечении  $x=0$  мала, а электроды, создающие статическое электрическое поле  $E_0$ , удалены от потока (это позволяет исключить из числа определяющих параметров все характерные геометрические размеры системы).

Перейдем в систему отсчета, движущуюся со скоростью  $v_0 = E_0/B_0$  в направлении оси  $x$ , полагая  $x = v_0 t$ . В этой системе средняя толщина потока может зависеть от времени  $t$ , индукции магнитного поля  $B_0$ , среднего количества заряда на единицу площади потока  $\sigma_0$  и диэлектрической постоянной  $\epsilon_0$ .<sup>1</sup> Из этих величин невозможно составить безразмерную комби-

<sup>1</sup> Заметим, что электрическое поле  $E_0$  исключено выбором системы отсчета, а зависимость искомых величин от  $x$  пренебрегаем. Последнее поясним подробнее. Рассмотрим отрезок потока, длина которого велика по сравнению с характерными масштабами возмущений. Для того чтобы статистические характеристики возмущений слабо зависели от  $x$  в пределах выбранного участка, нужно, чтобы скорость движения потока относительно лабораторной системы отсчета  $v_0 = E_0/B_0$  была велика по сравнению с турбулентными составляющими скорости, имеющими порядок  $\sigma \epsilon_0^{-1} B_0^{-1}$ . Отсюда приходим к условию  $\sigma \epsilon_0^{-1} E_0^{-1} \gg 1$ , которое выполняется в большинстве практически интересных случаев.



нацию; независимая комбинация с размерностью длины единственная. Поэтому на основании известной в теории размерностей П-теоремы [8] имеем

$$\overline{\Delta y} = C u t, \quad (1)$$

где  $C$  — безразмерный коэффициент,  $u = \sigma_0 / \epsilon_0 B_0$ .

Средняя скорость электронов в потоке ( $\bar{v}_x, \bar{v}_y$ ) зависит не только от  $t, \sigma_0, B_0, \epsilon_0$ , но и от  $y$  (рис. 1). Поэтому появляется возможность составить

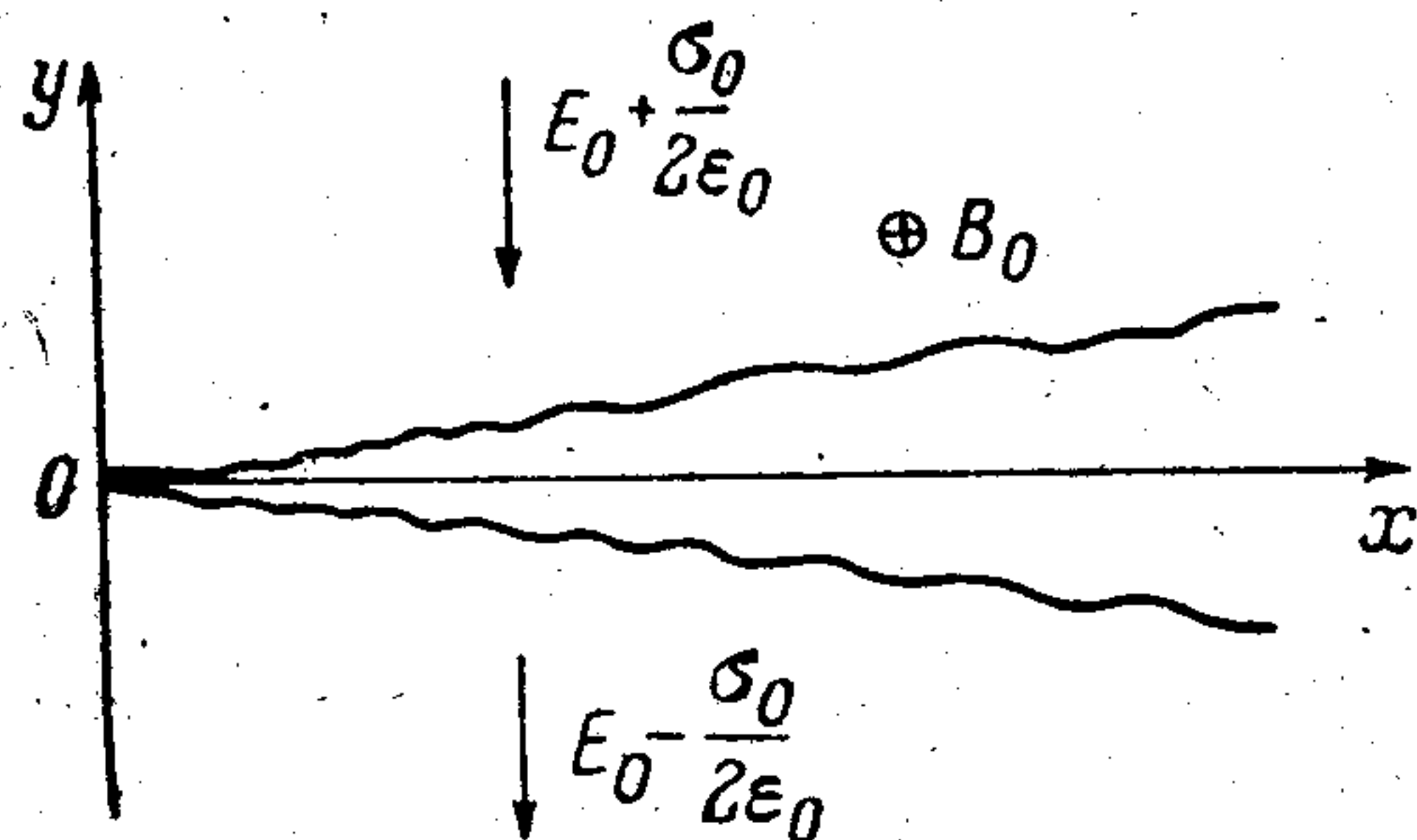


Рис. 1. Конфигурация статических полей и электронного потока.

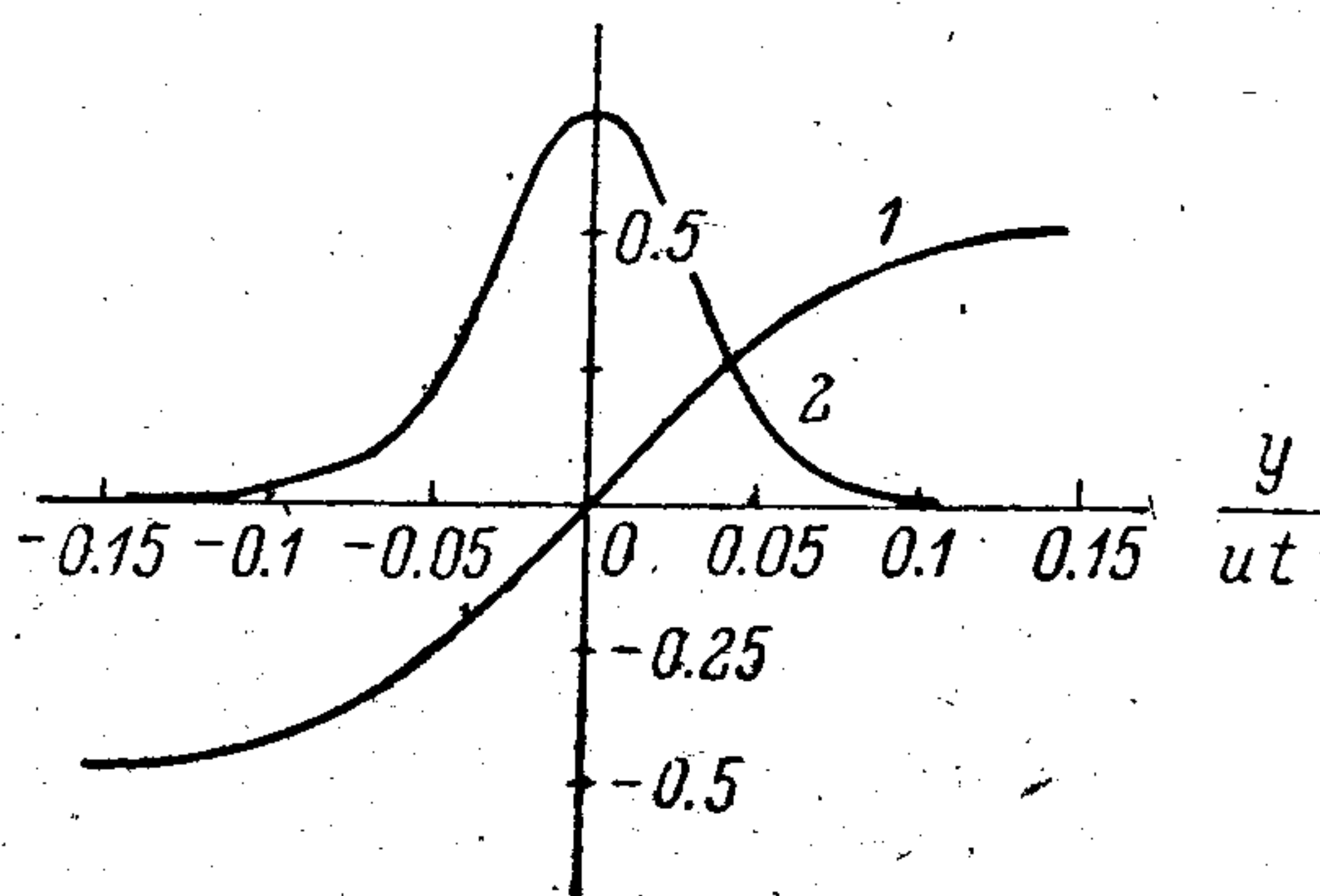


Рис. 2. Распределение средней продольной скорости электронов  $\bar{v}_x/u$  (1) по сечению турбулентного потока, полученное из гидродинамической аналогии [5], и распределение средней плотности заряда  $(\bar{\rho}t/\epsilon_0 B_0) \cdot 0.1$  (2), найденное путем графического дифференцирования.

Система отсчета движется со скоростью  $v_0$  относительно лабораторной.

из определяющих величин безразмерную комбинацию вида  $y/ut$ . Из П-теоремы теперь следует, что

$$\bar{v}_x = u f_1 \left( \frac{y}{ut} \right); \quad \bar{v}_y = u f_2 \left( \frac{y}{ut} \right), \quad (2)$$

где  $f_1$  и  $f_2$  — некоторые универсальные функции. Используя формулу (2), а также усредненные уравнения движения и уравнение Пуассона, можно найти распределение плотности заряда в потоке

$$\bar{\rho} = \frac{\epsilon_0 B_0}{t} f_1' \left( \frac{y}{ut} \right). \quad (3)$$

Посмотрим теперь, что можно сказать о спектральном составе развивающейся в потоке турбулентности. Средний квадрат флуктуаций поверхностной плотности заряда  $(\overline{\Delta\sigma})_k^2$ , обусловленных спектральными составляющими с волновыми числами из интервала  $\left( k - \frac{\Delta k}{2}, k + \frac{\Delta k}{2} \right)$ , пропорционален  $\Delta k$  и зависит от  $t, \sigma_0, B_0, \epsilon_0, k$ . Из этих параметров можно построить безразмерную комбинацию  $\xi = \sigma_0 k t \epsilon_0^{-1} B_0^{-1}$ , поэтому

$$(\overline{\Delta\sigma})_k^2 = \frac{\sigma_0^2 t}{\epsilon_0 B_0} \varphi \left( \frac{\sigma_0 k t}{\epsilon_0 B_0} \right) \Delta k, \quad (4)$$

где  $\varphi(\xi)$  — универсальная функция.

Соотношения (1) — (4) говорят о том, что движение потока является автомодельным в том смысле, что его статистические характеристики (такие как  $\overline{\Delta y}, \bar{v}_{x,y}, \bar{\rho}, (\overline{\Delta\sigma})_k^2$ ) преобразуются с течением времени по закону подобия (ср. [8]).

Заметим, что из формулы (3) следует  $\bar{\rho} \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow 0$ , т. е. при достаточно малых  $t$  неизбежно нарушение условия применимости адиабатического приближения ( $\omega_p \ll \omega_e$ ). С другой стороны, при достаточно больших  $t$  средняя толщина потока  $\overline{\Delta y}$  станет сравнимой с геометрическими размерами системы. Таким образом, автомодельность нарушается при слиш-



ком малых или слишком больших  $t$ . Это вообще типично для автомобильных движений, которые всегда являются идеализациями, справедливыми лишь на определенном этапе процесса [8].

Для определения неизвестных функций и коэффициента  $C$  можно применить гидродинамическую аналогию, упоминавшуюся ранее.<sup>2</sup> Заметим, что этой аналогией необходимо пользоваться с осторожностью, поскольку она справедлива только при строго двумерном движении жидкости, а не при двумерности в статистическом смысле, как это, по-видимому, имеет место в эксперименте. С этой оговоркой известные из литературы экспериментальные данные [6, 7] дают  $C \approx 0.25$ . Соответствующие распределения средней плотности заряда и продольной скорости показаны на рис. 2; данные взяты из работы [6]. Более надежные результаты могут быть получены из численных экспериментов на ЭВМ с их последующей статистической обработкой.<sup>3</sup>

Остановимся на анализе шумовых свойств турбулентного потока. В лабораторной системе отсчета ток луча через сечение  $x = \text{const}$  является стационарным случайным процессом. Используя (4) и учитывая, что  $I \sim \sigma$ ,  $k = \omega/v_0$ ,  $t = x/v_0$ , получим аналог формулы Шоттки для турбулентных шумов

$$\overline{(\Delta I)_\omega^2} = I_0^2 \frac{\sigma_0 x}{\varepsilon_0 E_0 v_0} \varphi\left(\frac{\sigma_0 \omega x}{\varepsilon_0 E_0 v_0}\right) \Delta \omega, \quad (5)$$

где  $\overline{(\Delta I)_\omega^2}$  — средний квадрат флуктуаций тока, обусловленных спектральными составляющими из интервала частот  $\Delta \omega$ .

Судя по результатам численных экспериментов [2], а также из гидродинамической аналогии [5, 6] в сечении потока, где его ширина равна  $\Delta y$ , преимущественно образуются вихри размера  $\sim \Delta y$ , следующие друг за другом с интервалом  $\sim 2\Delta y$ . Поэтому в данном сечении шумы должны быть максимальны при

$$\omega = \omega_m \sim \frac{\pi v_0}{\Delta y} \sim 12 \frac{v_0 \varepsilon_0 E_0}{\sigma_0 x}, \quad (6)$$

где использована формула (1) в предположении, что  $C \approx 0.25$ . Изложенные соображения означают, что спектральная функция  $\varphi(\xi)$  имеет максимум при  $\xi \sim 12$ , величину которого трудно оценить без привлечения данных эксперимента или машинных расчетов.

При  $\omega \ll \omega_m$  вид формулы (5) можно конкретизировать, учитывая, что функция  $\varphi(\xi)$  должна быть многократно дифференцируемой (поскольку функция корреляции флуктуаций тока должна достаточно быстро убывать на бесконечности), неотрицательной и четной [9]. Полагая  $\varphi(\xi) \approx c_0 + c_2 \xi^2$ , из (5) получим

$$\overline{(\Delta I)_\omega^2} \approx I_0^2 \frac{\sigma_0 x}{\varepsilon_0 E_0 v_0} \left[ c_0 + c_2 \left( \frac{\sigma_0 \omega x}{\varepsilon_0 E_0 v_0} \right)^2 \right] \Delta \omega, \quad (7)$$

где  $c_0 > 0$  и  $c_2 > 0$  из физических соображений.

Рассмотрим теперь некоторые выводы, которые следуют из проведенного анализа в применении к лучевым приборам  $M$  типа.

1. Толщина электронного потока возрастает пропорционально расстоянию от пучки вследствие развития турбулентных возмущений, как это видно из формулы (1), которая в общепринятых безразмерных параметрах [1] имеет вид  $\bar{\omega} = \beta \Delta y \sim 0.5 sq$ . Следовательно, приближение бесконечно тонкого потока применимо только при  $sq \leq 1$ .

<sup>2</sup> В гидродинамике, в частности, известны формулы, аналогичные (1)–(3), получаемые из соображений подобия [5–7].

<sup>3</sup> Результаты численного эксперимента [2], по-видимому, подтверждают соотношение (1), хотя в этой работе не приводится достаточно данных, чтобы определить коэффициент  $C$ . При  $t > 80$  усл. ед. (см. рис. 16 в [2]) наблюдается отклонение от автомобильности, когда ширина пучка становится сравнимой с расстоянием между электродами и пространственным периодом.)



2. В сечении потока  $x = \text{const}$  спектр шумов имеет максимум на некоторой частоте, причем при удалении точки наблюдения от пушки он перемещается в сторону низких частот.

3. Максимум шумов на рабочей частоте, как следует из (6), находится в точке  $q \sim 6/s$ . Поэтому при  $q_k = (2\pi DN) > G/s$  лампа является сильно шумящей; такой режим целесообразно использовать в шумовых генераторах. Напротив, для снижения шумов следует уменьшать произведение  $sq_k$ . Во всяком случае совершенно необходимо выполнение условия  $sq_k < 6$ .

### Литература

- [1] Электронные сверхвысокочастотные приборы со скрещенными полями, т. 1, ИЛ М. (1961).
- [2] Р. Хокни. В кн.: Вычислительные методы в физике плазмы, с. 143. «Мир» (1974).
- [3] А. С. Рошаль, П. Ш. Янкелевич. Электронная техника, сер. 1, Электроника СВЧ, № 3, 59 (1976).
- [4] В. Г. Лейман. Электронная техника, сер. 1, Электроника СВЧ, № 8, 26 (1968).
- [5] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Механика сплошных сред. Гостехиздат, М. (1954).
- [6] Бай Ши-и. Теория струй. ИЛ, М. (1960).
- [7] Г. Н. Абрамович. Теория турбулентных струй. Физматгиз, М. (1960).
- [8] Л. И. Седов. Методы подобия и размерности в механике. «Наука», М. (1972).
- [9] А. А. Свешников. Прикладные методы теории случайных функций. «Наука», М. (1968).

Саратовский государственный университет  
им. Н. Г. Чернышевского  
Научно-исследовательский институт  
механики и физики

Поступило в Редакцию  
15 октября 1976 г.