

СТРАННЫЙ НЕХАОТИЧЕСКИЙ АТТРАКТОР

С. П. Кузнецов, А. С. Пиковский, У. Фойдель

Концепция странного нехаотического аттрактора (СНА) введена в 1984 г. в работе Гребжи, Отга, Пеликана и Йорке [1] и относится к специальному классу диссипативных систем — системам с квазипериодическим внешним воздействием. В них мгновенное состояние задается набором некоторого числа обобщенных координат, относящихся собственно к системе, и некоторого числа фазовых переменных по количеству несоизмеримых частот внешнего воздействия. Эпитет «*странный*» противопоставляет СНА аттрактору в виде тора, имеющему гладкую зависимость координатных переменных от фазовых. Эпитет «*нехаотический*» противопоставляет его странному хаотическому аттрактору: для СНА отсутствует экспоненциальная неустойчивость траекторий и нет положительного показателя Ляпунова. Оказалось, что в области между порядком и хаосом СНА типичны в системах с квазипериодическим воздействием [2—5]. Можно сказать, что при переходе от простой динамики к сложной в этих системах сначала возникает «странность», а уже потом хаос.

1. Примеры систем со странным нехаотическим аттрактором

В современной нелинейной динамике на равноправной основе рассматривают системы с непрерывным и с дискретным временем. Первые задаются дифференциальными уравнениями, вторые — итерируемыми отображениями. Чтобы СНА мог реализоваться в системе с непрерывным временем, в дифференциальном уравнении должна присутствовать квазипериодическая зависимость коэффициентов от времени, что требует наличия как минимум двух несоизмеримых частот. В системах, заданных отображениями, есть собственный внутренний «ритм» — шаги дискретного времени, так что для добавляемого внешнего воздействия достаточно одной частоты, несоизмеримой с частотой шагов. Простейший класс систем, демонстрирующих СНА, — отображения с одной координатной и одной фазовой переменной. При этом внешнее воздействие характеризуется одним частотным параметром, который при проведении конкретных исследований чаще всего полагают равным «золотому среднему» — числу $(\sqrt{5}-1)/2$ ¹.

¹ Этот выбор обусловлен не только упрощением теоретического анализа, на что обычно ссылаются, но также и тем, что тонкие структуры, выявление которых составляет предмет экспериментов и численных расчетов, оказываются лучше различимыми, чем это имеет место при других соотношениях частот.

1.1. Бифуркация вилки

в системе с квазипериодическим воздействием

Возьмем отображение $x_{n+1} = \lambda \operatorname{th} x_n$, которое демонстрирует бифуркацию вилки: при $\lambda < 1$ аттрактором служит неподвижная точка в нуле, при $\lambda > 1$ она становится неустойчивой, но появляются две симметрично расположенных устойчивых точки $x = \pm x_0(\lambda)$. Следуя работе [1], модифицируем его, введя квазипериодическую зависимость коэффициента от дискретного времени:

$$x_{n+1} = 2\lambda \operatorname{th} x_n \cos 2\pi\theta_n, \quad \theta_{n+1} = \theta_n + w \pmod{1}, \quad (1)$$

где θ — фазовая переменная. Параметр $w = (\sqrt{5}-1)/2$ определяет частоту внешнего воздействия, которое носит в данном случае мультипликативный характер.

Вычислим показатель Ляпунова для решения $x \equiv 0$. В линейном приближении

$$x_{n+1} = 2\lambda x_n \cos 2\pi\theta_n$$

и

$$\ln|x_N/x_0| = \sum_{n=0}^{N-1} \ln|2\lambda x_n \cos 2\pi\theta_n|.$$

В силу иррациональности w , значения фазы θ_n при $N \rightarrow \infty$ равномерно и плотно распределены на единичном интервале. Поэтому сумму заменяем интегралом и для показателя Ляпунова имеем

$$\begin{aligned} \Lambda &\cong N^{-1} \ln|x_N/x_0| = N^{-1} \sum_{n=0}^{N-1} \ln|2\lambda \cos 2\pi\theta_n| \cong \\ &\cong \int_0^1 \ln|2\lambda \cos 2\pi\theta| d\theta = \ln \lambda. \end{aligned} \quad (2)$$

При $\lambda < 1$ получаем $\Lambda < 0$, т. е. решение устойчиво, и линия $x = 0$ на плоскости (θ, x) служит аттрактором. При $\lambda > 1$ оно характеризуется положительным показателем Ляпунова и аттрактором не является.

Что можно сказать об аттракторе при $\lambda > 1$?

Во-первых, он непременно содержит точки с $|x| > 0$.

Во-вторых, поскольку $|\operatorname{th} x| < 1$, аттрактор расположен в полосе $|x| < 2\lambda$.

В-третьих, на оси $x = 0$ присутствует множество точек, принадлежащих аттрактору.

В самом деле, при $\theta = 1/4$ косинус обращается в ноль, так что для всех $\theta_n = 1/4 + n w \pmod{1}$, где $n = 1, 2, \dots, \infty$, имеем $x_n = 0$. Это подмножество точек аттрактора бесконечно и всюду плотное, так что аттрактор в целом представляет собой нетривиальный геометрический объект, «странное» множество.

На рис. 1 представлены изображения СНА в системе (1), фазовый портрет на плоскости (θ_n, x_n) и итерационная диаграмма в координатах (x_n, x_{n+1}) .

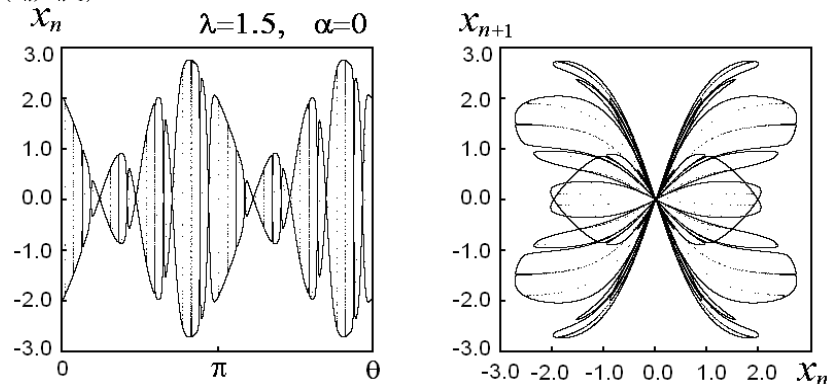


Рис. 1. Портреты странного нехаотического аттрактора модели (1) на фазовой плоскости и итерационной диаграмме при $\lambda = 1,5$.

Убедимся, что показатель Ляпунова для данного аттрактора отрицательный. Заметим, что для функции $f(x) = \text{th } x$ справедливо соотношение $|f'(x)| \leq |f(x)/x|$, причем равенство достигается лишь при $x = 0$. Для ляпуновского показателя получаем оценку

$$\Lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} N^{-1} \sum_{n=0}^{N-1} \ln |2\lambda f'(x_n) \cos 2\pi\theta_n| < \lim_{N \rightarrow \infty} N^{-1} \sum_{n=0}^{N-1} \ln |x_{n+1}/x_n| = 0. \quad (3)$$

Таким образом, «странность» аттрактора не связана с неустойчивостью по отношению к начальным условиям, как это имеет место для хаоса.

2.2. Квадратичное отображение с квазипериодическим воздействием

Одна из популярных и содержательных моделей в нелинейной динамике — квадратичное отображение $x_{n+1} = \lambda - x_n^2$, в котором при увеличении параметра λ имеет место переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода [6—9].

Вводя переменную добавку к λ , осциллирующую с иррациональной частотой w и амплитудой ε , приходим к модели [10—12]

$$x_{n+1} = \lambda - x_n^2 + \varepsilon \cos 2\pi\theta_n, \quad \theta_{n+1} = \theta_n + w \pmod{1}, \quad (4)$$

в которой при некотором выборе параметров возникает СНА. На рис. 2 показана карта режимов на плоскости параметров (λ, ε) , а по периферии — итерационные диаграммы с портретами аттракторов в нескольких

характерных точках. Светло-серыми тонами обозначены области, где реализуются тор-аттракторы типа T1, T2, T4, изображающиеся на итерационной диаграмме соответствующим количеством замкнутых кривых, более темными — области СНА и хаоса.

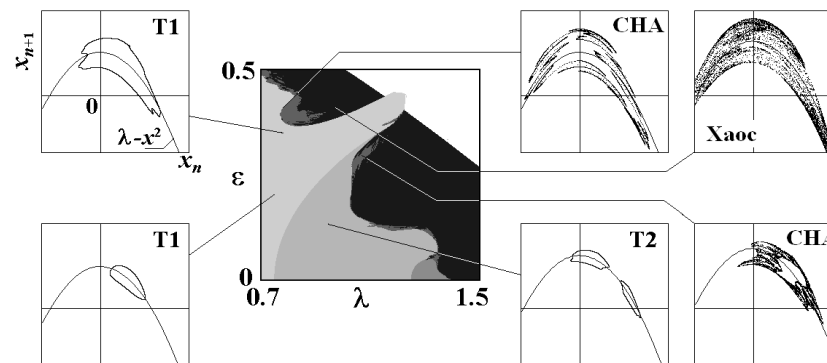


Рис. 2. В центре — карта режимов на плоскости параметров модели (4), по периферии — итерационные диаграммы для аттракторов в некоторых характерных точках. Частотный параметр $w = (\sqrt{5} - 1)/2$. Белым показана часть плоскости параметров, где наблюдается уход траекторий на бесконечность.

2.3. Модель с касательной бифуркацией

Рассмотрим отображение $x_{n+1} = f(x_n) + b$, где функция f выбрана так, что имеет место касательная бифуркация: при изменении b две неподвижные точки, устойчивая и неустойчивая, сближаются, сливаются и исчезают, оставляя узкий «коридор», прохождение которого требует большого числа итераций. Если динамика после прохождения «коридора» такова, что траектория обязательно вернется к месту входа в него, то возникает тип динамического поведения, известный как перемежаемость [13]. Имея целью локальный анализ бифуркации, функцию можно задать в виде $f(x) = x/(1-x)$. Предполагая, что параметр b содержит квазипериодическую добавку с амплитудой ε , приходим к модели [14, 15]:

$$x_{n+1} = x_n/(1-x_n) + b + \varepsilon \cos 2\pi\theta_n, \quad \theta_{n+1} = \theta_n + w \pmod{1}. \quad (5)$$

Она пригодна для изучения перехода, являющегося аналогом касательной бифуркации и ведущего к рождению СНА, но для описания СНА как такового нуждается в модификации, вводящей механизм возврата. Интересно, что заменой $x_n = 1 - \psi_n/\psi_{n-1}$ уравнение (5) приводится к линейному разностному уравнению Харпера

$$\Psi_{n+1} + \Psi_{n-1} - 2\Psi_n + (b + \varepsilon \cos 2\pi n w) \Psi_n = 0, \quad (6)$$

которое известно в физике твердого тела в контексте анализа локализации и делокализации квантовых состояний в одномерной модели квазипериодической среды [16, 14].

2.4. Отображение окружности с квазипериодическим воздействием

Отображением окружности принято называть модель с дискретным временем

$$x_{n+1} = x_n + r + (K/2\pi) \sin 2\pi x_n,$$

где переменная x_n определена с точностью до целой части («по модулю 1»). Это можно интерпретировать как задачу об автогенераторе, на который действует периодическая последовательность импульсных толчков: x_n определяет фазу колебаний перед n -м толчком, K характеризует интенсивность толчков, а r — отклонение частоты следования импульсов от частоты автоколебаний. Добавляя член, отвечающий дополнительному воздействию с несоизмеримой частотой, приходим к модели [2, 17]:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + r + (K/2\pi) \sin 2\pi x_n + (\varepsilon/2\pi) \sin 2\pi \theta_n \pmod{1}, \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + w \pmod{1}. \end{aligned} \quad (7)$$

Даже в отсутствие дополнительного члена отображение окружности демонстрирует разнообразную и богатую динамику. На плоскости параметров (r, K) можно видеть языки Арнольда, где динамика периодическая, и области квазипериодического поведения и хаоса (рис. 3, *a*). Нижняя часть плоскости параметров, где реализуется регулярная динамика (периодическая и квазипериодическая), и верхняя, где возможен хаос, разграничены критической линией $K = 1$ (пунктир).

При включении квазипериодического воздействия вместо критической линии возникает критическая зона (рис. 3, *b*). Ее ширина тем больше, чем больше амплитуда воздействия. Языки Арнольда трансформируются в зоны квазипериодической динамики с двумя несоизмеримыми частотами (частота шагов и частота воздействия), которые отвечают аттракторам в виде двумерных торов, а области между языками соответствуют теперь трехчастотной квазипериодичности или трехмерным торам (добавляется частота «прокручивания» циклической переменной x). В части плоскости параметров ниже критической зоны присутствуют указанные два типа регулярной динамики. Выше критической зоны имеются области хаоса. Наконец, в самой критической зоне в зависимости от параметров могут реализоваться двухчастотная квазипериодичность или СНА (см. пример на рис. 3, *в*).

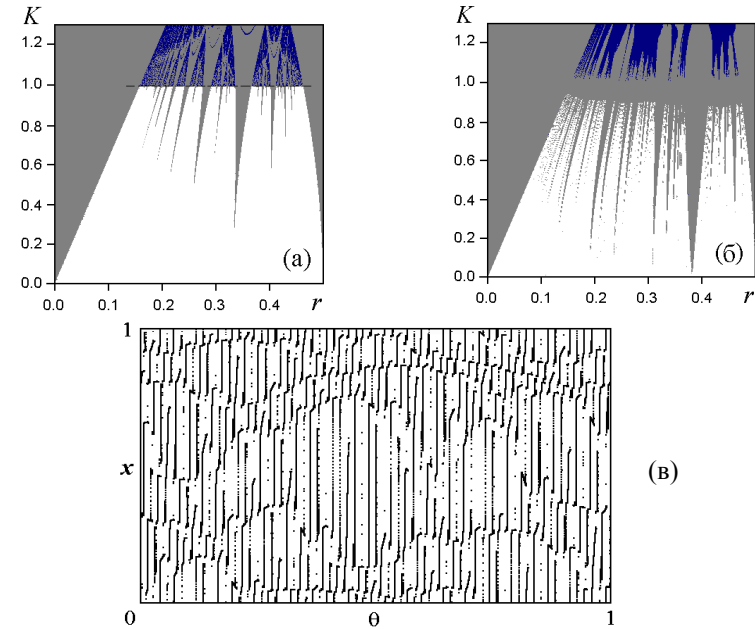


Рис. 3. Карты режимов отображения окружности в отсутствие и в присутствии квазипериодического воздействия: *a* — $C = 0$, светло-серым показаны области периодического поведения (языки Арнольда), белым — квазипериодические режимы, темно-серым — хаос; *b* — $C = 0,6$, светло-серые и белые области отвечают, соответственно, двумерному и трехмерному тор-аттрактору; *в* — СНА на фазовой плоскости (θ, x) при $C = 0,6, K = 1, r = 0,3$.

3. Свойства и количественные характеристики странных нехаотических аттракторов

3.1. Показатели Ляпунова

Для моделей в виде одномерных отображений с квазипериодическим воздействием нетривиальный показатель Ляпунова Λ один. Для СНА, как и для тора, он отрицательный. Поскольку аттрактор состоит из множества траекторий, не исключено присутствие на нем индивидуальных неустойчивых траекторий, у которых показатель Ляпунова положительный (их должно быть в определенном смысле мало, множество меры ноль, чтобы усредненная по аттрактору величина показателя Ляпунова была все же отрицательной). Например, для модели (1) при $\lambda > 1$ множество точек на оси $x = 0$ с фазами $\theta = 1/4 + 2\pi n w$ образует как раз такую исключительную траекторию. Именно это свойство является от-

личительной чертой СНА по сравнению с тором-аттрактором. В численных расчетах о наличии неустойчивых траекторий на аттракторе можно судить, рассматривая статистику *локальных показателей Ляпунова, определенных на конечном времени* [18, 19].

Для одномерного отображения с квазипериодическим воздействием $x_{n+1} = f(x_n, \theta_n)$, $\theta_{n+1} = \theta_n + w \pmod{1}$ определим величину

$$\Lambda_N = T^{-1} \ln |\partial x_N / \partial x_0| = T^{-1} \sum_{n=0}^{N-1} \ln |f'(x_n, \theta_n)|,$$

где штрихом обозначена производная функции по первому аргументу, а начальная точка (x_0, θ_0) предполагается расположенной на аттракторе. Проводя вычисления многократно, получим набор величин Λ_N , для которого можно ввести функцию распределения $F(\Lambda)$.

Рассмотрим в качестве примера квадратичное отображение (4). На рис. 4, а показан портрет СНА при $\lambda = 0,8$, $\varepsilon = 0,45$ с показателем Ляпунова $\Lambda = -0,010$. На рис. 4, б показаны полученные численно графики функций распределения локального показателя Λ_N при $N = 250, 500$ и 1000 . Они имеют вид колоколообразных кривых, причем точка расположения максимума приблизительно соответствует величине Λ . Ширина распределения убывает с ростом N , однако оно имеет «хвост», простирающийся в область положительных¹ значений Λ_N . Это указывает на существование на аттракторе локально неустойчивых участков траекторий.

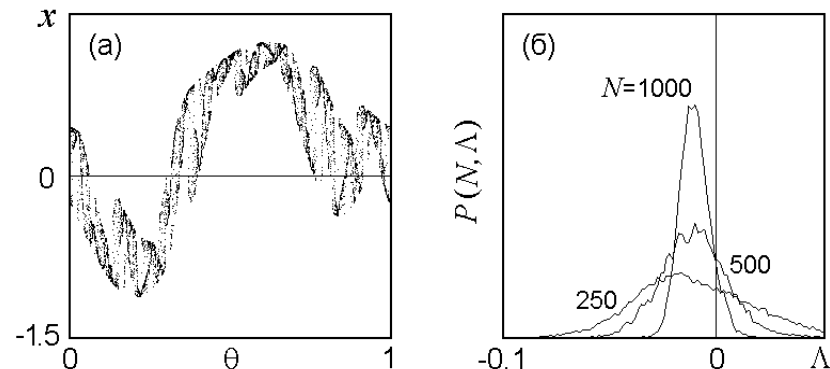


Рис. 4. Портрет СНА в отображении (4) при $\lambda = 0,8$, $\varepsilon = 0,45$ (а) и графики функций распределения локального показателя Ляпунова Λ_N (б).

¹ Заметим, что доля испытаний, приводящих к положительным значениям локального показателя Ляпунова Λ_N , уменьшается и, очевидно, стремится к нулю с ростом N .

3.2. Показатель фазовой чувствительности

Рассмотрим возможность выявить на количественном уровне наличие характерной для СНА негладкой зависимости координатной переменной от фазы воздействия. Для этого естественно попытаться отследить временную эволюцию величины $D_n = |\partial x_n / \partial \theta_0|$ [18]. Схема вычислений строится как совместные итерации исходного отображения и соотношения, полученного дифференцированием по фазе¹:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n, \theta_n), & \theta_{n+1} &= \theta_n + w \pmod{1}, \\ \partial x_{n+1} / \partial \theta_0 &= f_x(x_n, \theta_n) \partial x_n / \partial \theta_0 + f_\theta(x_n, \theta_n). \end{aligned}$$

На рис. 5, а показан полученный для случая СНА график зависимости D_N от числа итераций. Он выглядит как набор пиков, причем высота максимального пика, зарегистрированного в течение N итераций, растет с увеличением N .

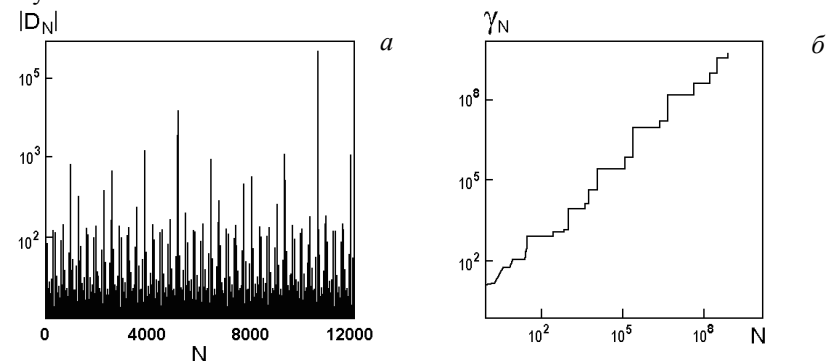


Рис. 5. Зависимости абсолютной величины производной $D_N = |\partial x_N / \partial \theta_0|$ от числа итераций для модели (1) при $\lambda = 1,5$, $w = (\sqrt{5} - 1)/2$ (а) и максимума высоты зарегистрированного пика от времени наблюдения (б) [18].

На рис. 5, б представлен график функции $\gamma_N(x_0, \theta_0, N) = \max_{0 \leq n \leq N} D_n$ в двойном логарифмическом масштабе, из которого видно, что рост происходит в среднем по степенному закону, $\gamma_N(x_0, N) \propto N^{\mu(x_0, \theta_0)}$, причем показатель степени, вообще говоря, зависит от выбранной траектории. Чтобы получить характеристику, относящуюся к аттрактору в целом, в работе [18] предложено определить показатель фазовой чувствительности

¹ Можно показать, что в случае СНА результат для D становится не зависящим от начального условия D_0 при большом числе шагов итераций в силу того, что нетривиальный показатель Ляпунова отрицательный.

сти μ как показатель роста для траектории, реализующей минимум этого показателя, $\Gamma_N = \min_{x_0, \theta_0} \gamma_N(x_0, \theta_0) \propto N^\mu$. Для рассмотренного примера $\mu \approx 0,97$. С другой стороны, для тора-аттрактора, очевидно, $\mu = 0$. Таким образом, в принципе показатель фазовой чувствительности дает средство отличить СНА от тора.

3.3. Фрактальная структура и размерность СНА

Хотя квалификация СНА как «геометрически странного» объекта — один из главных моментов в его определении, вопрос о фрактальных свойствах СНА изучен довольно слабо. Согласно работе [20] СНА в модели с бифуркацией вилки (1) и в отображении окружности (7) имеет фрактальную размерность (емкость)

$$D_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [-\log N(\varepsilon) / \log \varepsilon] = 2,$$

а информационную размерность

$$D_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\sum_{i=1}^N p_i \log p_i / \log \varepsilon \right] = 1.$$

Здесь N — число элементов покрытия ячейками (боксами) размера ε ; p_i — вероятность пребывания в i -ой ячейке покрытия. На рис. 6 показан портрет аттрактора и график, использованный для оценки размерностей в отображении окружности.

Сведения об оценке размерностей СНА для некоторых моделей в экспериментах и численных расчетах имеются в работах [21—23].

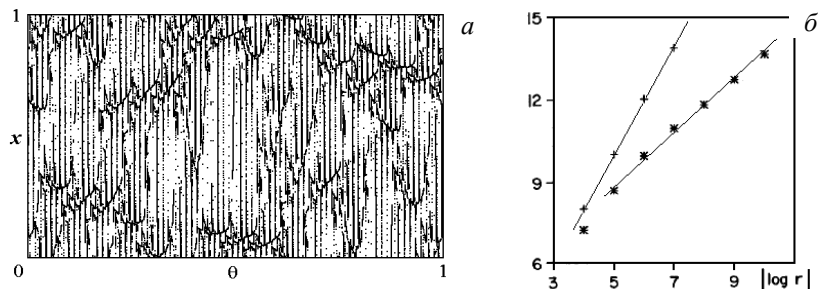


Рис. 6. Фазовый портрет СНА в (7) при $K = 0,95$, $\varepsilon = 1,2$, $r = 0,2841$ (а) и график в двойном логарифмическом масштабе, использовавшийся для оценки размерностей из работы [20] (б). Крестиками обозначены точки, относящиеся к оценке емкости D_0 , а звездочками — к оценке информационной размерности D_1 .

3.4. Спектральные свойства СНА

Фурье-анализ — один из общепринятых способов обработки сигналов при изучении динамических процессов, в том числе в эксперименте.

Говоря о типах спектров, будем рассуждать следующим образом. Имея некоторую последовательность x_n , подлежащую анализу, построим «накапливающуюся» сумму $S(\Omega, N) = \sum x_n e^{i\Omega n}$, где Ω — параметр, и отследим зависимость комплексной величины $S(\Omega, N)$ от числа членов суммы N . Для периодических и квазипериодических последовательностей на некотором дискретном множестве значений Ω получаем $S(\Omega, N) \propto N$, т. е. $|S(\Omega, N)|^2 \propto N^2$, а для остальных Ω имеем $S(\Omega, N) \rightarrow 0$. Это *дискретный спектр*. Для случайных или хаотических последовательностей эволюция величины S имеет характер случайного блуждания на комплексной плоскости, при этом $|S(\Omega, N)| \propto \sqrt{N}$ и $|S(\Omega, N)|^2 \propto N$. Это *непрерывный спектр*, такие спектры рассматриваются в теории стационарных случайных процессов Винера — Хинчина. Для последовательностей, порождаемых СНА, блуждание изображающей точки на плоскости при построении сумм $S(\Omega, N)$ носит фрактальный характер, образуя структуры с нетривиальными свойствами масштабного подобия (скейлинга). Асимптотическое поведение при увеличении N дается соотношением $|S(\Omega, N)|^2 \propto N^\beta$, где показатель β располагается между 1 и 2 и зависит от Ω . В этом случае говорят о *сингулярно-непрерывном спектре* [25, 26].

3.5. Метод рациональных аппроксимаций и природа СНА

Любое иррациональное число из интервала (0,1) представляется в виде цепной дроби $\rho = 1/(a_1 + 1/(a_2 + 1/(a_3 + \dots))) \equiv \langle a_1, a_2, a_3, \dots \rangle$, где a_i — целые числа. Подходящая дробь порядка k получается, если оборвать последовательность элементов на k -ой позиции: $\rho_k = \langle a_1, \dots, a_k \rangle = p_k/q_k$. При этом $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho_k = \rho$, и члены последовательности рациональных чисел ρ_k доставляют оптимальные приближения иррационального числа. Для «золотого среднего» имеем $(\sqrt{5} - 1)/2 = \langle 1, 1, \dots \rangle$, а подходящие дроби даются отношениями чисел Фибоначчи: F_k/F_{k+1} , $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$.

Если вместо иррационального частотного параметра взять k -ю рациональную аппроксимацию: $x_{n+1} = f(x_n, \theta_n)$, $\theta_{n+1} = \theta_n + w_k \pmod{1}$, $w_k = p_k/q_k$, то внешнее воздействие будет периодическим, с периодом q_k . В отличие от квазипериодического поведения, когда фазовая переменная эргодическим образом посещает плотное множество точек единичного интервала, теперь она обходит конечное множество $\{\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{q_k-1}\}$. При этом в зависимости от θ_0 будем получать, вообще говоря, разные режимы динамики и разные аттракторы. Итак, начальная

фаза θ_0 играет роль дополнительного параметра. Намереваясь на основе используемой рациональной аппроксимации составить представление, как будет вести себя система с иррациональной частотой, мы должны, очевидно, принимать во внимание все ситуации, которые получаются при произвольном задании θ_0 в интервале от 0 до $1/q_k$.

На рис. 7 показаны карты динамических режимов на плоскости параметров квадратичного отображения с внешним воздействием при рациональной аппроксимации ($a - \epsilon$) и при иррациональном значении частоты $w = (\sqrt{5} - 1)/2$ (z). Сравнивая карты, можно видеть, что области регулярной квазипериодической динамики на диаграмме (z) (торы T1, T2, T4) ассоциируются с областями периодических режимов (циклов) на картах ($a - \epsilon$). В областях, где в системе с иррациональной частотой реализуется СНА, на картах для рациональных аппроксимаций можно видеть «мельтешение» режимов разного типа в зависимости от порядка аппроксимации и от начальной фазы.

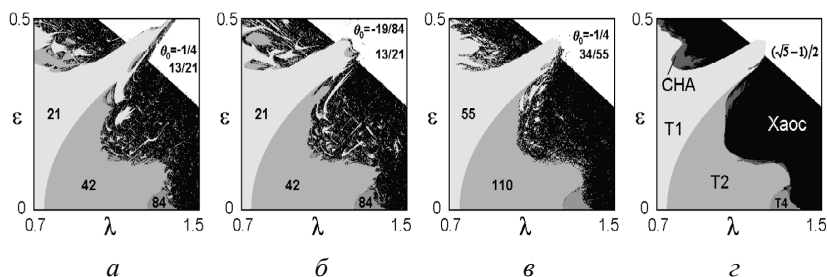


Рис. 7. Карты динамических режимов для модели (4) на плоскости параметров для рациональных аппроксимаций частоты воздействия $13/21$ с двумя разными начальными фазами (a) и (b), $34/55$ (c) и для иррациональной частоты воздействия $w = (\sqrt{5} - 1)/2$ (z). Цифрами обозначены периоды наблюдаемых периодических режимов в соответствующих областях.

В работе Пиковского и Фойдель [18] была высказана гипотеза, что необходимое условие существования СНА состоит в том, что при рациональной аппроксимации частотного параметра система демонстрирует бифуркации в зависимости от параметра начальной фазы, причем это свойство сохраняется при увеличении порядка аппроксимации. На качественном уровне, рассуждая в терминах систем, полученных на основе рациональной аппроксимации, можно представить себе, что при иррациональном значении частоты имеем как бы медленный дрейф параметра начальной фазы, и система по ходу динамики все время претерпевает бифуркации. В этом и состоит подоплека возникновения СНА.

4. Как рождается странный нехаотический аттрактор?

4.1. Бифуркации в системах

с квазипериодическим воздействием и сценарии рождения СНА

Если в системе с квазипериодическим воздействием при одном значении управляющего параметра реализуется гладкий тор, а при другом — СНА, то какие переходы (бифуркации) могут наблюдаться в процессе движения по параметру от одного режима к другому? Один из сценариев, получивший название бифуркации расширения («blowout») [27], реализуется в модели с бифуркацией вилки (1) и уже обсуждался в общих чертах в п. 2.1. Интересный подход к изучению деталей возникновения СНА для нескольких ситуаций был развит на основе метода ренормгруппы [28—30, 15].

Говоря о бифуркационных сценариях в квадратичном отображении с квазипериодическим воздействием (4), естественно начать с *бифуркаций удвоения торов* [31—33]. Известно, что при $\epsilon = 0$ имеем последовательность бифуркаций удвоения периода с переходом к хаосу по Фейгенбауму. Первая бифуркация состоит в том, что неподвижная точка теряет устойчивость и рождается аттрактор из двух точек, посещаемых попеременно, цикл периода 2. В присутствии квазипериодического воздействия вместо устойчивой неподвижной точки имеем притягивающую замкнутую инвариантную кривую (тор-аттрактор) T1, а бифуркация состоит в том, что от нее отделяются две замкнутые кривые, посещаемые попеременно (рис. 8). Это новый аттрактор — удвоенный тор T2. При малых ϵ , увеличивая λ , что соответствует движению на плоскости параметров по линии TD (рис. 9, a), можно наблюдать несколько бифуркаций удвоения торов (T1→T2→T4→...). В отличие от фейгенбаумовского каскада эта последовательность содержит конечное число бифуркаций (тем большее, чем меньше ϵ) [31—33, 11].

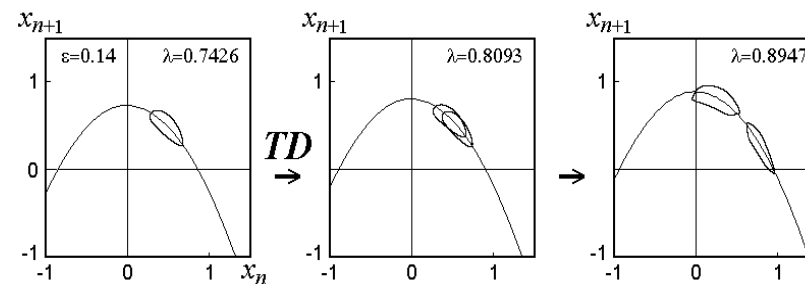


Рис. 8. Бифуркация удвоения тора (Torus Doubling, TD), представленная на итерационной диаграмме; парабола изображает график функции $\lambda - x^2$.

Хеги и Хэмел [34] рассмотрели механизм, ответственный за ограничение числа удвоения торов, и связали с ним сценарий рождения СНА. Он отвечает движению по пути **HH** на рис. 9, *a* и иллюстрируется фазовыми портретами на рис. 9, *в*. После рождения удвоенного тора, представленного на фазовом портрете двумя изогнутыми линиями, продолжает существовать также потерявший устойчивость родительский тор, обозначенный серой линией. С увеличением λ компоненты удвоенного тора приобретают все более извилистый вид, разбухая по ширине, и, наконец, в момент бифуркации касаются своими выступами располагающейся между ними родительской инвариантной кривой. После бифуркации притягивающее множество уже не имеет двух попеременно посещаемых компонент, а представляет собой единый СНА.

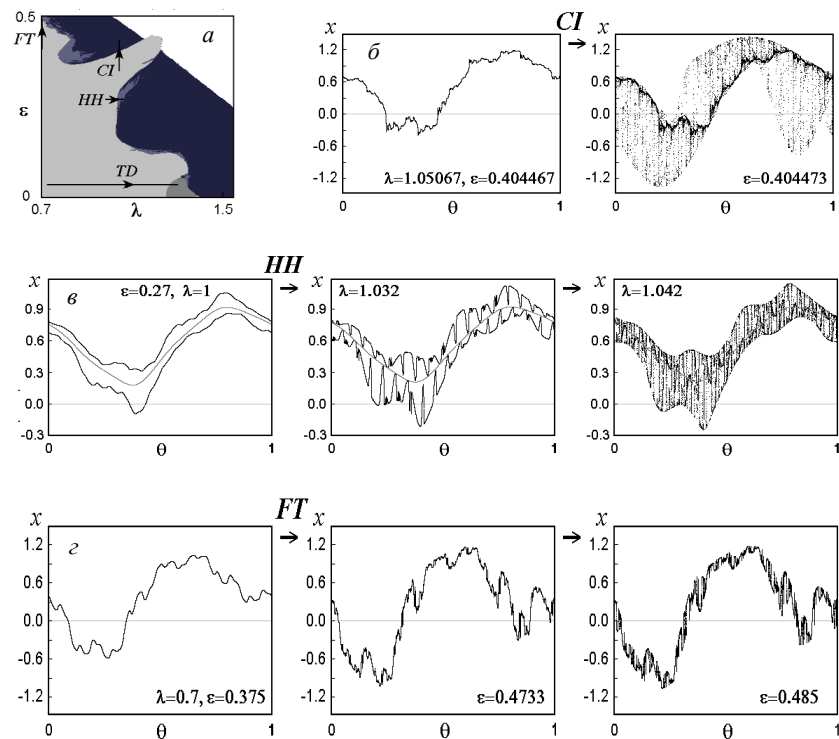


Рис. 9. Карта режимов квадратичного отображения с квазипериодическим воздействием (*a*), перемежаемость, связанная с кризисом **CI** (*б*) и фазовые портреты, иллюстрирующие сценарии рождения СНА при движении по плоскости параметров, как показано стрелками: сценарий Хеги — Хэмела **HH** (*в*), фрактализация тора по Нишикава — Канеко **FT** (*г*).

Другой сценарий описан Нишикавой и Канеко [35] и состоит в том, что притягивающая инвариантная кривая постепенно делается все более извилистой, теряет гладкость и становится фрактальной — возникает СНА. Это имеет место при движении на плоскости параметров по пути **TF** (рис. 9, *a*) и иллюстрируется фазовыми портретами на рис. 9, *б*.

Переход к СНА на пути **CI** состоит в том, что область, занятая аттрактором, резко расширяется, хотя система по-прежнему проводит большую часть времени в окрестности ранее существовавшей притягивающей инвариантной кривой, т. е. имеет место перемежаемость. В работе [36] этот переход гипотетически ассоциирован с бифуркацией торов, являющейся аналогом столкновения устойчивой и неустойчивой точек при касательной (седло-узловой) бифуркации. На самом деле происходит столкновение тора-аттрактора не с партнером в виде неустойчивого тора, а со специфическим неустойчивым инвариантным множеством, которое идентифицировано в работе [37] с использованием рациональных аппроксимаций («ring-shape invariant set»). По-видимому, феномен следует интерпретировать как внутренний кризис определенного типа, приводящий к рождению СНА [38].

Настоящим аналогом касательной бифуркации и перемежаемости по Помо и Манневиллю служит переход в отображении окружности [3, 17], а также в модели (5), модифицированной так, чтобы обеспечить присутствие механизма возврата [15]:

$$x_{n+1} = f(x_n) + b + \varepsilon \cos 2\pi(nw + \theta_0), \quad f(x) = \begin{cases} x/(1-x), & x \leq 0.75 \\ 9/2x - 3, & x > 0.75 \end{cases} \quad (8)$$

Оказывается, что существует критическое значение амплитуды воздействия ε_c такое, что при $\varepsilon < \varepsilon_c$ и $\varepsilon > \varepsilon_c$ переход с увеличением параметра b носит существенно разный характер¹.

В первом случае имеет место сближение двух гладких инвариантных кривых (устойчивой и неустойчивой) с последующим их слиянием и исчезновением, а результатом является рождение хаоса (рис. 10, *a*). Во втором случае приближение к точке бифуркации сопровождается образованием выступов («шипов») на инвариантных кривых, и в момент бифуркации они касаются друг друга остриями этих шипов (рис. 10, *б*). В силу эргодичности динамики фазовой переменной точки касания образуют плотное множество, так что возникающий в момент бифуркации объект фрактальный. О данной бифуркации говорят как о *фрактальном столкновении торов*, ее результатом является рождение СНА.

¹ В модели (8) ε_c точно равно 2, что находит объяснение при формулировке задачи в терминах уравнения Харпера (6), для которого критическое значение $\varepsilon_c = 2$ отвечает переходу локализация — делокализация.

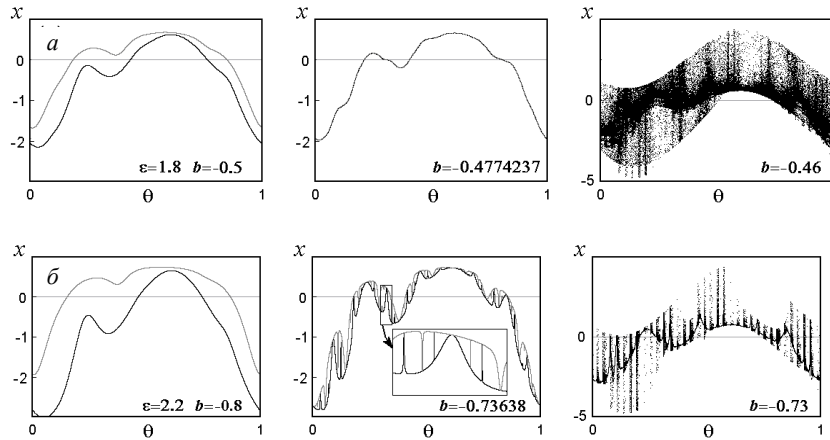


Рис. 10. Переход через перемежаемость в модели (8) через бифуркацию слияния гладких торов (а) и фрактального столкновения торов (б). Устойчивая инвариантная кривая показана черным цветом, неустойчивая — серым.

4.2. Ренормгрупповой подход к анализу рождения СНА

Метод ренормгруппы (РГ) изначально возник в квантовой теории поля и в теории фазовых переходов. В нелинейную динамику он был принесен благодаря работам Фейгенбаума [6, 7, 9] и оказался полезным и мощным теоретическим инструментом для анализа переходов к хаосу.

Пусть имеем оператор эволюции некоторой системы на каком-то временном интервале. Применяя его несколько раз, можно построить оператор на большем интервале. Предметом анализа служит ситуация (критическая точка), когда посредством масштабной замены переменных новый оператор приводится точно или почти точно к старому. Эту процедуру, называемую РГ-преобразованием, можно повторять многократно и построить последовательность операторов для больших временных интервалов. В критической точке они определяются структурой РГ-преобразования. Поэтому поведение на больших временах для широкого класса систем оказывается одинаковым и не зависящим от деталей локальной динамики (универсальность). Поскольку получаемые операторы совпадают с точностью до масштабной замены, динамика на разных характерных временах оказывается подобной (скейлинг).

Более конкретно, для системы с дискретным временем при квазипериодическом воздействии на частоте $w = (\sqrt{5} - 1)/2$ рассмотрим операторы эволюции за интервалы времени, отвечающие числам Фибоначчи

F_m . Пусть мгновенное состояние задается двумя переменными (x, u) , а эволюция за F_m шагов описывается уравнениями

$$x_{n+F_m} = f_m(x_n, u_n), \quad u_{n+F_m} = u_n + F_m w \pmod{1}, \quad (9)$$

причем по второму аргументу функция f имеет период 1. В соответствии с определением чисел Фибоначчи $F_{m+2} = F_{m+1} + F_m$, так что

$$x_{n+F_{m+2}} = f_m(f_{m+1}(x_n, u_n), u_n + wF_{m+1}). \quad (10)$$

В силу свойств золотого среднего $u + wF_{m+1} = u - (-w)^{m+1} \pmod{1}$. Для оператора эволюции за F_m шагов введем нормировку u на фактор $(-w)^m$ и x на a^{-m} , где a — пока неизвестная константа. Тогда оператор эволюции будет представлен функцией $g_m(x, u) = a^m f_m(xa^{-m}, u(-w)^m)$, а уравнение (10) примет вид [29, 30]

$$g_{m+2} = a^2 g_m(a^{-1} g_{m+1}(xa^{-1}, -wu), w^2 u + w). \quad (11)$$

В пространстве функций это уравнение может иметь неподвижные точки или циклы, отвечающие за те или иные типы критического поведения в системе с квазипериодическим воздействием. Рассмотрение малого возмущения неподвижной точки или цикла приводит к задаче на собственные функции. Существенные собственные числа δ , превышающие по модулю 1, ассоциируются со сдвигами по параметрам, выводящими систему из критической точки, и играют роль факторов скейлинга в пространстве параметров.

Первый тип критического поведения, проанализированный в рамках этого подхода, относится к рождению СНА в отображении с бифуркацией вилки (1) [28]. Ему отвечает решение уравнения РГ вида $g_m(x, u) = Q_m(u)x/\sqrt{1+H_m(u)x^2}$ в виде цикла периода 6, хотя с точностью до знака эти функции повторяются с периодом 3. Найденный численно фактор перенормировки $\alpha = a^3 = 1,323891$, а собственное число $\delta = w^{-3} = 4,236068$. Отсюда вытекает заключение о подобии режимов динамики вблизи критической точки $\lambda = 1$ при пересчете параметра $\lambda \rightarrow (\lambda-1)/\delta$ и динамических переменных $x \rightarrow x/\alpha$, $u \rightarrow u/\beta$, где $\beta = -w^{-3}$ (рис. 11, а, б). Можно также получить нетривиальный степенной закон, которому подчиняется размер аттрактора вблизи критической точки: $|\Delta x| \propto \Delta \lambda^\nu$, где $\nu = \log_\delta \alpha$ (рис. 11, в).

Обратимся теперь к квадратичному отображению с квазипериодическим воздействием (4). На плоскости (λ, ε) имеется линия бифуркации удвоения тора $T1 \rightarrow T2$. Если двигаться вдоль бифуркационной линии, увеличивая амплитуду воздействия, то замкнутая инвариантная кривая $T1$, расположенная первоначально в области $x > 0$, увеличивается в размерах и в какой-то момент касается точки $x=0$, отвечающей экстремуму

параболы. Это соответствует окончанию бифуркационной кривой удвоения тора — критической точке TDT (Torus Doubling Terminal) при $\lambda_c = 1,158096856726$ и $\varepsilon_c = 0,360248020507$ [29]. Оказывается, что за поведение в точке TDT отвечает цикл периода 3 в уравнении РГ. Из решения функционального уравнения численно найдены соответствующие функции, а также фактор перенормировки $\alpha = a^3 = 3,96376647$ и собственные числа $\delta_1 = 10,5029$ и $\delta_2 = 5,1881$.

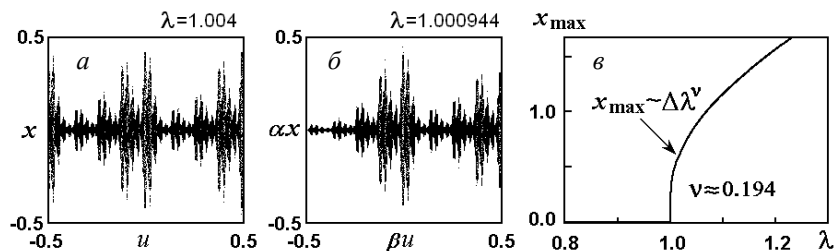


Рис. 11. Демонстрация скейлинга вблизи точки рождения СНА на фазовых портретах отображения (1) (а) и (б). Во втором случае отклонение по параметру от критической точки уменьшено в δ раз, а масштаб по осям координат изменен на факторы $\beta = -w^{-3}$ и $\alpha \approx 1,32391$. Иллюстрация закона поведения размера аттрактора в зависимости от надкритичности (в).

Со стороны малых λ область T1 на плоскости параметров (λ, ε) ограничена линией бифуркации слияния устойчивого и неустойчивого торов. Будем двигаться вдоль нее в направлении увеличения ε . При этом замкнутая инвариантная кривая, располагавшаяся в области $x < 0$, в какой-то момент достигает края точки $x = 0$. Это имеет место в критической точке TCT (Torus Collision Terminal): $\lambda_c = 0,09977122895$, $\varepsilon_c = 1,01105609099$. За критическое поведение TCT отвечает неподвижная точка уравнения РГ [30]. Численное решение уравнения РГ позволило найти соответствующие функции, фактор перенормировки $\alpha = a = 1,7109605$ и собственные числа $\delta_1 = 3,600810$, $\delta_2 = 1,828329$.

На рис. 12 иллюстрируются свойства скейлинга критических аттракторов в точках TDT и TCT. Портрет аттрактора на плоскости (x, u) локально подобен себе и переходит в себя при пересчете масштаба по вертикали и горизонтали на соответствующие константы. Особенность, которая визуально похожа на излом, имеет вид $\Delta x \propto |\Delta u|^\gamma$, где показатель $\gamma = \log_{|\beta|} \alpha$ для TDT равен 0,954, а для TCT 1,117. Благодаря эргодичности она «тиражируется» на плотном множестве точек, и аттрактор фактически представляет собой фрактальную кривую.

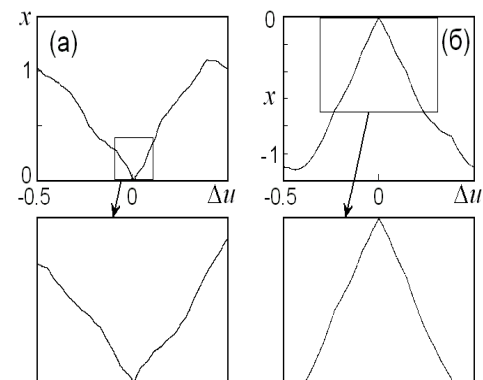


Рис. 12. Фазовые портреты аттрактора квадратичного отображения в точках TDT (а) и TCT (б) и иллюстрации скейлинга в окрестности особенности.

Еще один тип критического поведения — точка TF («Torus Fractalization») отвечает моменту изменения характера перехода через переменяемость, который при малой амплитуде воздействия связан с бифуркацией слияния гладких торов, а при больших — с фрактальным столкновением [15]. Для отображения (5) точка TF располагается при $\varepsilon_c = 2$, $b_c = -0,597515185376121$. За поведение этого типа отвечает неподвижная точка уравнения РГ в виде дробно-линейной функции $g(x, u) = (a(u)x + b(u))/(c(u)x + d(u))$. Согласно численным результатам [15] масштабный фактор равен $\alpha = a = 2,890053525$, а существенные собственные числа $\delta_1 = 3,134272989$, $\delta_2 = w^{-1} = 1,6180340$. На рис. 13 иллюстрируется скейлинг аттрактора в точке TF: в специальной локальной системе координат картинка переходит в себя при пересчете масштаба по двум осям координат на факторы α и β .

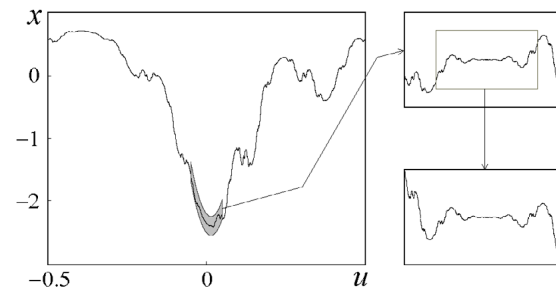


Рис. 13. Фазовый портрет аттрактора отображения (5) в критической точке TF и иллюстрация свойства скейлинга при пересчете масштаба по вертикали и горизонтали, соответственно, на факторы $\alpha \approx 2,89005$ и $\beta = -w^{-1}$ в системе координат $c_1 = (x + 2,34719526) + 5,9267u - 210,63u^2$, $c_2 = u$.

5. Системы с непрерывным временем и эксперименты по наблюдению феноменов, связанных с присутствием СНА

До сих пор мы обсуждали модели с дискретным временем, представленные итерируемыми отображениями. Рассмотрим вопрос о возможности реализации СНА в системах, заданных привычными физикам дифференциальными уравнениями. Ключевой момент – установление связи между дифференциальными уравнениями и описанием динамики в терминах отображений на основе идеи сечения Пуанкаре для интересующего нас класса систем с квазипериодическим воздействием.

Предположим для определенности, что система без внешнего воздействия имела двумерное фазовое пространство (x, y) и описывалась двумя дифференциальными уравнениями первого порядка. В случае двухчастотного воздействия функции в правых частях уравнений надо считать зависящими периодическим образом от фазовых переменных Θ и Φ , изменяющихся во времени по линейному закону:

$$\dot{x} = f_1(x, y, \Theta, \Phi), \quad \dot{y} = f_2(x, y, \Theta, \Phi), \quad \dot{\Theta} = \omega, \quad \dot{\Phi} = \Omega, \quad (12)$$

причем частоты ω и Ω полагаем находящимися в иррациональном отношении. Пусть в момент, отвечающий определенной фазе второй составляющей Φ , имеем значения переменных (x, y, Θ) ; какими они будут через один период этой составляющей $T = 2\pi/\Omega$? Из теоремы единственности решения дифференциального уравнения следует, что эти величины должны выражаться однозначно, как функции от исходных значений. Еще через период они получатся повторным применением тех же функций и так далее. Итак, возникает итерируемое отображение

$$x_{n+1} = F_1(x_n, y_n, \Theta_n), \quad y_{n+1} = F_2(x_n, y_n, \Theta_n), \\ \Theta_{n+1} = \Theta_n + 2\pi\omega/\Omega \pmod{2\pi}.$$

В данном контексте это и есть *отображение Пуанкаре* или *стробоскопическое отображение*. Теперь можно отвлечься от исходных уравнений и сосредоточиться на анализе динамики, порождаемой отображением. Чаще всего функции F_1 и F_2 можно получить только на основе численного решения уравнений (12). Однако, с принципиальной точки зрения, мы имеем задачу того же типа, что и обсуждавшиеся модели с дискретным временем. Добавим, что в системах с сильной диссипацией наблюдаемые по ходу временной эволюции состояния на секущей гиперплоскости имеют тенденцию располагаться при каждом фиксированном Θ вдоль одномерной кривой на плоскости (x, y) . В этом случае, введя вместо (x, y) одну координату вдоль этой кривой, приходим к описанию динамики в терминах одномерного отображения с квазипериодическим воздействием.

Представительный класс нелинейных систем, демонстрирующих СНА, составляют нелинейные диссипативные осцилляторы, возбуждаемые квазипериодической силой [21—23, 39—41].

В качестве примера на рис. 14 приводятся численные результаты, относящиеся к нелинейному осциллятору Дуффинга с квазипериодическим параметрическим возбуждением [23]:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\gamma y - x^3 + x(1 + A(R \cos \Theta + \cos \Phi)), \quad \dot{\Theta} = \omega, \quad \dot{\Phi} = \Omega, \quad (13)$$

где $\omega = 2\pi$, $\Omega = \pi(\sqrt{5} + 1)$. Показаны фазовые портреты аттракторов в проекции на плоскость $(x, y = \dot{x})$, фазовые портреты на плоскости $(\theta = \Theta/2\pi, x)$ в сечении Пуанкаре $\Phi = 0$ и спектры Фурье для режимов, соответствующих тору-аттрактору (а), СНА (б) и хаосу (в). Более подробные численные расчеты показывают, что в данной системе реализуются многие из феноменов, упоминавшихся в предыдущих разделах, в том числе последовательности удвоения торов, переходы к СНА по Хэги — Хэмелу, Нишикава — Канеко, перемежаемость.

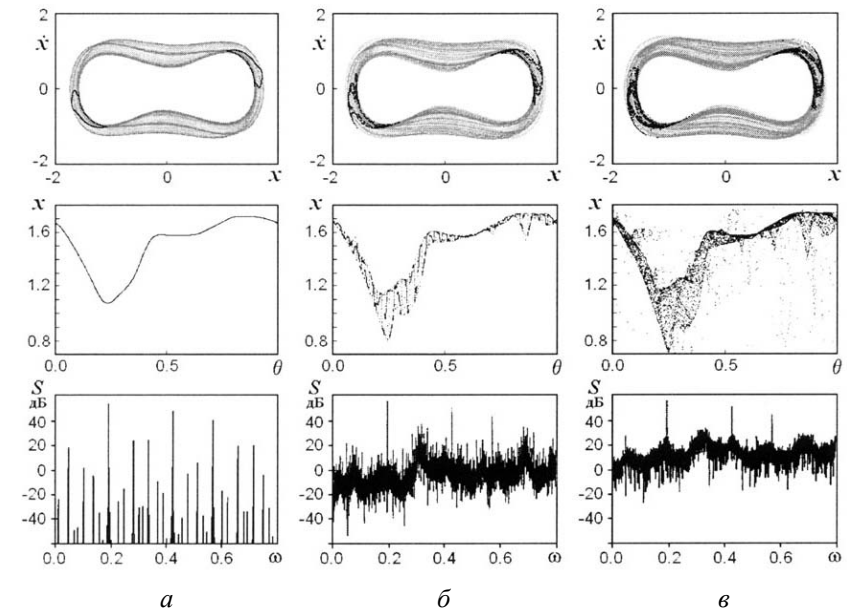


Рис. 14. Тор-аттрактор при $A = 0,38$ (а), СНА при $A = 0,396$ (б) и хаос при $A = 0,402$ (в) в осцилляторе Дуффинга с параметрическим возбуждением [23] — фазовый портрет в проекции на плоскость (x, \dot{x}) , где черные точки отвечают стробоскопическому сечению $\theta = 0$, фазовые портреты на плоскости (x, θ) и фурье-спектры. Остальные параметры: $\gamma = 0,1$, $R = 0,3$.

В ряде работ сообщалось об обнаружении СНА при численном решении задачи о квазипериодическом воздействии на систему автоколебательного типа – осциллятор Ван-дер-Поля [42, 43].

Первый описанный в литературе эксперимент по наблюдению СНА в реальной системе относится к механическому осциллятору в виде закрепленной на конце магнитно-упругой ленты, колебания которой возбуждаются переменным магнитным полем [21, 23]. Система описывается неавтономным уравнением Дуффинга (13). Режим СНА идентифицировался по виду фазовых портретов в стробоскопическом сечении, скейлинговому поведению составляющих в спектре Фурье, характерному для сингулярно-непрерывного спектра, и по размерностным характеристикам: оценки фрактальной и информационной размерности аттрактора в сечении Пуанкаре дали результаты, близкие, соответственно, к 2 и 1.

В работах [22, 44] сообщалось о наблюдении СНА в экспериментах с нелинейными осцилляторами в виде электронных схем, которые представляли собой аналоговые устройства, реализующие динамику, описываемую определенными дифференциальными уравнениями. Помимо фазовых портретов, спектров и оценок размерностей представлены результаты, относящиеся к показателям Ляпунова для дифференциального уравнения, аналоговой моделью которого служит исследуемая схема. В одной из этих работ реализован и изучен в эксперименте переход к СНА через бифуркацию «blowout» [44].

В работе [45] исследован экспериментально электронный осциллятор в виде колебательного контура, в котором роль нелинейного элемента выполнял полупроводниковый диод. Известно, что при одночастотном возбуждении в этой системе реализуется переход к хаосу через последовательность удвоений периода, как в квадратичном отображении. Добавление второй составляющей воздействия на частоте, находящейся с первой в иррациональном отношении (золотое среднее), приводит к появлению феноменов, имеющих место в логистическом отображении с квазипериодическим воздействием. В этом можно убедиться, сравнивая карты динамических режимов в эксперименте (по осям координат — амплитуды составляющих воздействующего переменного напряжения в вольтах) и в численных расчетах для квадратичного отображения (рис. 15). На рисунке показаны также полученные в эксперименте фазовые портреты типичных аттракторов (тор, удвоенный тор, СНА, хаос). Для их построения снимаемые с последовательно включенного в контур резистора значения потенциала вводились в компьютер с помощью аналого-цифрового преобразователя и на графике по осям координат откладывались величины, относящиеся к определенному моменту в пределах n -го и $n+1$ -го периодов основного воздействия. Для идентификации СНА использовалась идея Пиковского и Фойдель: соотношение частот

задавалось как рациональная аппроксимация золотого среднего (13/21) и при фиксированных остальных параметрах отслеживалось присутствие или отсутствие бифуркаций в системе в зависимости от соотношения фаз частотных составляющих.

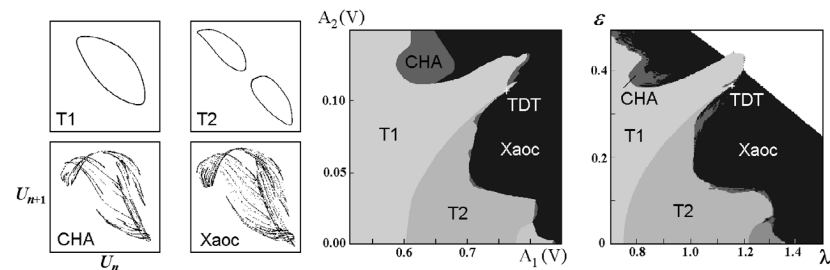


Рис. 15. Фазовые портреты аттракторов, полученные в эксперименте с нелинейным колебательным контуром при двухчастотном возбуждении с отношением частот, даваемым золотым средним, и области режимов на плоскости параметров, где по осям координат отложены амплитуды составляющих в вольтах. Справа для сравнения аналогичная карта для отображения (4).

В литературе сообщалось также о наблюдении СНА в электронных схемах, содержащих элемент с кусочно-линейной характеристикой с квазипериодическим возбуждением [46, 47], в химическом эксперименте с реакцией Белоусова — Жаботинского при воздействии на реактор двух других реакторов, где реализовались осцилляции на несоизмеримых частотах [48]. Отдельно следует упомянуть работу [49], в которой характерные для СНА особенности динамики обнаружены в распределенной системе — тлеющем разряде в неоновой трубке. В качестве зависящей от времени наблюдаемой величины регистрировался ионный разряд световой поток. В этом случае внешнего квазипериодического воздействия не было; по-видимому, его роль играли какие-то внутренние квазинеzависимые периодические процессы в разряде.

Заключение

Как любопытный экземпляр в «зоопарке» феноменов нелинейной динамики, СНА, несомненно, заслуживает, чтобы о нем знали специалисты, имеющие дело с колебательными системами, функционирующими в условиях внешнего воздействия со сложным спектром (механические конструкции, радиотехнические и электронные устройства и тому подобное). С прикладной точки зрения вызывает интерес возможность применения СНА в схемах скрытой коммуникации [50, 51], поскольку осуществить синхронизацию систем с СНА в приемнике и передатчике проще, чем для систем с хаосом.

Здесь мы хотим подчеркнуть более фундаментальный аспект. Как известно, на раннем этапе обсуждения проблемы возникновения турбулентности был предложен сценарий Ландау, согласно которому с увеличением числа Рейнольдса в гидродинамических течениях в результате ряда бифуркаций последовательно возникают колебательные движения с несоизмеримыми частотами, а при наличии достаточно большого количества таких составляющих динамика воспринимается как турбулентная. Эта картина была подвергнута критике Рюэлем и Такенсом, которые выдвинули концепцию странного хаотического аттрактора, возникающего после рождения трех (в другой версии теоремы четырех) независимых частотных составляющих. Аргументация, впрочем, носит общий характер и с равным основанием может быть отнесена к системам самой разной физической природы. Со времени этих пионерских работ достигнут большой прогресс в исследовании перехода к хаосу через квазипериодичность, но в целом картина весьма сложна и все еще далека от полного понимания. Один из возможных путей продвижения — обратиться к упрощенной задаче, предположив, что реализующиеся в какой-то сложной системе с многомерным фазовым пространством колебания с несоизмеримыми частотами квазинеизмеримы и действуют однонаправленным образом на одну дополнительную вновь возникшую составляющую движения (моду). Это приводит к моделям с квазипериодическим воздействием, обсуждавшимся выше. В них значения частот выступают как независимые параметры, задаваемые исследователем, что создает возможность для более свободного обращения с моделью и анализа возникающих режимов динамики. Замечательно, что уже на этом пути история делает неожиданный поворот: наряду с регулярной (периодической и квазипериодической) динамикой и хаосом обнаруживается возможность нового типа поведения — СНА.

В системах с квазипериодическим воздействием СНА реализуется на множестве положительной меры в пространстве параметров и поэтому должен рассматриваться как типичный феномен, характерный для области между порядком и хаосом.

В автономных системах частоты колебательных составляющих порождаются динамикой самой системы и не допускают простого и непосредственного регулирования. В этой ситуации возможность реализации СНА как типичного феномена проблематична. Вообще говоря, в каких-то точках пространства параметров автономной системы, совершающей движение с несколькими независимыми колебательными составляющими, по-видимому, будут реализовываться СНА, но насколько заметную часть пространства параметров может занимать множество этих точек и имеет ли оно отличную от нуля меру, сказать трудно. Отдельные появившиеся в литературе сообщения относительно наблюдения СНА в автономных системах не кажутся убедительными.

Подводя итог, можно констатировать, что исследования, связанные с феноменом СНА, обогатили представления о явлениях в нелинейных системах в области между порядком и хаосом, послужили стимулом для привлечения и использования в нелинейной динамике новых концепций. Были вскрыты интересные аналогии с фазовыми переходами, задачами теории колебаний и волн в неупорядоченных средах, теорией квантового хаоса, что способствует формированию междисциплинарных связей и взаимному обогащению теоретического инструментария.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 03-02-16074).

Литература

1. Grebogi C., Ott E., Pelikan S., Yorke J.A. Strange attractors that are not chaotic // *Physica D*. 1984. V. 13. № 1, 2. P. 261—268.
2. Ding M., Grebogi C., Ott E. Evolution of attractors in quasiperiodically forced systems: From quasiperiodic to strange nonchaotic to chaotic // *Phys. Rev. A*. 1989. V. 39. P. 2593—2598.
3. Feudel U., Pikovsky A. S., Kurths J. Strange nonchaotic attractor in a quasiperiodically forced circle map // *Physica D*. 1995. V. 88. P. 176—186.
4. Anishchenko V. S., Vadivasova T. E., Sosnovitsa O. Mechanisms of ergodic torus destruction and appearance of strange nonchaotic attractors // *Phys. Rev. E*. 1996. V. 53. P. 4451—4456.
5. Prasad A., Negi S. S., Ramaswamy R. Strange nonchaotic attractors // *IJBC*. 2001. V. 11. P. 291—311.
6. Фейгенбаум М. Универсальность в поведении нелинейных систем // УФН. 1983. Т. 141, № 2. С. 343—374.
7. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984.
8. Рабинович М. И., Трубецков Д. И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984.
9. Кузнецов С. П. Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001.
10. Kaneko K. Oscillation and Doubling of Torus // *Progr. Theor. Phys.* 1984. V. 72, № 2. P. 202—215.
11. Кузнецов С. П. О воздействии периодического возмущения на систему, демонстрирующую переход порядок-хаос через бифуркации удвоения периода // *Письма ЖЭТФ*. 1984. Т. 39, № 3. С. 113—116.
12. Kuznetsov S. P., Pikovsky A. S. Renormalization group for the response function and spectrum of the period-doubling system // *Phys. Lett. A*. 1989. V. 140, № 4. С. 166—172.
13. Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. О детерминистическом подходе к турбулентности. М.: Мир, 1991.
14. Kato J. A., Saito I. I. Harper equation, the dissipative standard map and strange nonchaotic attractors // *Physica D*. 1997. V. 109. P. 70—80.
15. Kuznetsov S. P. Torus fractalization and intermittency // *Phys. Rev. E*. 2002. V. 65. 066209.
16. Сулов И. М. Локализация в одномерных несоизмеримых системах // *ЖЭТФ*. 1982. Т. 83. № 3. С. 1079—1088.
17. Otinga H., Wiersig J., Glendinning P., Feudel U. Multistability and nonsmooth bifurcations in the quasiperiodically forced circle map // *IJBC*. 2001. V. 11, № 12. P. 3085—3107.
18. Pikovsky A. S., Feudel U. Characterizing strange nonchaotic attractors // *Chaos*. 1995. V. 5, № 1. P. 253—260.

19. Prasad A., Ramaswamy R. Characteristic distributions of finite-time Lyapunov exponents // Phys. Rev. E. 1999. V. 60. P. 2761—2766.

20. Ding M., Grebogi C., Ott E. Dimensions of Strange Nonchaotic Attractors // Phys. Lett. A. 1989. V. 137, № 4, 5. P. 167—172.

21. Ditto W. L., Spano M. L., Savage H. T., Raueo S. N., Heagy J., Ott E. Experimental observation of a strange nonchaotic attractor // Phys. Rev. Lett. 1990. V. 65. P. 533—536.

22. Zhou T., Moss F., Bulsara A. Observation of a strange nonchaotic attractor in a multistable potential // Phys. Rev. A. 1992. V. 45. P. 5394—5400.

23. Heagy J., Ditto W. L. Dynamics of a two-frequency parametrically driven Duffing oscillator // J. Nonlinear Sci. 1991. V. 1. P. 423—455.

24. Datta S., Sharma A., Ramaswamy R. Thermodynamics of critical strange nonchaotic attractors // Phys. Rev. E. 2003. V. 68. 036104.

25. Pikovsky A. S., Feudel U. Correlations and spectra of strange nonchaotic attractors // J. Phys. A: Math. Gen. 1994. V. 27. P. 5209—5219.

26. Pikovsky A. S., Zaks M. A., Feudel U., Kurths J. Singular continuous spectra in dissipative dynamics // Phys. Rev. E. 1995. V. 52. P. 285—296.

27. Yalcynkaya T., Lai Y.-C. Blowout bifurcation route to strange nonchaotic attractors // Phys. Rev. Lett. 1996. V. 77. P. 5039—5042.

28. Kuznetsov S. P., Pikovsky A. S., Feudel U. Birth of a strange nonchaotic attractor: A renormalization group analysis // Phys. Rev. E. 1995. V. 51. P. 1629—1632.

29. Kuznetsov S., Feudel U., Pikovsky A. Renormalization group for scaling at the torus-doubling terminal point // Phys. Rev. E. 1998. V. 57. P. 1585—1590.

30. Kuznetsov S. P., Neumann E., Pikovsky A., Sataev I. R. Critical point of tori collision in quasiperiodically forced systems // Phys. Rev. E. 2000. V. 62. P. 1995—2007.

31. Анущенко В. С. Индуцированные внешним воздействием фазовые переходы в радиофизической системе со странным аттрактором // Флуктуационные явления в физических системах: Тез. докл. 3-й Всесоюз. конф. Вильнюс: Изд-во АН ЛитССР, 1982, 17 с.

32. Kaneko K. Oscillation and Doubling of Torus // Progr. Theor. Phys. 1984. V. 72, № 2. P. 202—215.

33. Arneodo A., Collet P. H., Spiegel E. A. Cascade of period doublings of tori // Phys. Lett. A. 1983. V. 94, № 1. P. 1—4.

34. Heagy J. F., Hammel S. M. The birth of strange nonchaotic attractors // Physica D. 1994. V. 70, № 1, 2. P. 140—153.

35. Nishikawa T., Kaneko K. Fractalization of a torus as a strange nonchaotic attractor // Phys. Rev. E. 1996. V. 54. P. 6114—6124.

36. Prasad A., Mehra V., Ramaswamy R. Intermittency route to strange nonchaotic attractors // Phys. Rev. Lett. 1997. V. 79. P. 4127—4130.

37. Kim S.-Y., Lim W., Ott E. Mechanism for the intermittent route to strange nonchaotic attractors // Phys. Rev. E. 2003. V. 67. 056203.

38. Witt A., Feudel U., Pikovsky A. S. Birth of strange nonchaotic attractors due to interior crisis // Physica D. 1997. V. 109. P. 180—190.

39. Bondeson A., Ott E., Antonsen T. M. Quasiperiodically forced damped pendula and Schrodinger equations with quasiperiodic potentials: Implications of their equivalence // Phys. Rev. Lett. 1985. V. 55. P. 2103—2106.

40. Venkatesan A., Lakshmanan M., Prasad A., Ramaswamy R. Intermittency transitions to strange nonchaotic attractors in a quasiperiodically driven Duffing oscillator // Phys. Rev. E. 2000. V. 61. P. 3641—3651.

41. Kuznetsov S. P., Neumann E. Torus fractalization and singularities in the current-voltage characteristics for the quasiperiodically forced Josephson junction // Europhys. Lett. 2003. V. 61, № 1. P. 20—26.

42. Kapitaniak T., Ponce E., Wojewoda J. Route to chaos via strange non-chaotic attractors // J. Phys. A: Math. Gen. 1990. V. 23. P. 383—387.

43. Pokorny P., Schreiber I., Marek M. On the route to strangeness without chaos in the quasiperiodically forced van der Pol oscillator // Chaos, Solitons and Fractals. 1996. V. 7. № 3. P. 409—424.

44. Yu Y. H., Kim D. C., Ryu J. Y., Hong S. R. Experimental Study on the Blowout Bifurcation Route to Strange Nonchaotic Attractor // J. Korean Phys. Soc. 1999. V. 34, № 2. P. 130—134.

45. Bezruchko B.P., Kuznetsov S.P., Seleznev Y.P. Experimental observation of dynamics near the torus-doubling terminal critical point // Phys. Rev. E. 2000. V. 62. P. 7287—7830.

46. Yang T., Bilimgut K. Experimental results of strange nonchaotic phenomenon in a second-order quasi-periodically forced electronic circuit // Phys. Lett. A. 1997. V. 236. P. 494—504.

47. Zhu Z., Liu Z. Strange nonchaotic attractors of Chua's circuit with quasiperiodic excitation // IJBC. 1997. V. 7. P. 227—238.

48. Zeyer K.-P., Münster A. F., Schneider F. W. Quasiperiodic Forcing of a Chemical Reaction: Experiments and Calculations // J. Phys. Chem. 1995. V. 99. P. 13173—13180.

49. Ding W. X., Deutsch H., Dinklage A., Wilke C. Observation of a strange nonchaotic attractor in a neon glow discharge // Phys. Rev. E. 1997. V. 55. P. 3769—3772.

50. Ramaswamy R. Synchronization of strange nonchaotic attractors // Phys. Rev. E. 1997. V. 56. P. 7294—7296.

51. Zhou C., Chen T. Robust communication via synchronization between nonchaotic strange attractors // Europhys. Lett. 1997. V. 38. P. 261—265.