



## АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНАЯ СИСТЕМА С КОМПЕНСИРУЕМОЙ ДИССИПАЦИЕЙ: ДИНАМИКА ПРИБЛИЖЕННОГО ТОЧЕЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

*А.П. Кузнецов, С.П. Кузнецов, А.В. Савин, Д.В. Савин*

Рассмотрена автоколебательная система с компенсируемой диссипацией, представляющая собой осциллятор ван дер Поля под импульсным воздействием, амплитуда которого зависит от значения обобщённой координаты осциллятора. Для такой системы с помощью метода медленно меняющихся амплитуд получено дискретное отображение для значений обобщённых скорости и координаты непосредственно перед очередным импульсом. Проведён анализ устройства пространства параметров полученного отображения, в частности, продемонстрировано наличие в нём гамильтоновой критической точки как феномена коразмерности 2. Особо следует отметить, что рассматриваемая система является системой общего вида, то есть системой, в которой диссипация зависит не только от её параметров, но и от значений переменных. Демонстрируется возможность возникновения инициированных импульсным воздействием квазипериодических режимов и системы языков синхронизации в окрестности неустойчивого предельного цикла.

### Введение

Хорошо известно, что в нелинейных динамических системах распространён сценарий перехода к хаосу через удвоения периода [1, 2]. Для диссипативных систем с квадратичной нелинейностью он получил название каскада Фейгенбаума и характеризуется универсальной константой скейлинга  $\delta_F = 4.6692\dots$ , ответственной за сходимость точек бифуркаций удвоения к критической точке [1, 3]. В консервативных системах наблюдается каскад удвоений периода с другой универсальной константой скейлинга  $\delta_H = 8.7210972$  [4, 5]. Такой тип критического поведения получил название гамильтонова, а точка, к которой сходится последовательность бифуркаций удвоений периода – гамильтоновой критической точки, или H-точки [5, 6]. Простейшим примером системы такого рода является консервативное отображение Эно

$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2 + y_n, \quad y_{n+1} = -x_n, \quad (1)$$

в котором последовательность бифуркаций удвоения периода устойчивых (эллиптических) периодических орбит имеет место при увеличении параметра  $\lambda$ , а критическая точка располагается при  $\lambda = 4.13616680390428\dots$  [5].

Известно, что для систем с постоянной диссипацией (отображения с постоянным якобианом) гамильтонова и фейгенбаумова критичности сосуществуют. При этом гамильтоновой критичности отвечает концевая точка линии Фейгенбаума на плоскости параметров. С другой стороны к этой точке подходит линия нулевой диссипации в системе. Вблизи такой точки устройство пространства параметров характеризуется свойством масштабного подобия (скейлинга): при надлежащем выборе локальной системы координат конфигурация областей воспроизводит себя при пересчете масштабов на факторы  $\delta_1 = \delta_H$  и  $\delta_2 = 2$  по двум осям координат [7]. Примером такого поведения служит диссипативное отображение Эно

$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2 + y_n, \quad y_{n+1} = -bx_n, \quad (2)$$

превращающееся в (1) при  $b = 1$ . Его якобиан равен параметру  $b$ , который, таким образом, непосредственно управляет величиной диссипации.

Однако реализовать гамильтоново критическое поведение в конкретной физической системе с постоянной диссипацией практически невозможно, так как полностью исключить потери энергии нельзя, а введение любой, сколь угодно малой диссипации неизбежно приводит к появлению критичности Фейгенбаума, начиная с определенного уровня удвоений [8, 9]. Оказывается, и это является предметом настоящего сообщения, возможно наблюдение гамильтонова критического поведения в динамической системе общего вида (с якобианом, зависящим от переменных системы), допускающей физическую реализацию. Соответствующее модельное отображение будет получено для автоколебательной системы с периодическим импульсным возбуждением в ситуации, когда амплитуда воздействия определенным образом зависит от состояния возбуждаемой системы. В этом случае гамильтонова критическая точка обнаруживается на плоскости двух управляющих параметров или, используя терминологию теории бифуркаций, выступает как феномен коразмерности два.

## 1. Построение модели

Рассмотрим осциллятор ван дер Поля под периодическим импульсным воздействием, амплитуда которого зависит от величины динамической переменной системы  $x$  посредством функции  $F(x) = 1 - \lambda x^2$ :

$$\ddot{x} - (\epsilon - \mu x^2)\dot{x} + x = \sum_m F(x)\delta(t - mT). \quad (3)$$

Здесь  $x$  – динамическая переменная,  $T$  – период следования внешних импульсов. Система (3) характеризуется «внутренними» параметрами  $\epsilon$  и  $\mu$  и «внешним» параметром  $\lambda$ . Параметр  $\epsilon$  отвечает за величину линейной диссипации (отрицательного трения при  $\epsilon > 0$ ), параметр  $\mu$  характеризует нелинейную диссипацию в автономной системе. Соответственно, при положительных значениях этих параметров автономная система демонстрирует устойчивый предельный цикл, размер которого можно оценить как  $r \approx \sqrt{\epsilon/\mu}$ . Функция  $F(x) = 1 - \lambda x^2$  управляет степенью зависимости амплитуды подаваемых импульсов от состояния осциллятора. Конкретный выбор функции  $F(x)$  обусловлен необходимостью наличия параметра ( $\lambda$ ), который управлял бы удвоениями в системе (см. ниже).

Для упрощения анализа системы построим для нее дискретное отображение. Для этого примем момент очередного импульса за начало отсчета времени и предположим, что перед этим импульсом координата  $x$  и скорость  $\dot{x}$  имели значения  $x_n$  и  $y_n$ , соответственно. После импульса получим, очевидно,

$$x_{+0} = x_n, \quad y_{+0} = y_n + F(x_n). \quad (4)$$

Для описания динамики в промежутках времени между толчками используем известный метод медленно меняющихся амплитуд (см., например, [10]). Полагаем  $x = ae^{it} + a^*e^{-it}$  и  $\dot{x} = y = ia e^{it} - ia^*e^{-it}$ . Как следует из (4),

$$a_{+0} = a - \frac{1}{2}iF(x). \quad (5)$$

Подстановка выражений для  $x$  и  $\dot{x}$  в уравнение ван дер Поля с последующим умножением на  $e^{-it}$  и усреднением по времени приводит к уравнению для медленно меняющейся амплитуды

$$\dot{a} = \frac{1}{2}\epsilon - \frac{1}{2}\mu |a|^2 a, \quad (6)$$

решение которого с начальным условием (5) имеет вид

$$a(t) = \frac{1}{2}(x - iy) \exp(-it) = \frac{a_{+0} \exp(\epsilon t/2)}{\sqrt{1 + (\mu/\epsilon)(\exp(\epsilon t) - 1) |a_{+0}|^2}}. \quad (7)$$

Подставляя сюда  $t = T$ , находим координату и скорость непосредственно перед следующим импульсом

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= B \frac{x_n \cos T + (y_n + F(x_n)) \sin T}{\sqrt{1 + C [x_n^2 + (y_n + F(x_n))^2]}}, \\ y_{n+1} &= B \frac{-x_n \sin T + (y_n + F(x_n)) \cos T}{\sqrt{1 + C [x_n^2 + (y_n + F(x_n))^2]}}, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $B = \exp(\epsilon T/2)$ ,  $C = \mu T (\exp(\epsilon T) - 1) / (4\epsilon T)$ .

Положим для простоты  $T = \pi/2(4k + 1)$ , где  $k$  – целое число, и используем конкретный вид функции  $F(x) = 1 - \lambda x^2$ . Тогда отображение (8) принимает вид

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= B \frac{1 - \lambda x_n^2 + y_n}{\sqrt{1 + C [x_n^2 + (1 - \lambda x_n^2 + y_n)^2]}}, \\ y_{n+1} &= -B \frac{x_n}{\sqrt{1 + C [x_n^2 + (1 - \lambda x_n^2 + y_n)^2]}}. \end{aligned} \quad (9)$$

В дальнейшем будем анализировать динамику системы при помощи данного отображения.

## 2. Различные режимы поведения системы

Если нелинейная диссипация отсутствует ( $\mu \rightarrow 0$ ,  $C = 0$ ), то исследуемая дифференциальная система представляет собой линейный осциллятор под импульсным воздействием, а отображение (9) переходит в диссипативное отображение Эно

$$x_{n+1} = B(1 - \lambda x_n^2 + y_n), \quad y_{n+1} = -Bx_n, \quad (10)$$

которое легко можно представить в форме (2). Если при этом и линейная диссипация отсутствует ( $\epsilon \rightarrow 0, B = 1$ ), то (10) переходит в консервативное отображение Эно (1). Отметим, что именно возможность такого предельного перехода и определила выбор функции  $F(x) = 1 - \lambda x^2$ .

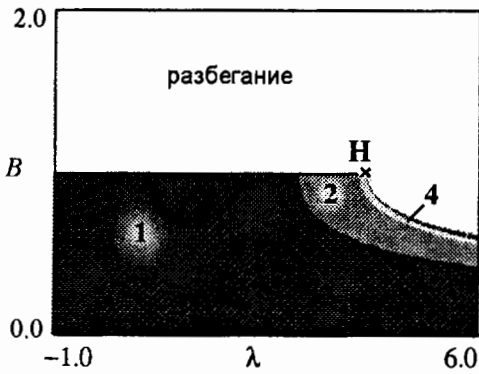


Рис. 1. Карта динамических режимов отображения (9) при  $C = 0$

Таким образом, внешнее воздействие инициирует удвоения периода, даже если автономная система линейна; при этом параметр нелинейности воздействия  $\lambda$  управляет ими. Карта динамических режимов отображения (10) приведена на рис. 1. Линия отсутствия диссипации на плоскости параметров  $(B, \lambda)$  дается линией  $B = 1$ , пересечение которой с линией Фейгенбаума отвечает критической точке Н-типа (см. рис. 1). Линия  $B = 1$  разграничивает области «разбегания» траекторий (отрицательное трение,  $B > 1$ ) и периодических режимов (режим диссипативного осциллятора,  $B < 1$ ).

Если в дифференциальной системе линейная диссипация положительна, а нелинейная – отрицательна ( $\epsilon < 0, \mu < 0$ ), в ней реализуется неустойчивый предельный цикл. В отображении (9) этому случаю соответствует  $C < 0, 0 < B < 1$ .

Если в дифференциальной системе линейная диссипация отрицательна, а нелинейная – положительна ( $\epsilon > 0, \mu > 0$ ), наблюдается режим автоколебательной системы с устойчивым предельным циклом. В отображении (9) этому случаю соответствует  $B > 1, C > 0$ .

Два последних случая подробно рассмотрены в разделах 3 и 4, соответственно.

### 3. Режим системы с неустойчивым предельным циклом

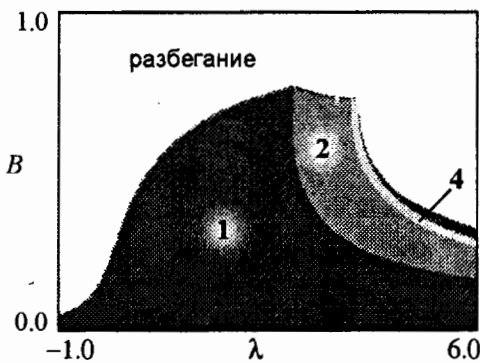


Рис. 2. Карта динамических режимов отображения (9) в режиме системы с неустойчивым предельным циклом,  $C = -0.9$

Как было указано выше, реализации такого режима в отображении (9) соответствуют значения параметров  $C < 0, 0 < B < 1$ . Карта динамических режимов для этого случая на плоскости  $(B, \lambda)$  при  $C = -0.9$  приведена на рис. 2. Как видим, в этом случае область разбегания траекторий существенно расширяется по сравнению со случаем линейного осциллятора. Также нужно отметить, что размер бассейнов притяжения устойчивых режимов достаточно мал. На рис. 3 приведен увеличенный фрагмент карты динамических режимов для  $C = -0.9$ , а также характерные фазовые портреты, иллюстрирующие существование в системе инвариантной кривой и циклов различных перио-

дов.

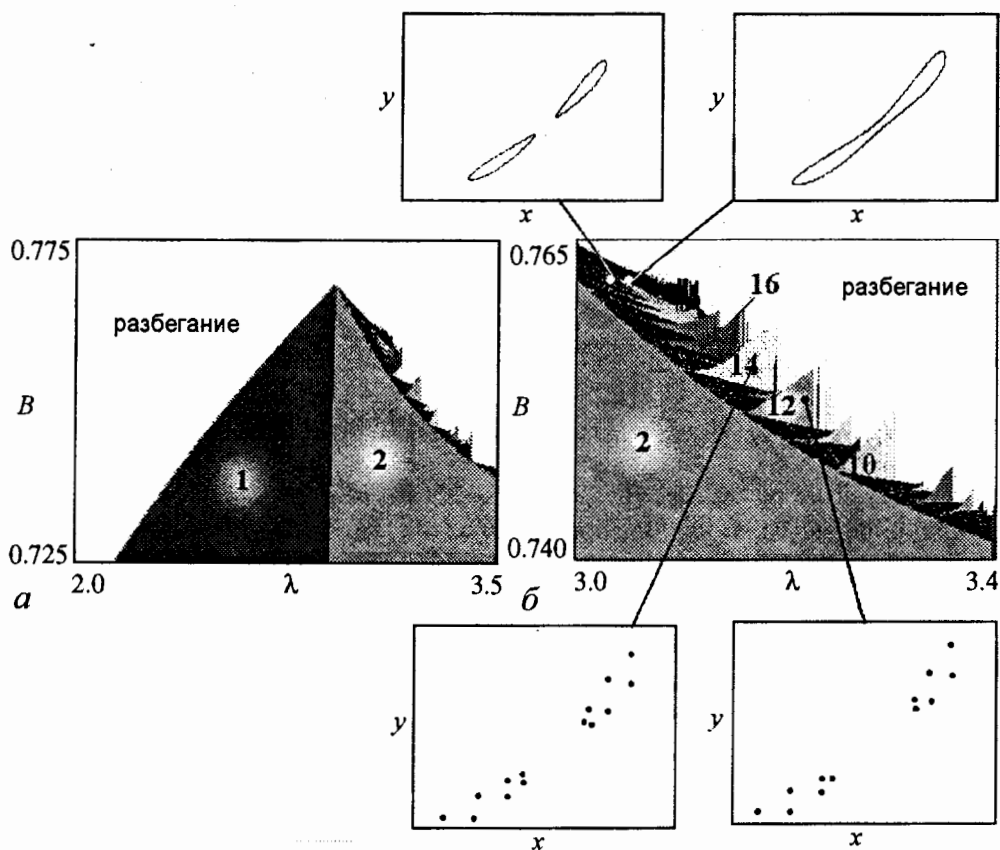


Рис. 3. Увеличенные фрагменты карты динамических режимов отображения (9) при  $C = -0.9$  (а, б) и фазовые портреты в различных точках плоскости параметров на рис. б. На всех изображениях фазовых портретов  $0 < x < 0.6$ ;  $-0.45 < y < 0$

дов. Видно, что на границе области разбегания траекторий существует узкая область устойчивых квазипериодических движений со встроенной системой языков синхронизации, образовавшаяся на базе цикла периода 2. Это говорит о возможности существования инициированных внешними импульсами устойчивых синхронных и квазипериодических режимов в окрестности неустойчивого предельного цикла.

Стоит отметить, что задача о стабилизации неустойчивых режимов малым воздействием рассматривалась ранее в контексте управления хаосом (см., например, [11]). В данной системе происходит рождение новых устойчивых режимов в окрестности неустойчивого предельного цикла. Такой феномен наблюдался в возбуждаемой постоянными по амплитуде импульсами системе [12–14]. В работах [12–14] использовалась система, аналогичная (3), в левую часть которой, однако, введена дополнительная кубическая нелинейность по типу осциллятора Дуффинга. Для нее в рамках метода медленно меняющихся амплитуд получается, что скорость изменения фазы пропорциональна квадрату амплитуды. Как показано в [12–14], именно ускорение точек по фазе на орбитах большего радиуса в промежутках между импульсами ответственно за стабилизацию неустойчивости. В нашей системе такого механизма стабилизации нет: она возникает за счет того, что величина импульса за-

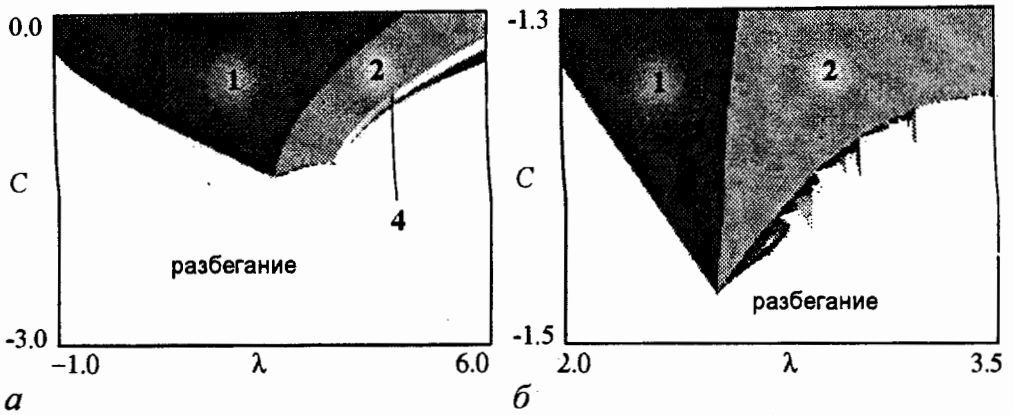


Рис. 4. Карта динамических режимов отображения (9) при  $B = 0.5$  (а) и её увеличенный фрагмент (б)

висит от координаты осциллятора. Таким образом, наряду с фазовым механизмом стабилизации неустойчивых предельных циклов [12–14] можно говорить об амплитудном механизме, реализующемся в рассматриваемой системе (3).

Карта динамических режимов на плоскости  $(C, \lambda)$  для  $B = 0.5$  приведена на рис. 4. Видно, что при больших отрицательных значениях  $C$  области существования устойчивых периодических режимов исчезают. На увеличенном фрагменте также видно существование области квазипериодических режимов и языков синхронизации.

#### 4. Режим автоколебательной системы

Если линейная диссипация в дифференциальной системе отрицательна, а нелинейная – положительна ( $\epsilon > 0, \mu > 0$ ), то, как было уже указано выше, в автономной системе наблюдается режим автоколебательной системы с неустойчивым положением равновесия и устойчивым предельным циклом. В отображении (9) при этом  $B > 1, C > 0$ .

Для исследования динамики отображения в этом случае также построим карты динамических режимов на плоскости  $(B, \lambda)$  для различных значений параметра  $C$  (рис. 5), а также на плоскости  $(C, \lambda)$  для различных  $B$  (рис. 6).

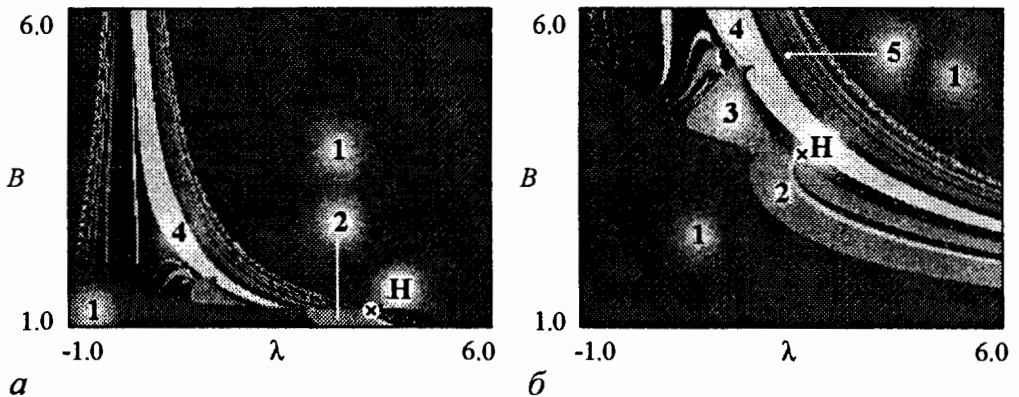


Рис. 5. Карты динамических режимов отображения (9) при  $C = 1.5$  (а); 20.0 (б)

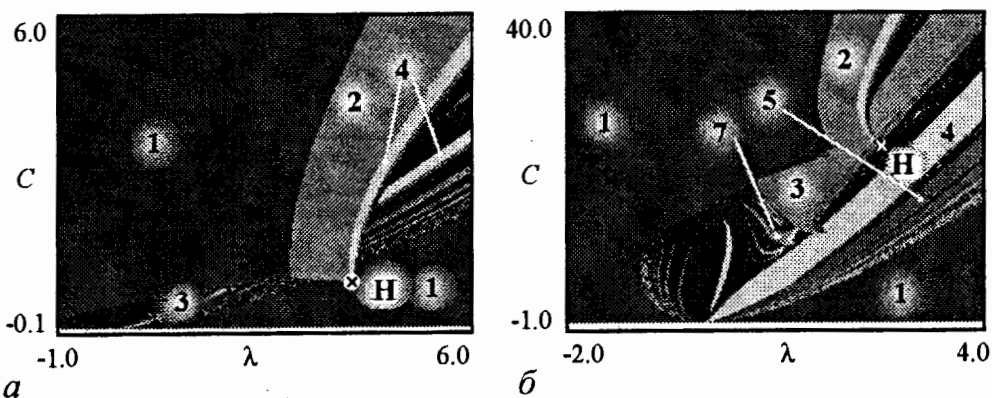


Рис. 6. Карты динамических режимов отображения (9) при  $B = 1.2$  (а);  $4.0$  (б)

Во-первых, следует отметить, что при введении сколь угодно малой нелинейной диссипации в дифференциальной системе в отображении исчезает область разбега траекторий, на месте которой возникают область квазипериодических движений с языками синхронизации и область режима периода 1. На картах также хорошо видна линия, ограничивающая области периода 1, 2, 4 и т.д., которая приходит на смену линии отсутствия диссипации в отображениях с постоянным якобианом. В анализируемом случае она является линией бифуркации Неймарка–Сакера циклов удвоенного периода. На ее пересечении с линией накопления фейгенбаумовых удвоений периода и располагается гамильтонова критическая точка, отмеченная символом Н.

Вблизи линии  $\lambda = 0$  на плоскости  $(B, \lambda)$  (см. рис. 5) наблюдается узкая и очень длинная область существования квазипериодических режимов. Это объясняется тем, что при  $\lambda = 0$  исследуемая система представляет собой осциллятор ван дер Поля под импульсным воздействием постоянной амплитуды, для которого как раз и наблюдаются различные квазипериодические режимы. Характерные фазовые портреты в данной области, иллюстрирующие существование квазипериодических режимов, языков синхронизации и хаоса, приведены на рис. 7.

Следует также отметить существование в системе мультистабильности. С режимом периода 1 (назовем его цикл А), лежащим вблизи начала координат, на ос-

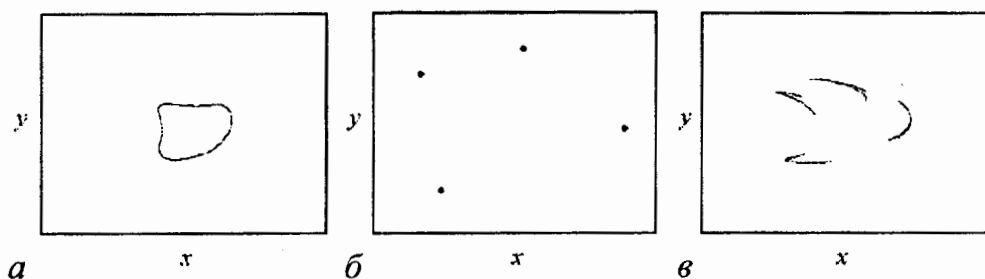


Рис. 7. Фазовые портреты отображения (9) в различных режимах при  $C = 0.1$ : а -  $B = 1.113$ ,  $\lambda = 0.466$ , квазипериодика; б -  $B = 1.504$ ,  $\lambda = 0.269$ , язык синхронизации; в -  $B = 1.121$ ,  $\lambda = 0.663$ , хаотический режим. На всех рисунках  $-5 < x < 5$ ;  $-5 < y < 5$

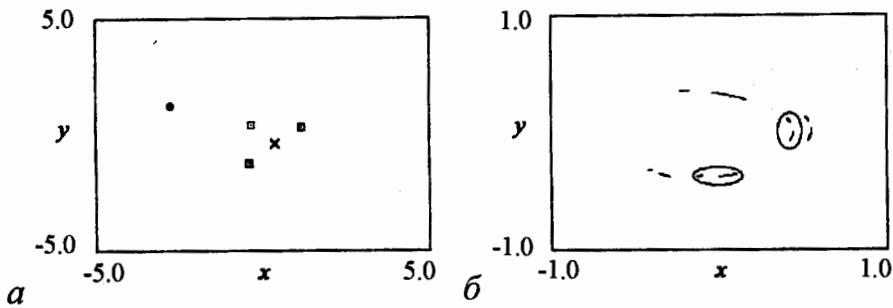


Рис. 8. Сосуществующие аттракторы отображения (9): *a* -  $C = 0.1, B = 1.025, \lambda = 1.166$ , крестиком обозначен цикл А, точкой - цикл Б; *б* -  $C = 2.7, B = 1.0, \lambda = 5.781$ , аттрактор на базе цикла А обведен овалом

нове которого реализуются удвоения периода и происходит бифуркация Неймарка-Сакера, сосуществует цикл периода 3, который в некоторых местах хорошо виден на картах динамических режимов, а также еще один цикл периода 1, который обозначим как цикл Б (рис. 8, *a*). Также наблюдается сосуществование хаотических режимов, в частности, режимов, образовавшихся на базе цикла А и на базе цикла периода 3 (рис. 8, *б*).

## 5. Поиск критической точки Н

Для поиска критической точки Н-типа, располагающейся на пересечении линии отсутствия диссипации (в нашем случае, как было указано выше, это линия бифуркации Неймарка-Сакера) с линией Фейгенбаума, были использованы методы нахождения последовательности терминальных точек удвоения периода и последовательности точек с равными мультипликаторами.

*Метод равных мультипликаторов* [15] основан на следующем асимптотическом свойстве мультипликаторов неустойчивых циклов в критической точке: с увеличением периода цикла они стремятся к фиксированным значениям, представляющим собой универсальные константы, специфические для каждого типа критического поведения. Последовательность точек в пространстве параметров, в которых мультипликаторы некоторого цикла и цикла удвоенного периода совпадают, с увеличением периода циклов должна быстро сходиться к критической точке, а мультипликаторы этих циклов - к соответствующим универсальным значениям. Константы скейлинга в этом случае можно оценить как собственные числа матрицы  $\Gamma$ , определяемой соотношением

$$\Gamma = \Gamma_n^{-1} \Gamma_{2n}, \quad \Gamma_n = \begin{pmatrix} \frac{\partial S_n}{\partial \lambda} & \frac{\partial S_n}{\partial C} \\ \frac{\partial J_n}{\partial \lambda} & \frac{\partial J_n}{\partial C} \end{pmatrix}, \quad (11)$$

где  $S_n$  и  $J_n$  - соответственно след и определитель матрицы монодромии цикла периода  $n$  в данной точке.

Координаты найденных точек и значения мультипликаторов циклов при значении параметра  $B = 4.0$  приведены в табл. 1, а оцененные в соответствии с (11)



значения констант скейлинга в пространстве параметров – в табл. 2. (Здесь  $n$  – период базового цикла.)

Таблица 1

$n$	$2n$	$\lambda$	$C$	$\mu_1$	$\mu_2$
16	32	2.641979414	22.21231986	-2.057641674	-0.486079481
32	64	2.641972827	22.21235779	-2.057456301	-0.486025619
64	128	2.6419732641	22.21235527	-2.057481305	-0.486032664
128	256	2.641973235	22.212355441	-2.057477956	-0.486031738

Видно, что точки демонстрируют хорошую сходимость к  $\lambda_c = 2.641973\dots$ ,  $C_c = 22.212355\dots$ . Поскольку мультипликаторы и константы скейлинга в пространстве параметров явно стремятся к характерным для Н-типа универсальным значениям  $\delta_1 = 8.7210972\dots$ ,  $\delta_2 = 2.00\dots$ ,  $\mu_1 = -2.0574783\dots$ ,  $\mu_2 = -0.4860318\dots$ , можно сделать вывод, что эта точка действительно является критической точкой Н-типа.

Суть метода нахождения последовательности терминальных точек удвоения периода состоит в том, что для каждого периода из каскада удвоений ищется точка с парой мультипликаторов  $(-1; -1)$ . Равенство одного из мультипликаторов  $(-1)$  соответствует нахождению в точке удвоения периода, а другого – определяется условием, что на линии отсутствия диссипации якобиан цикла должен быть равен 1. Таким образом, мы получаем последовательность точек удвоения периода, лежащих на линии отсутствия диссипации. Если в системе реализуется гамильтоново критическое поведение, то эта последовательность должна, во-первых, сходиться к определенному пределу и, во-вторых, подчиняться определенным скейлинговым закономерностям. Подбор двух параметров производился с помощью двумерного метода Ньютона, третий параметр оставался фиксированным. Последовательности терминальных точек были найдены при фиксированном значении параметра  $B = 4.0$  и при фиксированном значении параметра  $C = 4.0$ . Найденные последовательности приведены соответственно в табл. 3 и 4;  $n$  обозначает период цикла.

Таблица 2

$n$	$2n$	$\delta_1$	$\delta_2$
16	32	8.721435908	2.000128521
32	64	8.721042264	1.998814272
64	128	8.721096857	1.999608640
128	256	8.721095561	2.002160475

Таблица 3

$n$	$\lambda$	$C$
16	2.6418483186	22.212306782
32	2.6419592348	22.212348001
64	2.6419716101	22.212354702
128	2.6419730518	22.212355339
256	2.6419732156	22.212355421
	2.641973...	22.212355...

Таблица 4

$n$	$\lambda$	$B$
16	3.752589280	1.768497964
32	3.752754648	1.768491542
64	3.752773535	1.768490657
128	3.752775706	1.768490565
	3.75277...	1.768490...

Как видим, последовательности также демонстрируют сходимость к определенным точкам в пространстве параметров.

Можно также оценить константы скейлинга по полученным последовательностям. Они рассчитываются как собственные числа матрицы  $\Gamma$ , для которой выполня-

ется следующее соотношение:

$$\begin{pmatrix} \Delta\lambda_{2n} \\ \Delta C_{2n} \end{pmatrix} = \Gamma \begin{pmatrix} \Delta\lambda_n \\ \Delta C_n \end{pmatrix}. \quad (12)$$

В этом случае нами было получено значение старшей константы  $\delta_1 = 8.72109$ , что также соответствует известному значению для гамильтоновой критической ситуации.

Таким образом, полученные результаты позволяют говорить о существовании в исследуемой системе гамильтоновой критической точки как феномена коразмерности два.

### Заключение

В работе рассмотрена динамика автоколебательной системы с нелинейным импульсным возбуждением. Проведено исследование динамики модельного отображения, построенного для данной системы с использованием квазигармонического приближения. Продемонстрировано существование в этом отображении критической ситуации гамильтонова типа как феномена коразмерности два. Данный результат позволяет сделать вывод о том, что гамильтоново критическое поведение может быть реализовано не только в консервативных системах с постоянным якобианом, но и в системах общего вида (с диссипацией, определяемой не только значениями управляющих параметров системы, но и значениями ее динамических переменных). Ему отвечает точка коразмерности два на плоскости параметров, в окрестности которой можно наблюдать не только удвоения периода, но и квазипериодические режимы со встроенной системой языков синхронизации, причем последние могут реализовываться и на базе неустойчивого предельного цикла. В силу присущей критическим явлениям универсальности можно ожидать, что качественный характер устройства пространства параметров и количественные закономерности вблизи критической ситуации будут проявляться независимо от конкретных деталей устройства системы. Например, воздействие на осциллятор, по-видимому, можно осуществлять прямоугольными импульсами конечной длительности или непрерывным периодическим сигналом какой-либо иной формы.

*Работа проводилась при поддержке фонда некоммерческих программ «Династия», гранта CRDF REC-006 Y4-P-06-06 и программы Президиума РАН «Поддержка молодых ученых».*

*Частично работа выполнена во время научной командировки А.В. Савина в университет Потсдама (Германия) в группу профессора А.С. Пиковского «Статистическая физика и теория хаоса».*

### Библиографический список

1. Кузнецов С.П. Динамический хаос. М.: Физматлит, 2006.
2. Шустер Г. Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988.
3. Feigenbaum M.J. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations // Journal of Statistical Physics. 1978. Vol. 19, № 1. P. 25.
4. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984.

5. *MacKay R.S.* In «Long Time Predictions in Dynamics», J. Wiley and Sons, New York, 1983.
6. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R.* A variety of period-doubling universality classes in multiparameter analysis of transition to chaos // *Physica D*. 1997. Vol. 109. P. 91.
7. *Chen C., Gyorgyi G. and Schmidt G.* Universal scaling in dissipative systems // *Physical Review A*. 1987. Vol. 35, № 6. P. 2660.
8. *Reick C.* Universal corrections to parameter scaling in period-doubling systems: Multiple scaling and crossover // *Physical Review A*. 1992. Vol. 45, № 2. P. 777.
9. *Reinout G., Quispel W.* Analytical crossover results for the Feigenbaum constants: Crossover from conservative to dissipative systems // *Physical Review A*. 1985. Vol. 31, № 6. P. 3924.
10. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М.* Нелинейные колебания. М.: Физматлит, 2002.
11. *Lima R., Pettini M.* Suppression of chaos by resonant parametric perturbations // *Phys. Rev. A*. 1990. Vol. 41, № 2. P. 726.
12. *Кузнецов А.П., Тюрюкина Л.В.* Синхронизация в системе с неустойчивым циклом, инициированная внешним сигналом // *Письма в ЖТФ*. 2003. Vol. 29. Вып. 8. С. 52.
13. *Кузнецов А.П., Тюрюкина Л.В.* Инициированные короткими импульсами устойчивые квазипериодические и периодические режимы в системе с неустойчивым предельным циклом // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2006. Vol. 14, № 1. С. 72.
14. *Кузнецов А.П., Роман Ю.П., Станкевич Н.В., Тюрюкина Л.В.* Синхронизация импульсами и синхронизация в связанных системах: новые аспекты классической задачи // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2008. № 3. С. 88.
15. *Kim S.Y.* Bicritical behavior of period doublings in unidirectionally coupled maps // *Physical Review E*. 1999. Vol. 59, № 6. P. 6585.

*Саратовский государственный  
университет им. Н.Г. Чернышевского  
Саратовский филиал ИРЭ РАН*

*Поступила в редакцию 28.02.2008  
После доработки 15.10.2008*

## **AUTOOSCILLATING SYSTEM WITH COMPENSATED DISSIPATION: DYNAMICS OF APPROXIMATED DISCRETE MAP**

*A.P. Kuznetsov, S.P. Kuznetsov, A.V. Savin, D.V. Savin*

The pulse-driven van der Pol oscillator with the external pulse amplitude depending on the system variables is considered. The discrete map for values of the system variables just before the pulse moment was obtained by the slow-varying-amplitude method. Further the parameter space of this map was analyzed, and the existence of the Hamiltonian critical behavior in this system was shown. The remarkable fact is that our system is the system with the dissipation depending not only on the parameter values, but on the variable values too. Also the existence of the quasi-periodicity and the synchronization near the unstable cycle was shown.

*Кузнецов Александр Петрович* – родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, профессор Саратовского государственного университета, заведующий базовой кафедрой динамических систем СГУ в СФ ИРЭ РАН. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений. Занимается использованием идей теории катастроф и теории бифуркаций, а также развитием концепции сценариев перехода к хаосу применительно к многопараметрическим модельным и физическим нелинейным системам. Соросовский профессор (2000, 2001), научный руководитель студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика» и школьной научной лаборатории. Опубликовал более 100 научных работ. Автор нескольких оригинальных учебных курсов для факультета нелинейных процессов и лица прикладных наук СГУ, 10 учебных пособий и монографии «Нелинейные колебания» (совместно с С.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным. М.: Физматлит, 2002). E-mail: [alkuz@sgu.ru](mailto:alkuz@sgu.ru); [www.sgtnd.narod.ru](http://www.sgtnd.narod.ru)



*Кузнецов Сергей Петрович* – родился в Москве (1951). Окончил Саратовский государственный университет (1973). С 1988 – сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, в настоящее время – заведующий лабораторией теоретической нелинейной динамики. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГУ (1977) и доктора наук (1987) по специальности радиофизика. Профессор кафедры динамических систем. Автор учебно-научной монографии «Динамический хаос» и «Нелинейные колебания» (в соавторстве с А.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным). Опубликовал свыше 150 научных статей по нелинейной динамике, радиофизике и электронике. Под руководством С.П. Кузнецова защищены семь кандидатских диссертаций. Лауреат государственной научной стипендии для ученых России (1994-1996), Соросовский доцент (1998), Соросовский профессор (2000, 2001). Член редакционной коллегии журнала «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика». E-mail: [spkuz@rambler.ru](mailto:spkuz@rambler.ru)



*Савин Алексей Владимирович* – родился в Саратове в 1980 году. Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (2002) и аспирантуру факультета нелинейных процессов СГУ. Кандидат физико-математических наук (2005). Доцент факультета нелинейных процессов СГУ, научный сотрудник Саратовского филиала ИРЭ РАН. Имеет более 20 научных публикаций в центральных и международных журналах. Область научных интересов: особенности перехода к хаосу и критического поведения, в том числе в связанных слабодиссипативных нелинейных системах.



*Савин Дмитрий Владимирович* – родился в Саратове в 1987 году. В 2003 году закончил Физико-технический лицей № 1 с золотой медалью, а в 2008 – факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета с отличием. В настоящее время работает ассистентом кафедры нелинейной физики ФНП СГУ и является аспирантом базовой кафедры динамических систем ФНП СГУ. Имеет более 15 публикаций, в том числе 5 статей в научных журналах. Область научных интересов: сложная динамика и критическое поведение систем, близких к консервативным.

