

**ВЕСТНИК
САРАТОВСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
ТЕХНИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА**

2015

№ 1 (78)

Научно-технический журнал

Издается с 2003 г.

Выходит один раз в квартал

Февраль 2015 года

*Журнал включен в перечень ведущих
рецензируемых журналов и научных изданий,
утвержденный президиумом ВАК
Министерства образования и науки РФ,
в которых публикуются основные научные
результаты диссертаций на соискание
ученых степеней доктора и кандидата наук*

**Главный редактор
Заместитель главного редактора
Ответственный секретарь**

д.и.н., профессор И.Р. Плеве
д.т.н., профессор А.А. Сытник
д.ф.-м.н., профессор В.В. Астахов

Редакционная коллегия: д.т.н., проф. И.И. Артюхов, д.ф.-м.н., проф. В.В. Астахов, д.ф.-м.н., проф. В.Б. Байбурун, д.ф.-м.н., проф. Д.А. Зимняков, д.т.н., проф. В.А. Крысько, д.т.н., проф. В.Н. Лясников, д.т.н., проф. И.В. Родионов, д.т.н., проф. А.А. Сытник, д.т.н., проф. Ю.Б. Томашевский, д.т.н., проф. В.А. Хрусталева

Редактор Л.А. Скворцова
Компьютерная верстка Н.В. Лукашовой
Перевод на английский язык А.Х. Аскаровой
Ответственный за размещение полнотекстовой версии журнала
на сайте eLIBRARY.ru М.И. Балакин

Адрес редакции:
Саратов, 410054, ул. Политехническая, 77
Телефон: (845 2) 99-87-39
E-mail: vestnik@sstu.ru
<http://dni.sstu.ru/vestnik.nsf>
Факс: (845 2) 52-53-02

Подписано в печать 16.02.14
Формат 60×84 1/8 Бум. офсет.
Усл. печ. л. 27,0 Уч.-изд. л. 15,5
Тираж 500 экз. Заказ 65
Отпечатано в Издательстве СГТУ,
410054, г. Саратов, ул. Политехническая, 77

Полная электронная версия журнала размещена в системе РИНЦ
в открытом доступе на платформе eLIBRARY.RU

Подписной индекс 18378
(каталог «Газеты. Журналы» на 2-е полугодие 2015 г.)

ФИЗИКА, РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

УДК 517.9

Ю.П. Емельянова, А.П. Кузнецов, Ю.В. Седова

КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКАЯ БИФУРКАЦИЯ ХОПФА: ПРИМЕРЫ И СВОЙСТВА

Обсуждается квазипериодическая бифуркация Хопфа, отвечающая за мягкое возникновение аттрактора в виде инвариантного тора из периодической орбиты. Представлены примеры в виде связанных осцилляторов и нескольких разновидностей дискретных отображений. Даны иллюстрации в виде карт показателей Ляпунова, которые сопоставляются друг с другом.

Бифуркации, ляпуновские показатели, инвариантные торы

Yu.P. Emelyanova, A.P. Kuznetsov, Yu.V. Sedova

QUASI-PERIODIC HOPF BIFURCATION: EXAMPLES AND FEATURES

The paper discusses the Quasi-periodic Hopf bifurcation which is responsible for the soft onset of the attracting invariant torus from the periodic orbit. The examples of coupled oscillators and several coupled discrete maps are considered. The charts with the Lyapunov exponents are presented and compared.

Bifurcations, Lyapunov exponents, invariant torus

Введение

Теория бифуркаций является важным элементом теории динамических систем и находит применение в разных областях физики, биологии, химии и других науках. На настоящий момент вполне разработаны как общая теория, так и численные методы поиска бифуркаций состояния равновесия и периодических режимов (предельных циклов). Гораздо менее проработанной является теория и методы анализа бифуркаций квазипериодических режимов, отвечающих аттракторам в виде инвариантных торов. Установлены три основные бифуркации инвариантных торов [1-4]. Это седло-узловая бифуркация, в ходе которой сливаются и исчезают устойчивый и седловой торы, и рождается аттрактор в виде тора более высокой размерности. Еще одна достаточно хорошо известная бифуркация – это бифуркация удвоения тора. Наконец, известна третья бифуркация, которую в [1-4] называют квазипериодической бифуркацией Хопфа¹. Она состоит в том, что инвариантный тор теряет устойчивость мягким образом, в результате чего возникает более высокоразмерный тор. Эта бифуркация является важной, но исследована очень мало как в теоретическом плане, так и с точки зрения физической картины сопутствующих колебательных режимов. В определенном плане она является обобщением бифуркации Неймарка-Сакера рождения инвариантного тора из предельного цикла на случай инвариантных торов, причем разной размерности. Однако эта бифуркация представляет собой все же существенно более сложный феномен. Причина этого достаточно понятна физически – добавление новой частоты усложняет динамику.

В ситуации, когда нет простых и надежных стандартных численных программ для поиска такой бифуркации, возникает необходимость представить набор примеров и основных свойств и иллюстраций, которые позволят идентифицировать тип бифуркации. В этом плане в настоящей работе обсуждается соответствующий ляпуновский анализ и даны некоторые другие иллюстрации. Наконец, для физики важна картина сопутствующих колебательных эффектов, сопровождающих данную би-

¹Известны и другие варианты названия, например, бифуркация Хопфа-Неймарка-Сакера.

фуркацию. Отметим, что сама возможность таких бифуркаций для торов все более высокой размерности, фактически была высказана Ландау в рамках идеи сценария возникновения гидродинамической турбулентности [5].

Примеры квазипериодической бифуркации Хопфа могут появляться в физически мотивированных системах, отчасти в искусственных моделях, которые допускают некоторое физическое обоснование, а также в формально сконструированных моделях. Мы обсудим и представим здесь все эти случаи.

Три связанных осциллятора Ван дер Поля

Первый пример относится к традиционной теории колебаний. Рассмотрим три связанных в цепочку обобщенных осциллятора Ван дер Поля:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\lambda_1 + cx - x^2)\dot{x} + x + \mu(\dot{x} - \dot{y}) &= 0, \\ \ddot{y} - (\lambda_2 + cy - y^2)\dot{y} + (1 + \Delta_1)y + \mu(\dot{y} - \dot{x}) + \mu(\dot{y} - \dot{z}) &= 0, \\ \ddot{z} - (\lambda_3 + cz - z^2)\dot{z} + (1 + \Delta_2)z + \mu(\dot{z} - \dot{y}) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь x, y, z – динамические переменные осцилляторов, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – параметры отрицательного трения в подсистемах, Δ_1, Δ_2 – частотные расстройки первого-второго и первого-третьего осцилляторов, собственная частота первого осциллятора принята за единицу, c – дополнительный параметр квадратичной нелинейности, μ – величина диссипативной связи.

Физической предпосылкой для возможности бифуркаций, связанных с квазипериодической динамикой, в данном случае является неидентичность подсистем по управляющему параметру λ . Это условие обеспечивает при уменьшении величины диссипативной связи μ выход за порог возбуждения разных осцилляторов поэтапным образом.

Для того, чтобы проиллюстрировать это утверждение, обратимся к ляпуновской карте системы (1), показанной на рис. 1. На этой карте на плоскости параметров частотная расстройка Δ_1 – величина связи μ обозначены различные режимы, которые определялись численно по спектру показателей Ляпунова (см. [6]). На рис. 1а при большом значении параметра диссипативной связи можно видеть обширную область гибели колебаний OD, которой отвечает устойчивое состояние равновесия. Также имеет место область периодического режима P, которая образует характерный язык, а в области больших частотных расстроек Δ_1 лежит в полосе $\lambda_1 < \mu < \lambda_3$. В этом случае второй и третий осцилляторы подавлены диссипативной связью, а первый доминирует над ними. При большой отстройке по частоте наблюдается также полоса двухчастотного режима при $\lambda_2/2 < \mu < \lambda_1$. В этом случае подавлен связью только второй осциллятор, а первый и второй возбуждены. Отметим, что управляющий параметр второго осциллятора в этом неравенстве уменьшается в два раза, что обусловлено геометрией цепочки – этот осциллятор имеет два соседа, в то время как первый и третий – по одному.

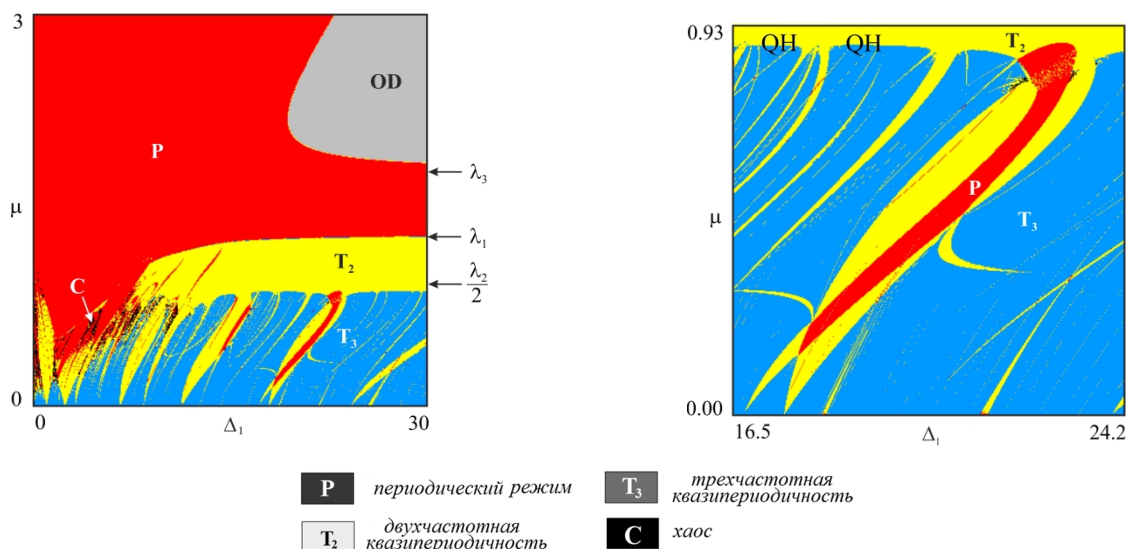


Рис. 1. Карта ляпуновских показателей системы (1) и ее увеличенный фрагмент; $\lambda_1 = 1.3, \lambda_2 = 1.9, \lambda_3 = 1.8, \Delta_2 = 1.5, c = 1$. Внизу – использованная цветовая палитра

Границы областей отвечают разным типам бифуркаций. Мы сосредоточимся на области больших частотных расстройек, где наблюдается характерный каскад бифуркаций. Они идентифицируются с помощью графиков ляпуновских показателей в зависимости от параметра связи, показанных на рис. 2. При уменьшении связи наблюдается следующий каскад бифуркаций:

- бифуркация Андронова – Хопфа рождения предельного цикла АН,
- бифуркация Неймарка – акера рождения двухчастотного тора NS,
- квазипериодическая бифуркация Хопфа QH.

Эти бифуркации могут быть идентифицированы по графикам ляпуновских показателей на рис. 2 следующим образом. При большой связи до бифуркации Андронова-Хопфа АН все показатели отрицательные, и в системе наблюдается устойчивое равновесие. В точке бифуркации от него отделяется устойчивый предельный цикл. В этом случае один показатель L_1 становится равным нулю. В точке бифуркации Неймарка-Сакера NS из предельного цикла рождается двухчастотный тор. При этом дополнительно еще один показатель L_2 становится равным нулю. Наконец, в точке квазипериодической бифуркации Хопфа QH обращается в ноль еще один показатель L_3 . При этом характерный признак квазипериодической бифуркации Хопфа (в отличие от седлоузловой бифуркации торов) состоит в том, что два ляпуновских показателя совпадают до ее порога (в нашем случае L_3 и L_4). После бифуркации один из них остается отрицательным, а второй обращается в ноль [1-4].

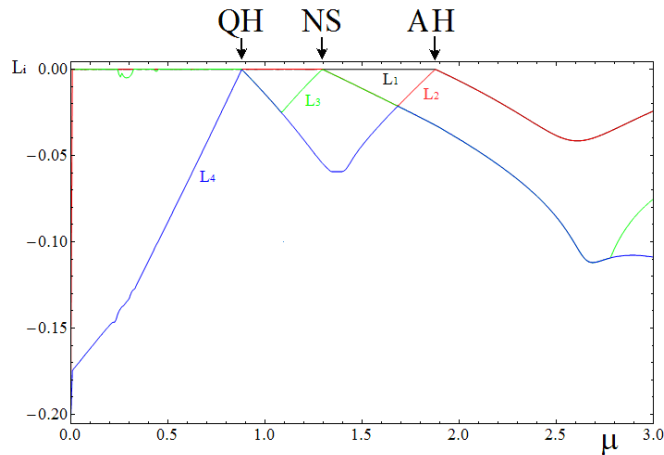


Рис. 2. Графики зависимости ляпуновских показателей от параметра связи, иллюстрирующие различные бифуркации в системе (1), $\Delta_2 = 27$

Квазипериодическая бифуркация проявляется и при построении бифуркационного дерева, представляющего собой зависимость переменной на аттракторе в сечении Пуанкаре от величины связи осцилляторов (рис. 3). На этом рисунке хорошо видна бифуркация Андронова – Хопфа АН, когда ветвь дерева, отвечающая предельному циклу в исходной системе и точке в сечении Пуанкаре, становится «размазанной». При квазипериодической бифуркации Хопфа QH можно видеть резкое расширение дерева и характерный излом его границы.

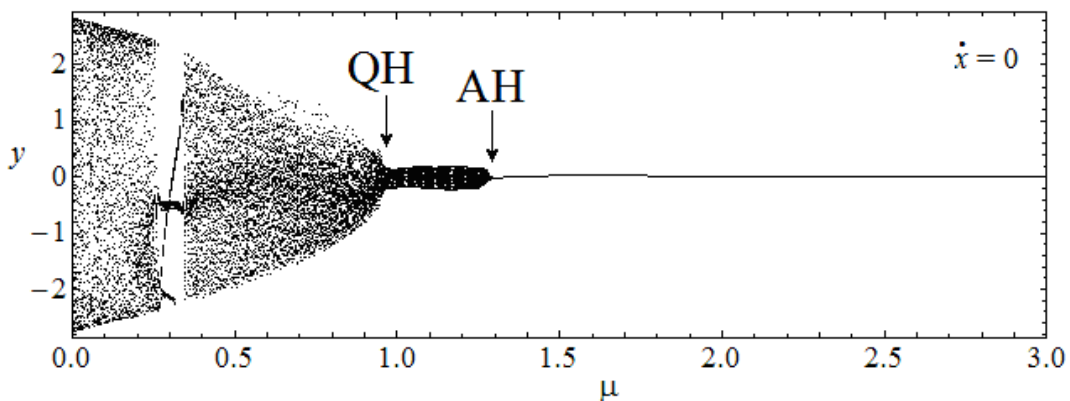


Рис. 3. Бифуркационное дерево системы (1), иллюстрирующее бифуркацию Андронова-Хопфа и квазипериодическую бифуркацию Хопфа; $\Delta_2 = 27$. Выбранное сечение Пуанкаре указано в правом верхнем углу

Вернемся к рис. 1а. К линии квазипериодической бифуркации Хопфа примыкают в своей верхней части различные языки двухчастотных режимов. В свою очередь, они погружены в область трехчастотной квазипериодичности и имеют острия на оси абсцисс. На увеличенном рис. 1б можно видеть, что вдоль линии QH характерными являются группы «веерообразных» языков двухчастотных режимов.

В свою очередь, внутри наиболее крупных языков может возникать синхронизация и появление периодических режимов. Это хорошо видно на рис. 1б, который иллюстрирует возникновение периодического режима в результате пересечения двух двухчастотных языков.

Тор-отображение

Представим теперь примеры дискретных отображений с квазипериодической бифуркацией Хопфа¹. При этом будем «отталкиваться» от систем, имеющих определенную физическую мотивацию. Используем достаточно распространенный в нелинейной динамике прием, состоящий в замене производных по времени конечными разностями. В качестве исходной необходимо выбрать какую-либо автономную систему с квазипериодической динамикой. Переход к конечным разностям (дискретизация) обеспечит некоторый дополнительный характерный временной масштаб, что и приведет к появлению уже трехчастотных торов.

Автономные системы с квазипериодичностью известны [6-8], хотя их число и не очень велико. Используем уравнения [8], описывающие генератор квазипериодических колебаний

$$\begin{aligned}\ddot{x} - (\lambda + z + x^2 - \beta x^4)\dot{x} + \omega_0^2 x &= 0, \\ \dot{z} &= b(\varepsilon - z) - kx^2\end{aligned}\quad (2)$$

или в стандартной форме

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= (\lambda + z + x^2 - \beta x^4)y - \omega_0^2 x, \\ \dot{z} &= b(\varepsilon - z) - ky^2.\end{aligned}\quad (3)$$

Здесь x, y, z – динамические переменные, $\lambda, \varepsilon, \beta, k, \omega_0$ – параметры, см. [6, 8].

Дискретизированная модель, когда производные заменены конечными разностями, – *тор-отображение* – имеет вид

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + hy_{n+1}, \\ y_{n+1} &= y_n + h[(\lambda + z_n + x_n^2 - \beta x_n^4)y_n - \omega_0^2 x_n], \\ z_{n+1} &= z_n + h[b(\varepsilon - z_n) - ky_n^2].\end{aligned}\quad (4)$$

Здесь h – шаг дискретного времени, новый дополнительный параметр. Для первого уравнения дискретизация выполнена по полуявной схеме Эйлера, т.е. стоит значение переменной y в $n+1$ -й момент.

Фиксируем набор параметров $b=1, \varepsilon=4, k=0.02, \omega_0=2\pi$, для которого в системе (3) возможна линия бифуркации Неймарка-Сакера и автономная двухчастотная квазипериодичность [8]. На рис. 4 приведены ляпуновская карта и ее выделенный фрагмент для данных значений параметров и шага дискретизации $h=0.1$. Хорошо видна линия квазипериодической бифуркации Хопфа QH, разделяющая трехчастотную и двухчастотную области. Отметим, что на этом рисунке по сравнению с рис. 1 дополнительно показаны области гиперхаоса HC с двумя положительными показателями Ляпунова и область D убегания траектории на бесконечность, которые не наблюдались в системе (1).

От линии квазипериодической бифуркации Хопфа отходят полосы двухчастотных режимов. В них, в свою очередь, встроены поперечные полосы периодических режимов – точных резонансов. На выделенном фрагменте карты видно, что эти резонансы также порождают системы веерообразных языков двухчастотных режимов, погруженных в трехчастотную область. При удалении от линии квазипериодической бифуркации Хопфа области точных резонансов расширяются, и возникает хаос.

На рис. 5 приведены примеры фазовых портретов тор-отображения. Внизу можно видеть превращение инвариантной кривой в трехчастотный тор при переходе линии квазипериодической бифуркации Хопфа. Остальные рисунки демонстрируют цикл периода 10 внутри резонансной области периодических режимов и его трансформации внутри соответствующей резонансной двухчастотной области. Весьма характерными являются примеры циклов очень высоких периодов внутри узких областей периодических режимов.

¹Это целесообразно, поскольку дискретные отображения гораздо проще для компьютерного исследования, чем дифференциальные уравнения – потоки.

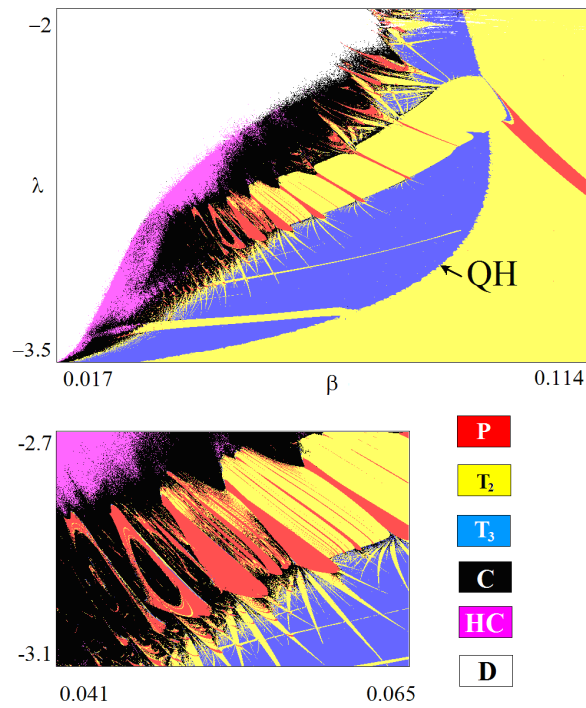


Рис. 4. Карта ляпуновских показателей тор-отображения (4). Цветовая палитра расшифрована справа от выделенного фрагмента

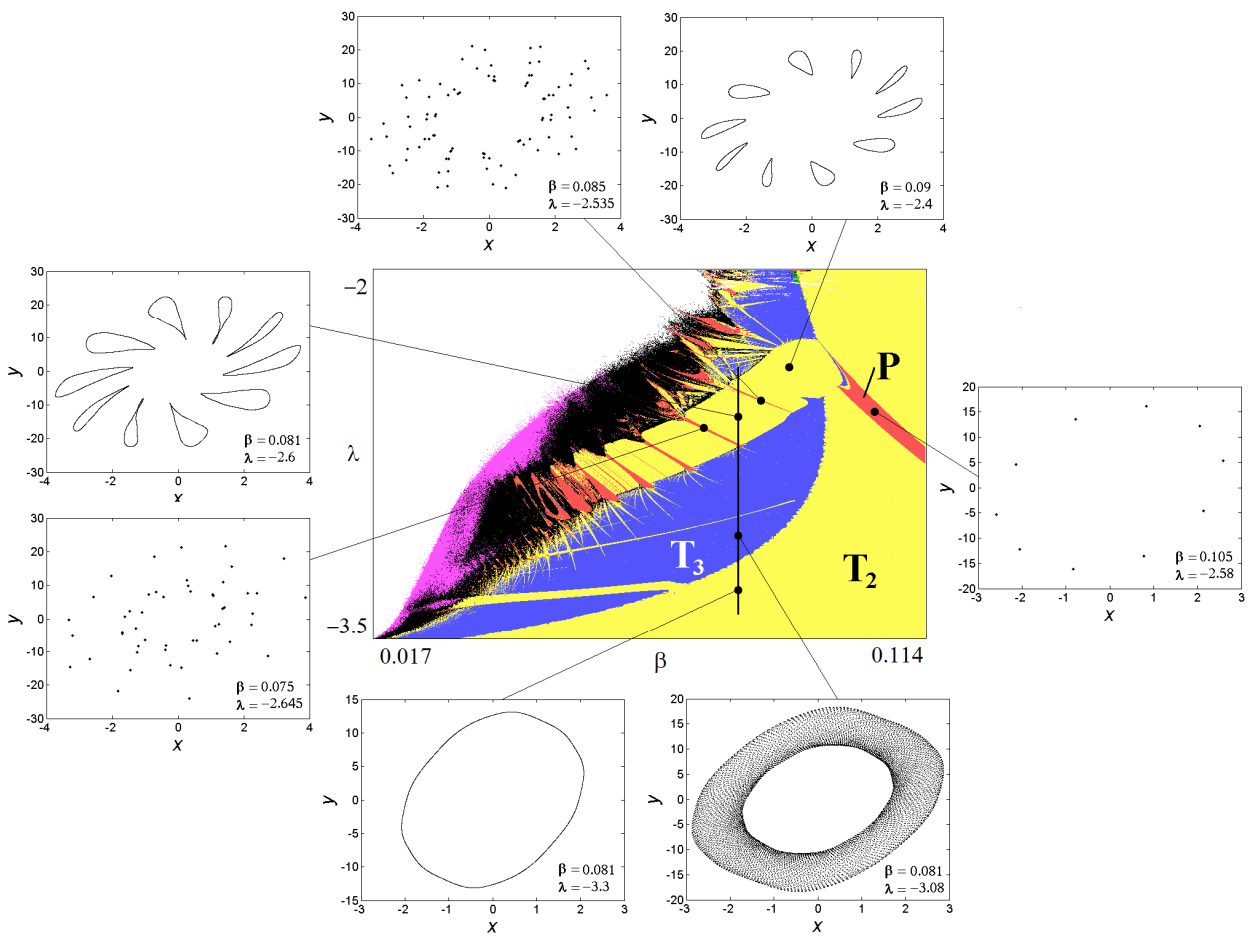


Рис. 5. Фазовые портреты тор-отображения (4), $h=0.1$

На рис. 6 приведены карты ляпуновских показателей, отвечающие возрастанию параметра дискретизации h . Они демонстрируют модификацию плоскости параметров и возможных фазовых

портретов. Три последних фазовых портрета иллюстрируют бифуркацию удвоения двухчастотного тора для $h=0.16$ внутри резонансной двухчастотной области. Наблюдаются две такие последовательные бифуркации.

Отображение Лоренц-84

Приведем другой пример, для чего используем климатическую модель Лоренц-84 [9, 10]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -ax - y^2 - z^2 + aF, \\ \dot{y} &= -y + xy - bxz + G, \\ \dot{z} &= -z + bxy + kz. \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь x, y, z – динамические переменные, a, b, F, G – параметры.

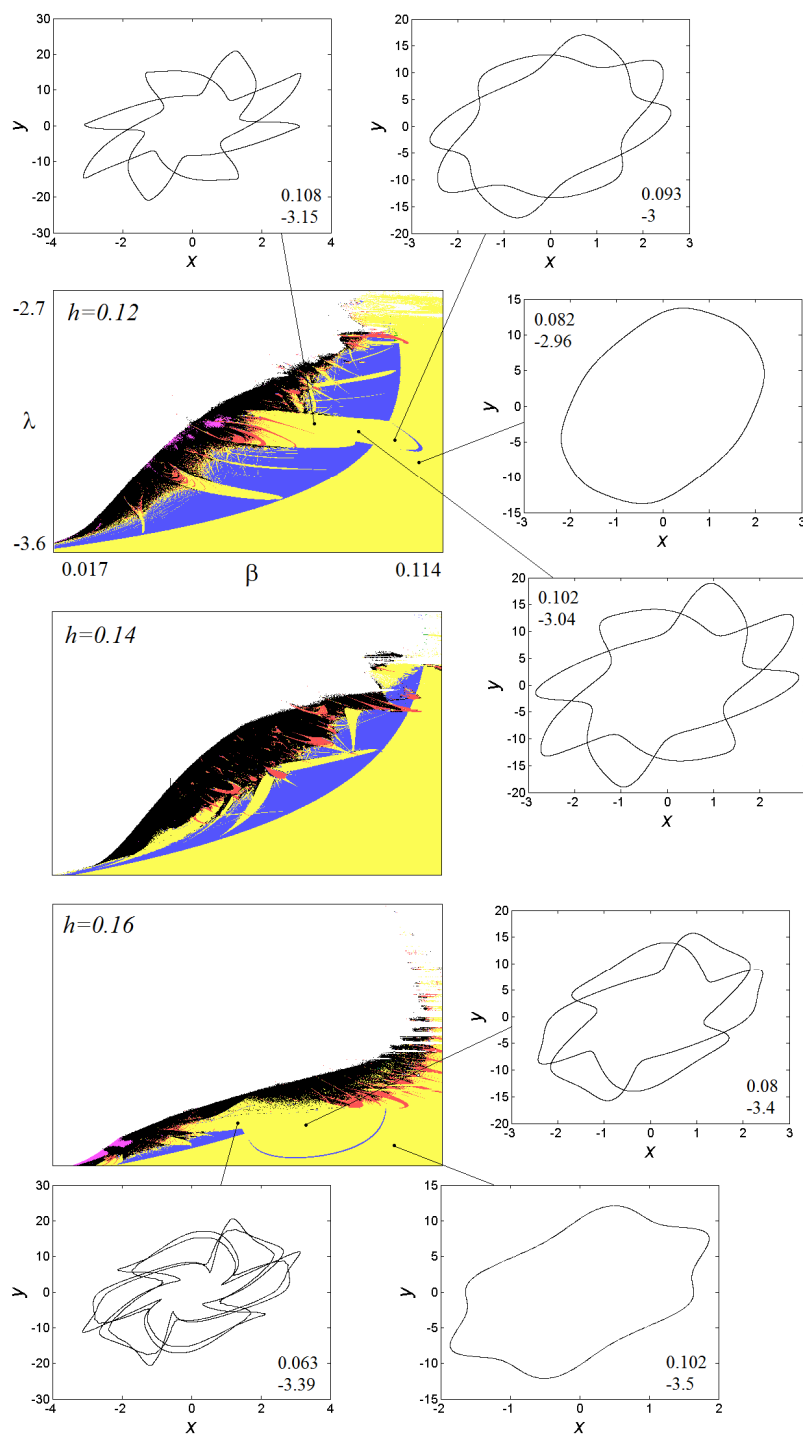


Рис. 6. Карты ляпуновских показателей и фазовые портреты тор-отображения (4), $h=0.12, 0.14, 0.16$

Система (5) имеет четыре управляющих параметра, из которых два обычно фиксируют, выбирая, например, значения $a=0.25$, $b=1$. Дискретизируем эту систему:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + h[-ax_n - y_n^2 - z_n^2 + aF], \\ y_{n+1} &= y_n + h[-y_n + x_n y_n - bx_n z_n + G], \\ z_{n+1} &= z_n + h[-z_n + bx_n y_n + x_n z_n]. \end{aligned} \tag{6}$$

Карта ляпуновских показателей на плоскости параметров (G, F) для $h=0.1$ на рис. 7 демонстрирует характерную для квазипериодической бифуркации Хопфа картину множества язычков двух-частотных режимов. Интересная особенность системы – наличие язычков с двумя вершинами, причем область их пересечения в центре рисунка отвечает возникновению хаоса.

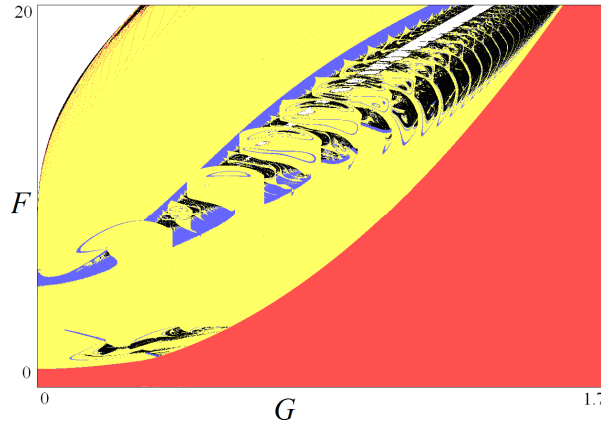


Рис. 7. Карта ляпуновских показателей отображения Лоренц-84 (6). Цветовая палитра соответствует рис. 4

Модель Broer – Simó – Vitolo

Это специально сконструированное отображение для описания нормальной формы квазипериодической бифуркации Хопфа [1-4]

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= e^{i\omega} w_n [1 - \gamma(\gamma\mu + az_n + \gamma z_n^2)] + \gamma^3 [\varepsilon_1 (w_n^*)^4 + \varepsilon_2 z_n^4], \\ z_{n+1} &= z_n + \gamma(1 - |w_n^2| - |z_n^2|). \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь w – комплексная переменная, а z – действительная, $a, \mu, \omega, \gamma, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ – параметры. Для этой модели карта на плоскости $(\mu, \delta/2\pi)$ представлена на рис. 8. Использовано представление $\omega = \omega_0 + \gamma\delta$. Рассмотрен случай $\omega_0 = 2\pi/5$, что отвечает слабому резонансу 1:5. Значения остальных параметров указаны в подписи к рисунку.

Можно видеть как определенные аналогии с представленными выше иллюстрациями, так и существенные отличия. Так, для представленных выше примеров картина режимов гораздо более сложная, чем для данной формальной модели. Причина, вероятно, состоит в том, что отображение (7) содержит явным образом параметр ω_0 и описывает только соответствующий резонанс 1:5.

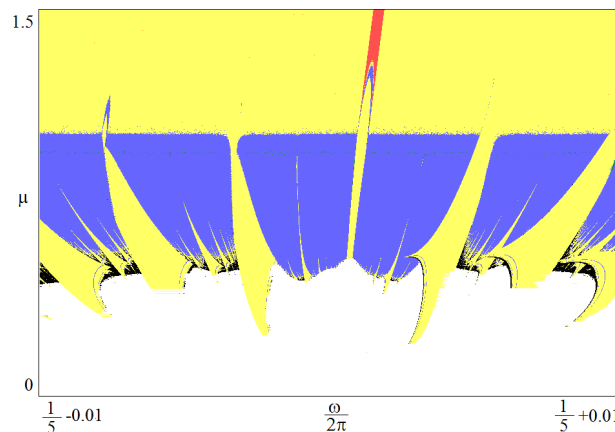


Рис. 8. Ляпуновская карта отображения (7); $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$, $a_1 = -1$, $a_2 = 1/\sqrt{2}$, $\gamma=0,1$. Цветовая палитра соответствует рис. 4

Заклучение

Квазипериодическая бифуркация Хопфа является важным и типичным феноменом систем с инвариантными торами и квазипериодической динамикой. Можно привести как физические примеры, так и специально сконструированные модели. В первую очередь, это ансамбли связанных осцилляторов. Полная картина для этой бифуркации, однако, сложна. Детали соответствующего бифуркационного сценария требуют дальнейших исследований.

Работа поддержана грантом Президента РФ поддержки ведущих научных школ НШ-1726.2014.2 и РФФИ проект 15-02-02893. Авторы благодарят также РФФИ проект 14-02-31064.

ЛИТЕРАТУРА

1. Broer H. The Hopf-saddle-node bifurcation for fixed points of 3D-diffeomorphisms: the Arnol'd resonance web / H. Broer, C. Simó, R. Vitolo // Reprint from the Belgian Mathematical Society. 2008. P. 769-787.
2. Broer H. Hopf saddle-node bifurcation for fixed points of 3D-diffeomorphisms: Analysis of a resonance «bubble» / H. Broer, C. Simó, R. Vitolo // Physica D. Vol. 237. 2008. № 13. P. 1773-1799.
3. Vitolo R. Routes to chaos in the Hopf-saddle-node bifurcation for fixed points of 3D-diffeomorphisms // R. Vitolo, H. Broer, C. Simó // Nonlinearity. Vol. 23. 2010. P. 1919-1947.
4. Broer H. Quasi-periodic bifurcations of invariant circles in low-dimensional dissipative dynamical systems / H. Broer, C. Simó, R. Vitolo // Regular and Chaotic Dynamics. Vol. 16. 2011. № 1-2. P. 154-184.
5. Ландау Л.Д. К проблеме турбулентности / Л.Д. Ландау // ДАН СССР. Т. 44. 1944. № 8. С. 339–342.
6. Kuznetsov A.P. A simple autonomous quasiperiodic self-oscillator / A.P. Kuznetsov, S.P. Kuznetsov, N.V. Stankevich // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. Vol. 15. 2010. P. 1676-1681.
7. Anishchenko V. Winding number locking on a two-dimensional torus: Synchronization of quasiperiodic motions / V. Anishchenko, S. Nikolaev, J. Kurths // Physical Review E. Vol. 73. 2006. №. 5. P. 056202.
8. Kuznetsov A.P. Generators of quasiperiodic oscillations with three-dimensional phase space / A.P. Kuznetsov, S.P. Kuznetsov, E. Mosekilde, N.V. Stankevich // The European Physical Journal Special Topics. Vol. 222. 2013. № 10. P. 2391-2398.
9. Lorenz E.N. Irregularity: a fundamental property of the atmosphere / E.N. Lorenz // Tellus. Vol. 36A. 1984. P. 98–110.
10. Shil'nikov A. Bifurcation and Predictability Analysis of a Low-Order Atmospheric Circulation Model / A. Shil'nikov, G. Nicolis. C. Nicolis // International Journal of Bifurcation and Chaos. Vol. 5. 1995. № 6. P. 1701-1711.

Емельянова Юлия Павловна –
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры «Приборостроение»
Саратовского государственного технического
университета имени Гагарина Ю.А.

Yulia P. Emelianova –
Ph.D., Associate Professor
Department of Instrument Engineering,
Yuri Gagarin State Technical University of Saratov

Кузнецов Александр Петрович –
доктор физико-математических наук, профессор,
ведущий научный сотрудник Саратовского филиала
Института радиотехники и электроники
имени В.А. Котельникова РАН

Alexander P. Kuznetsov –
Dr. Sc., Professor, Leading Researcher,
Kotel'nikov's Institute of Radio Engineering
and Electronics of the Russian Academy
of Sciences (Saratov Branch)

Седова Юлия Викторовна –
кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник Саратовского филиала
Института радиотехники и электроники
имени В.А. Котельникова РАН

Yulia V. Sedova –
Ph.D., Senior Researcher:
Kotel'nikov's Institute of Radio Engineering
and Electronics of the Russian Academy
of Sciences (Saratov Branch)

Статья поступила в редакцию 23.11.14, принята к опубликованию 10.02.15