



## АНАЛОГИЯ В ЗАДАЧАХ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ЭЛЕКТРОННЫХ И ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПОТОКОВ С ПОЛЯМИ РЕЗОНАТОРОВ И ПЕРИОДИЧЕСКИХ СТРУКТУР

### Часть 2. Самовозбуждение, усиление и подавление сигнала

*А. П. Кузнецов<sup>1,2</sup>, С. П. Кузнецов<sup>2,3</sup>*

<sup>1</sup>Саратовский национальный исследовательский государственный университет  
410012 Саратов, ул. Астраханская, 83

<sup>2</sup>Саратовский филиал ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН  
410019 Саратов, ул. Зеленая, д. 38

<sup>3</sup>Удмуртский государственный университет  
426034 Ижевск, ул. Университетская, 1

Предметом данного исследования является задача о возбуждении акустических колебаний и волн в процессе взаимодействия потока жидкости с резонаторными и периодическими структурами, применительно к которой продуктивным оказывается применение разработанных в электронике и электродинамике методов и теоретического аппарата для электромагнитных колебаний и волн. Для этого уравнения гидродинамики сжимаемой жидкости приводятся к форме, аналогичной уравнениям Максвелла, и с их помощью выводятся уравнения возбуждения резонаторов и волноводов, что было сделано в предыдущей части статьи. По аналогии с теорией устройств электроники сверхвысоких частот со скрещенными полями, на основе самосогласованной теории исследовано взаимодействие вихревых потоков с периодической структурой в случае сильной собственной неустойчивости. Построена линейная теория акустического усилителя, в котором взаимодействие слабое, а течение на входе в пространство взаимодействия не возмущено. Отмечается возможность полного подавления поверхностной волны в определенных режимах функционирования такой системы. Показано, что возможна эффективная связь потока со встречной волной в структуре, и найдены условия, обеспечивающие самовозбуждение на встречной волне. Аналогия между гидродинамическими задачами и процессами в электронных приборах со скрещенными полями интересна с точки зрения возбуждения акустических колебаний вихревыми потоками и выявления перспектив применения этих феноменов. Особого внимания заслуживает самовозбуждение колебаний, обусловленное взаимодействием течения со встречной волной, подобное эффекту, реализующемуся в лампах обратной волны.

*Ключевые слова:* Электронный поток, гидродинамический поток, периодические структуры, усиление, условия подавления, самовозбуждение сигнала.

DOI: 10.18500/0869-6632-2016-24-2-5-26.

*Ссылка на статью:* Кузнецов А.П., Кузнецов С.П. Аналогия в задачах о взаимодействии электронных и гидродинамических потоков с полями резонаторов и периодических структур. Часть 2. Самовозбуждение, усиление и подавление сигнала // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2016. Т. 24, № 2. С. 5–26.

## Введение

В первой части работы была развита аналогия в задачах о возбуждении электронными или гидродинамическими потоками полей в периодических структурах [1]. Также рассмотрена самосогласованная задача о взаимодействии плоской ленты вихрей со структурой типа «гребенка» и получено дисперсионное уравнение. В настоящей работе обсуждается возможность постановки задач, традиционных для микроволновой электроники [2–7], применительно к усилению, подавлению и самовозбуждению акустических колебаний. Отметим, что на возможность усиления звуковых колебаний за счет резонансного механизма указано в [8]. Как было отмечено в [1], особенность гидродинамических задач состоит в возможности сильной собственной неустойчивости, что определяет некоторую специфику метода синхронных волн, что также станет предметом обсуждения.

### 1. Взаимодействие потока с периодической структурой при наличии сильной собственной неустойчивости в потоке

Рассмотрим процессы, происходящие при взаимодействии потока с периодической структурой при наличии сильной собственной неустойчивости в потоке. Для определенности будем иметь в виду конкретное устройство – гидродинамическую

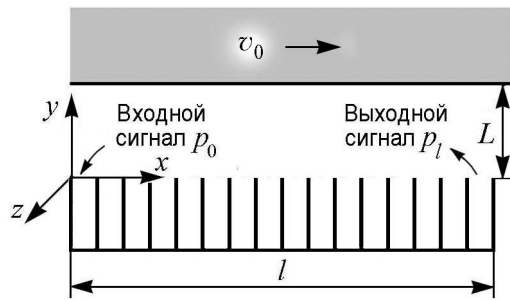


Рис. 1. Акустический усилитель с периодической структурой типа «гребенка»

систему, состоящую из потока жидкости или газа, движущегося над периодической структурой типа гребенки (рис. 1). Пусть слой жидкости толщиной  $L$  между потоком и поверхностью гребенки неподвижен. Направим оси системы координат как показано на рис. 1, причем плоскость  $y = 0$  совместим с поверхностью гребенки. Следуя [9, 10], нетрудно получить, что распределение давления в области  $0 \leq y \leq L$  дается соотношением

$$p_k(y) = \frac{C}{1+r} \left[ r e^{k(y-2L)} + e^{-ky} \right], \quad (1)$$

где

$$r = \frac{(\omega - kv_0)^2 - \omega^2}{(\omega - kv_0)^2 + \omega^2} \quad (2)$$

(по терминологии [9, 10]) – коэффициент отражения волны от потока,  $v_0$  – скорость потока,  $C$  – некоторая константа. Аналогичное выражение можно записать и для вертикальных смещений  $\tilde{y}$ :

$$\tilde{y}_k(y) = \frac{1}{\rho_0 \omega^2} \frac{dp_k(y)}{dy} = \frac{Ck}{\rho_0 \omega^2 (1+r)} \left[ r e^{k(y-2L)} - e^{-ky} \right]. \quad (3)$$

На поверхности гребенки должно выполняться следующее граничное условие:

$$\left[ \frac{dp}{dy} + k_0 p \right]_{y=0} = 0. \quad (4)$$

Здесь  $k_0 = (\omega/c) \operatorname{tg}[(\omega h)/c]$  – постоянная распространения свободной поверхностной волны. Наложив условие (4) на соотношение (1), получим дисперсионное уравнение

$$\frac{k - k_0}{k + k_0} = r e^{-2kL}. \quad (5)$$

Расписывая последнее соотношение подробнее, находим

$$\left( k - \frac{\omega}{c} \operatorname{tg} \frac{\omega h}{c} \right) [(\omega - kv_0)^2 + \omega^2] = e^{-2kL} \left( k + \frac{\omega}{c} \operatorname{tg} \frac{\omega h}{c} \right) [(\omega - kv_0)^2 - \omega^2]. \quad (6)$$

Это уравнение совпадает с формулой (125) из [1], если положить  $v_{10} = v_0$  и  $v_{20} = 0$ .

Считаем взаимодействие потока и поверхностной волны слабым, что выполняется, например, при условии достаточного удаления потока от гребенки ( $kL \gg 1$ ). Дисперсионное уравнение свободного потока

$$(\omega - kv_0)^2 + \omega^2 = 0 \quad (7)$$

не имеет действительных корней. Следовательно, дисперсионные характеристики потока и поверхностной волны не пересекаются ни при каких действительных  $\omega$  и  $k$ . Отсюда авторы [9, 10] делают вывод, что в анализируемой системе нет синхронного взаимодействия потока и поля и «моноскоростные гидродинамические течения не могут усиливать или ослаблять замедленные монохроматические волны». Таким образом, утверждается, что при наличии слабого взаимодействия двух волн и сильной собственной неустойчивости одной из них эффективное возбуждение второй волны невозможно. Поскольку это утверждение выходит, вообще говоря, за рамки анализа непосредственно уравнения (6), то разумно обратиться к исследованию какого-либо простого модельного уравнения, на примере которого можно было бы понять, происходит взаимодействие волн так, как это утверждается в [9, 10], или нет.

## 2. Особенности взаимодействия волн при наличии сильной собственной неустойчивости. Исследование модельного уравнения

Рассмотрим следующее дисперсионное уравнение:

$$(\omega - kv_1)(\omega - kv_2 + is) = -\varepsilon^2. \quad (8)$$

Это уравнение описывает связь бегущей волны  $\omega = kv_1$  с волной  $\omega = kv_2 - is$ , обладающей собственной неустойчивостью и распространяющейся в ту же сторону. Связь волн характеризуется параметром  $\varepsilon$ . Пусть собственная неустойчивость второй волны сильная:  $s \gg \varepsilon$ . При этом условии дисперсионные характеристики волн не имеют действительной (или близкой к действительной) точки пересечения.

Выполним в уравнении (8) замену переменных

$$\omega = \omega_0 + \tilde{\omega}, \quad k = k_0 + \tilde{k}, \quad (9)$$

где

$$\omega_0 = \frac{isv_1}{v_2 - v_1}, \quad k_0 = \frac{is}{v_2 - v_1}. \quad (10)$$

В переменных  $\tilde{\omega}$  и  $\tilde{k}$  уравнение (8) выглядит следующим образом:

$$\left(\tilde{\omega} - \tilde{k}v_1\right) \left(\tilde{\omega} - \tilde{k}v_2\right) = -\varepsilon^2, \quad (11)$$

причем для решения уравнения (8) можно записать выражение

$$f(x, t) = e^{\frac{s(x - v_1 t)}{v_2 - v_1}} F(x, t), \quad (12)$$

где  $F(x, t)$  – решение, отвечающее дисперсионному уравнению (11). Свойства решения  $F(x, t)$  хорошо изучены [11,12].

Пусть сначала  $v_2 > v_1$ . В этом случае  $F(x, t)$  дает волновой пакет, передний фронт которого движется со скоростью  $v_2$ , а задний – со скоростью  $v_1$  (рис. 2). В системе отсчета, сопровождающей пакет со скоростью  $V$ , такой что  $v_1 < V < v_2$ , амплитуда волнового поля нарастает во времени с инкрементом порядка  $\varepsilon$ .

Чтобы получить решение уравнения (8), функцию  $F(x, t)$  в соответствии с (12) нужно умножить на экспоненту  $\exp[s(x - v_1 t)/(v_2 - v_1)]$ . Ясно, что при этом вновь получится волновой пакет с четко выраженными фронтами, движущимися с теми же скоростями  $v_2$  и  $v_1$ . Указанная экспонента в сопровождающей системе отсчета даст нарастание во времени по закону

$$\exp \frac{s(V - v_1)t}{v_2 - v_1}.$$

Отсюда легко находим, что на заднем фронте импульса инкремент нулевой, на переднем он максимален и равен  $s$ , а по длине волнового пакета происходит нарастание поля с инкрементом меньшим  $s$ , но порядка  $s$  (рис. 3). На эту динамику волнового поля накладывается слабое нарастание с инкрементом порядка  $\varepsilon$ , но, поскольку  $\varepsilon \ll s$ , то оно практически не сказывается на эволюции пакета. Аналогичная картина имеет место и при  $v_1 > v_2$ , только теперь с максимальным инкрементом нарастает задний фронт импульса (рис. 4).

Характер эволюции волнового поля указывает на наличие эффективной связи волн. Наиболее ярко это видно, пожалуй, если первая волна является встречной

$$(\omega + kv_1)(\omega - kv_2 + is) = -\varepsilon^2. \quad (13)$$

В этом случае фронты бегут в разные стороны (рис. 5), а в фиксированной точке  $x = \text{const}$  происходит нарастание волнового поля по закону

$$f(x, t) \sim \exp \frac{sv_1 t}{v_2 + v_1}, \quad (14)$$

то есть реализуется абсолютная неустойчивость с инкрементом порядка  $s$ . Характерно, что абсолютная неустойчивость возникает, даже если связь волн пассивная, то есть

$$(\omega + kv_1)(\omega - kv_2 + is) = \varepsilon^2, \quad (15)$$

поскольку основной вклад в нарастание поля дает экспонента (14). Роль взаимодействия волн состоит в этом случае только в формировании петли распределенной обратной связи.

Таким образом, при  $s \gg \varepsilon$  волны эффективно связываются, хотя их дисперсионные характеристики и не пересекаются в действительной области. Они, однако, пересекаются в комплексной области. Так, величины  $\omega_0$  и  $k_0$ , введенные соотношениями (10), подчиняются уравнениям

$$\omega_0 - k_0v_1 = 0, \quad \omega_0 - k_0v_2 + is = 0 \quad (16)$$

и определяют эту комплексную точку пересечения. Нетрудно понять, что положение комплексной точки пересечения дисперсионных характеристик задает закон эволюции волнового поля и в общем случае. Действительно, пусть имеется дисперсионное уравнение

$$D_1(\omega, k) \cdot D_2(\omega, k) = -\varepsilon^2. \quad (17)$$

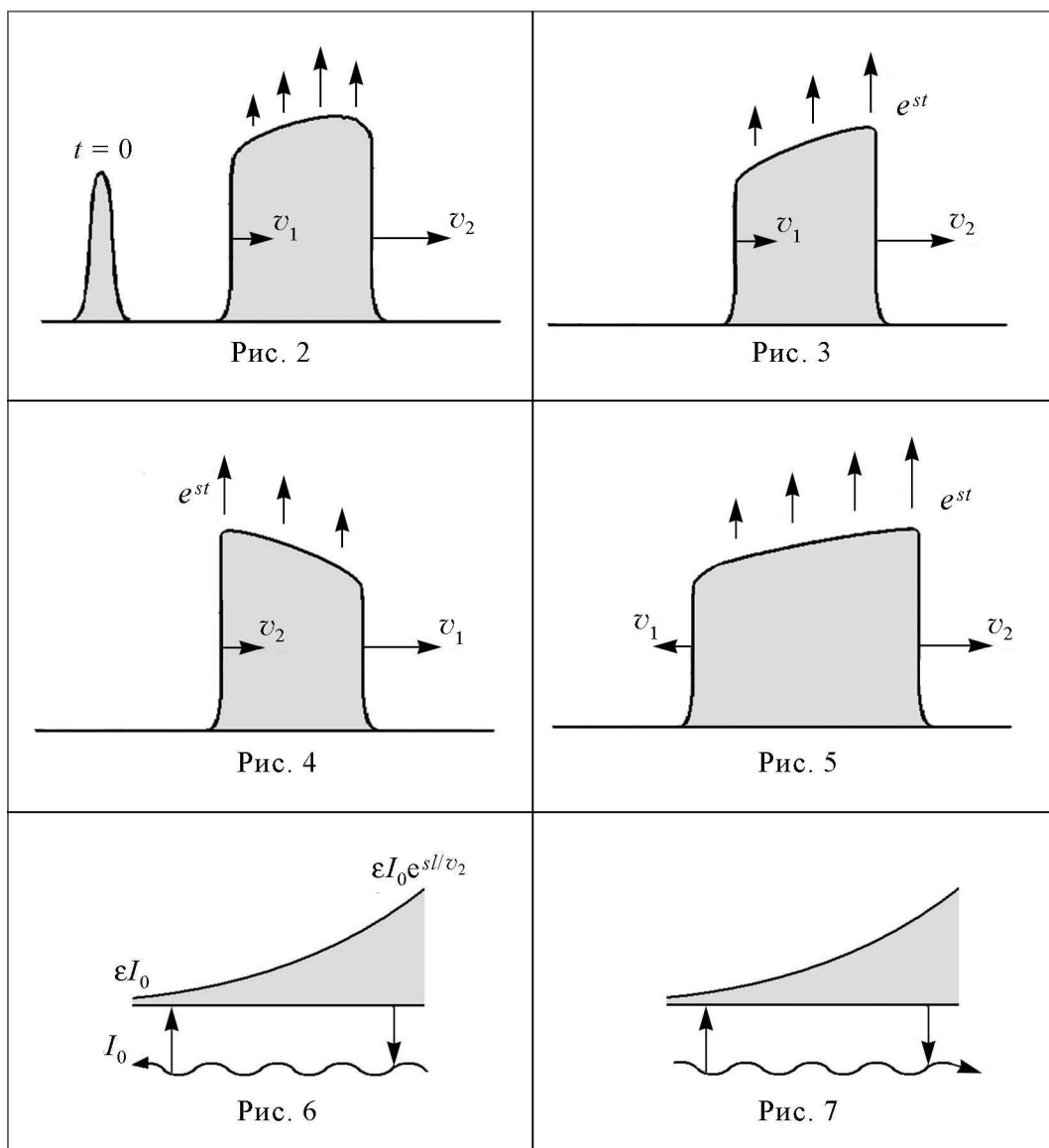
Эволюция волнового поля при  $t \rightarrow \infty$  определяется положением точек перевала уравнения (17) [12]. При слабой связи волн параметр  $\varepsilon$  мал, и точки перевала лежат в комплексной плоскости в  $\varepsilon$ -окрестностях точек  $k_0, \omega_0$ , таких что

$$D_1(\omega_0, k_0) = 0, \quad D_2(\omega_0, k_0) = 0. \quad (18)$$

Следовательно, динамика волнового поля идет на фоне множителя  $e^{(-\text{Im } \omega_0 t + \text{Im } k_0 x)}$ . Малые отклонения положения точек перевала от точек  $\omega_0, k_0$  дадут несущественные отличия от такого закона развития процесса во времени и пространстве.

Каков же механизм развития неустойчивости в этом случае? Перейдем в сопровождающую систему отсчета, движущуюся со скоростью  $v_1 < V < v_2$ . Пусть с некоторой амплитудой  $I_0$  возбуждена ветвь колебаний, отвечающая волне  $\omega = kv_1$ . В сопровождающей системе отсчета эта волна побежит назад и за счет слабого взаимодействия инициирует волну с неустойчивостью с амплитудой порядка  $\varepsilon I_0$  (рис. 6). Неустойчивость во второй волне будет развиваться в пространстве по закону  $\varepsilon I_0 e^{sx/v_2}$ , амплитуда этой волны достигнет большой величины, и снова возбудится первая волна с амплитудой порядка  $\varepsilon^2 I_0 e^{sx/v_2}$ . Цепь обратной связи замкнулась, и поля обеих взаимодействующих волн будут нарастать.

Из сказанного ясно, что в такой системе может происходить и эффективное усиление монохроматического сигнала. Механизм этого усиления иллюстрирует рис. 7. Нетрудно построить и соответствующую теорию по принципу теории возмущений (см. ниже, раздел 4).



### 3. Процессы в системе поток – гребенка бесконечной длины

Вернемся к анализу системы, изображенной на рис. 1, и, соответственно, к анализу дисперсионного уравнения (6). Найдем точку комплексного синхронизма

$$k_0 = \frac{\omega_0}{c} \operatorname{tg} \frac{\omega_0 h}{c}, \quad (\omega_0 - k_0 v_0)^2 + \omega_0^2 = 0. \quad (19)$$

Отсюда следует, что

$$\operatorname{tg} \frac{\omega_0 h}{c} = (1 \pm i) \frac{c}{v_0}, \quad k_0 = \frac{\omega_0}{v_0} (1 \pm i). \quad (20)$$

Воспользуемся тем, что скорость звука в жидкости  $c$  много больше скорости течения. Тогда легко находим

$$\omega_0 \approx \frac{\pi c}{2h} - \frac{(1 \mp i)}{2h} v_0, \quad k_0 \approx \frac{\pi c}{2h} (1 \pm i). \quad (21)$$

В системе отсчета, движущейся со скоростью  $V$ , наблюдатель увидит эволюцию поля по закону

$$\exp [i (\omega_0 - k_0 v) t] \sim \exp \left[ \pm \frac{1}{2h} \left( v_0 - \frac{V \pi c}{v_0} \right) t \right]. \quad (22)$$

Нарастание поля в этой системе отсчета (то есть конвективную неустойчивость в исходной) дает верхний знак в (22), поскольку при  $V \sim v_0$  выполняется неравенство  $v_0 \ll V \pi c / v_0$ . Верхний знак нужно оставить и в соотношениях (20) и (21).

Найдем групповую скорость поверхностной волны в комплексной точке пересечения дисперсионных характеристик

$$v_{\text{гр}} = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_0} = \frac{v_0}{1 + i + \omega_0 h v_0 (1 + 2i c^2 / v_0^2) / c^2}. \quad (23)$$

Групповая скорость – комплексная величина, причем при  $v_0 \ll c$

$$|v_{\text{гр}}| \sim v_0^2 / (\pi c). \quad (24)$$

Таким образом, имеет место сильный групповой рассинхронизм потока и поля поверхностной волны:  $|v_{\text{гр}}| \ll v_0$ . Фактически, поток «пробегают» по системе, оставляя за собой нарастающее волновое поле. (В электронной лампе бегущей волны групповая скорость обычно порядка скорости пучка, и излученное электронами поле распространяется вместе с ними [13].) Заметим, что в рамках рассматриваемой модели мы не можем говорить о четко выраженных фронтах импульса. Действительно, фронт сформирован возмущениями очень короткой длины волны, для которых  $k \rightarrow \infty$ , и дисперсионное уравнение свободного потока (7) дает нарастание с бесконечным инкрементом. Это дефект модели, так как на самом деле в области  $k \rightarrow \infty$  вступают в действие вязкость и сжимаемость жидкости. Можно утверждать, однако, что основная часть волнового пакета движется со скоростью порядка  $v_0$  и, в соответствии с (22), имеет инкремент порядка

$$\text{Im } \omega \approx \frac{\pi c}{2h}. \quad (25)$$

Величина инкремента существенным образом определяется акустической структурой, что опровергает утверждение [9,10] об отсутствии эффективной связи потока со структурой.

#### 4. Акустический усилитель. Метод парциальных волн

Рассмотрим теперь усиление монохроматического сигнала частоты  $\omega$  в системе, изображенной на рис. 1. Пусть амплитуда давления на входе в канавку гребенки,

расположенной в точке  $x = 0$  равна  $p_0$ . Найдем амплитуду давления  $p_l$  в канавке, расположенной на расстоянии  $x = l$  от начала координат. Для фиксированной частоты внешнего сигнала  $\omega$  дисперсионное уравнение (6) имеет дискретный набор корней  $k_i = k_i(\omega)$ . Каждое решение типа (1) с определенным значением волнового числа  $k_i = k_i(\omega)$  будем, как это принято в электронике, называть парциальной волной. Построим суперпозицию всех возможных парциальных волн

$$p(x, y) = \sum_i \frac{C_i}{1 + r_i} \left[ r_i e^{k_i(y-2L)} + e^{-k_i y} \right] e^{-ik_i x}. \quad (26)$$

Используя (3), можно получить аналогичное выражение и для вертикальных смещений элементов жидкости

$$\tilde{y}(x, y) = \sum_i \frac{k_i C_i}{\omega^2 \rho_0 (1 + r_i)} \left[ r_i e^{k_i(y-2L)} - e^{-k_i y} \right] e^{-k_i x}. \quad (27)$$

Суммирование в (26), (27) производится по всем корням дисперсионного уравнения (6). Если взаимодействие гидродинамического течения с периодической структурой является слабым, то дисперсионное уравнение (6) имеет всего три существенных корня, и суммирование в (26), (27) следует выполнять только по трем индексам.

Подчиним соотношения (26) и (27) граничным условиям на входе в пространство взаимодействия, что позволит определить амплитуды парциальных волн  $C_i$ .

Пусть возмущение давления в потоке на входе в пространство взаимодействия  $x = 0$  задано и равно  $p(0, L)$ , а возмущение вертикальной координаты ленты потока –  $\tilde{y}(0, L)$ . Третье граничное условие определяется тем, что давление на входе в канавку гребенки, расположенной при  $x = 0$ , равно  $p_0$ :  $p(0, 0) = p_0$ . Тогда из (26) и (27) получаем

$$\begin{aligned} p(0, L) &= \sum_{i=1}^3 C_i e^{-k_i L}, \\ \tilde{y}(0, L) &= \sum_{i=1}^3 \alpha_i C_i e^{-k_i L}, \\ p(0, 0) &= \sum_{i=1}^3 \beta_i C_i e^{-k_i L}, \end{aligned} \quad (28)$$

где введены обозначения

$$\alpha_i = \frac{r_i - 1}{r_i + 1} \frac{k_i}{\rho_0 \omega^2}, \quad (29)$$

$$\beta_i = \frac{r_i e^{-k_i L} + e^{k_i L}}{1 + r_i}. \quad (30)$$

Введем векторы-столбцы  $\vec{C}$ ,  $\vec{p}$  и матрицу  $\hat{M}$  следующими соотношениями:

$$\vec{C} = \begin{pmatrix} C_1 e^{-k_1 L} \\ C_2 e^{-k_2 L} \\ C_3 e^{-k_3 L} \end{pmatrix}, \quad \vec{p} = \begin{pmatrix} p(0, L) \\ \tilde{y}(0, L) \\ p_0 \end{pmatrix}, \quad \hat{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix}. \quad (31)$$



Вектор  $\vec{C}$  характеризует интенсивность возбуждения соответствующих парциальных волн, вектор  $\vec{p}$  – начальные условия на входе в пространство взаимодействия, матрица  $\hat{M}$  является функцией частоты внешнего сигнала.

Запишем соотношения (26) в матричной форме

$$\hat{M}\vec{C} = \vec{p}. \quad (32)$$

По правилам линейной алгебры отсюда находим выражение для коэффициентов  $C_i$ :

$$C_i = \frac{e^{k_i L}}{\det(M_{ik})} (\vec{p} \vec{m}_i). \quad (33)$$

Здесь  $\det(M_{ik})$  – определитель матрицы  $\hat{M}$ ,  $\vec{m}_i = (m_{1i}, m_{2i}, m_{3i})$  – векторы, составленные из алгебраических дополнений  $m_{ni}$  этой матрицы.

Используя соотношение (26), запишем выражение для давления на поверхности гребенки (то есть при  $y = 0$ ) в точке  $x = l$

$$p_l = \sum_{i=1}^3 C_i \beta_i e^{-k_i L - ik_i l}. \quad (34)$$

Формулы (33) и (34) дают решение поставленной задачи. С помощью этих соотношений по заданному в сечении  $x = 0$  начальному состоянию системы (вектор  $\vec{p}$ ) можно полностью восстановить распределение давления на поверхности гребенки.

Рассмотрим теперь случай, когда на входе в пространство взаимодействия при  $x = 0$  гидродинамическое течение не возмущено

$$p(0, L) = 0, \quad \tilde{y}(0, L) = 0. \quad (35)$$

Вычисляя соответствующие алгебраические дополнения матрицы  $\hat{M}$ , из (33) в этом случае находим

$$C_i = \frac{\varepsilon_{imn} (\alpha_n - \alpha_m)}{\det(M_{ik})} e^{k_i L} p_0. \quad (36)$$

Здесь индексы  $(i, m, n)$  образуют тройку,  $\varepsilon_{imn}$  – символ Леви-Чивиты.

Найдем выражение для коэффициентов  $C_i$  в случае слабого взаимодействия потока и периодической структуры в первом исчезающем порядке по параметрам  $e^{-k_i L}$ . Для этого необходимо вычислить в указанном приближении элементы матрицы  $\hat{M}$ .

Матрица  $\hat{M}$  определяется корнями дисперсионного уравнения (6). Если взаимодействие потока и поверхностной волны в структуре слабое, то эти корни близки к корням дисперсионного уравнения свободного потока  $(\omega - kv_0)^2 + \omega^2 = 0$  и свободной поверхностной волны  $k - k_0(\omega) = 0$ :

$$k_{1,2} = \frac{\omega}{v_0} (1 \mp i), \quad k_3 = k_0. \quad (37)$$

Найдем величины  $\alpha_i$  – элементы второй строки матрицы  $\hat{M}$ . В определение величин  $\alpha_i$  (29) входят коэффициенты отражения  $r_i$ , для которых из (2) и (37) вытекает, что

$$r_{1,2} \rightarrow \infty, \quad r_3 = r_0(k_0) = \frac{\{1 - (v_0/c) \operatorname{tg}[(\omega h)/c]\}^2 - 1}{\{1 - (v_0/c) \operatorname{tg}[(\omega h)/c]\}^2 + 1}. \quad (38)$$

Используя (38), из (29) получаем

$$\alpha_{1,2} = \frac{k_{1,2}}{\rho_0 \omega^2}, \quad \alpha_3 = \frac{r_0 - 1}{r_0 + 1} \frac{k_0}{\rho_0 \omega^2}. \quad (39)$$

Теперь найдем элементы третьей строки матрицы  $\hat{M}$  – величины  $\beta_i$ . Из (30) следует, что

$$\beta_3 = \frac{e^{k_0 L}}{1 + r_0}. \quad (40)$$

(Мы отбросили малый член  $r_0 e^{-k_0 L}$ .) Величины  $\beta_1$  и  $\beta_2$  непосредственно из соотношения (30) вычислить нельзя, поскольку в случае слабого взаимодействия  $r_{1,2} \rightarrow \infty$ ,  $e^{k_{1,2} L} \rightarrow \infty$ , и формула (30) дает неопределенность типа отношения двух бесконечностей. Преобразуем выражение (30), используя дисперсионное уравнение (5):

$$\beta_i = \frac{2k_i}{k_i - k_0} \frac{r_i}{1 + r_i} e^{-k_i L}. \quad (41)$$

В это соотношение уже можно подставлять  $k = k_{1,2}$

$$\beta_{1,2} = \frac{2k_{1,2}}{k_{1,2} - k_0} e^{-k_{1,2} L}. \quad (42)$$

Выпишем матрицу  $\hat{M}$  целиком:

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{k_1}{\rho_0 \omega^2} & \frac{k_2}{\rho_0 \omega^2} & \frac{(r_0 - 1) k_0}{(r_0 + 1) \rho_0 \omega^2} \\ \frac{2k_1 e^{-k_1 L}}{k_1 - k_0} & \frac{2k_2 e^{-k_2 L}}{k_2 - k_0} & \frac{e^{k_0 L}}{1 + r_0} \end{pmatrix}. \quad (43)$$

Вычислим определитель этой матрицы, сохраняя лишь наиболее существенные члены,

$$\det(M_{ik}) = \frac{k_2 - k_1}{\rho_0 \omega^2} \frac{e^{k_0 L}}{1 + r_0}. \quad (44)$$

Найдем амплитуды парциальных волн, для чего подставим полученные значения определителя и элементов  $\alpha_i$  матрицы  $\hat{M}$  в соотношения (36)

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{k_2 (r_0 + 1) - k_0 (r_0 - 1)}{k_1 - k_2} p_0 e^{(k_1 - k_0) L}, \\ C_2 &= \frac{k_1 (r_0 + 1) - k_0 (r_0 - 1)}{k_2 - k_1} p_0 e^{(k_2 - k_0) L}, \\ C_3 &= p_0 (1 + r_0). \end{aligned} \quad (45)$$

Используя соотношение (34), получаем выражение для распределения давления вдоль поверхности гребенки

$$p_l = p_0 \left\{ \frac{2k_1 [k_2 (r_0 + 1) - k_0 (r_0 - 1)]}{(k_1 - k_0) (k_1 - k_2)} e^{-(k_1+k_0)L-ik_1l} + \frac{2k_2 [k_1 (r_0 + 1) - k_0 (r_0 - 1)]}{(k_2 - k_0) (k_2 - k_1)} e^{-(k_2+k_0)L-ik_2l} + e^{-ik_0l} \right\}. \quad (46)$$

Здесь  $k_{1,2} = (\omega/v) (1 \mp i)$ ,  $k_0 = (\omega/c) \operatorname{tg}[(\omega h)/c]$ , а  $r_0$  дается соотношением (38).

В выражение (46) входят три парциальных волны, амплитуды которых пропорциональны величинам  $e^{-ik_1l}$ . Для первой волны  $\operatorname{Im} k_1 < 0$ , поэтому эта волна затухает в направлении оси  $x$ . Для второй волны  $\operatorname{Im} k_2 > 0$  – эта волна нарастает вдоль оси  $x$ . Третья парциальная волна характеризуется значением  $\operatorname{Im} k_0 = 0$ , так что ее амплитуда не меняется по величине. На расстояниях  $l \gg L$  можно оставить одну нарастающую волну:

$$p_l = p_0 \frac{2k_2 [k_1 (r_0 + 1) - k_0 (r_0 - 1)]}{(k_2 - k_0) (k_2 - k_1)} e^{-(k_2+k_0)L-ik_2l}. \quad (47)$$

Отсюда следует асимптотическая оценка для коэффициента усиления:

$$G = 20 \lg \left| \frac{p_l}{p_0} \right| = 20 \lg \left\{ \left| \frac{2k_2 [k_1 (r_0 + 1) - k_0 (r_0 - 1)]}{(k_2 - k_0) (k_2 - k_1)} \right| e^{-\operatorname{Re} (k_2+k_0)L + \operatorname{Im} k_2l} \right\}. \quad (48)$$

Заметим, что выражения (46)–(48) справедливы для любой импедансной поверхности, а не только для гребенки. От вида поверхности зависит лишь конкретный вид функции  $k_0(\omega)$ .

Если показатель экспоненты в (48) положителен, что с учетом (37) приводит к условию

$$l > L \left( 1 + \frac{v_0}{c} \operatorname{tg} \frac{\omega h}{c} \right), \quad (49)$$

то в рассматриваемой системе возможно усиление. При  $l \gg L$  усиление оказывается экспоненциально большим. (В реальной системе практически достижимая величина усиления будет ограничена самовозбуждением системы.)

Таким образом, в системе разрывный гидродинамический поток – акустическая периодическая структура эффективное усиление поверхностной волны возможно даже в том случае, если взаимодействие потока и волны слабое, а гидродинамическое течение на входе в пространство взаимодействия не возбуждено.

## 5. Акустический усилитель. Метод последовательных приближений

В предыдущем параграфе продемонстрирована возможность усиления в системе разрывный гидродинамический поток – поверхностная волна при их слабой связи формальным образом. Обсудим теперь механизм этого усиления, для чего применим метод последовательных приближений, который нашел широкое распространение в электронике СВЧ для анализа физической стороны процессов взаимодействия электронного потока и электромагнитного поля в периодической структуре [4].

В качестве «нулевого» приближения зададим волну давления в виде свободной поверхностной волны

$$p = p_0 e^{-k_0 y - i k_0 x}. \quad (50)$$

Здесь  $k_0(\omega) = (\omega/c) \operatorname{tg}[(\omega h)/c]$  – постоянная распространения свободной поверхностной волны на частоте внешнего сигнала  $\omega$ . Эта волна сильно затухает в направлении  $y$ , однако, ее экспоненциальный «хвост» достигнет потока и слабо возбudit его.

Найдем отклик потока на воздействие поверхностной волны. В силу линейности задачи для этого нужно найти общее решение задачи о движении свободного потока и частное решение задачи о воздействии поверхностной волны на поток. Построим сначала решение о вынужденном воздействии волны на поток. Для этого следует положить в соотношении (1) волновое число  $k$  равным постоянной распространения свободной поверхностной волны  $k_0$ :

$$p(x, y) = \frac{C}{1 + r_0} \left[ e^{k_0(y-2L)} + e^{-k_0 y} \right] e^{-i k_0 x}. \quad (51)$$

Вычислим давление на поверхности гребенки

$$p(x, 0) = \frac{C}{1 + r_0} \left( 1 + r_0 e^{-2k_0 L} \right) e^{-i k_0 x}. \quad (52)$$

По условию, давление на входе в канаву гребенки, расположенной в начале координат, равно  $p_0$ :  $p(0, 0) = p_0$ . Поскольку взаимодействие потока и волны слабое, то  $e^{-2k_0 L} \ll 1$ , и из (52) следует, что  $C = p_0 (1 + r_0)$ . Окончательно для «вынужденного» решения имеем

$$p_{\text{вын}}(x, y) = \left[ r_0 e^{k_0(y-2L)} + e^{-k_0 y} \right] p_0 e^{-i k_0 x}. \quad (53)$$

Для вертикальных смещений элементов жидкости из (3) и (53) находим, что

$$\tilde{y}_{\text{вын}}(x, y) = \frac{k_0}{\rho_0 \omega^2} \left[ r_0 e^{k_0(y-2L)} - e^{-k_0 y} \right] p_0 e^{-i k_0 x}. \quad (54)$$

Найдем общее решение задачи о движении свободного потока. Волны в потоке подчиняются дисперсионному уравнению (7). При действительных  $\omega$  это уравнение имеет два комплексных корня  $k_1$  и  $k_2$ , отвечающих затухающей и нарастающей в пространстве волнам

$$k_1 = (1 - i) \frac{\omega}{v_0}, \quad k_2 = (1 + i) \frac{\omega}{v_0}. \quad (55)$$

Поля давления и вертикальных смещений являются суперпозициями двух таких волн с не определенными пока коэффициентами  $C_1$  и  $C_2$ :

$$\begin{aligned} p_{\text{св}}(x, y) &= C_1 e^{k_1 y - i k_1 x} + C_2 e^{k_2 y - i k_2 x}, \\ \tilde{y}_{\text{св}}(x, y) &= \frac{k_1 C_1}{\rho_0 \omega^2} e^{k_1 y - i k_1 x} + \frac{k_2 C_2}{\rho_0 \omega^2} e^{k_2 y - i k_2 x}. \end{aligned} \quad (56)$$

Построим теперь суперпозицию «свободного» и «вынужденного» решений

$$\begin{aligned} p(x, y) &= p_{\text{св}}(x, y) + p_{\text{вын}}(x, y), \\ \tilde{y}(x, y) &= \tilde{y}_{\text{св}}(x, y) + \tilde{y}_{\text{вын}}(x, y). \end{aligned} \quad (57)$$

Граничные условия на входе в пространство взаимодействия позволяют отыскать коэффициенты  $C_1$  и  $C_2$ . Действительно, на входе в пространство взаимодействия  $x = 0$ ,  $y = L$  лента разрыва не возмущена, следовательно

$$\begin{aligned} p(0, L) &= p_{\text{св}}(0, L) + p_{\text{вын}}(0, L) = 0, \\ \tilde{y}(0, L) &= \tilde{y}_{\text{св}}(0, L) + \tilde{y}_{\text{вын}}(0, L) = 0. \end{aligned} \quad (58)$$

Используя соотношения (53), (54), (56), (58), находим коэффициенты  $C_1$  и  $C_2$

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{(k_2 - k_0)r_0 + k_2 + k_0}{k_1 - k_2} \rho_0 e^{-(k_0+k_1)L}, \\ C_2 &= \frac{(k_1 - k_0)r_0 + k_1 + k_0}{k_2 - k_1} \rho_0 e^{-(k_0+k_2)L}. \end{aligned} \quad (59)$$

Таким образом, «отклик» потока на воздействие поверхностной волны полностью определен:

$$p(x, y) = C_1 e^{k_1 y - i k_1 x} + C_2 e^{k_2 y - i k_2 x} + \left[ r_0 e^{(y-2L)k_0} + e^{-k_0 y} \right] p_0 e^{-i k_0 x}, \quad (60)$$

где коэффициенты  $C_1$  и  $C_2$  даются соотношениями (59). Оставляя в (60) лишь нарастающую волну, получим асимптотическое выражение для поля давления

$$p(x, y) \approx C_2 e^{k_2 y - i k_2 x}. \quad (61)$$

Это поле локализовано в окрестности потока, однако, его экспоненциальный «хвост» достигнет гребенки и возбудит волну вида  $A e^{-k_2 y - i k_2 x}$ , локализованную у поверхности гребенки. Полное поле складывается из «падающей» и «отраженной» волн

$$p = C_2 e^{k_2 y - i k_2 x} + A e^{-k_2 y - i k_2 x}. \quad (62)$$

На поверхности гребенки должно выполняться граничное условие (4). Подчинив ему решение (62), получим

$$A = \frac{k_0 + k_2}{k_2 - k_0} C_2. \quad (63)$$

Мы нашли «отклик» гребенки на воздействие потока. Схема построения первого приближения на этом закончена. Подставляя в (62) выражения (63), (59) и значения  $y = 0$ ,  $x = l$ , находим давление на поверхности гребенки на входе в канавку, расположенную в точке  $x = l$ ,

$$p_l = \frac{2k_2 [(k_1 - k_0)r_0 + k_1 + k_0]}{(k_2 - k_0)(k_2 - k_1)} \rho_0 e^{-(k_0+k_2)L - i k_2 l}. \quad (64)$$

Это соотношение полностью совпадает с выражением (47), полученным в предыдущем параграфе, что и подтверждает корректность применения метода последовательных приближений.

Проведенное рассмотрение позволяет утверждать, что механизм усиления в анализируемой системе состоит в следующем. Поверхностная волна, локализованная у поверхности гребенки, слабо возбуждает поток. Из-за сильной собственной неустойчивости потока в нем возникает экспоненциально нарастающая в направлении его распространения волна, меняющаяся во времени по закону, отвечающему частоте внешнего сигнала. Такая нарастающая волна, в свою очередь, инициирует поверхностную волну, и на расстоянии  $l \geq 2L$  амплитуда этой инициированной волны превысит амплитуду «затравочной» поверхностной волны.

## 6. Эффект полного подавления поверхностной волны и его особенности

Пусть в системе, изображенной на рис. 1, возбуждена поверхностная волна с частотой  $\omega$ . Найдем условия полного подавления этой волны. Для реализации полного подавления необходимо, чтобы инициированная за счет взаимодействия с потоком поверхностная волна точно скомпенсировала бы «затравочную» волну, что возможно на расстояниях  $l \sim L$  от начала координат. В этом случае в соотношении (46) можно отбросить затухающую парциальную волну

$$p_l = p_0 \left\{ e^{-ik_0 l} + \frac{2k_2 [k_1 (r_0 + 1) - k_0 (r_0 - 1)]}{(k_2 - k_0)(k_2 - k_1)} e^{-(k_2 + k_0)L - ik_2 l} \right\}. \quad (65)$$

Условием полного подавления сигнала является обращение в нуль величины давления  $p_l$

$$\frac{2k_2 [k_1 (r_0 + 1) - k_0 (r_0 - 1)]}{(k_2 - k_0)(k_1 - k_2)} = e^{(k_2 + k_0)L + i(k_2 - k_0)l}. \quad (66)$$

Введем следующие безразмерные переменные:

$$\Omega = \frac{v_0}{c} \operatorname{tg} \frac{\omega h}{c}, \quad \bar{L} = \frac{\omega L}{v_0}, \quad \bar{l} = \frac{\omega l}{v_0}. \quad (67)$$

(Величине  $\Omega$  можно придать смысл безразмерной частоты сигнала, а величинам  $\bar{L}$  и  $\bar{l}$  – безразмерной толщины слоя покоящейся жидкости и длины системы.) Перейдем в соотношении (66) к безразмерным переменным (67). Используя определения величин  $k_{1,2}$ ,  $k_0$  и  $r_0$  (37), (38) и (4), после некоторых преобразований получим

$$\bar{L} = \frac{t + (1 - \Omega)z}{2 - \Omega^2}, \quad \bar{l} = \frac{(1 + \Omega)t - z}{2 - \Omega^2}. \quad (68)$$

Здесь

$$z = \frac{1}{2} \ln \left\{ 8 \frac{[(1 - \Omega)^2 + \Omega]^2 + (1 - \Omega)^4}{[(1 - \Omega)^2 + 1]^3} \right\}, \quad (69)$$

$$t = \operatorname{arctg} \left\{ 1 + \frac{2(1 - \Omega)\Omega^2}{2(1 - \Omega)^2 + \Omega^2} \right\} + 2\pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

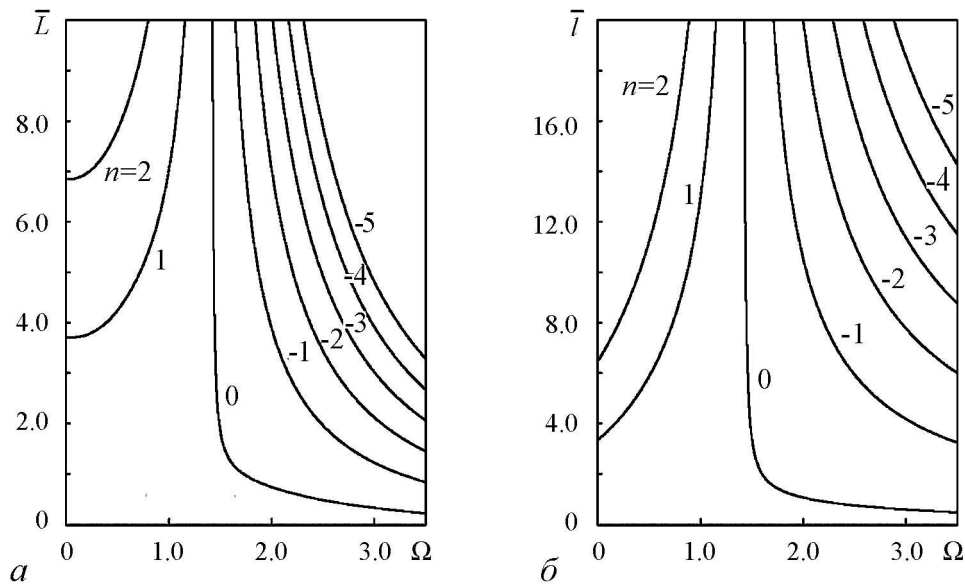


Рис. 8. Условия полного подавления поверхностной волны

На рис. 8 показаны зависимости  $\bar{L} = \bar{L}(\Omega)$  и  $\bar{l} = \bar{l}(\Omega)$ , найденные численно с помощью соотношений (68) и (69). Для фиксированной частоты внешнего сигнала эффект полного подавления реализуется при определенных значениях толщины слоя покоящейся жидкости, причем для данной частоты сигнала таких решений бесконечно много. Полное подавление наблюдается на вполне определенной длине системы, которая зависит от толщины слоя. Заметим, что для длин, превышающих длину полного подавления, амплитуда поверхностной волны уже не будет равна нулю, поскольку эффект полного подавления носит интерференционный характер.

### 7. Взаимодействие потока со встречной волной как одна из возможных причин самовозбуждения

До настоящего момента излагались результаты исследования взаимодействия потока с поверхностной волной, распространяющейся в ту же сторону, что и поток. При наличии в потоке сильной собственной неустойчивости возможен, однако, принципиально новый эффект – взаимодействие потока со встречной волной.

Получим дисперсионное уравнение, описывающее взаимодействие потока со встречной волной в периодической структуре типа «гребенка». Для такой волны зависимость переменных от координат  $x$  и  $y$  для решений, затухающих в  $y$ -направлении, выглядит следующим образом:  $p, \tilde{y} \sim e^{ky-ikx}$ , поскольку  $\text{Re } k < 0$ . Соответственно, для распределения давления в пространстве имеем

$$p(x, y) = \begin{cases} p_1(x, y) = Ce^{ky-ikx}, & y > L, \\ p_2(x, y) = Ae^{ky-ikx} + Be^{-ky-ikx}, & 0 < y < L. \end{cases} \quad (70)$$

Используя (3), можно записать аналогичные соотношения и для вертикальных смещений элементов жидкости

$$\tilde{y}(x, y) = \begin{cases} \tilde{y}_1(x, y) = \frac{kc}{\rho_0(\omega - kv_0)^2} e^{ky - ikx}, & y > L, \\ \tilde{y}_2(x, y) = \frac{k}{\rho_0\omega^2} (Ae^{ky} - Be^{-ky}) e^{-ikx}, & 0 < y < L. \end{cases} \quad (71)$$

На границе потока  $y = L$  должны выполняться условия

$$p_1(x, L) = p_2(x, L), \quad \tilde{y}_1(x, L) = \tilde{y}_2(x, L), \quad (72)$$

а на поверхности гребенки – граничное условие (4). Соотношения (70)–(72) и (4) совместны, если справедливо равенство

$$\left(k + \frac{\omega}{c} \operatorname{tg} \frac{\omega h}{c}\right) [(\omega - kv_0)^2 + \omega^2] = e^{2kL} \left(k - \frac{\omega}{c} \operatorname{tg} \frac{\omega h}{c}\right) [(\omega - kv_0)^2 - \omega^2]. \quad (73)$$

Это и есть искомое дисперсионное уравнение. При  $kL \rightarrow -\infty$  уравнение распадается на дисперсионное уравнение свободного потока  $(\omega - kv_0)^2 + \omega^2 = 0$  и дисперсионное уравнение свободной встречной волны  $k + (\omega/c) \operatorname{tg}(\omega h/c) = 0$ . Из соотношений (70)–(72), (4) вытекает также следующее выражение для распределения давления в пространстве в области  $0 \leq y \leq L$ :

$$p(x, y) = \frac{C}{1+r} [re^{(2L-y)k} + e^{ky}] e^{-ikx}, \quad (74)$$

где  $r = [(\omega - kv_0)^2 - \omega^2] / [(\omega - kv_0)^2 + \omega^2]$ .

Рассмотрим усиление встречной поверхностной волны. В таком режиме работы системы входной сигнал подается в точке  $x = l$ , а выходной снимается на конце  $x = 0$  (рис. 9). Для решения задачи используем метод последовательных приближений, причем будем следовать логике этого метода, принятой в теории лампы обратной волны [4, 15].

В качестве «нулевого» приближения зададим свободную встречную волну

$$p = p_0 e^{-k_0 y + ik_0 x}, \quad (75)$$

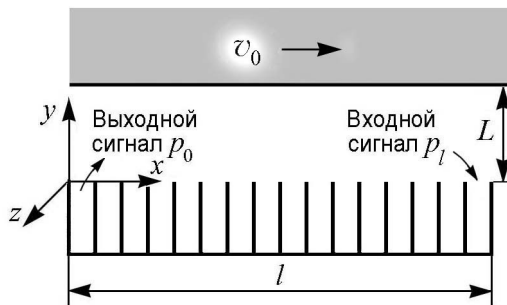


Рис. 9. Акустический усилитель встречной волны

где  $k_0 = (\omega/c) \operatorname{tg}(\omega h/c)$ ,  $p_0$  – искомая амплитуда выходного сигнала. Такая волна возбуждает в потоке волну с неустойчивостью, которая, в свою очередь, инициирует поверхностную волну в гребенке. Амплитуду суммарной поверхностной волны в точке  $x = l$  необходимо положить равной амплитуде входного сигнала  $p_l$ .



Как и в разделе 4, построим суперпозицию «вынужденного» и «свободного» решений. Вынужденное решение найдем, подставив в соотношение (74) значение волнового числа  $k = -k_0$ , то есть равным постоянной распространения свободной поверхностной волны:

$$p_{\text{вын}}(x, y) = p_0 \left[ \bar{r}_0 e^{(y-2L)k_0} + e^{-k_0 y} \right] e^{ik_0 x}, \quad (76)$$

где  $\bar{r}_0 = [(\omega + k_0 v_0)^2 - \omega^2] / [(\omega + k_0 v_0)^2 + \omega^2]$ .

«Свободное» решение, описывающее волны в потоке, дается соотношениями (56). Подчинив суммарное решение условиям отсутствия модуляции потока на входе в пространство взаимодействия  $p(0, L) = 0$ ,  $\tilde{y}(0, L) = 0$ , получим

$$p(x, y) = C_1 e^{k_1 y - ik_1 x} + C_2 e^{k_2 y - ik_2 x} + p_0 \left[ \bar{r}_0 e^{(y-2L)k_0} + e^{-k_0 y} \right] e^{ik_0 x}, \quad (77)$$

где для коэффициентов  $C_1$  и  $C_2$  справедливы выражения (59). Накладывая граничное условие (4) и отбрасывая затухающую волну, находим выражение для давления на поверхности гребенки в точке  $x = l$

$$p_l = p_0 \left[ \frac{2k_2 [(k_1 - k_0) \bar{r}_0 + k_1 + k_0]}{(k_2 - k_0)(k_2 - k_1)} e^{-(k_0+k_2)L - ik_2 L} + e^{ik_0 l} \right] \quad (78)$$

и для коэффициента усиления встречной волны

$$G = 20 \lg \left| \frac{p_0}{p_l} \right| = 20 \lg \left| \frac{1}{1 + \frac{2k_2 [(k_1 - k_0) \bar{r}_0 + k_1 + k_0]}{(k_2 - k_0)(k_2 - k_1)} e^{-(k_0+k_2)(L+il)}} \right|. \quad (79)$$

При  $l \sim L$  экспоненциальный множитель в (79) имеет величину порядка единицы и, следовательно, в системе возможно эффективное усиление встречной волны.

При определенных значениях длины системы  $l$  и частоты  $\omega$  коэффициент усиления  $G$  может обратиться в бесконечность. Это означает, что произойдет самовозбуждение системы. Найдем условия самовозбуждения. Из (79) следует, что  $G \rightarrow \infty$  при

$$\frac{2k_2 [(k_1 - k_0) \bar{r}_0 + k_1 + k_0]}{(k_2 - k_0)(k_1 - k_2)} = e^{(k_0+k_2)(L+il)}. \quad (80)$$

Переходя к безразмерным параметрам (67) и выполняя некоторые преобразования, из (80) получаем

$$\bar{L} = \frac{(1 + \Omega)z + t}{(1 + \Omega)^2 + 1}, \quad \bar{l} = \frac{(1 + \Omega)t - z}{(1 + \Omega)^2 + 1}. \quad (81)$$

Здесь

$$z = \frac{1}{2} \ln \left\{ 8 \frac{[(1 + \Omega)^2 + \Omega]^2 + (1 + \Omega)^4}{[(1 + \Omega)^2 + 1]^2 [(1 - \Omega)^2 + 1]} \right\}, \quad (82)$$

$$t = \operatorname{arctg} \left\{ 1 - 2\Omega^2 \frac{\Omega + 3}{2(1 + \Omega)^2 + \Omega^2} \right\} + 2\pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

На рис. 10 приведены зависимости стартовых значений безразмерных длины системы  $\bar{l}$  и частоты  $\Omega$  от безразмерной толщины слоя покоящейся жидкости  $\bar{L}$ . Как показывают расчеты, с увеличением толщины слоя  $\bar{L}$  стартовая длина растет. Это естественно, так как с увеличением  $\bar{L}$  падает эффективность взаимодействия потока и поверхностной волны. При этом стартовая частота уменьшается и при  $\Omega \rightarrow 0$  соответствующая ветвь колебаний обрывается. Точка  $\Omega = 0$  отвечает наименьшему для данного вида колебаний отношению  $\bar{l}/\bar{L}$ .

Заметим, что к приведенным здесь численным значениям следует подходить с некоторой осторожностью по следующим причинам. Во-первых, в режиме самовозбуждения система сама «выбирает» частоту генерации, которая, вообще говоря, может оказаться такой, что будут несправедливы использованные предположения (слабость взаимодействия, отсутствие вязкости и др.). Во-вторых, из-за сильной собственной неустойчивости в потоке характерный пространственный масштаб нарастания волнового поля в системе много больше ее длины ( $1/k \ll L, l$ ) и, следовательно, поток на вход пространства взаимодействия поступает уже с модуляцией. Поэтому полностью корректное рассмотрение требует решения задачи о вводе потока в пространство взаимодействия. Характерно, что сходная проблема возникает и в теории приборов типа М [14]. Эти обстоятельства, однако, не скажутся на принципиальной стороне протекающих процессов и могут лишь несколько изменить конкретные численные значения рассчитываемых величин.

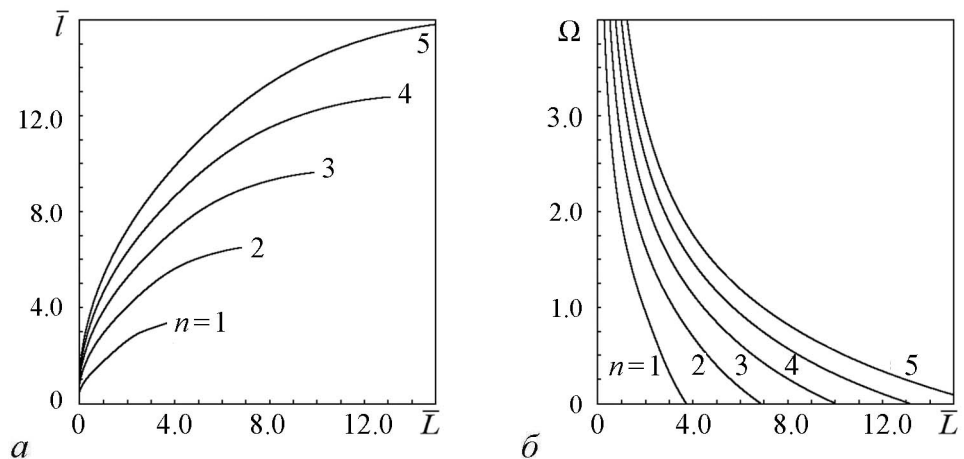


Рис. 10. Условия самовозбуждения на встречной волне

## Заключение

При взаимодействии разрывного гидродинамического потока с периодической структурой реализуется эффективное усиление поверхностной волны. В таких системах возможно полное подавление поверхностной волны, наблюдающееся при определенных значениях параметров – толщины слоя покоящейся жидкости и расстояния от точки ввода потока в систему. Одной из причин, приводящих к самовозбуждению, является взаимодействие течения со встречной волной в структуре, которое из-за сильной собственной неустойчивости в потоке оказывается существенным.

*Работа С.П. Кузнецова поддержана грантом РФФ № 15-12-20035.*

## Библиографический список

1. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Трубецков Д.И. Аналогия в задачах о взаимодействии электронных и гидродинамических потоков с полями резонаторов и периодических структур. Часть 1 // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2015. Т. 23, № 5. С. 5–40.
2. Пирс Дж. Лампа с бегущей волной. М.: Сов. Радио, 1952. 230 с.
3. Вайнштейн Л.А., Солнцев В.А. Лекции по сверхвысокочастотной электронике. М.: Сов. Радио, 1973. 400 с.
4. Шевчик В.Н., Трубецков Д.И. Аналитические методы расчета в электронике СВЧ. М.: Сов. Радио, 1970. 584 с.
5. Трубецков Д.И., Храмов А.Е. Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков. Т. 1. М.: Физматлит, 2003. 496 с.
6. Гилмор-мл А. Лампы с бегущей волной. М.: Техносфера, 2013. 616 с.
7. Трубецков Д.И., Титов А.В., Фунтов А.А. Об интерференционном усилении в электронно-волновой лампе (линейная теория) // Письма в ЖТФ. 2013. вып. 21. С. 86–94.
8. Годин О.А., Мохов А.В. Усиление звука при резонансном взаимодействии с потоком жидкости // Акустический журнал. 1991. Т. 37, № 1. С. 58–64.
9. Андронов А.А., Фабрикант А.Л. Затухание Ландау, ветровые волны и свисток // В кн. Нелинейные волны. М.: Наука, 1979. С. 68–104.
10. Андронов А.А., Фабрикант А.Л. К теории аэродинамического самовозбуждения звука: усиление поверхностных волн // Акустический журнал. 1980. Т. 26, № 5. С. 655–662.
11. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984. 432 с.
12. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Физическая кинетика // Теоретическая физика. М.: Физматлит. 2001. Т.10. 536 с.
13. Кузнецов С.П. О численном моделировании усиления шума в широкополосной ЛБВ // В кн. Лекции по электронике СВЧ и радиофизике. Саратов: СГУ. 1981. Кн. 5. С. 165–176.

14. *Гаврилов М.В., Трубецков Д.И.* Влияние внешнего высокочастотного поля на поведение пучка в пушке Кайно. (Линейная теория с учетом виртуального катода) // В кн. Лекции по электронике СВЧ. Саратов: СГУ. 1974. Кн. 5. С. 184–192.
15. Электроника ламп с обратной волной / Ред. В.Н. Шевчик и Д.И. Трубецков. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1975. 195 с.

*Поступила в редакцию* 22.03.2016  
*После доработки* 15.04.2016

## ANALOGY IN INTERACTIONS OF ELECTRONIC BEAMS AND HYDRODYNAMIC FLOWS WITH FIELDS OF RESONATORS AND PERIODIC STRUCTURES

### Part 2. Self-excitation, amplification and dip conditions

*A. P. Kuznetsov<sup>1,2</sup>, S. P. Kuznetsov<sup>2,3</sup>*

<sup>1</sup> National Research Saratov State University  
410012 Saratov, Astrahanskaya, 83

<sup>2</sup>Kotel'nikov Institute of Radio-Engineering and Electronics of RAS, Saratov Branch  
410019 Saratov, Zelenaya, 38

<sup>3</sup>Udmurt State University  
426034 Izhevsk, Universitetskaya, 1

The subject of this research concerns the problem of excitation of acoustic oscillations and waves in the flow of fluid interacting with resonators and periodic structures, in relation to which application of methods and theoretical apparatus similar to those developed in the electronics and electrodynamics in the context of the excitation of electromagnetic oscillations and waves is productive. The proposed approach is based on reduction of the hydrodynamic equations of compressible fluid to a form similar to the Maxwell equations with subsequent developing theory of excitation of resonators and waveguides as discussed in the previous part of this article. By analogy with the theory of microwave electronic devices with crossed fields, basing on the self-consistent theory, we study the interaction of vortex currents with a periodic structure in the case of strong own instability. A linear theory of the acoustic amplifier is developed, in which the interaction is weak, and the flow at the input of the interaction space is not perturbed. The possibility of a full suppression of the surface waves in certain modes of functioning of such a system is noted. It has been shown that efficient coupling of the flow with a backward wave is possible in the structure, and conditions for the self-excitation of the counter-directed wave are found. It can be concluded that the analogy between the hydrodynamic problem and the processes in electronic devices with crossed fields is of considerable interest from the point of view of describing the phenomena of excitation of acoustic oscillations and waves by the vortex currents and evaluating the prospects for their practical use. Special attention

should be put for self-excitation of oscillations due to the interaction of the flow with the counter-directed waves, similar to the effect occurring in the backward-wave tubes.

*Keywords:* Electron beam, hydrodynamic flow, vortices, periodic structures, theory of excitation, dip conditions, signal self-excitation.

DOI: 10.18500/0869-6632-2016-24-2-5-26.

*Paper reference:* Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P. Analogy in interactions of electronic beams and hydrodynamic flows with fields of resonators and periodic structures. Part 2. Self-excitation, amplification and dip conditions // *Izvestija VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2016. Vol. 24, № 2. P. 5–26.

## References

1. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Trubetskov D.I.* Analogy in interactions of electronic beams and hydrodynamic flows with fields of resonators and periodic structures. Part 1 // *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2015. T. 23, № 5. P. 5–40 (in Russian).
2. *Pierce J.R.* Traveling-Wave Tubes // *Bell System Technical Journal*. 1950. Vol. 29, № 3. P. 390–460.
3. *Weinstein L.A., Solntsev V.A.* Lectures on Microwave Electronics. Moscow: Sov. Radio, 1973. 400 s. (in Russian).
4. *Shevchik V.N., Trubetskov D.I.* Analytical Methods of Calculation in Microwave Electronics. Moscow: Sov. Radio, 1970. 584 s. (in Russian).
5. *Trubetskov D.I., Hramov A.E.* Lectures on Microwave Electronics for Physicists. Vol. 1. Moskva: Fizmatlit, 2003. (in Russian).
6. *Gilmour A.S.* Principles of Traveling Wave Tubes. Artech House, 1994. 625p.
7. *Trubetskov D.I., Titov A.V., and Funtov A.A.* Interference amplification in an electron-wave tube (Linear theory) // *Technical Physics Letters*. 2013. Vol. 39, № 11. P. 977–981.
8. *Godin O.A., Mokhov A.V.* Amplification of sound in resonance interaction with fluid flow // *Soviet physics. Acoustics*. 1991. Vol. 37, № 1. P. 29–32.
9. *Andronov A.A., Fabrikant A.L.* Landau damping, wind waves and whistle // *Nonlinear Waves*. Moscow: Nauka, 1979. S. 68–104. (in Russian).
10. *Andronov A.A., Fabrikant A.L.* Theory of the aerodynamic self-excitation of sound Amplification of surface waves // *Soviet Physics. Acoustics*. 1980. Vol. 26. P. 370–374.
11. *Rabinovich M.I., Trubetskov D.I.* Oscillations and Waves in Linear and Nonlinear Systems. Kluwer Academic Publisher, 1989. 578 p.
12. *Lifshitz E.M., Pitaevskii L.P.* Physical kinetics. Course of theoretical physics. Vol. 10. Oxford: Pergamon Press, 1981. 452 p.
13. *Kuznetsov S.P.* Numerical simulation of noise amplification in broadband TWT // *Lectures on UHF Electronics and Radio-physics*. Saratov State University. 1981. Vol. 5. P. 165–176 (in Russian).

14. *Gavrilov M.V., Trubetskov D.I.* Effect of external high-frequency field on the behavior of the beam in the Caino gun: Linear theory accounting the virtual cathode // Lectures on UHF Electronics. Saratov State University, 1974. Vol. 5. P. 184–192 (in Russian).
15. Electronics of backward-wave tubes / Eds V.N. Shevchik, D.I. Trubetskov. Saratov: Saratov University Publ., 1975. 195 p. (in Russian).



*Кузнецов Александр Петрович* – родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, заведующий базовой кафедрой динамических систем Саратовского госуниверситета. Имеет звание профессора. Область научных интересов: динамические системы, теория бифуркаций, синхронизация, квазипериодические колебания и их приложения. Лауреат гранта Президента Российской Федерации, Соросовский профессор (2000, 2001). Опубликовал более 100 статей в российских и международных научных журналах. Научный руководитель студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика». Автор оригинальных учебных курсов для факультета нелинейных процессов СГУ и Лицея прикладных наук. Автор и соавтор 12 монографий, учебников и задачников по нелинейной динамике, теории колебаний и физике. Среди них: «Физика квазипериодических колебаний», «Нелинейность: от колебаний к хаосу», «Нелинейные колебания», «Линейные колебания и волны (сборник задач) и др.

410019 Саратов, ул. Зеленая, д. 38  
 Саратовский филиал ИРЭ имени В.А. Котельникова РАН  
 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
 Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
 www.sgtnd.narod.ru  
 E-mail: apkuz@rambler.ru



*Кузнецов Сергей Петрович* – родился в Москве (1951). Окончил Саратовский государственный университет (1973). Сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН (с 1988). Руководит лабораторией теоретической нелинейной динамики. Главный научный сотрудник лаборатории нелинейного анализа и конструирования новых средств передвижения Удмуртского государственного университета. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГУ (1977) и доктора наук (1987) по специальности радиофизика. Профессор базовой кафедры динамических систем СГУ. Автор монографии «Динамический хаос и гиперболические аттракторы: От математики к физике», монографии «Hyperbolic Chaos. A Physicist's View», монографии «Strange Nonchaotic Attractors» (совместно с А. Пиковским и У. Фойдель), а также учебно-научных монографий «Динамический хаос» и «Нелинейные колебания» (в соавторстве с А.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным). Опубликовал свыше 200 научных статей по нелинейной динамике, радиофизике и электронике. Под его руководством защищены одиннадцать кандидатских диссертаций. Лауреат государственной научной стипендии для ученых России (1994–1996), Соросовский доцент (1998), Соросовский профессор (2000, 2001). Член редакционной коллегии журнала «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика».

410019 Саратов, ул. Зеленая, 38  
 Саратовский филиал ИРЭ имени В.А. Котельникова РАН  
 426034 Ижевск, ул. Университетская, 1  
 Удмуртский государственный университет  
 E-mail: spkuz@yandex.ru