

УДК 517.9

АТТРАКТОР БЕЛЫХ В ОТОБРАЖЕНИИ ЗАСЛАВСКОГО И ЕГО ТРАНСФОРМАЦИЯ ПРИ СГЛАЖИВАНИИ

С. П. Кузнецов

Саратовский филиал ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН,
Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский государственный университет,
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
Удмуртский государственный университет,
Россия, Удмуртия, 426034 Ижевск, Университетская, 1
E-mail: spkuz@yandex.ru

Поступила в редакцию 3.10.2017, после доработки 3.11.2017

Если при задании оператора эволюции динамических систем допустить использование негладких или разрывных функций, то ситуации квазигиперболической хаотической динамики реализуются достаточно просто. Это имеет место, например, на аттракторах в модельном отображении Лози и в отображении Белых. В настоящей статье рассматривается квазигиперболический аттрактор Белых в отображении, описывающем динамику ротатора с диссипацией в присутствии периодических толчков, у которых интенсивность зависит по пилообразному закону от мгновенной угловой координаты ротатора, а также исследуется трансформация аттрактора при сглаживании пилообразной функции. Представлены преобразования, сводящие задачу к отображению Белых стандартной формы. Приводятся результаты численных расчетов, иллюстрирующих динамику системы с непрерывным временем на аттракторе Белых. Представлены и обсуждаются также результаты для модели со сглаженной пилообразной функцией в зависимости от параметра, характеризующего масштаб сглаживания. На графиках зависимости показателей Ляпунова при сглаживании пилообразной функции можно видеть появление окон периодической динамики, что говорит о нарушении квазигиперболической природы аттрактора. Приведены также карты динамических режимов на плоскости параметров системы, где присутствуют области периодических движений («языки Арнольда»), уменьшающиеся по мере уменьшения характерного масштаба сглаживания и исчезающие в предельном случае разрывной пилообразной функции. Поскольку изначально аттрактор Белых введен в контексте радиофизических задач (фазовая автоподстройка частоты), предпринятый здесь анализ представляет интерес с точки зрения возможного использования хаотической динамики на этом аттракторе в электронных устройствах.

Ключевые слова: динамическая система, аттрактор, хаос, отображение, ротатор, показатель Ляпунова.

DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-1-64-79

Образец цитирования: Кузнецов С.П. Аттрактор Белых в отображении Заславского и его трансформация при сглаживании // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2018. Т. 26, № 1. С. 64–79. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-1-64-79

BELYKH ATTRACTOR IN ZASLAVSKY MAP AND ITS TRANSFORMATION UNDER SMOOTHING

S. P. Kuznetsov

Kotel'nikov's Institute of Radio-Engineering and Electronics of RAS, Saratov Branch,
38, Zelenaya, 410019 Saratov, Russia

National Research Saratov State University,
83, Astrakhanskaya, 410012 Saratov, Russia

Udmurt State University
1, Universitetskaya, 426034 Izhevsk, Udmurtiya, Russia

E-mail: spkuz@yandex.ru

Received 3.10.2017, revised 3.11.2017

If we allow non-smooth or discontinuous functions in definition of an evolution operator for dynamical systems, then situations of quasi-hyperbolic chaotic dynamics often occur like, for example, on attractors in model Lozi map and in Belykh map. The present article deals with the quasi-hyperbolic attractor of Belykh in a map describing a rotator with dissipation driven by periodic kicks, the intensity of which depends on the instantaneous angular coordinate of the rotator as a sawtooth-like function, and also the transformation of the attractor under smoothing of that function is considered. Reduction of the equations to the standard form of the Belykh map is provided. Results of computations illustrating the dynamics of the system with continuous time on the Belykh attractor are presented. Also, results for the model with the smoothed sawtooth function are considered depending on the parameter characterizing the smoothing scale. On graphs of Lyapunov exponents versus a parameter, the smoothing of the sawtooth implies appearance of periodicity windows, which indicates violation of the quasi-hyperbolic nature of the attractor. Charts of dynamic regimes on the parameter plane of the system are also plotted, where regions of periodic motions («Arnold's tongues») are present, which decrease in size with the decrease in the characteristic scale of the smoothing, and disappear in the limit case of the sawtooth function with a break. Since the Belykh attractor was originally introduced in the radiophysical context (phase-locked loops), the analysis undertaken here is of interest from the point of view of possible exploiting of chaotic dynamics on this attractor in electronic devices.

Keywords: dynamical system, attractor, chaos, map, rotator, Lyapunov exponent.

DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-1-64-79

References: Kuznetsov S.P. Belykh attractor in Zaslavsky map and its transformation under smoothing. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2018, vol. 26, iss. 1, pp. 64–79. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-1-64-79

Введение

С точки зрения возможных приложений хаоса, важно, чтобы при малом возмущении параметров системы порождаемый ею хаос был робастным, то есть не разрушался и не трансформировался в режимы регулярной, например, периодической динамики [1]. В системах, где оператор эволюции задан гладкими функциями переменных состояния, такого рода «настоящий» хаос реализуется для странных аттракторов гиперболического типа (аттрактор Смейла–Вильямса, аттрактор Плыкина), обладающих математически обоснованным свойством грубости или структурной устойчивости [2–4], и псевдогиперболических аттракторов (аттрактор Лоренца, «дикие» аттракторы) [5–7].

Если говорить о гиперболических аттракторах, то они составлены исключительно из седловых траекторий в пространстве состояний. Это траектории, у которых в пространстве векторов бесконечно малых возмущений (касательном пространстве) можно выделить сжимающее и растягивающее инвариантные подпространства. Первое образовано векторами, нормы которых экспоненциально убывают при эволюции в прямом времени, а второе – векторами, нормы которых экспоненциально убывают в обратном времени. (В системах с непрерывным временем добавляется еще нейтральное подпространство возмущений, норма которых в среднем не убывает и не возрастает.) При этом произвольный вектор малого возмущения представляется линейной комбинацией векторов, принадлежащих названным подпространствам. Множества изображающих точек, приближающихся к данной траектории в прямом или обратном времени, отвечают, соответственно, ее устойчивому и неустойчивому многообразию. Для гиперболического аттрактора эти многообразия могут пересекаться, но не должны иметь касаний.

Для псевдогиперболических аттракторов имеет место ослабленное условие, когда одно инвариантное подпространство сжимающее, а другое характеризуется тем, что элемент объема, ассоциирующегося с этим подпространством, претерпевает при эволюции во времени экспоненциальное растяжение. (Последнее, подчеркнем, совсем не подразумевает увеличения норм всех принадлежащих этому подпространству векторов.)

В системах с операторами эволюции, заданными гладкими функциями состояния, гораздо чаще приходится сталкиваться с феноменом квазиаттрактора (отображение Эно, модель Рёсслера, многие примеры в электронике и других дисциплинах) [8–13]. В случае квазиаттрактора динамика, наблюдаемая при расчетах или в эксперименте, хотя и выглядит хаотической, но характеризуется присутствием в той же области фазового пространства (наряду с хаотическими траекториями) также регулярных притягивающих множеств – «стоков» с узкими бассейнами притяжения, или же их возникновением при сколь угодно малой вариации параметров системы. Эту ситуацию связывают с наличием в области с квазиаттрактором касаний устойчивых и неустойчивых многообразий траекторий, неустраняемых малым «шевелением» параметров.

С другой стороны, если при задании оператора эволюции динамических систем допустить использование негладких или разрывных функций, то робастный хаос часто оказывается легко достижимым [12–16]. Примерами служат аттрактор Лози в модельном двумерном отображении, заданном кусочно-линейной функцией [17, 18], и аттрактор Белых, который был в свое время введен в рассмотрение в контексте систем фазовой автоподстройки [19] в предположении пилообразной формы зависимости функции передачи от начальной фазы [20–22]. Этим аттракторам отвечает хаотическая динамика, во многом аналогичная гиперболической (включая устройство устойчивых и неустойчивых многообразий хаотических траекторий, за исключением сингулярных траекторий, затрагивающих точки разрыва, которые естественно игнорировать как атипичные). В литературе об аттракторах Лози и Белых говорят как о *квазигиперболических*. Однако, следует подчеркнуть, они не могут претендовать на место в обсуждавшейся выше классификационной схеме, применимой в полной степени лишь к гладким системам.

Квазигиперболическая природа хаоса, о которой идет речь, может нарушаться при сглаживании функций, фигурирующих в определении оператора эволюции, и это ведет к появлению особенностей динамического поведения, характерных для квазиаттрактора (см., например, [23, 24]).

В работе [23], взяв за отправную точку кусочно-линейное отображение Лози $(x, y) \rightarrow (1 - a|x| - by, bx)$, авторы исследуют, что происходит при сглаживании излома функции в его определении. Если сглаживание производится на достаточно малом масштабе, то условия существования и устойчивости периодических точек отображения Лози и сглаженного отображения оказываются одинаковыми. В то же время сглаживание ведет к появлению классического бифуркационного каскада удвоений периода при вариации одного из параметров (сценарий Фейгенбаума), что не наблюдается в отображении Лози. В динамике сглаженного отображения после перехода к хаосу в соответствующей области параметра наблюдаются «окна регулярности», которые можно видеть на графике показателя Ляпунова как «провалы» из положительной области в область отрицательных значений. Авторы [23] полагают, что в перспективе данное направление исследований должно привести к прогрессу в аналитическом и численном исследовании трудных проблем, препятствующих аккуратному математическому рассмотрению динамики гладких отображений.

В работе [24], используя в качестве основной модели одномерное отображение с изломом, демонстрирующее робастный хаос, авторы обсуждают вопрос об изменении характера динамики при введении сглаживания. Основным результатом состоит в заключении о возникновении «окон периодичности», наблюдаемых при изменении управляющего параметра даже в том случае, когда сглаживание выполнено на очень малом масштабе. Рассмотрение конкретизируется применительно к экспериментальному устройству в виде электронной схемы, демонстрирующей исследуемые феномены.

Настоящая статья посвящена рассмотрению аттрактора Белых и обсуждению его трансформации при сглаживании используемой в модели пилообразной функции. Поскольку аттрактор Белых изначально появился в контексте радиофизических задач, предпринятый анализ представляет интерес с точки зрения возможного использования хаотической динамики на этом аттракторе в электронных устройствах. В разделе 1 рассматривается конкретный пример диссипативной системы, где реализуется данный тип динамики, а именно, задача о ротаторе под действием периодических толчков. Описание изменения состояния за период толчков приводит к отображению Заславского [25, 26], в котором при выборе пилообразной формы функции с разрывом, задающей зависимость интенсивности толчков от угла поворота $g(\theta)$, реализуется аттрактор Белых. В разделе 2 представлены соответствующие преобразования, сводящие задачу к стандартному виду отображения Белых [22]. В разделе 3 приводятся иллюстрации динамики системы с непрерывным временем на аттракторе Белых. В разделе 4 рассматривается динамика модели со сглаженной функцией $g(\theta)$ в зависимости от параметра, характеризующего масштаб сглаживания. В частности, представлены графики показателей Ляпунова, на которых по мере сглаживания функции $g(\theta)$ возникают все более и более выраженные окна периодической динамики, а также карты режимов, иллюстрирующие трансформацию языков синхронизации.

1. Отображение Заславского и подталкиваемый ротатор

Отображение Заславского описывает динамику многих диссипативных систем, характеризующихся периодичностью пространства состояний по одной из переменных. К ним относятся ротатор под действием периодических толчков [25, 26], импульсные

системы фазовой автоподстройки [19], задача о движении вблизи предельного цикла с периодическими толчками [4].

Следуя [25, 26], рассмотрим движение ротатора, характеризуемого угловой координатой θ и угловой скоростью ω , под действием периодических импульсных толчков, интенсивность которых зависит от мгновенной угловой координаты посредством функции $g(\theta)$, имеющей период 2π по своему аргументу. Полагая, что приложен также еще постоянный вращающий момент M , уравнения можно записать в виде

$$\dot{\theta} = \omega, \quad J\dot{\omega} = -\gamma\omega + kg(\theta) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) + M, \quad (1)$$

где J – момент инерции; γ – коэффициент трения; k – параметр, характеризующий интенсивность толчков. Введем безразмерное время $\tau = t/T$ и безразмерную угловую относительную скорость $w = (\omega - M\gamma^{-1})T$, тогда получим

$$\frac{d\theta}{d\tau} = w + \Delta, \quad \frac{dw}{d\tau} = -\Gamma w + Kg(\theta) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\tau - n), \quad (2)$$

где $\Gamma = \gamma T J^{-1}$, $K = k T J^{-1}$, $\Delta = M T J^{-1}$.

Пусть в момент перед n -м толчком состояние ротатора задано переменными (θ_n, w_n) . Сразу после толчка значения переменных будут $(\theta_n, w_n + Kg(\theta_n))$. Решая с этими начальными условиями уравнения, описывающие движение в интервале между толчками, $\dot{\theta} = w + \Delta$, $\dot{w} = -\Gamma w$, получим

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= [w_n + Kg(\theta_n)] e^{-\Gamma}, \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + [w_n + Kg(\theta_n)](1 - e^{-\Gamma})/\Gamma + \Delta. \end{aligned} \quad (3)$$

Вводя обозначения $x_n = \theta_n$, $y_n = \omega_n(1 - e^{-\Gamma})/\Gamma$, $a = K(1 - e^{-\Gamma})/\Gamma$, $\lambda = e^{-\Gamma}$, приходим к следующей компактной форме записи отображения Заславского:

$$x_{n+1} = x_n + y_n + ag(x_n) + \Delta \pmod{2\pi}, \quad y_{n+1} = \lambda[y_n + ag(x_n)]. \quad (4)$$

Вычисление определителя Якоби

$$\begin{vmatrix} \partial x_{n+1}/\partial x_n & \partial x_{n+1}/\partial y_n \\ \partial y_{n+1}/\partial x_n & \partial y_{n+1}/\partial y_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 + ag'(x_n) & 1 \\ \lambda g'(x_n) & \lambda \end{vmatrix} = \lambda \quad (5)$$

показывает, что в области параметра $0 < \lambda < 1$ отображение сжимает фазовый объем, так что должны присутствовать аттракторы.

2. Аттрактор Белых

Если фигурирующая в уравнениях (1)–(4) зависимость $g(x)$ задана как показанная на рис. 1 разрывная функция

$$g(x) = \begin{cases} x/\pi + 1, & -\pi < x < 0, \\ x/\pi - 1, & 0 < x < \pi, \end{cases} \quad g(x + 2\pi) = g(x), \quad (6)$$

то отображение (4) имеет в определенной области параметров квазигиперболический аттрактор. Этот аттрактор изначально был введен в рассмотрение и изучен В.Н.Белых в контексте систем фазовой синхронизации [20–22].

На рис. 2, а показан аттрактор отображения (4) с функцией (6) при значениях параметров

$$a = 1.2, \quad \Delta = 0, \quad \lambda = 0.48. \quad (7)$$

Чтобы воспроизвести построение Белых, замечаем, что отображению (4) с функцией (6) отвечает матрица Якоби

$$\begin{pmatrix} 1 + a/\pi & 1 \\ \lambda a/\pi & \lambda \end{pmatrix}, \quad (8)$$

а ее собственные числа и собственные векторы выражаются следующим образом:

$$\lambda_1 = [a + \pi + \pi\lambda - \sqrt{(a + \pi + \pi\lambda)^2 - 4\pi^2\lambda}] / (2\pi), \quad (9)$$

$$\lambda_2 = [a + \pi + \pi\lambda + \sqrt{(a + \pi + \pi\lambda)^2 - 4\pi^2\lambda}] / (2\pi),$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \frac{\pi}{\sqrt{(a + \pi + \pi\lambda)^2 - 4\pi^2\lambda}} \begin{pmatrix} -a - \pi + \pi\lambda + \sqrt{(a + \pi + \pi\lambda)^2 - 4\pi^2\lambda} \\ -2\lambda a \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \frac{\pi}{\sqrt{(a + \pi + \pi\lambda)^2 - 4\pi^2\lambda}} \begin{pmatrix} a + \pi - \pi\lambda + \sqrt{(a + \pi + \pi\lambda)^2 - 4\pi^2\lambda} \\ 2\lambda a \end{pmatrix}. \quad (11)$$

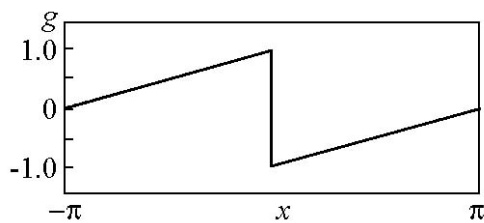


Рис. 1. График разрывной пилообразной функции $g(x)$, используемой при определении оператора эволюции системы с аттрактором Белых

Fig. 1. Plot of the discontinuous sawtooth function $g(x)$ used in the definition of the evolution operator for the system with Belykh attractor

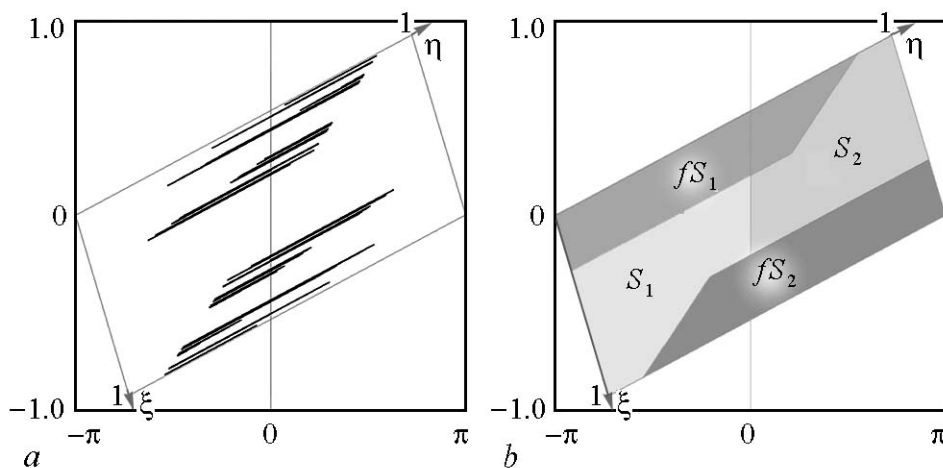


Рис. 2. Аттрактор отображения (4) с функцией (6) при $a = 1.2, \Delta = 0, \lambda = 0.48$ (а) и конфигурация областей, возникающих при применении отображения (б)

Fig. 2. Attractor of the map (4) with the function (6) for $a = 1.2, \Delta = 0, \lambda = 0.48$ (a) and configuration of the areas arising when the map is applied (b)

Нормировка собственных векторов выбрана здесь так, чтобы выполнялись соотношения

$$u_1 + u_2 = 2\pi, \quad v_1 + v_2 = 0.$$

Отображение (4) имеет неподвижную точку $x_0 = -\pi - \pi(1 - \lambda)\Delta/a$, $y_0 = -\lambda\Delta$, которую примем за начало отсчета новой системы координат (ξ, η) , определив ее оси как направления собственных векторов. На рис. 2 оси новой системы координат обозначены линиями серого цвета. Связь с исходными координатами дается соотношениями

$$x = -\pi - \pi(1 - \lambda)\Delta/a + \xi u_1 + \eta u_2, \quad y = -\lambda\Delta + \xi v_1 + \eta v_2 \quad (12)$$

или обратной заменой

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{[x + \pi + \pi(1 - \lambda)\Delta/a]v_2 - (y + \lambda\Delta)u_2}{u_1v_2 - u_2v_1}, \\ \eta &= \frac{-[x + \pi + \pi(1 - \lambda)\Delta/a]v_1 + (y + \lambda\Delta)u_1}{u_1v_2 - u_2v_1}. \end{aligned} \quad (13)$$

Рассмотрим область в виде четырехугольника, две вершины которого $(-\pi, 0)$ и $(\pi, 0)$ отвечают неподвижным точкам отображения, а стороны параллельны осям ξ и η . Эта область разделена на две части S_1 и S_2 вертикальной линией $x = 0$, на которой отображение имеет разрыв. Подобласти S_1 и S_2 отображаются в области в виде двух трапеций fS_1 и fS_2 , вытянутых вдоль неустойчивого собственного направления и сжатых вдоль устойчивого направления (рис. 2, b).

На рис. 3 представлены аналогичные изображения, но в собственных координатах (ξ, η) , которые соответствуют картинкам для отображения Белых в стандартной форме, приведенным в работе [22].

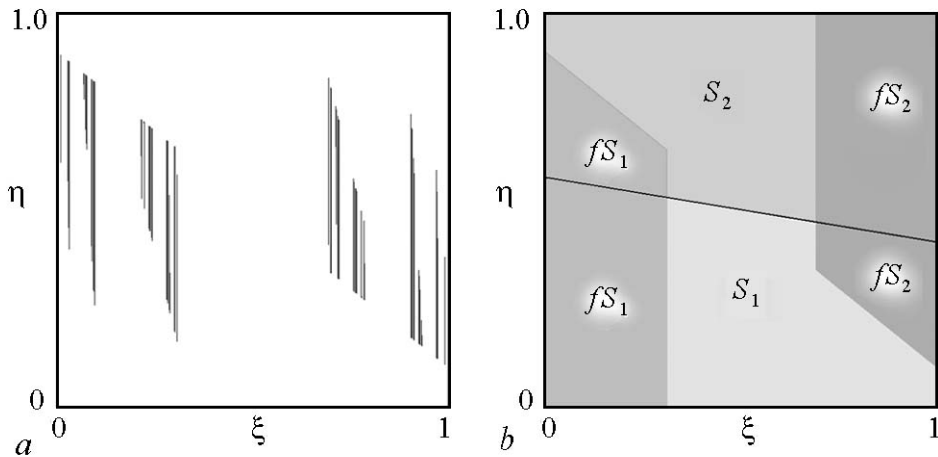


Рис. 3. Аттрактор отображения (4) с функцией (6) при $a = 1.2$, $\Delta = 0$, $\lambda = 0.48$ (a) и конфигурация областей, возникающих при применении отображения, (b), в координатах, определенных через собственные векторы. Наклонная черная линия показывает расположение разрыва и дается уравнением $(\xi - 1/2)u_1 + (\eta - 1/2)u_2 = 0$

Fig. 3. Attractor of the map (4) with the function (6) for $a = 1.2$, $\Delta = 0$, $\lambda = 0.48$ (a) and configuration of the regions arising when applying the map (b) in coordinates defined through the eigenvectors. The inclined black line shows disposition of the discontinuity and is given by the equation $(\xi - 1/2)u_1 + (\eta - 1/2)u_2 = 0$

Показатели Ляпунова, вычисленные для этого аттрактора с использованием стандартного алгоритма [27, 28, 14], составляют

$$\Lambda_1 = 0.440, \quad \Lambda_2 = -1.174.$$

Заметим, что при логарифмировании эти величины дают в точности собственные числа (9) матрицы (8), как это и должно быть в силу кусочно-линейной природы отображения. Размерность аттрактора по формуле Каплана–Йорке [29, 4] $D_{KI} = 1 + \Lambda_1/|\Lambda_2| = 1.375$, то есть дробная; действительно, данный аттрактор представляет собой фрактальный объект (см. изображения на рис. 2, а и 3, а).

3. Аттрактор системы с непрерывным временем

Вернемся к уравнениям движения ротатора с диссипацией под действием импульсных толчков – к системе с непрерывным временем (2).

На рис. 4 показаны графики зависимости от времени угловой координаты и безразмерной угловой скорости ротатора при динамике на аттракторе Бelykh, реализующимся при задании параметров согласно параметрам отображения (6). На рис. 5 показано изображение аттрактора системы с непрерывным временем (2) в расширенном фазовом пространстве при тех же параметрах. В силу периодичности расширенного фазового пространства по временной координате, картинку следует представлять повторяющейся с периодом 1.0 по вертикальной оси.

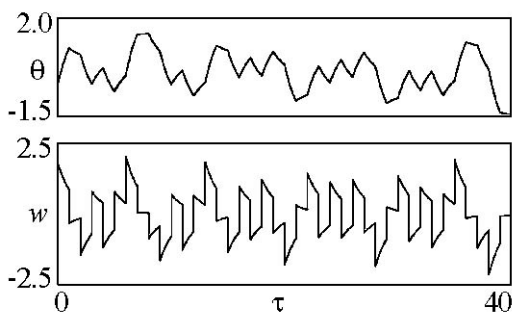


Рис. 4. Зависимости от времени угловой координаты и безразмерной угловой скорости при динамике на аттракторе Бelykh системы с непрерывным временем (2). Значения параметров $\Gamma = 0.7340$, $K = 1.6938$, $\Delta = 0$ соответствуют параметрам отображения (6) $a = 1.2$, $\lambda = 0.48$

Fig. 4. Time dependencies of the angular coordinate and the dimensionless angular velocity for dynamics on the Belykh attractor of the continuous time system (2); the parameter values $\Gamma = 0.7340$, $K = 1.6938$, $\Delta = 0$ correspond to the parameters of the map (6) $a = 1.2$, $\lambda = 0.48$

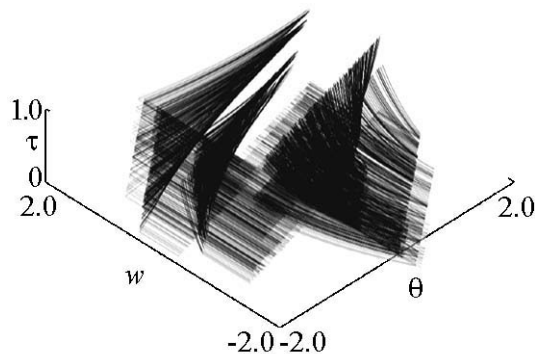


Рис. 5. Изображение аттрактора Бelykh системы с непрерывным временем (2) в расширенном фазовом пространстве, которое следует представлять повторяющимся с периодом 1.0 по вертикальной оси. Значения параметров $\Gamma = 0.7340$, $K = 1.6938$, $\Delta = 0$ соответствуют параметрам отображения (6) $a = 1.2$, $\lambda = 0.48$

Fig. 5. Belykh attractor of the continuous time system (2) in the extended phase space; the image should be regarded as periodically repetitive with period 1.0 along the vertical axis. The parameter values $\Gamma = 0.7340$, $K = 1.6938$, $\Delta = 0$ correspond to the parameters of the map (6) $a = 1.2$, $\lambda = 0.48$

4. Модель со сглаживанием разрыва: Разрушение аттрактора Белых

Перейдем к обсуждению вопроса о том, как меняется динамика системы с данным типом аттрактора при сглаживании присутствующей в определении оператора эволюции пилообразной функции. Для этого введем следующее семейство функций, зависящее от параметра (рис. 6):

$$g_{\mu}(x) = \begin{cases} (1/2)\alpha^3 x^3 - (3/2)\alpha x, & |\alpha x| \leq \mu + 1, \\ (1 + \mu)^3 (x/\pi - \operatorname{sgn} x), & |\alpha x| > \mu + 1, \end{cases} \quad (14)$$

$$\alpha = \frac{2(1 + \mu)^3}{3\pi\mu(2 + \mu)}, \quad g(x + 2\pi) = g(x).$$

Предел $\mu \rightarrow 0$ отвечает разрывной функции, показанной на рис. 1.

На рис. 7 показан аттрактор в расширенном фазовом пространстве для системы с непрерывным временем (2) со сглаженной пилообразной функцией, где параметр сглаживания задан равным 0.03. Его можно сравнить с изображением аттрактора Белых на рис. 5 (чтобы увидеть различия, обратите внимание на центральную часть рисунка).

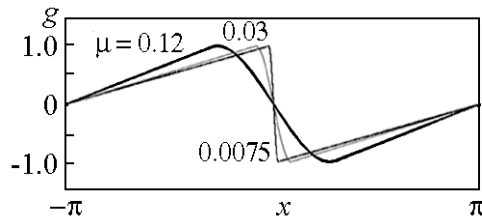


Рис. 6. Графики функций семейства $g_{\mu}(x)$ при различных величинах параметра сглаживания

Fig. 6. Functions of the family $g_{\mu}(x)$ for different values of the smoothing parameter

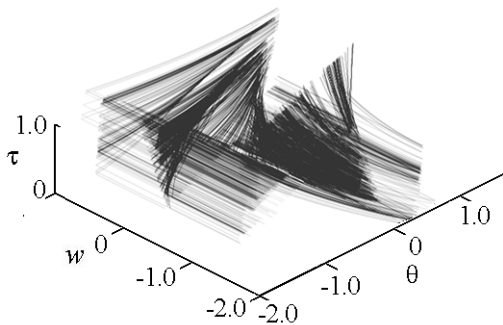


Рис. 7. Изображение аттрактора системы (2) со сглаженной функцией $g_{\mu}(\theta)$ в расширенном фазовом пространстве при $\mu = 0.03$. Остальные параметры такие же, как на рис. 5.

Fig. 7. Attractor of the system (2) in the extended phase space with the smoothed function $g_{\mu}(\theta)$ for $\mu = 0.03$. The remaining parameters are the same as in Fig. 5

В силу периодичности по временной координате, картинку следует представлять повторяющейся с периодом 1.0 по вертикальной оси.

На рис. 8 показаны аттракторы системы с дискретным временем – отображения (4) с функцией (14) в виде двумерных портретов при различных величинах параметра сглаживания μ .

Как можно видеть на диаграммах a , b , c , при сглаживании пилообразной функции характерное устройство аттрактора Белых видоизменяется: структура дополняется появлением «нитей», соединяющих наискосок ранее разделенные «верхнюю» и «нижнюю» часть аттрактора.

На рис. 9 показан график показателей Ляпунова, рассчитанных численно с использованием стандартного алгоритма [27, 28, 14], в зависимости от параметра сглаживания μ . Появление на графике провалов старшего показателя в отрицательную область, ассоциирующихся с «окнами» периодической динамики, связано с возможностью посещения траекторией на аттракторе области

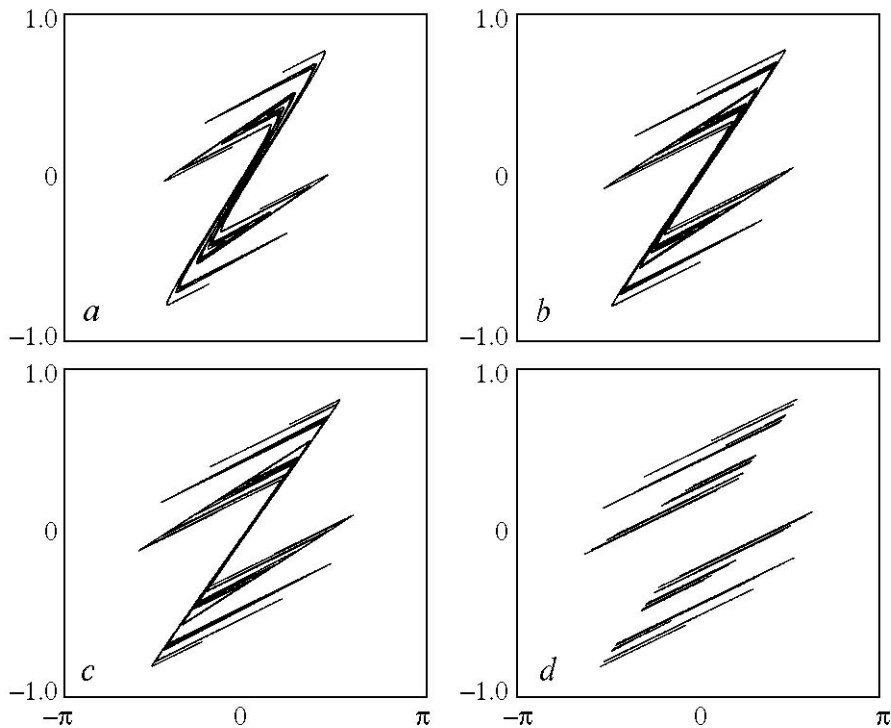


Рис. 8. Аттрактор отображения со сглаженной функцией, даваемой формулой (14) при $\mu = 0.03$ (a), 0.015 (b) и 0.0075 (c), и аттрактор Белых (d). Параметры: $\lambda = 0.48$, $a = 1.2$, $\Delta = 0$

Fig. 8. Attractor of the map with smoothed function given by (14) with $\mu = 0.03$ (a), 0.015 (b) and 0.0075 (c), and the Belykh attractor (d). Parameters $\lambda = 0.48$, $a = 1.2$, $\Delta = 0$

сглаживания пилообразной функции. Это свидетельствует о нарушении квазигиперболической природы аттрактора. При вычислениях с лучшим разрешением по параметру и увеличенным временным интервалом для оценки показателей Ляпунова количество различимых «окон» увеличивается.

Завершая изложение, уместно напомнить, что одно из характерных свойств отображения Заславского с гладкой функцией $g(x)$ состоит в присутствии областей периодических режимов динамики на плоскости параметров – языков Арнольда [14]. Представляется интересным обсудить это в контексте описанной выше картины.

На рис. 10 показаны карты режимов отображения Заславского (4) с функцией (14) при различных величинах

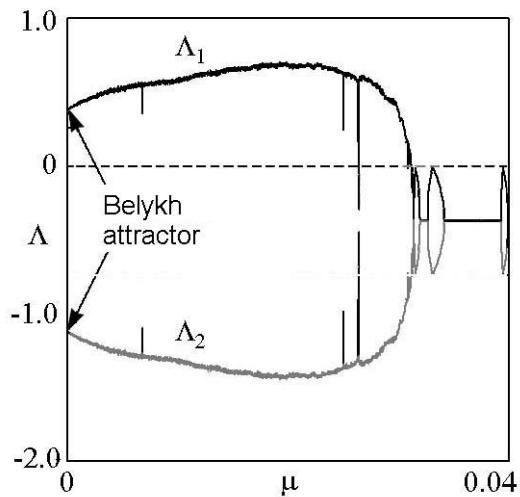


Рис. 9. Показатели Ляпунова в зависимости от параметра сглаживания μ для отображения с функцией (14). Остальные параметры $\lambda = 0.48$, $a = 1$, $\Delta = 0$

Fig. 9. Lyapunov exponents depending on the smoothing parameter μ for the map with function (14); the remaining parameters are $\lambda = 0.48$, $a = 1$, $\Delta = 0$

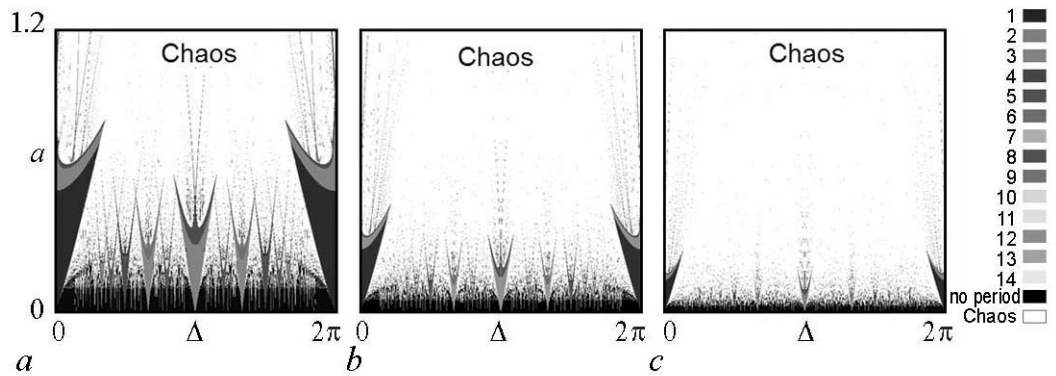


Рис. 10. Картина языков Арнольда на плоскости параметров отображения с функцией (14) в зависимости от параметра сглаживания: $\mu = 0.03$ (a), 0.015 (b) и 0.0075 (c). Параметр $\lambda = 0.48$. Белый цвет отвечает хаосу (положительный показатель Ляпунова), а черный – квазипериодической динамике

Fig. 10. A picture of Arnold's tongues on the parameter plane of the map with the function (14) depending on the smoothing parameter at $\mu = 0.03$ (a), 0.015 (b) and 0.0075 (c). The parameter λ equals 0.48. White color corresponds to chaos (positive Lyapunov exponent), and black to quasi-periodic dynamics

нах параметра сглаживания на плоскости параметров расстройки Δ и интенсивности толчков a . Процедура состояла в сканировании путем перебора узлов сетки с некоторым шагом по двум параметрам. В каждой точке выполняется порядка 10^3 итераций отображения совместно с линеаризованным отображением для оценки показателя Ляпунова. По результатам последних шагов итераций проводится анализ присутствия или отсутствия периода повторения состояний (в смысле совпадения угловой координаты по модулю 2π) с некоторым заданным изначально уровнем допустимой погрешности. При обнаружении периодичности соответствующий пиксель на диаграмме обозначается тем или иным тоном серого цвета, определяемым периодом повторения состояний, и производится переход к анализу следующей точки на плоскости параметров. В качестве начальных условий в новой точке задается состояние, полученное в итоге итераций в предыдущей точке («сканирование с наследованием»), что способствует ускорению сходимости к установившемуся режиму динамики. Черный цвет на карте отвечает непериодической динамике. Белым цветом отмечены области хаоса, диагностируемого по положительной величине показателя Ляпунова.

Периодическое поведение реализуется в областях в виде характерных языков (языки Арнольда). Периодические режимы внутри языков Арнольда, интерпретируются как синхронизация системы периодическим воздействием. Наличие большого числа языков говорит о том, что синхронизация может реализоваться на различных гармониках и субгармониках внешней силы. На самом деле, на рисунке видны только самые широкие языки. Пока параметр a невелик, между языками остается место для квазипериодических режимов. В области больших значений параметра a внутри языков Арнольда можно видеть сложную картину, включающую точки сборки, линии складок и удвоений периода. При движении внутри языка Арнольда в общем направлении увеличения a можно наблюдать возникновение хаоса через каскад удвоений периода. Вычисления показывают, что языки Арнольда, присутствующие для сглаженной функции $g_\mu(x)$, уменьшаются в размерах и сходят «на нет» в предельном случае разрывной пилообразной функции $\mu \rightarrow 0$.

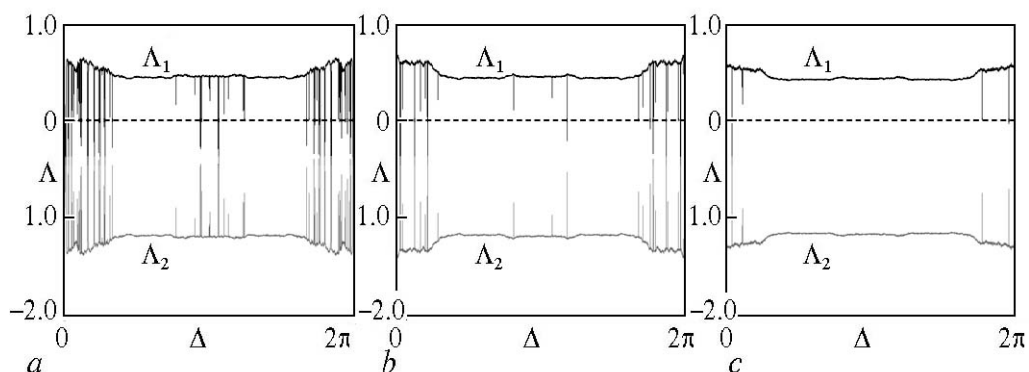


Рис. 11. Показатели Ляпунова в зависимости от параметра расстройки Δ для отображения с функцией (14) при разных величинах параметра сглаживания: $\mu = 0.03$ (a), 0.015 (b) и 0.0075 (c). Остальные параметры: $\lambda = 0.48$, $a = 1.0$

Fig. 11. Lyapunov exponents, depending on the detuning parameter Δ for the map with the function (14) for different values of the smoothing parameter at $\mu = 0.03$ (a), 0.015 (b) and 0.0075 (c). The remaining parameters are $\lambda = 0.48$, $a = 1.0$

На рис. 11 показаны графики зависимости двух показателей Ляпунова отображения Заславского от параметра расстройки при постоянном параметре амплитуды толчков a для трех различных величин параметра сглаживания. Эти графики соответствуют проходу на картах плоскости параметров на рис. 10 по горизонтальной линии $a = 1$. На них также можно наблюдать «провалы» – окна периодичности, отвечающие на картах режимов узким полосам регулярной динамики, вытянутым в область хаоса. В областях, где отсутствуют различимые на графиках «провалы», значения показателей Ляпунова близки к величинам, отвечающим аттрактору Белых (12). При уменьшении параметра сглаживания количество различимых «окон» при принятой в вычислениях степени разрешения становится меньше, и в пределе $\mu \rightarrow 0$ они, очевидно, исчезают.

Заключение

Аттрактор Белых – квазигиперболический аттрактор системы с оператором эволюции, заданным с использованием разрывной функции.

Аттрактор этого типа встречается в радиофизическом контексте. Здесь он рассмотрен для конкретности применительно к отображению Заславского, описывающему диссипативный ротатор с периодическими толчками при пилообразной форме зависимости интенсивности толчков от угловой координаты. Подробно представлены выкладки, приводящие уравнения к стандартной форме отображения Белых. Представлены иллюстрации динамического поведения системы. Показано, что сглаживание пилообразной функции ведет к разрушению квазигиперболической природы аттрактора и появлению феноменов, характерных для квазиаттрактора – окон регулярности и провалов на графике зависимости показателя Ляпунова от параметра. Тем не менее при малом масштабе сглаживания имеются области по параметру, где эти окна неразличимы и в конкретных реализациях системы будут эффектив-

но маскироваться шумами. В этих областях радиофизические устройства с данным типом аттрактора можно использовать как генераторы практически грубого хаоса, игнорируя отличие от квазигиперболической ситуации.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 17-12-01008.

Библиографический список

1. *Дмитриев А.С., Ефремова Е.В., Максимов Н.А., Панас А.И.* Генерация хаоса. М.: Техносфера, 2012. 432 с.
2. *Смейл С.* Дифференцируемые динамические системы // УМН. 1970. Т. 25:1 (151). С. 113–185.
3. *Каток А.Б., Хасселблат Б.* Введение в современную теорию динамических систем. М.: Факториал, 1999. 768 с.
4. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос и однородно гиперболические аттракторы: От математики к физике // УФН. 2011. Т. 181. № 2. С. 121–149.
5. *Bonatti C., Diaz L.J., Viana M.* Dynamics beyond Uniform Hyperbolicity. A Global Geometric and Probabilistic Perspective. Berlin, Heidelberg, New-York: Springer, 2005. 384 p.
6. *Тураев Д.В., Шильников Л.П.* Пример дикого странного аттрактора // Математический сборник. 1998. Т. 189, № 2. С. 137–160.
7. *Гонченко А.С., Гонченко С.В., Казаков А.О., Козлов А.Д.* Математическая теория динамического хаоса и её приложения: Обзор. Часть 1. Псевдогиперболические аттракторы // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2017. Т. 25, № 2. С. 4–36.
8. *Afraimovich V.S.* Strange attractors and quasiattractors // Nonlinear and Turbulent Processes in Physics. 1984. Vol. 1. Pp. 1133–1138.
9. *Shilnikov L.* Mathematical problems of nonlinear dynamics: A tutorial // International Journal of Bifurcation and Chaos. 1997. Vol. 7, No. 9. Pp. 1953–2001.
10. *Hénon M.* A two-dimensional mapping with a strange attractor // The Theory of Chaotic Attractors. New-York: Springer, 1976. Pp. 94–102.
11. *Rössler O.E.* An equation for continuous chaos // Physics Letters A. 1976. Vol. 57, No. 5. Pp. 397–398.
12. *Анищенко В.С.* Сложные колебания в простых системах: Механизмы возникновения, структура и свойства динамического хаоса в радиофизических системах. М.: Наука, 1990. 312 с.
13. *Лоскутов А.Ю.* Очарование хаоса // Успехи физических наук. 2010. Т. 180, № 12. С. 1305–1329.
14. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. Москва: Физматлит, 2001. 296 с.
15. *Banerjee S., Yorke J.A., Grebogi C.* Robust chaos // Physical Review Letters. 1998. Vol. 80, No. 14. Pp. 3049–3052.
16. *Elhadj Z., Sprott J.C.* Robust Chaos and Its Applications. Singapore: World Scientific, 2011. 472 p.

17. *Lozi R.* Un attracteur étrange du type attracteur de Hénon // *Le Journal de Physique Colloques.* 1978. Vol. 39, No. C5. P. C5-9–C5-10.
18. *Botella–Soler V., Castelo J.M., Oteo J.A., Ros J.* Bifurcations in the Lozi map // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical.* 2011. Vol. 44, No. 30. P. 305101.
19. Системы фазовой синхронизации / Ред. В.В. Шахгильдян и Л.Н. Белюстина. М.: Радио и связь, 1982. 288 с.
20. *Белых В.Н.* О моделях систем фазовой синхронизации и их исследовании // *Динамика систем. Межвузовский сборник.* 1976. № 11. С. 23–32.
21. *Белых В.Н.* Хаотические и странные аттракторы двумерного отображения // *Математический сборник.* 1995. Т. 186, № 3. С. 3–18.
22. *Belykh V.N., Belykh I.* Belykh map // *Scholarpedia.* 2011. Vol. 6, No. 10. P. 5545.
23. *Deshpande A., Chen Q., Wang Y., Lai Y.C., Do Y.* Effect of smoothing on robust chaos // *Physical Review E.* 2010. Vol. 82, No. 2. 026209.
24. *Aziz-Alaoui M.A., Robert C., Grebogi C.* Dynamics of a Hénon–Lozi-type map // *Chaos, Solitons & Fractals.* 2001. Vol. 12, No. 12. Pp. 2323–2341.
25. *Zaslavsky G.M.* The simplest case of a strange attractor // *Physics Letters A.* 1978. Vol. 63, No. 3. Pp. 145–147.
26. *Мун Ф.* Хаотические колебания. Вводный курс для научных работников и инженеров. Москва: Мир, 1990. 311 с.
27. *Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.M.* Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems: A method for computing all of them. Part 1: Theory // *Meccanica.* 1980. Vol. 15, No. 1. Pp. 9–20.
28. *Shimada I., Nagashima T.* A numerical approach to ergodic problem of dissipative dynamical systems // *Progr. Theor. Phys.* 1979. Vol. 61, No. 6. Pp. 1605–1616.
29. *Kaplan J.L., Yorke J.A.* A chaotic behavior of multi-dimensional differential equations. In: *Functional Differential Equations and Approximations of Fixed Points // Lecture Notes in Mathematics.* Vol. 730 // Ed. by Peitgen H.O. and Walther H.O. Berlin, N.-Y.: Springer, 1979. Pp. 204–227.

References

1. Dmitriev A.S., Efremova E.V., Maksimov N.A., Panas A.I. *Generation of Chaos.* Moscow: Technosfera, 2012. 432 p. (in Russian).
2. Smale S. Differentiable dynamical systems. *Bull. Amer. Math. Soc. (NS)*, 1967, vol. 73, pp. 747–817.
3. Katok A. and Hasselblatt B. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems.* Cambridge: Cambridge University Press, 1995. 824 p.
4. Kuznetsov S.P. Dynamical chaos and uniformly hyperbolic attractors: From mathematics to physics. *Physics–Uspekhi*, 2011, vol. 54, no. 2, pp. 119–144.
5. Bonatti C., Diaz L.J., Viana M. *Dynamics Beyond Uniform Hyperbolicity. A Global Geometric and Probabilistic Perspective.* Berlin, Heidelberg, New-York: Springer, 2005. 384 p.

6. Turaev D.V., Shil'nikov L.P. An example of a wild strange attractor. *Sbornik: Mathematics*, 1998, vol. 189, no. 2, pPp. 291–314.
7. Gonchenko A.S., Gonchenko S.V., Kazakov A.O., Kozlov A.D. Mathematical theory of dynamical chaos and its applications : Review. Part 1. Pseudohyperbolic attractors. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2017, vol. 25, iss. 2, pp. 4–36 (in Russian).
8. Afraimovich V.S. Strange attractors and quasiattractors. *Nonlinear and turbulent processes in physics*, 1984, vol. 1, pp. 1133–1138.
9. Shilnikov L. Mathematical problems of nonlinear dynamics : A tutorial. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 1997, vol. 7, no. 9, pp. 1953–2001.
10. Hénon M. A Two-dimensional Mapping with a Strange Attractor. *The Theory of Chaotic Attractors*. New York: Springer, 1976. Pp. 94–102.
11. Rössler O. E. An equation for continuous chaos. *Physics Letters A*, 1976, vol. 57, no. 5, pp. 397–398.
12. Anishchenko V.S. *Dynamical Chaos. Models and Experiments : Appearance Routes and Structure of Chaos in Simple Dynamical Systems*. Singapore: World Scientific, 1995. 383 p.
13. Loskutov A. Fascination of chaos. *Physics–Uspekhi*, 2010, vol. 53, no. 12. pp. 1257–1280.
14. Kuznetsov S.P. *Dynamical Chaos*. Moscow: Fizmatlit, 2001. 296 p. (in Russian).
15. Banerjee S., Yorke J.A., Grebogi C. Robust chaos. *Physical Review Letters*, 1998, vol. 80, no. 14, pp. 3049–3052.
16. Elhadj Z., Sprott J.C. *Robust Chaos and Its Applications*. Singapore: World Scientific, 2011. 472 p.
17. Lozi R. Un attracteur strange du type attracteur de Hénon. *Le Journal de Physique Colloques*, 1978, vol. 39, no. C5, pp. C5-9–C5-10.
18. Botella-Soler V., Castelo J. M., Oteo J. A., Ros J. Bifurcations in the Lozi map. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 2011, vol. 44, no. 30, 305101.
19. Shakhildyan V. V., Belyustina L. N., (Eds). *Systems of Phase Synchronization*. Moscow: Radio i Svyaz, 1982. 288 p. (in Russian).
20. Belykh V.N. On models of phase synchronization systems and their study. Gorky: State University Press. *Dinamika System*, 1976, no. 11, pp. 23–32 (In Russian).
21. Belykh V.N. Chaotic and strange attractors of a two-dimensional map. *Sb. Math. USSR*, 1995, vol. 186, pp. 311–326.
22. Belykh V. N., Belykh I. Belykh map. *Scholarpedia*, 2011, vol. 6, no. 10, p. 5545.
23. Aziz-Alaoui M. A., Robert C., Grebogi C. Dynamics of a Henon–Lozi-type map. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2001, vol. 12, no. 12, pp. 2323–2341.
24. Deshpande A., Chen Q., Wang Y., Lai Y.C., Do Y. Effect of smoothing on robust chaos. *Physical Review E*, 2010, vol. 82, no. 2, 026209.
25. Zaslavsky G.M. The simplest case of a strange attractor. *Physics Letters A*, vol. 63, no. 3, pp. 145–147.
26. Moon F.C. *Chaotic Vibrations: An Introduction for Applied Scientists and Engineers*. New-York: Wiley, 1987. 219 p.

27. Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J. M. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; A method for computing all of them. Part 1: Theory. *Meccanica*, 1980, vol. 15, no. 1, pp. 9–20.
28. Shimada I., Nagashima T. A numerical approach to ergodic problem of dissipative dynamical systems. *Progr. Theor. Phys.*, 1979, vol. 61, no. 6, pp. 1605–1616.
29. Kaplan J.L., Yorke J.A. A chaotic behavior of multi-dimensional differential equations. In: *Functional Differential Equations and Approximations of Fixed Points. Lecture Notes in Mathematics*, vol. 730. Eds by Peitgen H.O. and Walther H.O. Berlin, N.-Y.: Springer, 1979. pp. 204–227.

Кузнецов Сергей Петрович – родился в Москве (1951). Окончил Саратовский государственный университет (1973). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (СГУ, 1977) и доктора наук (СГУ, 1987) по специальности радиофизика. Профессор базовой кафедры динамических систем СГУ. Главный научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН. Руководит лабораторией теоретической нелинейной динамики. Главный научный сотрудник лаборатории нелинейного анализа и конструирования новых средств передвижения Удмуртского государственного университета. Автор монографий «Динамический хаос и гиперболические аттракторы: От математики к физике», «Hyperbolic Chaos. A Physicist's View», «Strange Nonchaotic Attractors» (совместно с А. Пиковским и У. Фойдель), а также учебно-научных монографий «Динамический хаос» и «Нелинейные колебания» (в соавторстве с А.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным). Опубликовал свыше 200 научных статей по нелинейной динамике, радиофизике и электронике. Под его руководством защищены двенадцать кандидатских диссертаций. Лауреат Государственной научной стипендии для ученых России (1994–1996), Соросовский доцент (1998), Соросовский профессор (2000, 2001). Член редакционной коллегии журналов «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика», «Regular and Chaotic Dynamics», «Нелинейная динамика», «Известия Саратовского университета – Новая серия. Серия Физика».



410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
 Саратовский филиал ИРЭ имени В.А. Котельникова РАН
 410012, Саратов, Астраханская, 83
 Национальный исследовательский Саратовский государственный университет
 426034 Ижевск, ул. Университетская, 1
 Удмуртский государственный университет
 E-mail: spkuz@yandex.ru