



УДК 517.9

## Каскад бифуркаций удвоения инвариантной кривой и квазипериодический аттрактор Эно в дискретной модели Лоренца-84



Е. С. Попова, Н. В. Станкевич, А. П. Кузнецов

Попова Елена Сергеевна, соискатель, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, lenochkafnp@yandex.ru

Станкевич Наталия Владимировна, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Саратовский филиал Института радиотехники и электроники имени В. А. Котельникова РАН; профессор кафедры «Радиоэлектроника и телекоммуникации», Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А., stankevichnv@mail.ru

Кузнецов Александр Петрович, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Саратовский филиал Института радиотехники и электроники имени В. А. Котельникова РАН, arkuz@rambler.ru

Представлено исследование трехмерного отображения, полученного посредством дискретизации осциллятора Лоренца-84. Изучена структура плоскости параметров, классифицированы различные типы аттракторов: периодические, квазипериодические (с двумя и тремя несоизмеримыми частотами) и хаотические. Показано, что возникновение хаотических аттракторов в модели происходит через каскад бифуркаций инвариантных кривых. Хаотические аттракторы, возникающие таким образом, являются квазипериодическими аттракторами Эно и характеризуются одним положительным, одним нулевым и одним отрицательным показателями Ляпунова.

**Ключевые слова:** удвоение инвариантной кривой, квазипериодический аттрактор Эно, динамический хаос, отображение.

Поступила в редакцию: 26.03.2020 / Принята: 08.05.2020 / Опубликовано: 0.09.2020

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

DOI: <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2020-20-3-222-232>

### Введение

Хаотическое поведение является одним из фундаментальных свойств нелинейных динамических систем, в том числе отображений [1–7]. Наиболее легко и достоверно можно диагностировать хаос с помощью старшего показателя Ляпунова [8], который будет положительным для хаотического режима. Хаотическая динамика может возникать в диффеоморфизмах размерности два и выше или даже в одномерных эндоморфизмах. Для отображений, в отличие от потоковых динамических систем, наличие

нулевого показателя Ляпунова в спектре не является обязательным, поскольку фазовая траектория будет дискретной и нет непрерывной траектории, вдоль которой малые отклонения не изменяются со временем. Наличие нулевого показателя в спектре будет свидетельствовать о возможности вложения такого отображения в поток, т. е. о такой вырожденной ситуации, когда движение изображающей точки во времени будет соответствовать траектории некоторой потоковой динамической системы.

Один из простейших способов построения отображений состоит в замене конечными разностями производных по времени в дифференциальных уравнениях, описывающих динамическую систему. Этот прием восходит к первым исследованиям в области нелинейной динамики и продолжает использоваться и в настоящее время [9–13]. Дискретизация обогащает динамику. Например, вместо одномерного потока с простейшей бифуркацией «седло-узел» получается логистическое отображение с каскадом бифуркаций удвоения периода и универсальностью Фейгенбаума. Дискретный осциллятор ван дер Поля демонстрирует простейшую инвариантную кривую, что соответствует тору в потоковой системе. Для системы Ресслера вместо предельных циклов и бифуркаций удвоения периода в дискретной версии становятся возможны инвариантные торы, их удвоения и т.д. [12]. С точки зрения разнообразия динамических режимов особый интерес представляют потоковые модели с автономной квазипериодической динамикой [14–15]. В результате дискретизации в таких системах можно ожидать возникновение тора в фазовом пространстве отображения и его разрушение.

В работе [13] был предложен обзор динамики отображений, полученных в результате дискретизации автономных трехмерных систем с квазипериодическим поведением. В [12–13] было показано, что в таких отображениях возможно наблюдать двумерный тор, удвоения инвариантных кривых, а также хаотическую и гиперхаотическую динамику. Однако авторы не классифицировали в системах особый тип хаоти-



ческого поведения, когда в спектре показателей Ляпунова содержится один положительный, один нулевой и один отрицательный показатели Ляпунова [16–19]. В работах [16–18] такой тип хаотического аттрактора был назван квазипериодическим аттрактором Эно. В недавней работе [19] была показана возможность возникновения такого особого типа хаоса (с дополнительным нулевым показателем в спектре) на примере потоковой шестимерной динамической системы, представляющей два связанных осцилляторов квазипериодических колебаний. В такой системе хаос с дополнительным нулевым показателем Ляпунова возникает в результате каскада бифуркаций удвоений двухчастотного тора.

В рамках данной работы будет показана возможность возникновения хаотических аттракторов, спектр показателей которых содержит один положительный, один близкий к нулю и один отрицательный показатели на примере дискретного осциллятора Лоренца-84. Представлен сценарий возникновения хаоса с близким к нулю показателем Ляпунова, после каскада бифуркаций инвариантной кривой.

Работа построена следующим образом. В разделе 1 представлен объект исследования – трехмерная потоковая система Лоренца-84, реализована процедура дискретизации и получено соответствующее трехмерное отображение. В разделе 2 показаны иллюстрации области пространства параметров, где наблюдается двумерный тор. В разделе 3 изучены вопросы разрушения инвариантной кривой, а также исследованы области, где формируется хаос с дополнительным нулевым показателем Ляпунова в результате каскада бифуркаций удвоений инвариантной кривой.

### 1. Объект исследования

В качестве объекта исследования рассмотрим осциллятор Лоренца-84 [20–24]. Данная модель была разработана Эдвардом Лоренцом в 1984 г., как одна из возможных моделей для описания циркуляции атмосферы [20]. Модель имеет трехмерное фазовое пространство и описывается системой трех обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -ax - y^2 - z^2 + aF, \\ \dot{y} &= -y + xy - bxz + G, \\ \dot{z} &= -z + bxy + xz. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $x, y, z$  – динамические переменные,  $a, b, F, G$  – параметры системы. Данная модель может демонстрировать каскады бифуркаций удвое-

ния периода, автономные квазипериодические колебания, а также их разрушение, в результате которого возникают хаотические колебания. Одной из особенностей модели является возможность возникновения в системе гомоклинических аттракторов [21].

Для перехода к дискретной модели используем метод искусственной дискретизации, который состоит в модификации исходной потоковой системы путем замены производных на конечные разности, что соответствует простейшему методу численного решения дифференциального уравнения методом Эйлера. Данный метод реализуется следующим образом.

Пусть есть некоторая система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x), \quad (2)$$

с которой выполняется следующая аппроксимация производных:

$$\dot{x} \rightarrow (x_{n+1} - x_n) / h, \quad (3)$$

где  $h$  – параметр, представляющий собой шаг интегрирования,  $x_{n+1}, x_n$  – значения динамической переменной до и после одного шага интегрирования по схеме Эйлера. Таким образом, вместо дифференциального уравнения (2) можно анализировать следующее отображение:

$$x_{n+1} = x_n + hf(x_n). \quad (4)$$

Применив данный подход к системе дифференциальных уравнений (1), получим трехмерное отображение следующего вида:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + h[-ax_n - y_n^2 - z_n^2 + aF], \\ y_{n+1} &= y_n + h[-y_n + x_n y_n - bx_n z_n + G], \\ z_{n+1} &= z_n + h[-z_n + bx_n y_n + x_n z_n]. \end{aligned} \quad (5)$$

Отображение (5) можно назвать дискретным осциллятором Лоренца-84. В качестве основного инструмента исследования динамики отображения будем использовать метод карт динамических режимов, при этом для идентификации динамических режимов будем использовать спектр показателей Ляпунова. Данная карта строится следующим образом: плоскость параметров сканируется с некоторым небольшим шагом, в каждой точке плоскости параметров с помощью алгоритма Бенеттина и ортогонализации по Грамму-Шмидту [26] рассчитывается полный спектр показателей Ляпунова. В соответствии со значениями показателей диагностируется наблюдаемый режим, и точка на плоскости параметров окрашивается в тот или иной цвет. В наших численных экспериментах для расчета



спектра показателей Ляпунова бралась траектория длиной 27000 итераций. Для отображений в спектре показателей нет обязательного условия присутствия нулевого показателя Ляпунова, так как динамика системы дискретна. Таким образом, для трехмерного отображения возможны следующие типы динамического поведения<sup>1</sup>

- устойчивая неподвижная точка,  $0 > \Lambda_1 > \Lambda_2 > \Lambda_3$  (красный цвет, *P*);
- инвариантная кривая,  $\Lambda_1 = 0, 0 > \Lambda_2 > \Lambda_3$  (желтый цвет, *IC*);
- тор,  $\Lambda_1 = \Lambda_2 = 0, 0 > \Lambda_3$  (синий цвет, *T*);
- хаос,  $\Lambda_1 > 0, 0 > \Lambda_2 > \Lambda_3$  (серый цвет, *C*);
- хаос с нулевым показателем Ляпунова, квазипериодический аттрактор Эно,  $\Lambda_1 > 0, \Lambda_2 = 0, 0 > \Lambda_3$  (черный цвет, *C0*);
- гиперхаос 1,  $\Lambda_1 > \Lambda_2 > 0, 0 > \Lambda_3$  (белый цвет, *HC1*);

<sup>1</sup> В скобках указаны цвет, которым отмечены точки соответствующего режима на карте, а также его символическое обозначение.

– гиперхаос с нулевым показателем Ляпунова,  $\Lambda_1 > \Lambda_2 > 0, \Lambda_3 = 0$  (белый цвет, *HC0*).

Значение нуля в численных экспериментах, конечно, имеет определенную точность. Для построения карт в данной работе порог нуля был установлен равным 0.0003. Таким образом, значения показателей Ляпунова более 0.0003 считались положительными; если они попадали в диапазон  $[-0.0003; -0.0003]$ , то такой показатель считался нулевым; и все значения меньше -0.0003 считаются отрицательными. В соответствии с указанной классификацией мы и будем диагностировать динамические режимы.

На рис. 1 представлена карта динамических режимов для отображения (5) на плоскости параметров  $(G, F)$  при  $h = 0.1$ . На рис. 1 справа также представлена цветовая палитра, в соответствии с которой были окрашены области с различными динамическими режимами. Таким образом, из семи возможных типов динамического поведения в системе наблюдается только четыре: устойчивая

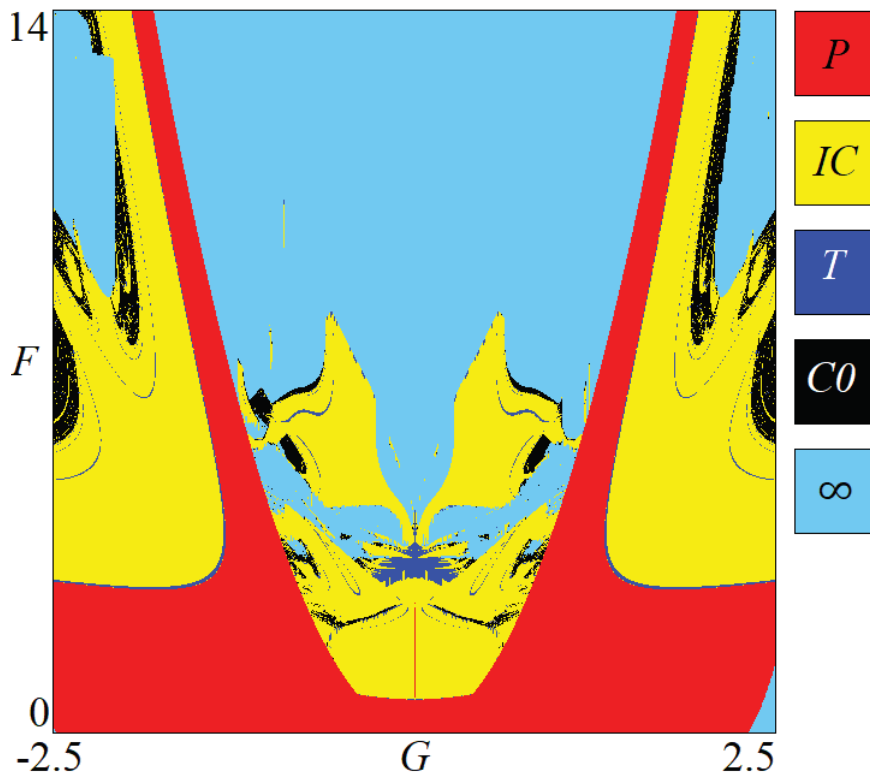


Рис. 1. Карта динамических режимов дискретного осциллятора Лоренца-84 (5) при  $a = 0.25, b = 4, h = 0.1$ . *P* – неподвижная точка, красный цвет; *IC* – инвариантная кривая, желтый цвет; *T* – тор, синий цвет; *C0* – хаос с нулевым показателем Ляпунова в спектре, черный цвет;  $\infty$  – разбегание на бесконечность, голубой цвет (цвет online)  
 Fig.1. Chart of dynamical regimes of the discrete Lorenz-84 oscillator (5) for  $a = 0.25, b = 4, h = 0.1$ . *P* is a fixed point, red color; *IC* is an invariant curve, yellow color; *T* is a torus, blue color; *C0* is chaos with zero Lyapunov exponent in the spectrum, black color;  $\infty$  is the regime of divergency, light blue color (color online)



неподвижная точка (красный цвет), инвариантная кривая (желтый цвет), тор (синий цвет) и хаос с нулевым показателем Ляпунова (черный цвет).

Обсудим устройство плоскости параметров. При малых значениях параметра  $F$  в системе наблюдается только устойчивое состояние равновесия. Карта обладает симметрией относительно линии равенства  $G = 0$ . Из состояния равновесия с увеличением параметра  $F$  рождается инвариантная кривая, причем наблюдаются две наиболее ярко выраженные линии, в окрестности  $G = 0$ , с порогом бифуркации  $F \sim 1$  и для достаточно больших значений параметра  $G$  ( $G > 2$ ). Эти линии соответствуют линиям потери устойчивости состояния равновесия в потоковой системе. Для малых значений параметра  $G$  также характерно возникновение области существования двумерного тора со встроенной системой языков инвариантных кривых.

Одной из характерных особенностей динамики отображения (5) является возможность

бифуркаций удвоения инвариантной кривой. Данная особенность является преемственной от потоковой системы, в которой наблюдались каскады бифуркаций удвоения циклов. Интересной особенностью является то, что в результате каскада бифуркаций удвоения инвариантной кривой в отображении (5) рождается хаотический режим, характеризующийся одним положительным, одним нулевым и одним отрицательным показателем Ляпунова, что не характерно для отображений. Далее рассмотрим более подробно трансформации инвариантных кривых, возникающих при различных параметрах.

## 2. Область существования двумерного тора

Рассмотрим особенности динамики системы в области малых значений параметра  $G$ . На рис. 2 представлены увеличенные фрагменты карты динамических режимов для данной области.

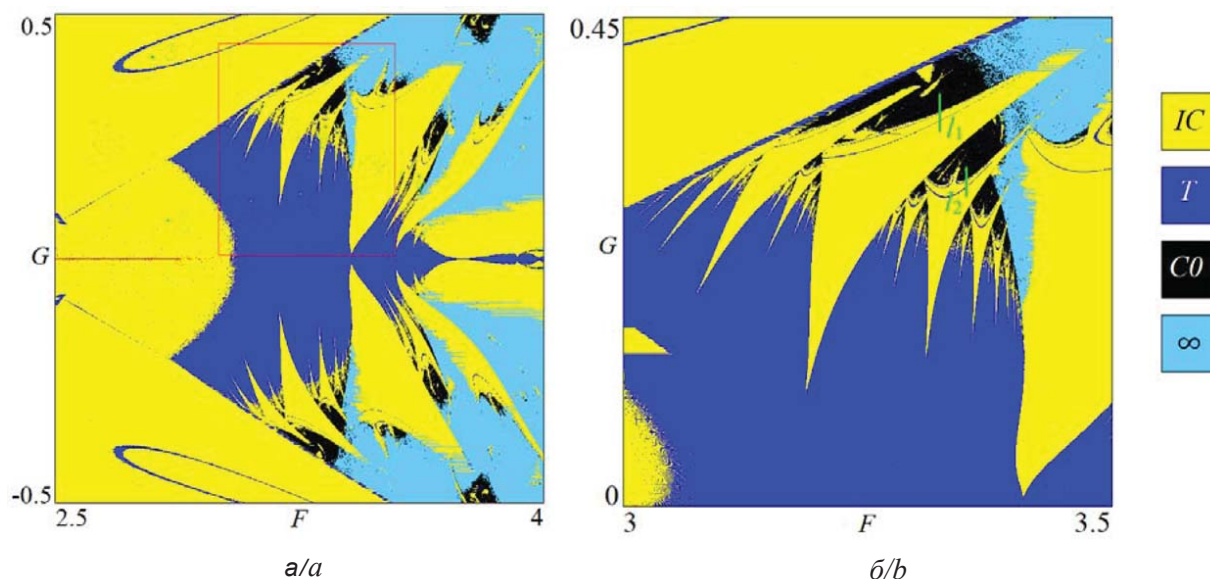


Рис. 2. Увеличенные фрагменты карты динамических режимов в окрестности области тора дискретного осциллятора Лоренца-84 (5):  $a = 0.25, b = 4, h = 0.1$

Fig. 2. Enlarged fragments of the chart of dynamical regimes in the area of the torus for the discrete Lorenz-84 oscillator (5):  $a = 0.25, b = 4, h = 0.1$

При увеличении параметра  $G$  и малых значениях параметра  $F$  происходит бифуркация удвоения базовой однооборотной инвариантной кривой, на рис. 3, *a*, 3, *б*, 3, *в* представлены данные трансформации на примере двумерных проекций отображения (5). На рис. 2, *a* хорошо видна линия рождения тора. Тор рождается на базе однооборотной инвариантной кривой при

малых отклонениях от нуля параметра  $G$  и увеличении параметра  $F$ . На рис. 3, *з*, 3, *д* представлены примеры фазовых портретов двумерного тора. При больших значениях параметра  $F$  внутри области двумерных торов наблюдаются языки с инвариантными кривыми. Языки имеют разные числа вращения, на рис. 3, *е* – 3, *и* показаны примеры фазовых портретов для различных языков.



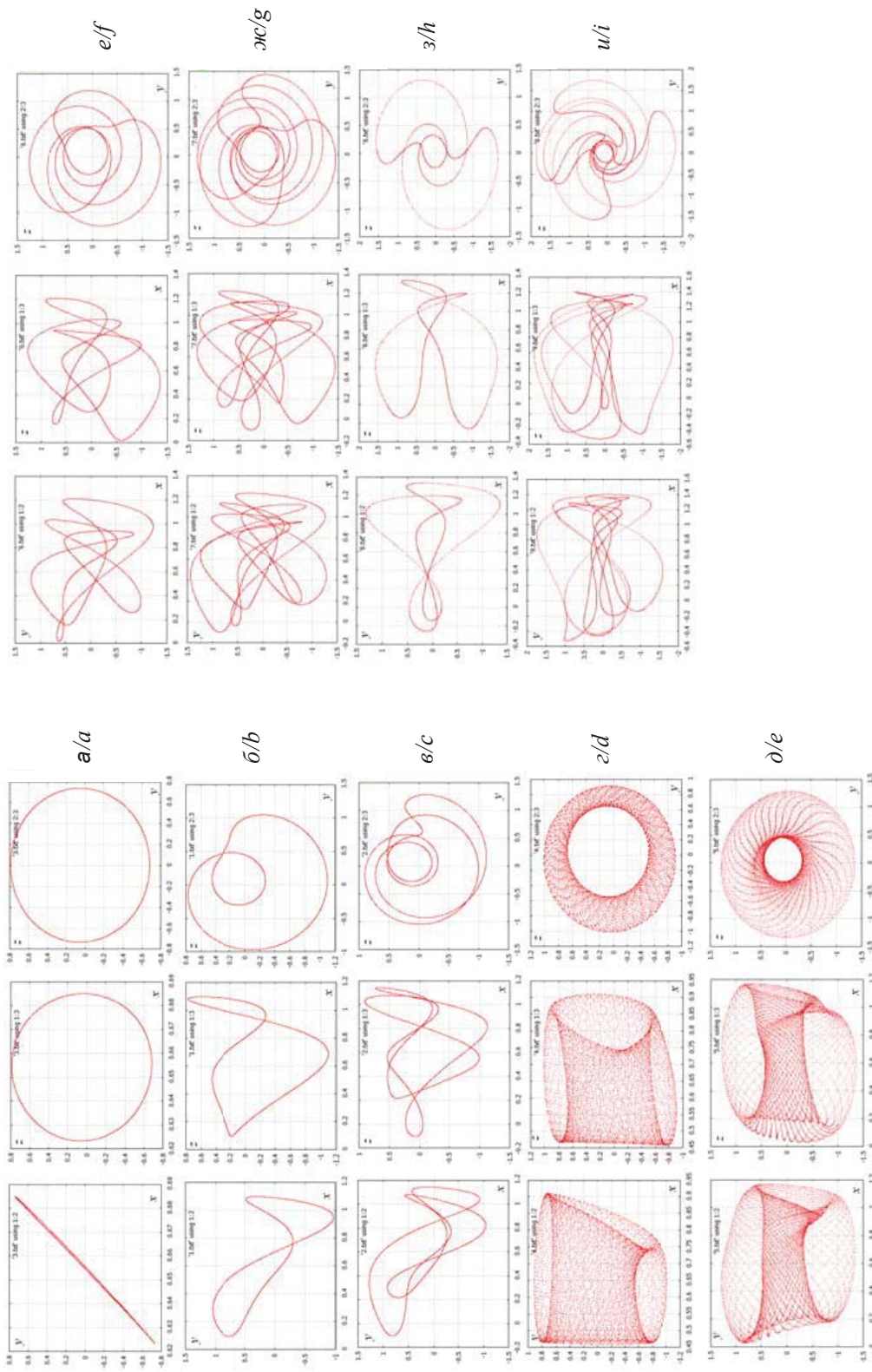


Рис. 3. Двумерные проекции фазовых портретов дискретного осциллятора Лоренца-84 (5) для различных точек плоскости параметров, указанных на рис. 2, *a*, *a* = 0.25, *b* = 4, *h* = 0.1. *a*)  $F = 2.15$ ,  $G = 0.078$ ; *б*)  $F = 2.66$ ,  $G = 0.268$ ; *в*)  $F = 2.8$ ,  $G = 0.413$ ; *г*)  $F = 3.1$ ,  $G = 0.117$ ; *д*)  $F = 3.26$ ,  $G = 0.133$ ; *е*)  $F = 3.24$ ,  $G = 0.29$ ; *ж*)  $F = 3.33$ ,  $G = 0.27$ ; *з*)  $F = 3.5$ ,  $G = 0.173$ ; *и*)  $F = 3.62$ ,  $G = 0.168$

Fig. 3. Two-dimensional projection of phase portraits in discrete Lorenz-84 oscillator (5) for different points on the parameter plane, marked in Fig. 2, *a*, *a* = 0.25, *b* = 4, *h* = 0.1. *a*)  $F = 2.15$ ,  $G = 0.078$ ; *b*)  $F = 2.66$ ,  $G = 0.268$ ; *c*)  $F = 2.8$ ,  $G = 0.413$ ; *d*)  $F = 3.1$ ,  $G = 0.117$ ; *e*)  $F = 3.26$ ,  $G = 0.133$ ; *f*)  $F = 3.24$ ,  $G = 0.29$ ; *g*)  $F = 3.33$ ,  $G = 0.27$ ; *h*)  $F = 3.5$ ,  $G = 0.173$ ; *i*)  $F = 3.62$ ,  $G = 0.168$



На рис. 2, б показан фрагмент карты показателей Ляпунова, демонстрирующий структуру языков. Хорошо видно, что внутри языков происходят бифуркации удвоения инвариантной кривой. А в результате каскада возникает хаос с нулевым показателем Ляпунова. Структура некоторых языков имеет характерные формы типа CrossRoad-Area и Spring-Area [1, 3, 26, 27]. Структуры CrossRoad-Area имеют следующее устройство: область устойчивости 2-тора ограничена линиями удвоений, а также двумя линиями складок, образующих нижнюю границу отростков. Линии складок продолжаютсся внутри области устойчивости 2-тора и сходятся в точке, которую в теории катастроф называют точкой сборки. Структура Spring-Area имеет схожие особенности: линии касательных бифуркаций, формирующих отростки границы области 2-тора, также имеют пересечение в точке сборки. Принципиально другое устройство в нижней области структуры: там имеются еще две особые точки, соответствующие вырожденной flip-бифуркации, между которыми находится линия бифуркации жесткого перехода через мультипликатор  $\mu = -1$ . Важным и принципиальным отличием данных структур в рассматриваемом случае является то, что все трансформации происходят не с неподвижными точками (как в классическом случае [26, 27]), а для инвариантной кривой.

### 3. Квазипериодический аттрактор Эно

В контексте данной задачи весьма интересным представляется вопрос исследования каскада бифуркаций удвоения инвариантной кривой [15, 28–33]. Данная проблема является дискуссионной уже более 40 лет. Большинство численных экспериментов показывают, что каскад бифуркаций удвоения инвариантной кривой конечный: происходит несколько бифуркаций удвоения и затем инвариантная кривая разрушается по какому-либо другому сценарию [15, 28–32], зачастую это потеря гладкости по сценарию Афраймовича-Шильникова [5]. Однако в некоторых работах авторы предполагают возможность и бесконечного каскада [33]. В рамках данной работы мы также не сможем дать однозначного ответа на данный вопрос, однако для рассматриваемой модели мы считаем, что есть предпосылки предполагать, что в ней возможен сценарий, демонстрирующий бесконечный каскад бифуркаций удвоения инвариантной кривой.

В работах [16–18] было введено понятие квазипериодического аттрактора Эно, который представляет собой произведение аттрактора Эно на тор, что приводит к формированию хаотического аттрактора, у которого сохранено двумерное нейтральное многообразие тора в потоковой системе, а в спектре показателей Ляпунова появляется дополнительный нулевой показатель, отвечающий нейтральному многообразию на торе. Примеры таких аттракторов были продемонстрированы на отображении [18] и неавтономной потоковой системе [16–17], в которых один нулевой показатель является обязательным. Недавно в [19] был описан универсальный сценарий формирования такого типа аттракторов на примере потоковой системы. Основным механизмом, приводящим к возникновению такого аттрактора, связан с поглощением аттрактором счетного множества седловых торов с двумерным нейтральным многообразием, возникших в результате каскада бифуркаций удвоения инвариантных кривых или двухчастотных торов.

Для исследования механизма возникновения квазипериодического аттрактора Эно проследим каскад бифуркаций удвоения инвариантной кривой. На рис. 4 представлены графики двух старших показателей Ляпунова в зависимости от параметра  $G$ , где показана последовательность удвоений инвариантной кривой. На рис. 3–6 представлена базовая инвариантная кривая, для которой рассматривались дальнейшие трансформации. С увеличением параметра  $G$  инвариантная кривая претерпевает каскад бифуркаций удвоения. На графиках хорошо просматриваются 10 бифуркаций удвоения инвариантной кривой. Затем инвариантная кривая разрушается, формируя хаотический аттрактор. Спектр показателей Ляпунова такого аттрактора имеет один положительный, один нулевой и один отрицательный показатели Ляпунова, что соответствует квазипериодическому аттрактору Эно. Аналогичные трансформации происходят на базе и других языков инвариантных кривых, в которых в результате каскада бифуркаций удвоения инвариантных кривых возникает хаотический аттрактор.

На рис. 5 представлены графики показателей Ляпунова для двух различных языков инвариантных кривых. На рис. 5, б, в и д, е также показаны базовые инвариантные кривые и хаотические

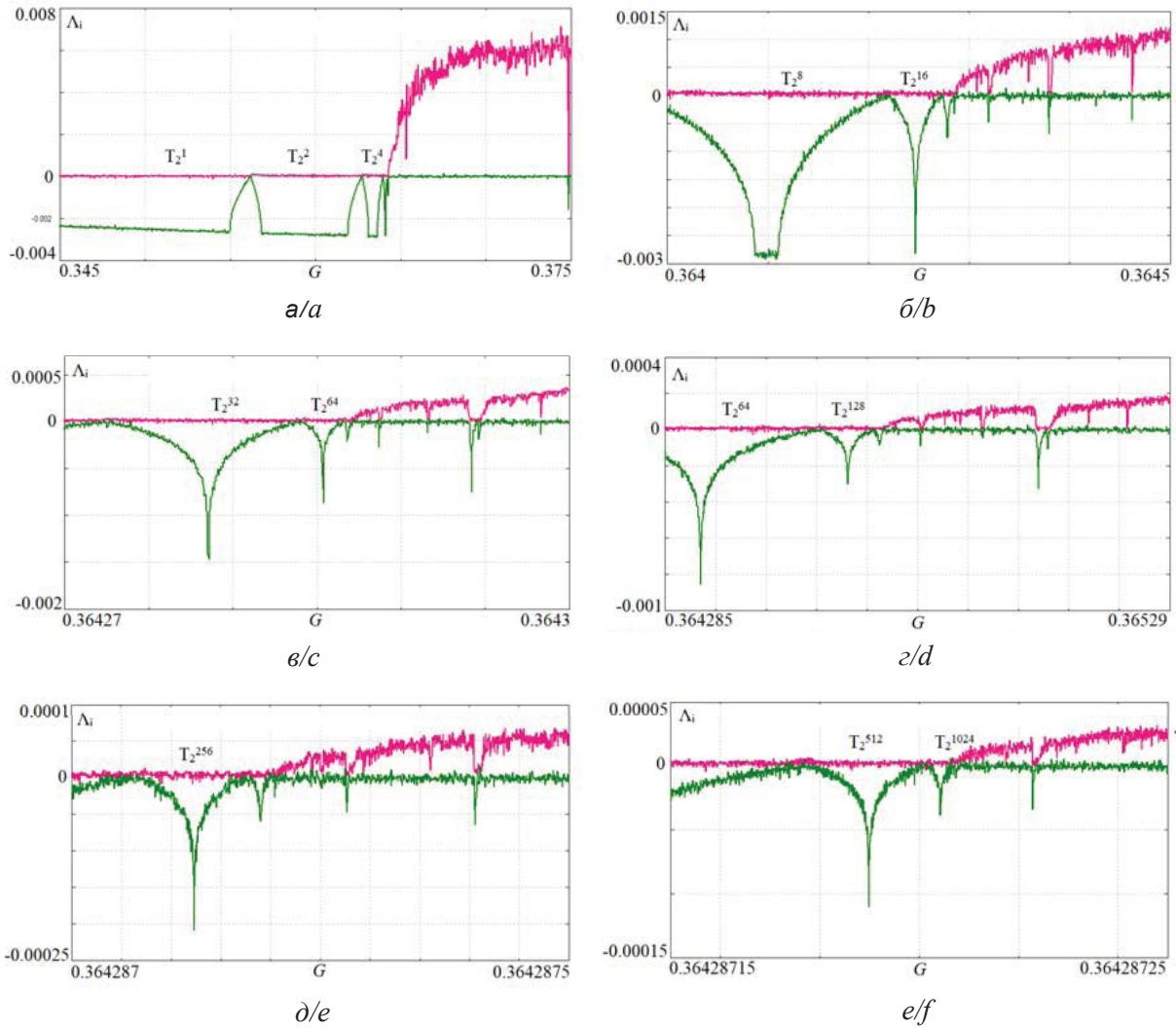


Рис. 4. График двух первых показателей Ляпунова (а) и его увеличенные фрагменты (б)–(е) дискретного осциллятора Лоренца-84 (5) в зависимости от параметра  $G$ ,  $a = 0.25$ ,  $b = 4$ ,  $h = 0.1$ ,  $F = 3.325$ . Красная линия соответствует старшему показателю Ляпунова, зеленая линия – второй показатель Ляпунова (цвет online)

Fig. 4. Plots of the first two Lyapunov exponents and their enlarged fragments for the discrete Lorenz-84 oscillator (5) in dependence on the parameter  $G$ ,  $a = 0.25$ ,  $b = 4$ ,  $h = 0.1$ ,  $F = 3.325$ . Red line corresponds to the largest Lyapunov exponent, green line – to the second Lyapunov exponent (color online)

аттракторы, возникшие на их основе. Интересной особенностью является то, что инвариантная кривая в процессе удвоений остается гладкой, не трансформируется в хаотический аттрактор по сценарию Афраймовича –Шильникова [5]. С увеличением параметра  $G$  инвариантная кривая расширяется и возникает хаотический аттрактор, далее постепенно поглощая седловые инвариантные кривые, возникшие в результате каскада бифуркаций удвоения, таким образом, наблюдается развитие хаотического аттрактора.

На графиках показателей Ляпунова в областях хаотической динамики хорошо видны провалы второго показателя Ляпунова в отрица-

тельную область, которые представляют собой окна периодичности, однако, в этих окнах реализуется не неподвижная точка, а инвариантная кривая. Внутри таких окон также происходят каскады бифуркаций удвоения инвариантных кривых.

### Заключение

Таким образом, в работе исследован дискретный осциллятор Лоренца-84, представляющий собой трехмерное отображение (трехмерный диффеоморфизм). В отображении показана возможность реализации устойчивого состояния равновесия, инвариантной кривой, трехмерного



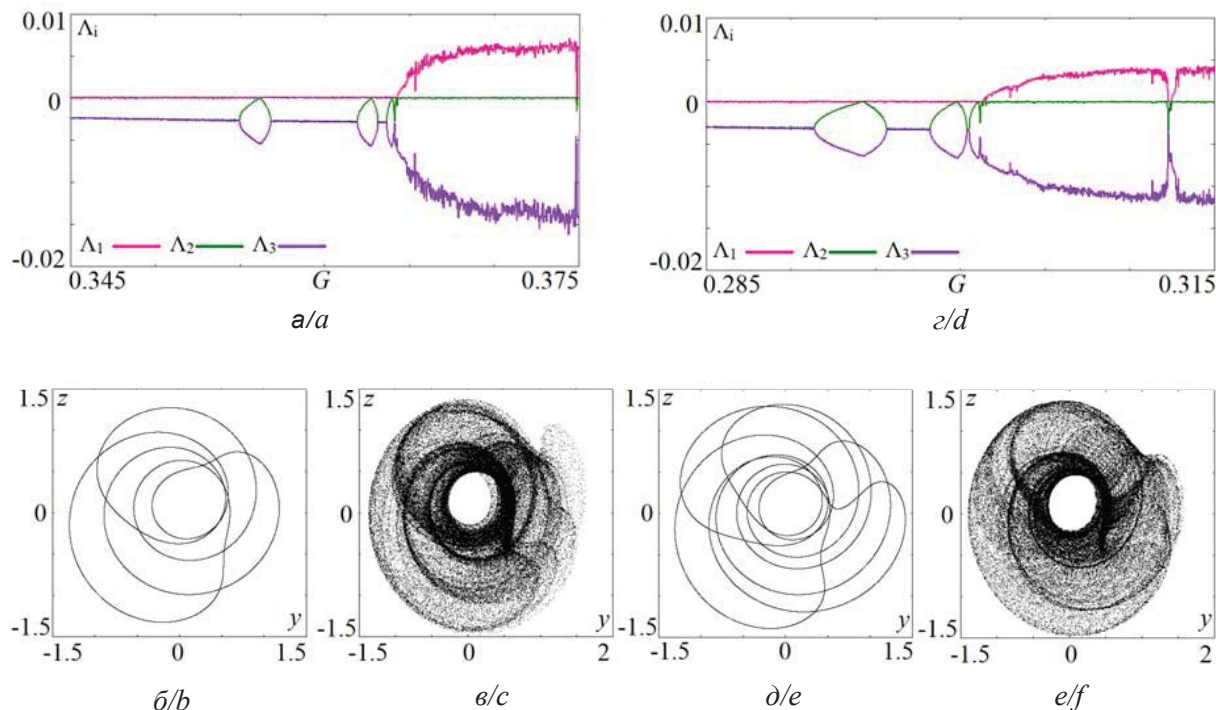


Рис. 5. Графики показателей Ляпунова ( $a, z$ ), двумерные проекции фазовых портретов дискретного осциллятора Лоренца-84 (5) для языков инвариантных кривых с различными числами вращения.  $a = 0.25, b = 4, h = 0.1$ .  $a - F=3.325$ ;  $b - F=3.325, G=0.35$ ;  $v - F = 3.325, G = 0.37$ ;  $z - F = 3.35$ ;  $d - F = 3.35, G = 0.289$ ;  $e - F = 3.35, G = 0.315$ . На рис. 5  $a, z$  красная линия соответствует старшему показателю Ляпунова, зеленая линия – второй показатель Ляпунова, фиолетовая линия – третий показатель Ляпунова

Fig.5. Plots of the Lyapunov exponents ( $a, d$ ), two-dimensional projections of phase portraits of the discrete Lorenz-84 oscillator (5) for different tongues of invariant curves with various winding numbers.  $a = 0.25, b = 4, h = 0.1$ .  $a) F = 3.325$ ;  $b) F = 3.325, G = 0.35$ ;  $c) F = 3.325, G = 0.37$ ;  $d) F = 3.35$ ;  $e) F = 3.35, G = 0.289$ ;  $f) F = 3.35, G = 0.315$ . In Figs. 5,  $a, d$  red line corresponds to the largest Lyapunov exponent, green line – to the second Lyapunov exponent, violet line – to the third Lyapunov exponent

тора и хаоса с нулевым показателем Ляпунова. Показана возможность возникновения хаоса с нулевым показателем Ляпунова в результате каскада бифуркаций удвоения инвариантной кривой, представляющего собой квазипериодический аттрактор Эно. Продемонстрированы типичные структуры на плоскости параметров, такие как CrossRoad-Area, Spring-Area, базовым режимом которых является инвариантная кривая. Типичные структуры и хаотические колебания могут возникать на базе различных инвариантных кривых.

#### Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-32-00285). Работа А.П.К. выполнена в рамках государственного задания Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН.

#### Список литературы

1. Mira C., Gardini L., Barugola A., Cathala J. Chaotic dynamics in two-dimensional noninvertible maps. World Scientific, Series on Nonlinear Science, Series A, 1996. Vol. 20. 632 p. DOI: 10.1142/2252
2. Schuster H. G., Just W. Deterministic chaos : an introduction. 4th ed. John Wiley & Sons, 2006. 312 p.
3. Кузнецов А. П., Савин А. В., Седова Ю. В., Тюрюкина Л. В. Бифуркации отображений. Саратов : ООО Издательский центр «Наука», 2012. 196 с.
4. Gonchenko S. V., Ovsyannikov I. I., Simo C., Turaev D. Three-dimensional Hénon-like maps and wild Lorenz-like attractors // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2005. Vol. 15, № 11. P. 3493–3508. DOI: 10.1142/S0218127405014180
5. Гонченко А. С., Гонченко С. В., Шильников Л. П. К вопросу о сценариях возникновения хаоса у трехмерных отображений // Нелинейная динамика. 2012. Т. 8, № 1. С. 3–28.
6. Gonchenko A. C., Gonchenko S. V., Kazakov A., Turaev D. Simple scenarios of onset of chaos in three-dimen-





- sional maps // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2014. Vol. 24, № 8. P. 1440005. DOI: 10.1142/S0218127414400057
7. *Gonchenko A. S., Gonchenko S. V.* Variety of strange pseudohyperbolic attractors in three-dimensional generalized Hénon maps // *Physica D : Nonlinear Phenomena*. 2016. Vol. 337. P. 43–57. DOI: 10.1016/j.physd.2016.07.006
  8. *Pikovsky A., Politi A.* Lyapunov exponents : a tool to explore complex dynamics. Cambridge University Press, 2016. 295 p.
  9. *Arrowsmith D. K., Cartwright J. H. E., Lansbury A. N., Place C. M.* The Bogdanov map : bifurcations, mode locking, and chaos in a dissipative system // *Int. J. of Bifurcation and Chaos*. 1993. Vol. 3, № 4. P. 803–842. DOI: 10.1142/S021812749300074X
  10. *Zaslavsky G. M.* The Physics of Chaos in Hamiltonian Systems. World Scientific, 2007. 328 p. DOI: 10.1142/p507
  11. *Кузнецов А. П., Савин А. В., Седова Ю. В.* Бифуркация Богданова–Тakens: от непрерывной к дискретной модели // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2009. Т. 17, № 6. С. 139–158. DOI: 10.18500/0869-6632-2009-17-6-139-158.
  12. *Адилова А. Б., Кузнецов А. П., Савин А. В.* Динамика связанных дискретных осцилляторов Ресслера // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2013. Т. 21, № 5. С. 108–119. DOI: 10.18500/0869-6632-2013-21-5-108-119
  13. *Кузнецов А. П., Седова Ю. В.* Отображения с квазипериодичностью разной размерности и квазипериодическими бифуркациями // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2017. Т. 25, № 4. С. 33–50. DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-4-33-50
  14. *Анищенко В. С., Николаев С. М.* Генератор квазипериодических колебаний. Бифуркация удвоения двумерного тора // *Письма в ЖТФ*. 2005. Т. 31, № 19. С. 88–94. DOI: 10.1134/1.2121837
  15. *Кузнецов А. П., Станкевич Н. В.* Автономные системы с квазипериодической динамикой: примеры и свойства (обзор) // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2015. Т. 23, № 3. С. 71–93. DOI: 10.18500/0869-6632-2015-23-3-71-93
  16. *Broer H., Simó C., Vitolo R.* Bifurcations and strange attractors in the Lorenz-84 climate model with seasonal forcing // *Nonlinearity*. 2002. Vol. 15, № 4. P. 1205–1267. DOI: 10.1088/0951-7715/15/4/312
  17. *Broer H. W., Vitolo R., Simó C.* Quasi-periodic Hénon-like attractors in the Lorenz-84 climate model with seasonal forcing // *EQUADIFF 2003*. World Scientific, 2005. P. 601–606. DOI: 10.1142/9789812702067\_0100
  18. *Broer H. W., Simó C., Vitolo R.* Chaos and quasi-periodicity in diffeomorphisms of the solid torus // *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*. 2010. Vol. 14, № 3. P. 871–905. DOI: 10.3934/dcdsb.2010.14.871
  19. *Kuznetsov A. P., Kuznetsov S. P., Shchegoleva N. A., Stankevich N. V.* Dynamics of coupled generators of quasiperiodic oscillations: Different types of synchronization and other phenomena // *Physica D*. 2019. Vol. 398. P. 1–12. DOI: 10.1016/j.physd.2019.05.014
  20. *Lorenz E. N.* Irregularity : a fundamental property of the atmosphere // *Tellus A*. 1984. Vol. 36, № 2. P. 98–110. DOI: 10.1111/j.1600-0870.1984.tb00230.x
  21. *Shil'nikov A., Nicolis G., Nicolis C.* Bifurcation and predictability analysis of a low-order atmospheric circulation model // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 1995. Vol. 5, № 6. P. 1701–1711. DOI: 10.1142/S0218127495001253
  22. *Van Veen L.* Baroclinic flow and the Lorenz-84 model // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2003. Vol. 13, № 08. P. 2117–2139. DOI: 10.1142/S0218127403007904
  23. *Freire J. G., Bonatto C., DaCamara C. C., Gallas J. A. C.* Multistability, phase diagrams, and intransitivity in the Lorenz-84 low-order atmospheric circulation model // *Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2008. Vol. 18, № 3. P. 033121. DOI: 10.1063/1.2953589
  24. *Wang H., Yu Y., Wen G.* Dynamical analysis of the Lorenz-84 atmospheric circulation model // *Journal of Applied Mathematics*. 2014. Vol. 2014. Article ID 296279. 15 p. DOI: 10.1155/2014/296279
  25. *Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J. M.* Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; a method for computing all of them. Part 1 : Theory // *Meccanica*. 1980. Vol. 15, № 1. P. 9–20. DOI: 10.1007/BF02128236
  26. *Carcasses J. P., Mira C., Bosch M., Simo C., Tatjer J. C.* CrossRoad Area–Spring Area. Transition (I) foliated parametric representation // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 1991. Vol. 1, № 01. P. 183–196. DOI: 10.1142/S0218127491000117
  27. *Mira C., Carcasses J. P., Bosch M., Simo C., Tatjer J. C.* CrossRoad Area–Spring Area. Transition (II) foliated parametric representation // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 1991. Vol. 1, № 02. P. 339–348. DOI: 10.1142/S0218127491000269
  28. *Franceschini V.* Bifurcations of tori and phase locking in a dissipative system of differential equations // *Physica D : Nonlinear Phenomena*. 1983. Vol. 6, № 3. P. 285–304. DOI: 10.1109/ISCAS.2000.857196
  29. *Kaneko K.* Doubling of torus // *Progress of Theoretical Physics*. 1983. Vol. 69, № 6. P. 1806–1810. DOI: 10.1143/PTP.69.1806
  30. *Kaneko K.* Oscillation and doubling of torus // *Progress of Theoretical Physics*. 1984. Vol. 72, № 2. P. 202–215. DOI: 10.1143/PTP.72.202
  31. *Anishchenko V. S., Vadivasova T. E., Sosnovtseva O.* Mechanisms of ergodic torus destruction and appearance of strange nonchaotic attractors // *Physical Review E*. 1996. Vol. 53, № 5. P. 4451. DOI: 10.1142/S0218127401002195
  32. *Kuznetsov S., Feudel U., Pikovsky A.* Renormalization group for scaling at the torus-doubling terminal point // *Physical Review E*. 1998. Vol. 57, № 2. P. 1585. DOI: 10.1103/PhysRevE.57.1585
  33. *Sekikawa M., Inaba N., Yoshinaga T., Tsubouchi T.* Bifurcation structure of successive torus doubling // *Physics Letters A*. 2006. Vol. 348, № 3–6. P. 187–194. DOI: 10.1016/j.physleta.2005.08.089



**Образец для цитирования:**

Попова Е. С., Станкевич Н. В., Кузнецов А. П. Каскад бифуркаций удвоения инвариантной кривой и квазипериодический аттрактор Эно в дискретной модели Лоренца-84 // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Физика. 2020. Т. 20, вып. 3. С. 222–232. DOI: <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2020-20-3-222-232>

**Cascade of Invariant Curve Doubling Bifurcations and Quasi-Periodic Hénon Attractor in the Discrete Lorenz-84 Model**

**E. S. Popova, N. V. Stankevich, A. P. Kuznetsov**

Elena S. Popova, <https://orcid.org/0000-0002-9665-1793>, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia, lenochkafnp@yandex.ru

Nataliya V. Stankevich, <https://orcid.org/0000-0002-4781-0567>, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, 77 Politehnicheskaya St., Saratov 410054, Russia, stankevichnv@mail.ru

Alexander P. Kuznetsov, <https://orcid.org/0000-0001-5528-1979>, Saratov Branch Kotel'nikov Institute of Radio Engineering and Electronics of Russian Academy of Sciences, 38 Zelenaya St., Saratov 410019, Russia, apkuz@rambler.ru

**Background and Objectives:** Chaotic behavior is one of the fundamental properties of nonlinear dynamical systems, including maps. Chaos can be most easily and reliably diagnosed using the largest Lyapunov exponent, which will be positive for the chaotic mode. Unlike flow dynamical systems, the presence of zero Lyapunov exponent in the spectrum is not an obligatory condition for maps. The zero exponent in the spectrum of a map will indicate the possibility of embedding such a map in a flow. In the framework of the present paper, using as an example a three-dimensional discrete Lorenz-84 model, it is shown that there can appear chaotic attractors whose Lyapunov exponent spectrum contains one positive, one zero, and one negative exponents. Such a specific attractor represents the production of a two-dimensional torus and the Hénon attractor and was called the Quasi-periodic Hénon attractor. A scenario of development of such kind behavior is an open problem.

**Materials and Methods:** The discrete Lorenz-84 oscillator obtained by discretizing the three-dimensional flow Lorenz-84 model is considered as an object of the present research. The dynamics of the map is studied numerically. The main analysis is carried out using the charts of dynamical regimes based on the calculation of Lyapunov exponents. Lyapunov exponents were calculated by the Benettin method with Gram-Schmidt orthogonalization. **Results:** The scenario of occurrence of the Quasi-periodic Hénon attractor via a cascade of invariant curve doubling bifurcations is described.

**Conclusion:** We study the discrete Lorenz-84 oscillator, which is a three-dimensional map (three-dimensional diffeomorphism). In the map the possibility of implementing a steady state of equilibrium, an invariant curve, a torus-attractor, and chaos with zero Lyapunov exponent in the spectrum was shown. It is also demonstrated that the chaotic mode with zero Lyapunov exponent, the Quasi-periodic Hénon attractor, can appear as a result of a cascade of doubling bifurcations of the invariant curve. Typical structures on the parameter plane, such as CrossRoad-Area, Spring-Area, whose base mode is an invariant curve, are illustrated. These structures and

chaotic oscillations can arise on the basis of various invariant curves. **Keywords:** invariant curve doubling, quasi-periodic Hénon attractor, dynamical chaos, map.

Received: 26.03.2020 / Accepted: 08.05.2020 / Published: 0.09.2020

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

**Acknowledgements:** *This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 18-32-00285). The work of A.P.K. was performed in the framework of a state order to the Kotel'nikov Institute of Radio Engineering and Electronics of Russian Academy of Sciences.*

**Reference**

1. Mira C., Gardini L., Barugola A., Cathala J. *Chaotic dynamics in two-dimensional noninvertible maps*. World Scientific, Series on Nonlinear Science, Series A, 1996, vol. 20, 632 p. DOI: 10.1142/2252
2. Schuster H. G., Just W. *Deterministic chaos: an introduction. 4-th Edition. John Wiley & Sons*, 2006. 312 p.
3. Kuznetsov A. P., Savin A. V., Sedova Yu. V., Tyurykina L. V. *Bifurkatsii otobrazheniy* [Bifurcations of mappings]. Saratov, OOO Izdatel'skiy tsentr "Nauka", 2012. 196 p. (in Russian).
4. Gonchenko S. V., Ovsyannikov I. I., Simo C., Turaev D. Three-dimensional Hénon-like maps and wild Lorenz-like attractors. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2005, vol. 15, no. 11, pp. 3493–3508. DOI: 10.1142/S0218127405014180
5. Gonchenko A. S., Gonchenko S. V., Shilnikov L. P. Towards scenarios of chaos appearance in three-dimensional maps. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2012, vol. 8, no. 1, pp. 3–28.
6. Gonchenko A. S., Gonchenko S. V., Kazakov A., Turaev D. Simple scenarios of onset of chaos in three-dimensional maps. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2014, vol. 24, no. 8, pp. 1440005. DOI: 10.1142/S0218127414400057
7. Gonchenko A. S., Gonchenko S. V. Variety of strange pseudohyperbolic attractors in three-dimensional generalized Hénon maps. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2016, vol. 337, pp. 43–57. DOI: 10.1016/j.physd.2016.07.006
8. Pikovsky A., Politi A. *Lyapunov exponents: a tool to explore complex dynamics*. Cambridge University Press, 2016. 295 p.
9. Arrowsmith D. K., Cartwright J. H. E., Lansbury A. N., Place C. M. The Bogdanov map: bifurcations, mode



- locking, and chaos in a dissipative system. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 1993, vol. 3, no. 4, pp. 803. DOI: 10.1142/S021812749300074X
10. Zaslavsky G. M. *The Physics of Chaos in Hamiltonian Systems*. World Scientific, 2007. DOI: 10.1142/p507
11. Kuznetsov A. P., Savin A. V., Sedova Y. V. Bogdanov-Takens bifurcation: from flows to discrete systems. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2009, vol. 17, no. 6, pp. 139–158. DOI: 10.18500/0869-6632-2009-17-6-139-158
12. Adilova A. B., Kuznetsov A. P., Savin A. V. Complex dynamics in the system of two couple discrete Rossler oscillators. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2013, vol. 21, no. 5, pp. 108–119. DOI: 10.18500/0869-6632-2013-21-5-108-119.
13. Kuznetsov A. P., Sedova Y. V. Maps with quasi-periodicity of different dimension and quasi-periodic bifurcations. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2017, vol. 25, no. 4, pp. 33–50. DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-4-33-50
14. Anishchenko V. S., Nikolaev S. M. Generator of quasi-periodic oscillations featuring two-dimensional torus doubling bifurcations. *Technical Physics Letters*, 2005, vol. 31, no. 10, pp. 853–855. DOI: 10.1134/1.2121837
15. Kuznetsov A. P., Stankevich N. V. Autonomous systems with quasiperiodic dynamics. Examples and their properties: Review. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2015, vol. 23, no. 3, pp. 71–93. DOI: 10.18500/0869-6632-2015-23-3-71-93
16. Broer H., Simó C., Vitolo R. Bifurcations and strange attractors in the Lorenz-84 climate model with seasonal forcing. *Nonlinearity*, 2002, vol. 15, no. 4, pp. 1205. DOI: 10.1088/0951-7715/15/4/312
17. Broer H. W., Vitolo R., Simó C. Quasi-periodic Hénon-like attractors in the Lorenz-84 climate model with seasonal forcing. *EQUADIFF 2003*, World Scientific, 2005, pp. 601–606. DOI: 10.1142/9789812702067\_0100
18. Broer H. W., Simó C., Vitolo R. Chaos and quasi-periodicity in diffeomorphisms of the solid torus. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 2010, vol. 14, no. 3, pp. 871–905. DOI: 10.3934/dcdsb.2010.14.871
19. Kuznetsov A. P., Kuznetsov S. P., Shchegoleva N. A., Stankevich N. V. Dynamics of coupled generators of quasiperiodic oscillations: Different types of synchronization and other phenomena. *Physica D*, 2019, vol. 398, pp. 1–12. DOI: 10.1016/j.physd.2019.05.014
20. Lorenz E. N. Irregularity: a fundamental property of the atmosphere. *Tellus A*, 1984, vol. 36, no. 2, pp. 98–110. DOI: 10.1111/j.1600-0870.1984.tb00230.x
21. Shil'nikov A., Nicolis G., Nicolis C. Bifurcation and predictability analysis of a low-order atmospheric circulation model. *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*, 1995, vol. 5, no. 6, pp. 1701–1711. DOI: 10.1142/S0218127495001253
22. Van Veen L. Baroclinic flow and the Lorenz-84 model. *International journal of Bifurcation and Chaos*, 2003, vol. 13, no. 08, pp. 2117–2139. DOI: 10.1142/S0218127403007904
23. Freire J. G., Bonatto C., DaCamara C. C., Gallas J. A. C. Multistability, phase diagrams, and intransitivity in the Lorenz-84 low-order atmospheric circulation model. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2008, vol. 18, no. 3, pp. 033121. DOI: 10.1063/1.2953589
24. Wang H., Yu Y., Wen G. Dynamical analysis of the Lorenz-84 atmospheric circulation model. *Journal of Applied Mathematics*, 2014. Article ID 296279. 15 p. DOI: 10.1155/2014/296279
25. Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J. M. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; a method for computing all of them. Part 1: Theory. *Meccanica*, 1980, vol. 15, no. 1, pp. 9–20. DOI: 10.1007/BF02128236
26. Carcasses J. P., Mira C., Bosch M., Simo C., Tatjer J. C. CrossRoad Area–Spring Area. Transition (I) foliated parametric representation. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 1991, vol. 1, no. 1, pp. 183–196. DOI: 10.1142/S0218127491000117
27. Mira C., Carcasses J. P., Bosch M., Simo C., Tatjer J. C. CrossRoad Area–Spring Area. Transition (II) foliated parametric representation. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 1991, vol. 1, no. 2, pp. 339–348. DOI: 10.1142/S0218127491000269
28. Franceschini V. Bifurcations of tori and phase locking in a dissipative system of differential equations. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1983, vol. 6, no. 3, pp. 285–304. DOI: 10.1109/ISCAS.2000.857196
29. Kaneko K. Doubling of torus. *Progress of Theoretical Physics*, 1983, vol. 69, no. 6, pp. 1806–1810. DOI: 10.1143/PTP.69.1806
30. Kaneko K. Oscillation and doubling of torus. *Progress of Theoretical Physics*, 1984, vol. 72, no. 2, pp. 202–215. DOI: 10.1143/PTP.72.202
31. Anishchenko V. S., Vadivasova T. E., Sosnovtseva O. Mechanisms of ergodic torus destruction and appearance of strange nonchaotic attractors. *Physical Review E*, 1996, vol. 53, no. 5, pp. 4451. DOI: 10.1142/S0218127401002195
32. Kuznetsov S., Feudel U., Pikovsky A. Renormalization group for scaling at the torus-doubling terminal point. *Physical Review E*, 1998, vol. 57, no. 2, pp. 1585. DOI: 10.1103/PhysRevE.57.1585
33. Sekikawa M., Inaba N., Yoshinaga T., Tsubouchi T. Bifurcation structure of successive torus doubling. *Physics Letters A*, 2006, vol. 348, no. 3–6, pp. 187–194. DOI: 10.1016/j.physleta.2005.08.089

---

**Cite this article as:**

Popova E. S., Stankevich N. V., Kuznetsov A. P. Cascade of Invariant Curve Doubling Bifurcations and Quasi-Periodic Hénon Attractor in the Discrete Lorenz-84 Model. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Physics*, 2020, vol. 20, iss. 3, pp. 222–232 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2020-20-3-222-232>

---