ОТОБРАЖЕНИЕ КАТАСТРОФ

Иванов Ю.С., студент 1 курса ФНП СГУ
Кузнецова А.Ю., аспирант ФНП СГУ

Теория катастроф позволяет дать достаточно полную классификацию градиентных систем вида:

$$\dot{x} = -\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}, \qquad \dot{y} = -\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}. \tag{1}$$

где $U(x,y)$ – потенциальная функция. Рене Тома показал, что при этом существенно несколько видов потенциала $U(x,y)$, которые и определяют канонический список катастроф [1,2]. Они упорядочены по числу существенных параметров, от которых зависит вид потенциала (коразмерность катастрофы).

Так, для простейшей катастрофы ***складки*** (коразмерность 1) имеем:

$$U(x) = \frac{x^3}{3} + ax, \tag{2}$$

и соответственно

$$\dot{x} = a + x^2. \tag{3}$$

Таким образом, уравнение (1) приводится в этом случае к простейшей дифференциальной системе с бифуркацией седло-узел.

Сделаем в уравнении (3) формальную замену $\dot{x} \to x_{n+1} - x_n$. Это приводит к новой эталонной модели нелинейной динамики – логистическому отображению [3,4]:

$$x_{n+1} = a + x_n + x_n^2. \tag{4}$$

Как хорошо известно, это отображение демонстрирует один из универсальных сценариев перехода к хаосу - сценарий Фейгенбаума.

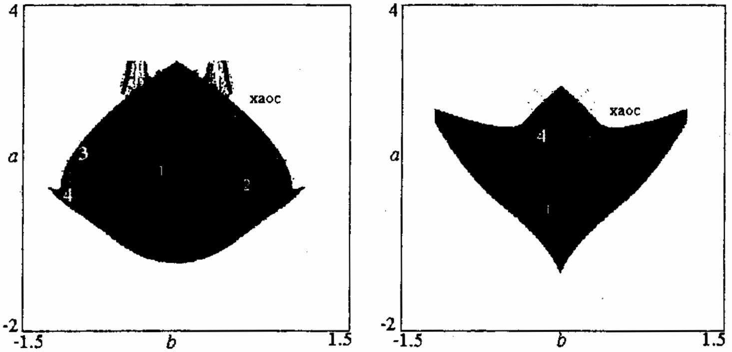
Таким образом, формальная замена $\dot{x} \to x_{n+1} - x_n$ позволяет построить новую модель с интересными свойствами, опираясь на определённый тип катастрофы.

Распространим этот прием на весь канонический список Тома [1,2]. Тогда получим систему дискретных моделей («отображения катастроф»).

1. Отображение катастрофы ***сборки*** – это кубическое отображение вида

$$x_{n+1} = \pm(x^3 + ax + b). \tag{5}$$

На рис.1 показаны карты динамических режимов для этого отображения. Различными оттенками серого цвета и цифрами обозначены циклы различных периодов, черным цветом – области хаотической динамики. Данное отображение является мультистабильным, то есть его карта как бы склеена из различных листов. В отображении (5) при изменении параметров при движении по произвольному однопараметрическому маршруту происходит переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода. Однако двухпараметрический анализ вскрывает (в зависимости от знака правой части (5)) специфические двухпараметрические структуры crossroad area (рис.1а) и spring area (рис.1б).



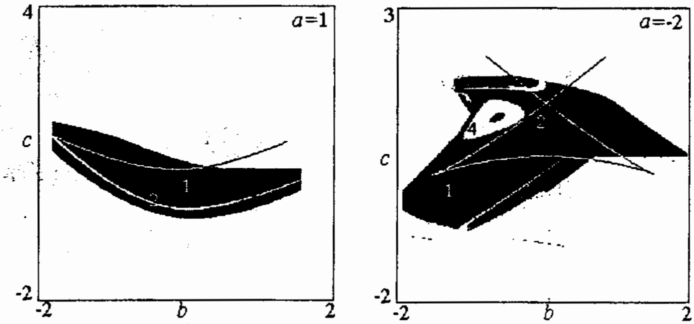
а) б)

Рис.1. Карты динамических режимов отображения катастрофы сборки. Цифрами и различными оттенками серого показаны периоды, черным цветом – хаотическая динамика.

Для этого отображения наряду с фейгенбаумовскими линиями характерны их концевые (трикритические) точки – феномен коразмерности два [5].

2. ***Ласточкин хвост*** – это катастрофа, имеющая коразмерность три и, соответственно, три управляющих параметра

$$x_{n+1} = x_n^4 + ax_n^2 + bx_n + c. \tag{6}$$



а) б)

Рис.2. Карта динамических режимов отображения ласточкин хвост при $a = 1$ (а) и при $a = -2$ (б).

Поэтому, для построения карты динамических режимов мы фиксируем один из параметров (в данном случае a) и строим карты динамических режимов на плоскости (b,c). На рис.2 изображены карты динамических режимов при $a=1$ и $a=-2$. Линиями показаны конфигурации многообразия катастрофы ласточкин хвост. Видно, что области удвоений образовали "острова" (рис.2б), "вписанные" в линии многообразия катастроф. Острова испытывают определенные метаморфозы с ростом параметра a.

3. ***Эллиптическая омбилика*** – это двумерная катастрофа коразмерности 3, поэтому при переходе от диффернциальных уравнений к отображениям, мы получим систему двух связанных отображений следующего вида

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= -2x_n y_n + (1-2a)x_n - b, \\ y_{n+1} &= -x^2 + y^2 + (1-2a)y_n - c. \end{aligned} \tag{7}$$

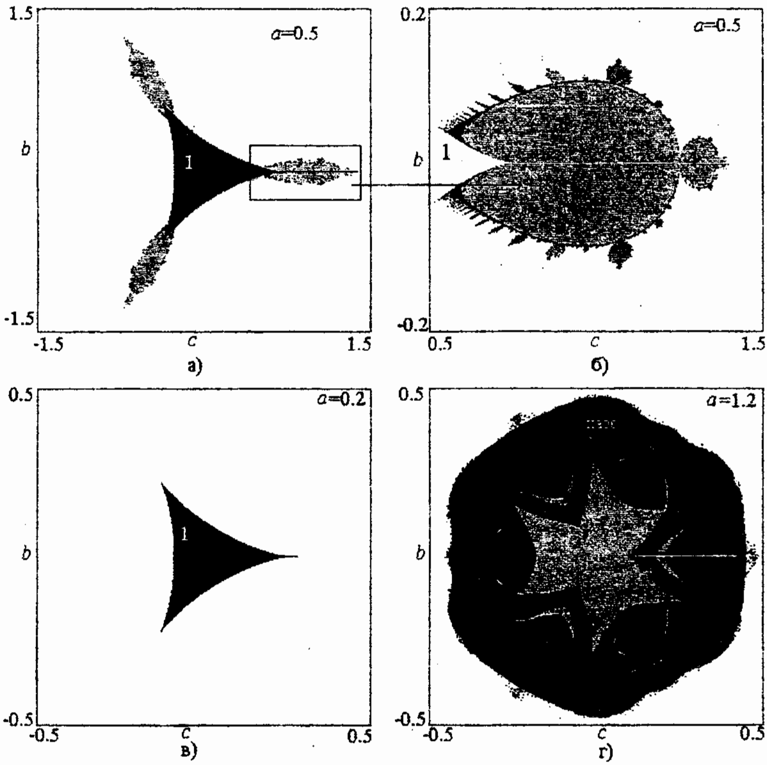


Рис.3. Карта динамических режимов отображения эллиптическая омбилика при $a=0.2$ (в), при $a=1{,}2$ (г), при $a=0.5$ (а). Рис.3б – увеличенный фрагмент рис.3а.

При исследовании пространства параметров видно (рис.3в), что при $a = 0.2$ устойчива только неподвижная точка (цикл периода 1), в виде эпициклоиды, характерной для бифуркационного множества этой катастрофы. При возрастании параметра a в ее вершинах возникают множества, аналогичные множеству Мандельброта (рис.3а,б). При дальнейшем увеличении a область периода 1 исчезает, появляются циклы больших периодов, возникает и увеличивается область хаоса.

4. Еще одна двумерная катастрофа – это ***гиперболическая омбилика***. Это также двумерная катастрофа коразмерности 3. Соответствующее отображение выглядит так

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= -2x_n y_n + (1+2a)x_n - b, \\ y_{n+1} &= -x_n^2 - y_n^2 + (1-2a)y_n - c. \end{aligned} \tag{8}$$

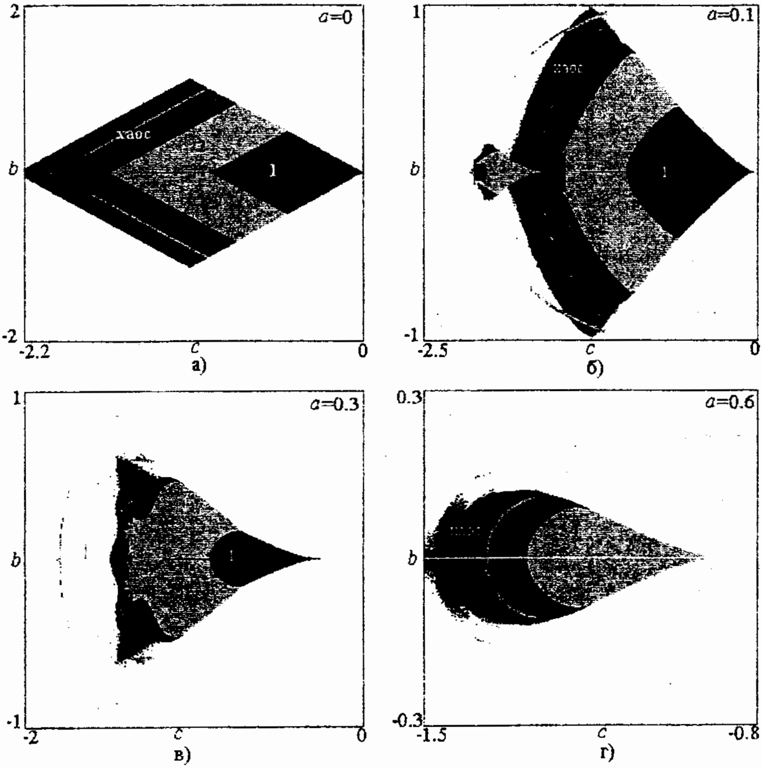


Рис.4. Карта динамических режимов катастрофы гипперболической омбилики (8) при $a = 0$ (а), при $a = 0.1$ (б), при $a = 0.3$ (в), при $a = 0.6$ (г)

Путём несложных алгебраических преобразований можно показать, что она эквивалентна системе двух связанных логистических отображений, где a - параметр связи.

На рис.4 показана плоскость параметров данного отображения. Различными оттенками серого цвета и цифрами показаны циклы разных периодов, черным цветом область хаотической динамики. Видно, что при значении параметра связи $a=0$ каждая подсистема демонстрирует автономное поведение (рис.4а). При увеличении параметра a происходит увеличение области хаоса, причем наибольшее влияние связь оказывает на область, где параметр $b=0$ (рис.4б). При дальнейшем увеличении a растет область расходимости (рис.4в-г), обозначенная на рисунке 4 белым цветом.

Таким образом, отображения, соответствующие различным катастрофам, демонстрируют популярные в нелинейной динамике феномены, в частности, переход к хаосу по сценарию Фейгенбаума для катастрофы складки, структуры типа crossroad area и spring area и трикритические точки для катастрофы сборки. Двумерные катастрофы демонстрируют свойства систем двух связанных отображений (в случае гиперболической омбилики) и феномены комплексной динамики, их возникновение и разрушение (в случае эллиптической омбилики).

Библиографический список

1. В.И. Арнольд Теория катастроф. М.:Наука, 1990, 128 с.
2. Т.Постон, И.Стюарт. Теория катастроф и её приложения. М.:Мир,1980,608 с.
3. Feigenbaum M. J. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. J. Stat. Phys., 19, 1978, № 1, 25-52.
4. Кузнецов С.П. Динамический хаос (курс лекций). М.:Издательство Физико-математической литературы, 2001, 296 с.
5. А.П.Кузнецов, С.П.Кузнецов, И.Р.Сатаев. Критическая динамика одномерных отображений. Часть II. Двухпараметрический переход к хаосу. Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1993, т.1, №2, с. 17-35.

Научные руководители: д.ф.-м.н., профессор СГУ Кузнецов А.П.
аспирант СГУ Иванова А.С.