

Методика изменения начальных условий в радиофизическом эксперименте: визуализация мультистабильности и скрытых аттракторов

Пономаренко В.И., Селезнев Е.П., Станкевич Н.В.

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники

им. В.А. Котельникова РАН

Мультистабильность – фундаментальное нелинейное явление, заключающееся в том, что в фазовом пространстве динамической системы сосуществуют несколько аттракторов [1-3]. Мультистабильность является основой для проявления таких нелинейных явлений как скрытые аттрактора [4-6], химеры [7-9]. Скрытые аттракторы представляют собой частный случай мультистабильности, когда устройство фазового пространства такое, что равновесия в системе отделены от реализующихся в системе других аттракторов и, соответственно, из малой окрестности равновесия фазовая траектория не может выйти на аттрактор. Подобные ситуации имеют важную прикладную значимость для инженерных приложений, где важно, чтобы система была устойчива. Наличие скрытых аттракторов в таких системах может привести к различным катастрофическим последствиям, например раскачка крыла самолета.

Другое явление, базирующееся на мультистабильности – это так называемые химеры. Явление химеры проявляется в ансамблях взаимодействующих осцилляторов с нелокальной связью и состоит в том, что при взаимодействии часть осцилляторов ведут себя синхронно, а часть асинхронно. Принципиально важным моментом для формирования химерных структур является задание различных начальных условий. При задании идентичных начальных условий в ансамбле динамика системы будет тривиальной.

Таким образом для визуализации, проявления и поиска таких явлений необходимо управление начальными условиями в системе. Данная проблема технически достаточно легко решается при численном моделировании: задание начальных условий является обязательным при решении задачи Коши. При этом даже в случае численного моделирования выбор начальных условий, соответствующих особым типам аттракторов, не всегда является очевидным, и найти аттракторы с малыми бассейнами притяжения (редкие аттракторы), дистанцированные от состояний равновесия (скрытые аттракторы) требует решения дополнительных задач и специальных методов. В эксперименте данная задача становится еще более сложной. В экспериментальную установку необходимо добавлять какие-то специальные надстройки, которые позволят изменять начальные условия.

В рамках данной работы мы опишем одну из возможных методик, которая может быть использована для изменения начальных условий в радиофизическом эксперименте на примере модели Чуа и продемонстрируем возможность визуализации скрытых аттракторов.

Радиофизические генераторы – это целый класс математических моделей, которые могут быть исследованы численно, имеют возможность схемотехнического моделирования, а также реализации в эксперименте с использованием аналогового моделирования. Основой радиофизических генераторов различного типа является RLC-колебательный контур, и в качестве динамических переменных выступают напряжение на

конденсаторе или ток, протекающий через катушку индуктивности. Таким образом, задавая определенное значение напряжения на конденсаторе или тока в катушке индуктивности, мы можем менять начальные условия рассматриваемой нами системы в эксперименте.

Одной из хорошо известных и достаточно просто реализуемой в эксперименте системой со скрытыми аттракторами является цепь Чуа [10-14]. Схема Чуа представлена на рис.1. Данная система была предложена в 1983 году Леоном Чуа. Цепь состоит из катушки индуктивности L , двух конденсаторов $C1$ и $C2$, линейного резистора R и нелинейного элемента с отрицательной проводимостью $-G$, так называемый диод Чуа (рис.2). Данная система описывается математической моделью в виде системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\alpha(x - y) - \alpha f(x), \\ \dot{y} &= z - (y - x), \\ \dot{z} &= -\beta y - \gamma z, \end{aligned}$$

где $f(x) = m_1x + 0.5(m_0 - m_1)(|x + 1| - |x - 1|)$ - кусочно-линейная функция, описывающая вольт-амперную характеристику диода Чуа, x, y, z - динамические переменные, α, β, γ - параметры, характеризующие RLC-контур, m_0, m_1 - параметры, отвечающие за вольт-амперную характеристику диода Чуа. Ранее были визуализированы области в пространстве параметров, где можно наблюдать скрытые аттракторы на плоскости параметров (m_0, m_1) .

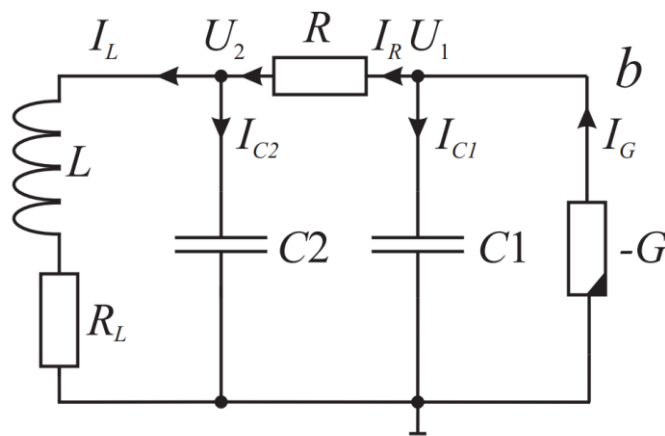


Рис. 1. Принципиальная схема цепи Чуа

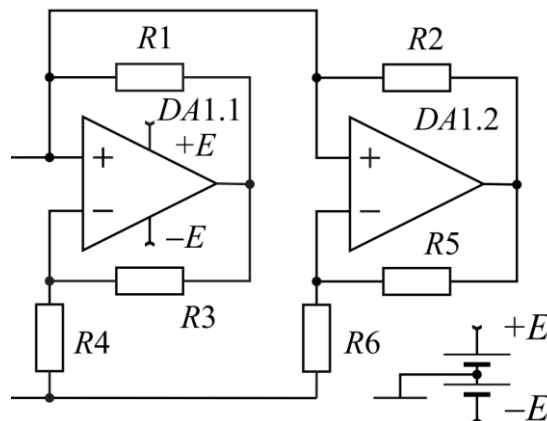


Рис. 2. Схема диода Чуа на базе операционных усилителей.

Динамические переменные модели соответствуют напряжениям на конденсаторах $C1$ и $C2$ (переменные x и y), а также току на катушке индуктивности L (переменная z). В случае стандартного запуска схемы, представленной на рис.2 начальные напряжения и токи на конденсаторах и катушке равны нулю и в дальнейшем изменяется непрерывно. Для поиска мультистабильных аттракторов необходимо развитие механизма управления напряжением на конденсаторах и током в катушке индуктивности.

Искомое управление может быть реализовано следующим образом, на рис.3 представлена модифицированная схема системы Чуа. Данная схема позволяет управлять начальными условиями только двух переменных, соответствующих напряжениям на конденсаторах. Управление работой схемы и задание начальных условий реализуется электронными ключами (мультиплексорами) $DD1$, $DD2$. При нулевом сигнале на входе In ключ 01 мультиплексора $DD1$ подключает конденсатор $C1$ к точке **1**, ключ 11 подключает конденсатор $C2$ к точке **2**, а ключи 01, 11 мультиплексора $DD2$, соответственно ко входам операционных усилителей $DA1.1$, $DA1.2$, то есть так, как это было показано в схеме генератора Чуа на рис.2. При подаче высокого логического уровня на вход In ключи 01 и 11 мультиплексора $DD1$ размыкаются, а ключи 00 и 10 замыкаются, подключая конденсаторы $C1$, $C2$ к резисторам $R7$, $R8$, соответственно. При этом также размыкаются ключи 01 и 11 мультиплексора $DD2$, отключая блок отрицательного сопротивления на время действия импульса. Напряжение на средних точках резистора $R7$, $R8$ мы можем изменять в процессе эксперимента, регулируя начальные напряжения конденсаторов. Таким образом, при подаче на вход In прямоугольных импульсов длительностью T_{imp} с периодом повторения T за время действия импульса конденсаторы заряжаются до некоторых начальных значений, а по окончании действия импульса переводят схему в режим нормальной работы генератора с заданными начальными условиями.

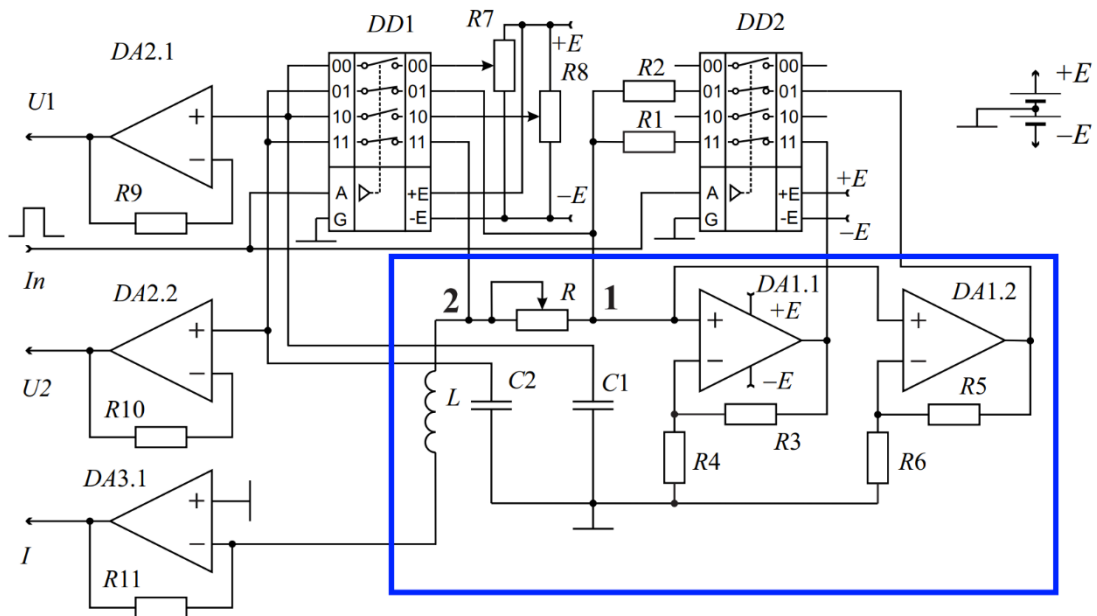


Рис.3. Схема экспериментальной установки модифицированной системы Чуа, позволяющей регулировать начальные условия на на конденсаторах $C1$ и $C2$.

Схема, представленная на рис.3 была реализована в эксперименте, на рис.4 представлено фото экспериментальной установки. В процессе проведения эксперимента мы подавали на вход In импульсный сигнал и изменяли напряжения в средних точках резисторов $R7$ и $R8$, тем самым управляя начальными условиями, а с помощью двухканального осциллографа, работающего в режиме X-Y, наблюдали переходные

процессы в схеме, устойчивые и неустойчивые циклы и положения равновесия. Период T и длительность импульсов T_{imp} подбираются такими, чтобы время заряда конденсаторов было меньше ($T < T_{imp}$). Подобная методика использовалась для исследования переходных процессов и бассейнов притяжения мультистабильных систем в работе [15]. Операционные усилители DA2.1, DA2.2, DA3.1 представляют собой повторители напряжения, или так называемые развязывающие усилители, которые нужны для того, чтобы измерительные цепи не влияли на работу схемы. В экспериментальной установке использовались операционные усилители AD822.

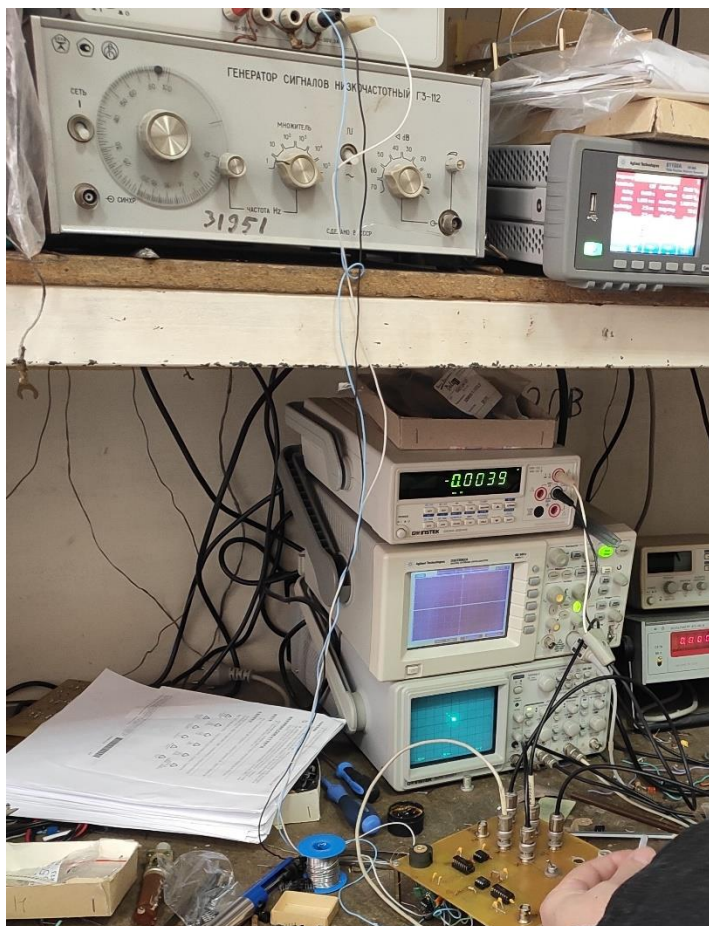


Рис.4. Фотография экспериментальной установки модифицированной системы Чуа.

Для обнаружения скрытых аттракторов были аккуратно рассчитаны номиналы экспериментальной схемы, чтобы они соответствовали величинам параметров модели. Номиналы колебательного контура были зафиксированы следующими:

$$C1=311\text{nF}, C2=37\text{nF}, L=15.79\text{mHn}, R=788\Omega, R_L=2.8\Omega.$$

Наклоны линейных участков и точки излома вольт-амперной характеристики диода Чуа определяются потенциометрами R1-R6:

$$R1=8.5\text{k}\Omega, R2=120\Omega, R3=12.0\text{k}\Omega, R4=1\text{k}\Omega, R5=1\text{k}\Omega, R6=24\text{k}\Omega.$$

На рис.5 представлены примеры фазовых портретов в проекции на плоскость ($U1, U2$), представляющих собой фотографии экрана осциллографа. Параметры экспериментальной установки были зафиксированы в соответствии с указанным выше описанием. Все представленные фазовые портреты были получены для одних и тех же значений параметров, изменялось только начальное условие переменной $U1$, начальное условие $U2$ устанавливалось равным нулю. Начальное условие для тока также можно считать нулевым.

Из окрестности седло-фокусного равновесия в нуле траектория приходит в один из симметричных устойчивых фокусов (пример на рис.5а). При плавной отстройке от нулевого седло-фокуса режим устойчивого равновесия сменяется хаотическим аттрактором; на рис.5б показан пример одного такого аттрактора. Дальнейшее изменение начального условия от нуля приводит в область притяжения второго симметричного состояния равновесия (рис. 5с). После которого мы вновь наблюдаем скрытый хаотический аттрактор, симметричный партнер предыдущего (рис. 5d). Таким образом, аккуратный подбор начальных условий позволяет обнаружить два симметричных скрытых хаотических аттрактора, чередование областей устойчивого равновесия и скрытых аттракторов хорошо согласуется с результатами численного моделирования [14]. На примерах фотографий осциллографа хорошо видно, что наблюдается переключение между режимом на скрытом аттракторе и состоянием равновесия. Данная особенность связана с тем, что бассейны притяжения полученных скрытых аттракторов достаточно малы в фазовом пространстве и граничат с бассейнами притяжения устойчивых фокусов. Поэтому в результате воздействия шумов мы можем видеть перескок от одного режима к другому. Дальнейший отход от нулевого равновесия приводит к переходу на устойчивый предельный цикл большого радиуса. На рис.5е показан данный предельный цикл большого радиуса в масштабе, соответствующем предыдущим экспериментальным фазовым портретам. На данный цикл можно прийти из начальных данных, расположенных за пределами неустойчивого цикла, разграничивающего бассейны притяжения. Также довольно большая область притяжения внешнего устойчивого цикла находится "внутри" неустойчивого цикла.

Таким образом, предложенная модификация схемы Чуа позволяет в эксперименте визуализировать скрытые аттракторы, а также провести поиск других сосуществующих аттракторов. Изменяя начальные условия, данная схема позволяет анализировать бассейны притяжения сосуществующих аттракторов. Разработанная модификация может быть реализована не только для системы Чуа, но и в других экспериментальных установках, динамическая переменная которых соответствует напряжению на конденсаторе.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 21-12-00121).

Литература

- [1] Feudel, U., & Grebogi, C. (1997). Multistability and the control of complexity. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 7(4), 597-604.
- [2] Pisarchik, A. N., & Feudel, U. (2014). Control of multistability. *Physics Reports*, 540(4), 167-218.
- [3] Li, C., Hu, W., Sprott, J. C., & Wang, X. (2015). Multistability in symmetric chaotic systems. *The European Physical Journal Special Topics*, 224(8), 1493-1506.
- [4] Dudkowski, D., Jafari, S., Kapitaniak, T., Kuznetsov, N. V., Leonov, G. A., & Prasad, A. (2016). Hidden attractors in dynamical systems. *Physics Reports*, 637, 1-50.
- [5] Leonov, G. A., Kuznetsov, N. V., & Vagitsev, V. I. (2011). Localization of hidden Chua's attractors. *Physics Letters A*, 375(23), 2230-2233.
- [6] Leonov, G. A., & Kuznetsov, N. V. (2013). Hidden attractors in dynamical systems. From hidden oscillations in Hilbert–Kolmogorov, Aizerman, and Kalman problems to hidden chaotic attractor in Chua circuits. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 23(01), 1330002.

[7] Abrams, D. M., & Strogatz, S. H. (2004). Chimera states for coupled oscillators. Physical review letters, 93(17), 174102.

[8] Sethia, G. C., & Sen, A. (2014). Chimera states: The existence criteria revisited. Physical review letters, 112(14), 144101.

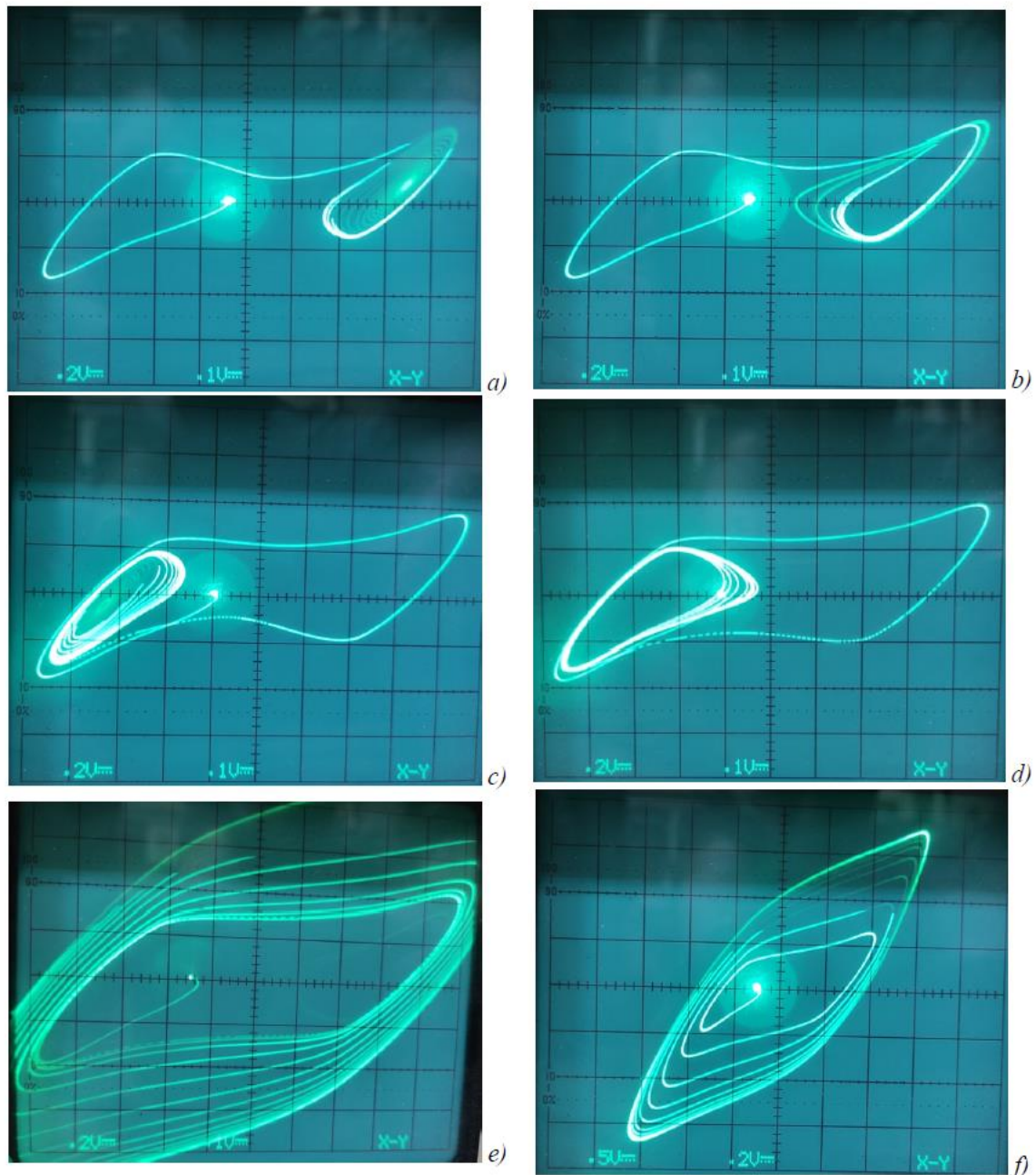


Рис.5. Фотографии осциллографа, демонстрирующие скрытые аттракторы в системе Чуа.

[9] Omel'chenko, O. E. (2018). The mathematics behind chimera states. Nonlinearity, 31(5), R121.

[10] Matsumoto, T. (1984). A chaotic attractor from Chua's circuit. IEEE Transactions on Circuits and Systems, 31(12), 1055-1058.

- [11] Chua, L. O. (1992). The genesis of Chua's circuit. Berkeley, CA, USA: Electronics Research Laboratory, College of Engineering, University of California.
- [12] Chua, L. O. (1994). Chua's circuit 10 years later. *International Journal of Circuit Theory and Applications*, 22(4), 279-305.
- [13] Chua, L. O. (2007). Chua circuit. *Scholarpedia*, 2(10), 1488.
- [14] Stankevich, N. V., Kuznetsov, N. V., Leonov, G. A., & Chua, L. O. (2017). Scenario of the birth of hidden attractors in the Chua circuit. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 27(12), 1730038.
- [15] B. Bezruchko, E. Seleznev, Basins of attraction for chaotic attractors in coupled systems with period doubling, *Technical Physics Letters* 23(2), 144 (1997)