

АТТРАКТОР СМЕЙЛА - ВИЛЬЯМСА В АВТОНОМНОЙ СИСТЕМЕ С ГОМОКЛИНИЧЕСКОЙ «ВОСЬМЕРКОЙ»

Л. М. Хаджиева², В. П. Круглов^{1,2}, С. П. Кузнецов^{1,2}

¹Саратовский филиал ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН

²Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

E-mail: kruglovyacheslav@gmail.com

В последнее время было предложено большое число систем с однородно гиперболическими аттракторами [1, 2], в основном, с аттракторами типа Смейла – Вильямса. Функционирование этих систем основано на манипуляции угловыми переменными [1, 2] (например, фазами колебаний). Для возникновения соленоида Смейла – Вильямса угловая переменная должна подвергаться растягивающему отображению окружности через средний временной интервал, характерный для системы. Большинство известных примеров – неавтономные системы, хотя были предложены и автономные [3,4].

Мы предлагаем новый пример автономной системы с аттрактором типа Смейла – Вильямса, построенный схоже с системами из [3]. Модель состоит из двух подсистем, которые являются осцилляторами Неймарка с сепаратрисой седла в виде “восьмерки”. Координаты этих подсистем можно рассматривать как действительную и мнимую части комплексной переменной. Благодаря связи между подсистемами особого вида аргумент этой переменной подвергается растягивающему отображению окружности, когда траектория проходит рядом с седлом, лежащим в начале координат. Уравнения выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u, & \dot{y} &= (1 - x^2 - y^2)x + [L - (x^2 + y^2 - 1)^2]u + \varepsilon(u^3 - 3uv^2), \\ \dot{y} &= v, & \dot{v} &= (1 - x^2 - y^2)y + [L - (x^2 + y^2 - 1)^2]v + \varepsilon(3u^2v - v^3), \end{aligned} \quad (1)$$

где ε – параметр связи. Уравнения можно переписать в комплексной форме:

$$\dot{z} = w, \quad \dot{w} = \left(1 - |z|^2\right)z + \left[L - \left(1 - |z|^2\right)^2\right]w + \varepsilon w^3, \quad (2)$$

где $z = x + iy$ и $w = u + iv$.

Функционирование системы мы объясним следующим образом. Аргумент переменной z назовем θ : $z = C \exp(i\theta)$. Когда абсолютная величина z близка к нулю (траектория близка к седлу в начале координат), угловая переменная θ утраивается благодаря слагаемому εw^3 и кубической нелинейности $(1 - |z|^2)z$. Таким образом, угловая переменная подвергается растягивающему отображению окружности $\theta_{n+1} = 3\theta_n + \text{const} \pmod{2\pi}$ после среднего времени, необходимого траектории для возвращения к седлу.

Уравнения (1) были решены численно. На рис. 1 изображен портрет аттрактора потоковой системы (1) ($L = 0.32$, $\varepsilon = 0.02$). На рис. 2а представлен портрет аттрактора в сечении Пуанкаре ($L = 0.32$, $\varepsilon = 0.02$). Мы выбрали секущую поверхность $S = x^2 + y^2 = 1$ (в направлении увеличения S). Рис. 2б де-

монстрирует итерационную диаграмму для угловой переменной (на каждом последовательном пересечении поверхности). Она близка к итерационной диаграмме для растягивающего отображения окружности.

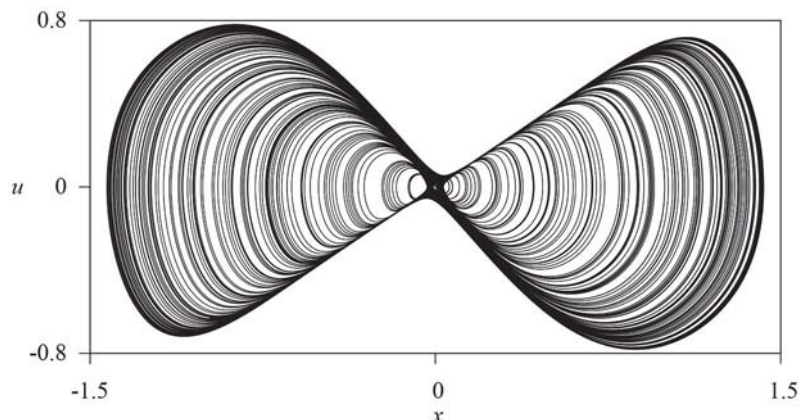


Рис. 1. Портрет аттрактора системы (1) ($L = 0.32$, $\varepsilon = 0.02$)

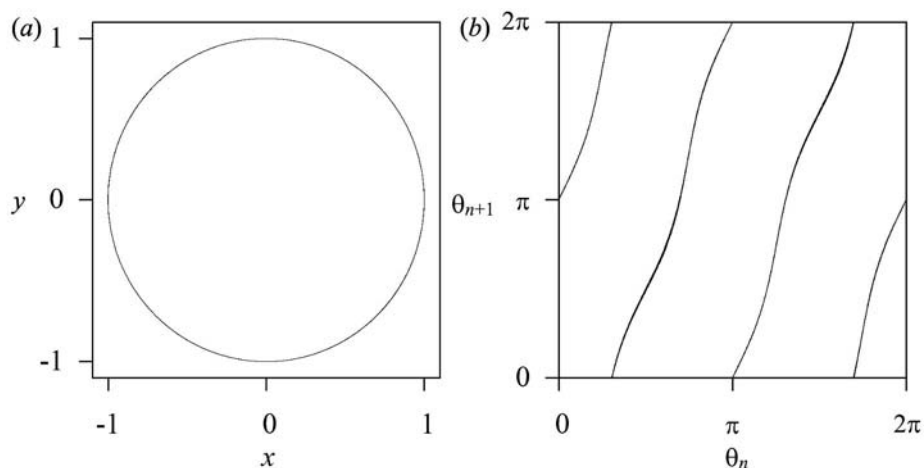


Рис. 2а. Портрет аттрактора в сечении Пуанкаре ($L = 0.32$, $\varepsilon = 0.02$); б. Итерационная диаграмма для угловой переменной θ .

Показатели Ляпунова для аттрактора в сечении Пуанкаре составили:

$$\lambda_1 = 1.041, \quad \lambda_2 = -3.859, \quad \lambda_3 = -5.023.$$

Старший показатель близок к $\log 3$, показателю Ляпунова отображения Бернулли. Остальные показатели отрицательные. Это соответствует построению аттрактора Смейла-Вильямса в трехмерном фазовом пространстве отображения Пуанкаре.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 16-32-00449 и 16-02-00135).

Библиографический список

- [1] Kuznetsov, S. P. *Hyperbolic Chaos: A Physicist's View*. Higher Education Press, Beijing and Springer-Verlag GmbH Berlin Heidelberg, 2012
- [2] Kuznetsov, S. P. // *Uspekhi Fizicheskikh Nauk*, 2011, vol. 181, no. 2, pp. 121–149.
- [3] Kuznetsov, S. P., Pikovsky, A. // *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2007, vol. 232, no. 2, pp. 87–102.
- [4] Kruglov, V. P., Kuznetsov, S. P., Pikovsky, A. // *Regular and Chaotic Dynamics*, 2014, vol. 19, no. 4, pp. 483–494.