ЛЯПУНОВСКИЙ АНАЛИЗ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ХАОСА В СИСТЕМАХ С НЕСКОЛЬКИМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

П.В. Купцов[1], С.П. Кузнецов[2,3]

[1]Саратовский государственный технический университет им.Ю.А. Гагарина
[2]Удмуртский государственный университет
[3]Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН
E-mail: p.kuptsov @rambler.ru

Интерес к системам с гиперболическим хаосом, таким как, например, соленоид Смейла-Вильямса, обусловлен, во-первых, тем, что они обладают хаотическими свойствами в строгом математическом смысле и допускают подробный математический анализ. Кроме того, такие системы обладают свойством грубости, то есть хаотических режим нечувствителен к вариациям параметров, шумам, отклонениями при изготовлении и т.п.

Достаточно долгое время считалось, что системы с гиперболическим хаосом – это математическая идеализация, ненаблюдаемая в реальности. Однако сравнительно недавно был предложен ряд систем с гиперболическим хаосом, которые допускают реализацию в виде физических устройств [1]. В частности, были предложены системы, описываемые дифференциальными уравнениями с запаздывающим аргументом. В настоящей работе мы развиваем метод численной проверки свойства гиперболичности для таких систем.

Развиваемый численный метод основан на так называемом быстром методе углов, описание которого можно найти в статье [2]. Как известно, траектории, принадлежащие гиперболическому хаотическому аттрактору, являются седловыми. Это означает, что растягивающееся и сжимающееся многообразия всегда пересекаются трансверсально, не образуя касаний друг с другом. Метод углов сводится к проверке этого свойства: необходимо, двигаясь вдоль траектории, вычислять угол между подпространствами, касательными к растягивающемуся и сжимающемуся многообразиям. Гиперболичность подтверждается, когда этот угол никогда не обращается в ноль. Напротив, для негиперболических аттракторов нулевое значение угла встречается с ненулевой частотой.

Применение быстрого метода углов сводится к проходу вдоль траектории на исследуемом аттракторе в прямом и в обратном времени. Проход в прямом времени производится аналогично тому, как это делается при вычислении показателей Ляпунова. Исходное уравнение решается совместно с необходимым количеством K копий уравнения в вариациях, и периодически осуществляется ортогонализация матрицы, столбцы которой образованы решениями вариационных уравнений. Однако, в отличие от вычисления показателей Ляпунова, матрицы после ортогонализации сохраняются для последующего использования.

Для выполнения обратного прохода необходимо получить сопряжённое уравнение в вариациях. В случае систем, заданных обыкновенными дифференциальными уравнения, оно получаются из исходного вариационного уравнения транспонированием его матрицы Якоби и инверсией знака её элементов. Несколько копий сопряжённого уравнения решается в обратном времени, причём шаги осуществляются по тем же самым точкам траектории, что и на прямом проходе. Количество сопряжённых уравнений равно количеству уравнений в вариациях, решаемых на прямом проходе, т.е. K. Точно также как и на прямом проходе, матрицы решений подвергаются ортогонализациям. Полученные в результате ортогональные матрицы используются совместно с соответствующим им ортогональным матрицам, сохраненным на прямом проходе. Для вычисления углов строится матрица попарных произведений столбцов этих матриц. Далее рассматриваются верхние левые подматрицы этой матрицы, для каждой ищется минимальное сингулярное число σ_i, где $i = 1, \ldots, K$ и вычисляется угол по формуле $\theta_i = \pi/2 - \arccos \sigma_i$.

Уравнение для рассматриваемых систем с запаздываниями в общем виде записывается следующим образом:

$$\dot{X} = F[t, X(t), X(t-\tau_1), \ldots, X(t-\tau_d)],$$

а соответствующее уравнение в вариациях имеет вид

$$\dot{x} = \mathbf{J}_0(t)x(t) + \sum_{i=1}^{d} \mathbf{J}_i(t)x(t-\tau_i),$$

где $\mathbf{J}_i^{\mathrm{T}}(t)$ – матрица производных функции F по компонентам её аргументов $X(t)$ и $X(t-\tau_i)$. Главная сложность применения быстрого метода углов к системам с запаздываниями состоит в том, как получить сопряжённое уравнение. Для его вывода мы используем тождество $\mathrm{d}\langle x, y\rangle/\mathrm{d}t \equiv 0$, которому должны удовлетворять произвольные решения x уравнения в вариациях и y сопряжённого уравнения. Исходя из этого требования, мы получаем сопряжённое уравнение:

$$\dot{y} = \mathbf{J}_0^{\mathrm{T}}(t)y(t) - \sum_{i=1}^{d} \mathbf{J}_i^{\mathrm{T}}(t+\tau_i)y(t+\tau_i).$$

Используя полученное сопряженное уравнение, мы применяем быстрый метод углов для проверки свойства гиперболичности для нескольких уравнений с запаздываниями, которые ранее были предложены в качестве систем с грубым хаосом. Во всех рассмотренных случаях свойство гиперболичности подтверждается.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (ПВК, проект № 16-02-00135) и РНФ (СПК, проект № 15-12-20035).

Библиографический список

1. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос и гиперболические аттракторы: от математики к физике. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2013. 488 с.
2. *Kuptsov P.V.* // Phys. Rev. E. 2012. Vol. 85. P. 015203.