

ГЕНЕРАЦИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО, ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО И КВАЗИГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ХАОСА

С. П. Кузнецов

Саратовский филиал ИПЭ им. В. А. Котельникова РАН

E-mail: spkuz@yandex.ru

С точки зрения возможных приложений хаоса, важно, чтобы он был робастным, т.е. не разрушался и не трансформировался в режимы регулярной, например, периодической динамики при малом возмущении параметров системы. В системах, где оператор эволюции задан гладкими функциями, такой хаос реализуется для *равномерно гиперболических* аттракторов (Смейла-Вильямса, Плыкина), обладающих строго доказанным свойством грубости [1], и для *псевдогиперболических* аттракторов (аттрактор Лоренца, «дикие» аттракторы), удовлетворяющих условиям, сформулированным Шильниковым и Тураевым [2]. Поскольку условия псевдогиперболическости в математическом смысле слабее, чем для равномерной гиперболическости, найти или сконструировать системы с такими аттракторами проще, чем с равномерно гиперболическими аттракторами. С другой стороны, робастный хаос оказывается часто достижимым, если при задании уравнений допустить использование негладких или разрывных функций, как в случае аттрактора Лози в отображении, заданном кусочно-линейной функцией, и аттрактора Белых, введенного в контексте систем фазовой автоподстройки [3] (квазигиперболическость).

В лекции рассматриваются примеры, допускающие реализацию на основе электронных схем, которые представляются имеющими перспективу использования в качестве генераторов робастного хаоса.

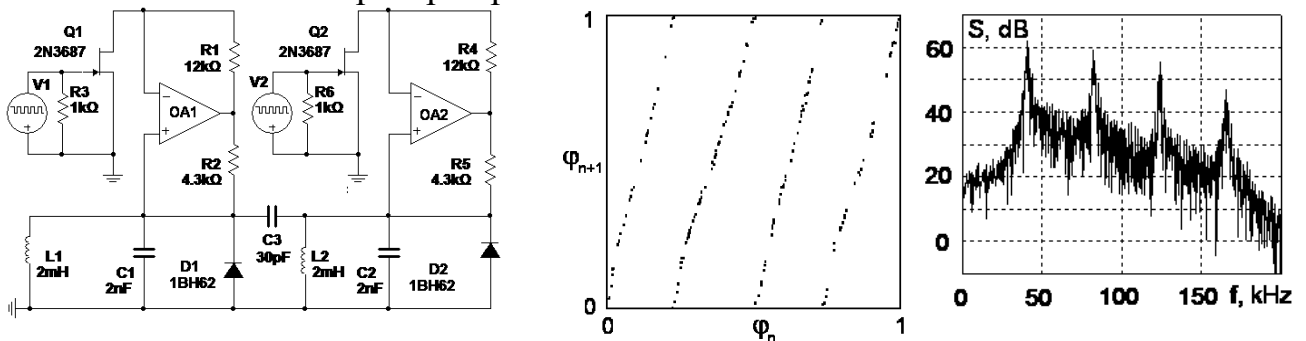


Рис.1. Система связанных автоколебательных элементов, реализующая гиперболический хаос, диаграмма, иллюстрирующая трансформацию фаз на последовательных стадиях активности, и спектр колебаний, полученные при моделировании в среде Multisim. Источники V1 и V2 выдают управляющие напряжения периода 1 мс, сдвинутые друг относительно друга на полпериода, причем для каждого из них напряжение остается нулевым на полупериоде, после чего за четверть периода убывает по линейному закону до -3 В, и затем возвращается к исходному нулевому уровню.

На рис. 1 показана схема, реализующая равномерно гиперболический хаос, на основе двух одинаковых автоколебательных элементов. Величина отрицательного сопротивления, вносимого в колебательные контуры, зависит от мгновенного сопротивления сток – исток полевых транзисторов. Подаваемое на затворы управляющее напряжение нулевое на протяжении части периода модуляции (при этом осциллятор активен), а на остальной части меньше нуля (колебания

подавляются). Параметры элементов отрицательного сопротивления подобраны так, что нулевое напряжение отвечает установлению релаксационных колебаний с частотой вдвое меньшей собственной частоты контура. В каждый контур включен диод, что обеспечивает ограничение уровня колебаний и наличие второй гармоники. Когда наступает очередная стадия активности осциллятора, развитие колебаний, начиная от малой амплитуды, стимулируется за счет второй гармоники колебаний осциллятора-партнера. Каждая передача возбуждения сопровождается удвоением фазы (см. центральную диаграмму), что при наличии сжатия по остальным направлениям в пространстве состояний отвечает аттрактору Смейла – Вильямса в отображении за период модуляции.

На рис.2 показана схема, реализующая псевдогиперболический аттрактор типа Лоренца, которая описывается системой уравнений с запаздыванием

$$\dot{y} = -y(t) + (r - z(t))y(t - \tau), \quad \dot{z} = -bz(t) + y(t)y(t - \tau),$$

где $b = 2$, $r = 14$, $\tau = 0.1$. Переменная y пропорциональна напряжению U , а переменная z напряжению V . На рисунке показан также портрет аттрактора в проекции из бесконечномерного фазового пространства системы с запаздыванием на плоскость, график зависимости показателя Ляпунова от параметра, дополненный графиками отображений для последовательных максимумов переменной z , а также спектры мощности сигналов U и V .

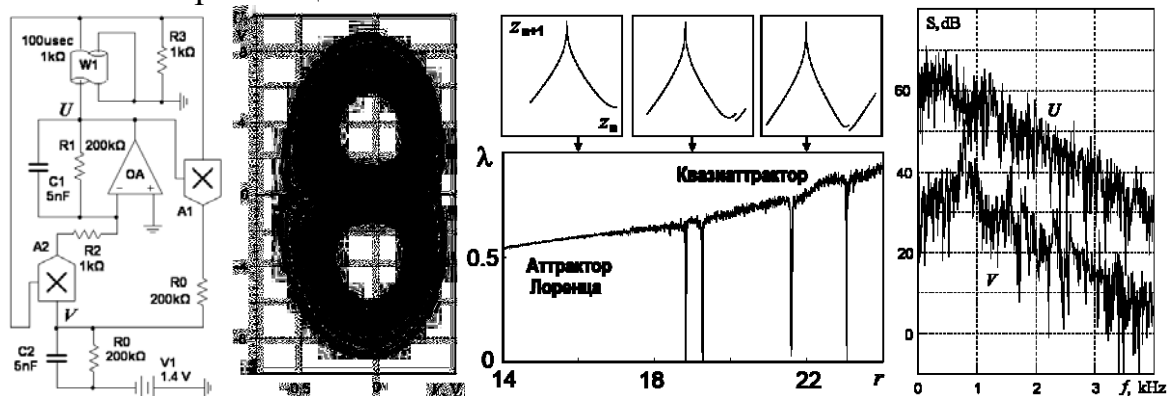


Рис. 2. Схема электронного устройства, описываемого уравнениями (2), где A1 и A2 – аналоговые умножители с коэффициентом передачи $\kappa = 0.1 \text{ В}^{-1}$, W1 – линия задержки с волновым сопротивлением 1 кОм и запаздыванием $T=100$ мкс; график зависимости показателя Ляпунова системы (2) от параметра r при $b=2$, $\tau=0.1$; спектры напряжений U и V .

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 16-02-00135 (конструирование схем) и гранта РНФ №17-12-01008 (получение модельных уравнений и численные расчеты).

Библиографический список

1. Синай Я. Г. Стохастичность динамических систем // Нелинейные волны, ред. Гапонов–Грехов А.В. М.: Наука, 1979. С. 192-212.
2. Тураев Д. В., Шильников Л. П. Пример дикого странного аттрактора. Математический сборник, 1998. **189**, № 2. С. 137-160.
3. Кузнецов С.П. Аттрактор Белых в отображении Заславского и его трансформация при сглаживании. Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика, 2018, **26**, № 1. С. 64–79.