

СЛОЖНАЯ ДИНАМИКА В МНОГОКОНТУРНОМ ГЕНЕРАТОРЕ

Н.В. Станкевич, А.П. Кузнецов, Е.П. Селезнев

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники имени В.А. Котельникова РАН
 Саратовский государственный технический университет имени Ю.А. Гагарина
 Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского

COMPLEX DYNAMIC IN MULTI-CONTOUR GENERATOR

N.V. Stankevich, A.P. Kuznetsov, E.P. Seleznev

На примере модели многоконтурного генератора проведено детальное исследование возникновения хаотической динамики в результате разрушения многочастотных торов. Обсуждаются квазипериодические бифуркации, происходящие с многочастотными торами. Выявлены области в пространстве параметров, в которых возникает различная хаотическая динамика, включая хаос, гиперхаос, а также хаос с дополнительными положительными показателями Ляпунова.

многоконтурный генератор; хаос; гиперхаос; показатели Ляпунова

Квазипериодические колебания являются неотъемлемым атрибутом динамики неавтономных систем и ансамблей связанных автоколебательных осцилляторов [1–3]. Данный тип колебаний может быть классифицирован в зависимости от количества несоизмеримых частот, вовлеченных в динамику. В простейшем случае система характеризуется двумя несоизмеримыми частотами, тогда аттрактором системы является двумерный двухчастотный тор. Увеличение количества частот приводит к увеличению размерности тора и усложнению динамики.

В качестве простейших моделей, демонстрирующих многочастотные квазипериодические колебания обычно используются неавтономные осцилляторы, а также ансамбли взаимодействующих осцилляторов. В работах [4–5] на примере сети глобально связанных осцилляторов Ван дер Поля была показана возможность реализации последовательности квазипериодических бифуркаций Хопфа. Однако в такой модели области хаоса очень малы в пространстве параметров и возникают при разрушении двухчастотных торов. В работе [6] была предложена модель многоконтурного генератора и реализована экспериментальная установка, в которой была продемонстрирована возможность многочастотных квазипериодических колебаний, а также формирование хаотической динамики.

Using the model of a multi-contour generator as an example, a detailed study of the emergence of chaotic dynamics as a result of the destruction of multi-frequency tori was carried out. Quasi-periodic bifurcations occurring with multi-frequency tori are discussed. In the parameter space areas, in which there is a variety of chaotic dynamics, including chaos, hyperchaos, as well as chaos with additional positive Lyapunov exponents, were identified.

multi-contour generator; chaos; hyperchaos; Lyapunov exponents

Целью данной работы является изучение формирования хаотической динамики в многоконтурном генераторе в случае, когда разрушаются торы с различным количеством несоизмеримых частот.

В качестве объекта исследования будем использовать предложенный в [6] простейший многоконтурный автономный генератор, в котором можно реализовать многочастотные квазипериодические колебания. В работе [6] была продемонстрирована возможность многочастотных квазипериодических колебаний, а также формирование хаотической динамики.

На рисунке 1 представлена принципиальная схема многоконтурного генератора с общей схемой управления. Такой генератор состоит из n колебательных контуров (OC_i), соединенных через общую схему управления (ССС). Каждый колебательный контур имеет свою собственную частоту, а также параметр, отвечающий за его возбуждение (k_i), то есть за возбуждение каждой моды в генераторе.

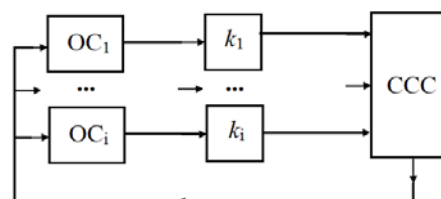


Рис. 1. Структурная схема многоконтурного генератора

Математически такой генератор можно записать следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\ddot{x}_i - (\lambda k_i - x_i^2)\dot{x}_i + \Delta_i x_i + \sum_{i=1}^n k_i \dot{x}_i - k_i \dot{x}_i = 0, \quad (1)$$

где $i = 1, \dots, N$ – количество контуров в генераторе, x_i, \dot{x}_i – динамические переменные каждого колебательного контура. Каждый колебательный контур представляет собой осциллятор типа Ван дер Поля, в котором параметр λ отвечает за возбуждение автоколебаний в контуре. Параметры Δ_i определяют частоты каждого колебательного контура.

Следуя работе [6], рассмотрим также случай пятиконтурного генератора, то есть $N = 5$, и параметры, отвечающие за собственные частоты, зафиксируем иррациональными, эквидистантно распределенными: $\Delta_1 = 1, \Delta_2 = \sqrt{3}, \Delta_3 = \sqrt{11}, \Delta_4 = \sqrt{41}, \Delta_5 = \sqrt{153}$. Параметр λ зафиксируем критическим, то есть после возбуждения автоколебаний в осцилляторе Ван дер Поля, $\lambda = 1$.

Основным инструментом, позволяющим изучить сложные колебательные режимы, включая хаотические и квазипериодические, является анализ полного спектра показателей Ляпунова [7], что позволяет: выделить хаотические колебания, диагностировать квазипериодические колебания с различным количеством несоизмеримых частот, определить тип квазипериодической бифуркации (Хопфа или седло – узел), классифицировать различные типы хаотической динамики.

Предварительный анализ пятиконтурного генератора (1) показал, что в такой системе возможно возникновение квазипериодических колебаний с различным числом частотных компонент от пяти до одной [6], причем с увеличением параметров, ответственных за коэффициенты усиления каждой моды, в системе сохраняются только двухчастотные квазипериодические колебания и хаос, возникший в результате разрушения двухчастотного тора с одним положительным и одним нулевым показателями Ляпунова. При малых значениях коэффициентов усиления сохраняются квазипериодические колебания с различным количеством частот (для $N = 5$ с тремя, четырьмя и пятью частотами), а при их разрушении формируются хаотические колебания с различным спектром показателей Ляпунова.

В наших численных экспериментах мы фиксировали коэффициенты усиления второго, третьего и четвертого колебательных контуров одинаковыми ($k_2 = k_3 = k_4 = 0,5$) и следили за динамикой при вариации коэффициентов усиления первого и пятого коэффициентов усиления. В этом случае для больших и малых значений коэффициентов усиления возникают две принципиально разные области хаотической динамики. При малых

значениях коэффициентов усиления в результате разрушения высокочастотных торов формируется хаос. В этом случае в спектре показателей Ляпунова хаотических аттракторов могут присутствовать дополнительные нулевые показатели Ляпунова, а также возможно формирование гиперхаоса. При больших значениях коэффициентов усиления хаос рождается в результате разрушения двухчастотного тора и в спектре показателей Ляпунова присутствует одна положительная и одна нулевая ляпуновские экспоненты. Далее рассмотрим более подробно особенности хаотических аттракторов из каждой области.

На рисунке 2 представлены двумерные проекции фазовых портретов каждого из контуров многоконтурного генератора (1) в режиме хаоса из второй области (для больших значений коэффициентов усиления) при $\lambda = 1, \Delta_1 = 1, \Delta_2 = \sqrt{3}, \Delta_3 = \sqrt{11}, \Delta_4 = \sqrt{41}, \Delta_5 = \sqrt{153}, k_1 = 4,6, k_2 = k_3 = k_4 = 0,5, k_5 = 6,2$.

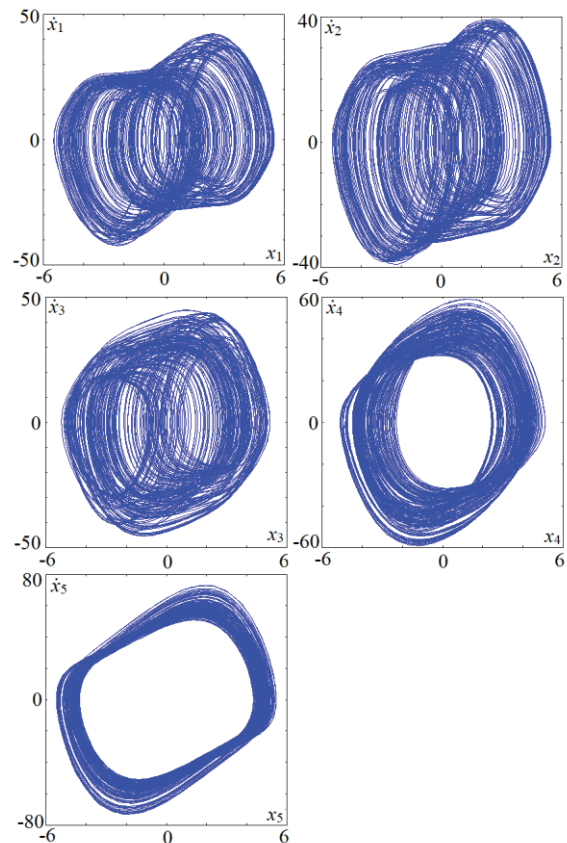


Рис. 2. Двумерные проекции фазового портрета модели многоконтурного генератора (1) в режиме хаотических колебаний, возникших в результате разрушения двухчастотного тора

Для указанных значений параметров первые шесть показателей Ляпунова принимают следующие значения: $\Lambda_1 = 0,699, \Lambda_2 = 0,0, \Lambda_3 = -0,196, \Lambda_4 = -0,718, \Lambda_5 = -2,509, \Lambda_6 = -3,665$. Как видно из рисунка 2, хаотический аттрактор в проекции на динамические переменные первых трех контуров

имеет некогерентную форму, то есть фазовая траектория заходит в окрестность нуля, при этом в проекции динамических переменных четвертого и пятого контуров окрестность нуля остается незаполненной и аттрактор остается когерентным.

На рисунке 3 при $\lambda=1$, $\Delta_1=1$, $\Delta_2=\sqrt{3}$, $\Delta_3=\sqrt{11}$, $\Delta_4=\sqrt{41}$, $\Delta_5=\sqrt{153}$, $k_1=4,6$, $k_2=k_3=k_4=0,5$, $k_5=6,2$ представлены проекции фигуры Лиссажу для этого же хаотического аттрактора (а, б), проекция аттрактора в сечении Пуанкаре (в) и спектр Фурье (г).

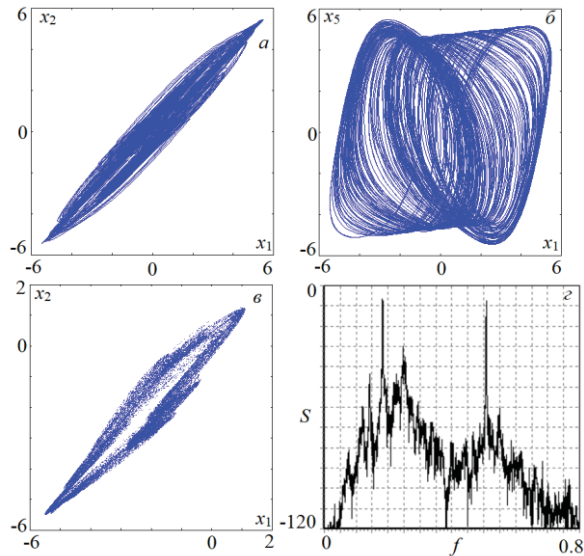


Рис. 3. Двумерные проекции фигур Лиссажу (а, б), сечение Пуанкаре гиперповерхностью $\dot{x}_2 = 0$ и спектр Фурье модели многоконтурного генератора (1) в режиме хаотических колебаний, возникших в результате разрушения двухчастотного тора

Фигуры Лиссажу (рис. 3 а, б) можно использовать как некий индикатор синхронизации в системе. Наклон фигуры иллюстрирует наличие синфазной или противофазной синхронизации. Таким образом, в нашем случае можно утверждать, что наблюдается приближенная синфазная синхронизация между первым и вторым контурами, при этом синхронизация между первым и пятым контуром отсутствует. На фигурах Лиссажу для остальных пар контуров синхронизации не наблюдается. В сечении Пуанкаре (рис. 3 в) наблюдается сложная структура, соответствующая хаотическому аттрактору. Спектр Фурье имеет характерную форму для хаотического режима, возникшего в результате разрушения двухчастотного тора. Имеются два характерных пика, отвечающих базовым несоизмеримым частотам, а также просматриваются пики-спутники, соответствующие комбинационным частотам.

Теперь перейдем к обсуждению особенностей хаотических аттракторов, возникающих при разрушении многочастотных торов, то есть при малых значениях коэффициентов усиления. На ри-

сунке 4 представлены двумерные проекции фазовых портретов многоконтурного генератора (1) в режиме хаоса из первой области (малые значения коэффициентов усиления) при $\lambda=1$, $\Delta_1=1$, $\Delta_2=\sqrt{3}$, $\Delta_3=\sqrt{11}$, $\Delta_4=\sqrt{41}$, $\Delta_5=\sqrt{153}$, $k_1=0,83$, $k_2=k_3=k_4=0,5$, $k_5=1,26$.

На рисунке 4 представлены проекции на плоскость каждого из контуров. Для указанных значений параметров первые шесть показателей Ляпунова принимают следующие значения: $\Lambda_1=0,033$, $\Lambda_2=0,003$, $\Lambda_3=0,0$, $\Lambda_4=0,0$, $\Lambda_5=-0,003$, $\Lambda_6=-0,0283$.

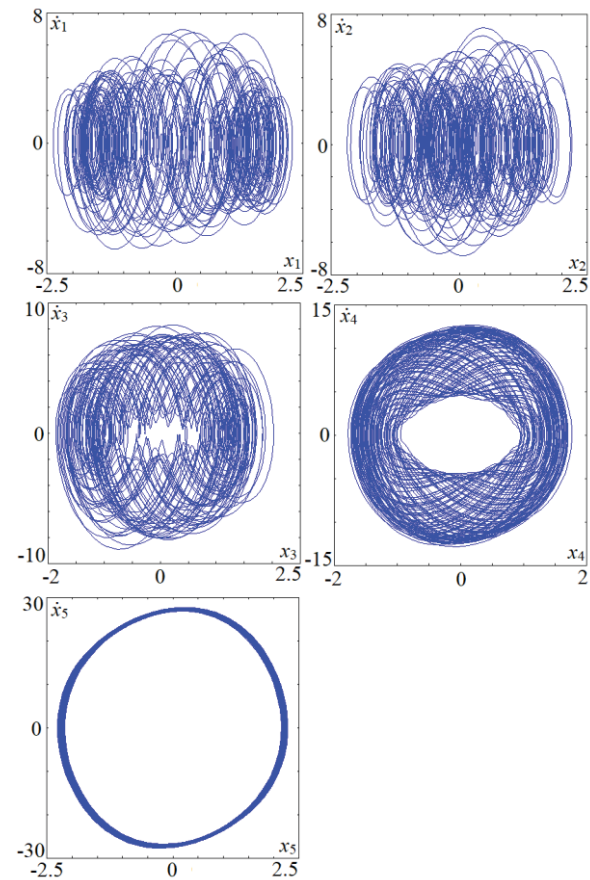


Рис. 4. Двумерные проекции фазового портрета модели многоконтурного генератора (1) в режиме хаотических колебаний

Таким образом, данный хаотический режим является гиперхаосом с дополнительным нулевым показателем Ляпунова. Помимо такого типа аттракторов при малых коэффициентах усиления, также наблюдается хаос с одним положительным и двумя или тремя нулевыми показателями Ляпунова. Хаотический аттрактор так же, как и в предыдущем случае, в проекции на динамические переменные первых контуров является некогерентным, то есть фазовая траектория заходит в окрестность. Однако уже для третьего контура появляется пустое пространство в окрестности нуля. В проекциях динамических переменных чет-

вертого и пятого контуров окрестность нуля остается незаполненной. Необходимо отметить плотное сжатие аттрактора в проекции на переменные пятого контура.

На рисунке 5 при $\lambda = 1$, $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = \sqrt{3}$, $\Delta_3 = \sqrt{11}$, $\Delta_4 = \sqrt{41}$, $\Delta_5 = \sqrt{153}$, $k_1 = 0,83$, $k_2 = k_3 = k_4 = 0,5$, $k_5 = 1,26$ представлены проекции фигуры Лиссажу для этого же хаотического аттрактора (*а*, *б*), проекция аттрактора в сечении Пуанкаре (*в*) и спектр Фурье (*г*).

По фигурам Лиссажу (рис. 5 *а*, *б*) можно сделать вывод о том, что в данном случае отсутствует синхронизация между контурами, то есть колебательные моды независимы друг от друга. В сечении Пуанкаре (рис. 5 *в*) наблюдается сложная структура, соответствующая хаотическому аттрактору. Спектр Фурье в сравнении с предыдущим случаем хаотического аттрактора является более равномерным, имеется единственный и несильно выраженный пик.

Таким образом, в работе представлено исследование особенностей хаотических аттракторов, родившихся в результате разрушения двухчастотного тора и в результате разрушения торов с тремя и более несоизмеримыми частотами.

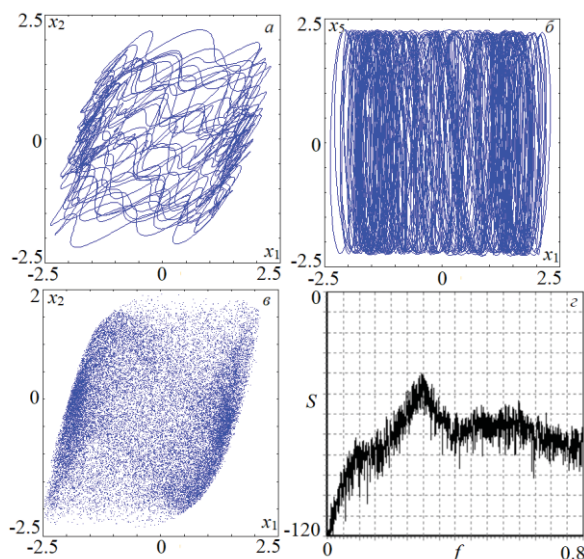


Рис. 5. Двумерные проекции фигур Лиссажу (*а*, *б*), стробоскопическое сечение Пуанкаре и спектр Фурье модели многоконтурного генератора (1) в режиме хаотических колебаний

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ (№ 17-12-01008).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ланда П.С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. – М : Наука, 1980. – 360 с.
2. Лоскутов А.Ю., Михайлов М. Основы теории сложных систем. М. ; Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2007. – 620 с.
3. Кузнецов А.П., Сатаев И.Р., Станкевич Н.В., Тюрюкина Л.В. Физика квазипериодических колебаний. Саратов : Наука, 2013. – 252 с.
4. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Тюрюкина Л.В., Сатаев И.Р. Сценарий Ландау – Хопфа в ансамбле взаимодействующих осцилляторов // Нелинейная динамика. – 2012. – Т. 8, № 5. – С. 863–873.
5. Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R., Turukina L.V. About Landau – Hopf scenario in a system of coupled self-oscillators // Physics Letters A. – 2013. – Vol. 377. – Pp. 3291–3295.
6. Станкевич Н.В., Астахов О.В., Кузнецов А.П., Селезнев Е.П. Возбуждение хаотических и квазипериодических колебаний в многоконтурном генераторе с общей схемой управления // Письма в ЖТФ. – 2018. – Т. 44, № 10. – С. 46–54.
7. Pikovsky A., Politi A. Lyapunov exponents: a tool to explore complex dynamics. – Cambridge : University Press, 2016. – 295 p.

Станкевич Наталия Владимировна, канд. физ.-мат. наук, доц. кафедры радиоэлектроники и телекоммуникаций Саратовского государственного университета имени Ю.А. Гагарина.

410054, г. Саратов, ул. Политехническая, 77.

Тел. +79033290994, e-mail: stankevichnv@mail.ru.