Аттракторы типа Смейла – Вильямса в автономных системах с комплексными переменными

В. П. Круглов, П. В. Купцов, И. Р. Сатаев, Е. П. Селезнев

Институт радиотехники и электроники РАН, Саратовский филиал

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда
№ 21-12-00121

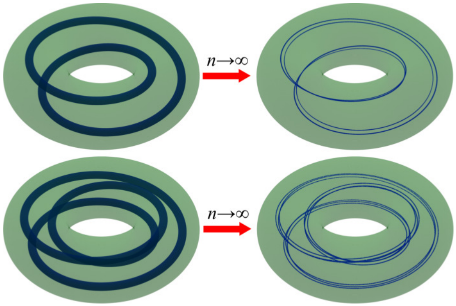
Соленоид Смейла – Вильямса

Пример абстрактного трехмерного отображения с соленоидом Смейла – Вильямса:

цилиндрическая система координат

$$\begin{aligned} \theta_{n+1} &= m\theta_n \pmod{2\pi}, \\ r_{n+1} &= 1 + \alpha\,(r_n - 1) + \varepsilon\cos\theta_n, \\ z_{n+1} &= \alpha z_n + \varepsilon\sin\theta_n. \end{aligned} \quad \mapsto \quad \text{замена} \quad \mapsto \quad \begin{aligned} X_n &= r_n\cos\theta_n, \\ Y_n &= r_n\sin\theta_n, \\ Z_n &= z_n. \end{aligned}$$

декартова система координат



Соленоиды Смейла – Вильямса с факторами растяжения 2 и 3.

$\theta_{n+1} = m\theta_n \pmod{2\pi}$ — отображение Бернулли

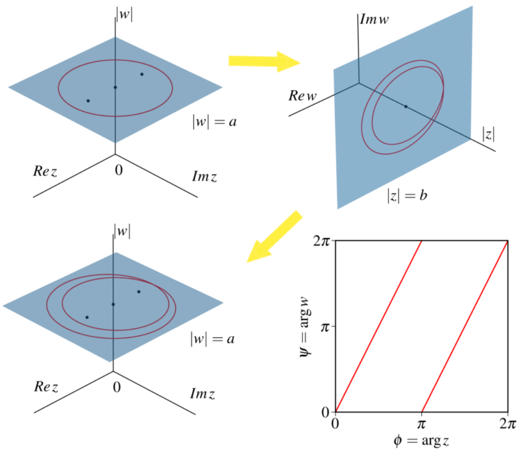
m – целое число больше единицы, 2, 3, 4, . . .
переменная θ – угловая и может трактоваться как аргумент комплексной переменной, а переменные X и Y – действительная и мнимая часть комплексной переменной

Представляет интерес общий принцип построения систем с аттракторами, топологически схожими с соленоидом Смейла – Вильямса, особенно в сечении Пуанкаре систем дифференциальных уравнений.

Цель исследования

Целью этого исследования является формулирование общего рецепта, позволяющего строить динамические системы, описываемые дифференциальными уравнениями, с грубым аттрактором типа соленоида Смейла – Вильямса, а также геометрическое объяснение причин формирования аттрактора этого типа в уже известных системах.

Основная идея состоит в конструировании таких правых частей дифференциальных уравнений с комплексными переменными, что преобразование аргументов комплексных переменных соответствует отображению Бернулли.



Отображение контура с поверхности $|w| = a$ на поверхность $|z| = b$ и обратно на $|w| = a$. Количество петель удваивается. Отображение с поверхности $|w| = a$ на $|z| = b$ удваивает (в среднем) аргумент комплексной переменной.

Фазовое пространство $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$ с седлом в $(0,0)$, $z = x + iy = re^{i\phi}$, $w = u + iv = se^{i\psi}$

две секущих поверхности $|w| = a$ и $|z| = b$, представляют собой трехмерные цилиндрические поверхности с комплексными образующими

Секущая поверхность $|w| = a$ отображается на поверхность $|z| = b$ потоком, траектории потока “рассеиваюся на седле” при движении от одной секущей к другой

Секущая поверхность $|z| = b$ отображается обратно на поверхность $|w| = a$ другим потоком

Два потока склеиваются на секущих поверхностях

“Рассеяние” на седловом положении равновесия

Рассмотрим потоковую систему, описывающую “рассеяние на седле”:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \mu z, \\ \dot{w} &= -\rho w + \delta z^{m}, \end{aligned} \tag{1}$$

где $m = 2, 3, 4 \ldots$ – целое число.

Параметры μ и ρ положительные, δ – параметр нелинейности.

Эту систему уравнений можно решить:

$$\begin{aligned} z(t) &= e^{\mu t} z_0, \\ w(t) &= e^{-\rho t} w_0 + \frac{\delta}{m\mu + \rho} \left(e^{m\mu t} - e^{-\rho t}\right) z_0^{m}, \end{aligned} \tag{2}$$

где $z_0 = z(0)$ и $w_0 = w(0)$ – начальные условия.

Точка $z = 0$, $w = 0$ – седловое положение равновесия.

“Рассеяние” на седловом положении равновесия

Линеаризованные уравнения в окрестности седла:

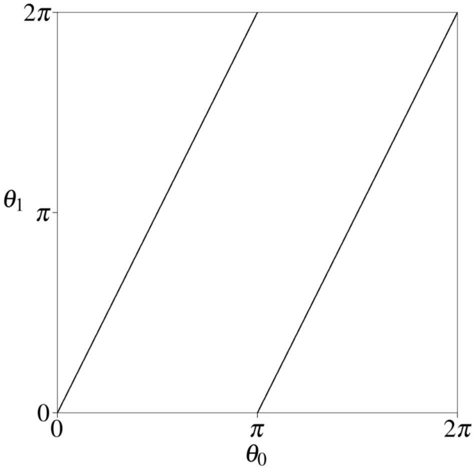
$$\begin{aligned} \dot{\tilde{z}} &= \mu\tilde{z}, \\ \dot{\tilde{w}} &= -\rho\tilde{w} \end{aligned} \quad \text{или} \quad \begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \mu\tilde{x}, \\ \dot{\tilde{y}} &= \mu\tilde{y}, \\ \dot{\tilde{u}} &= -\rho\tilde{u}, \\ \dot{\tilde{v}} &= -\rho\tilde{v}, \end{aligned} \tag{3}$$

(тильдой ~ обозначены вариации переменных)

Характеристические показатели седлового положения равновесия таковы, что в его двухмерном устойчивом касательном пространстве нет выделенного направления, также в его двухмерном неустойчивом касательном пространстве нет выделенного направления.

Мы задаем начальные условия для набора траекторий: заданная амплитуда $|w_0| = a = \text{Const}$, аргумент $\psi_0 = \arg w_0$ – произвольный, произвольная достаточно большая амплитуда $|z_0| < b$, аргумент $\phi_0 = \arg z_0$ для всех траекторий равномерно распределен на интервале $[0, 2\pi)$. Мы решаем уравнения (1) для всех траекторий до достижения $|z_1| = b = \text{Const}$, при этом аргумент $\psi_1 = \arg w$ становится равномерно распределен на интервале $[0, 2\pi m)$.

“Рассеяние” на седловом положении равновесия



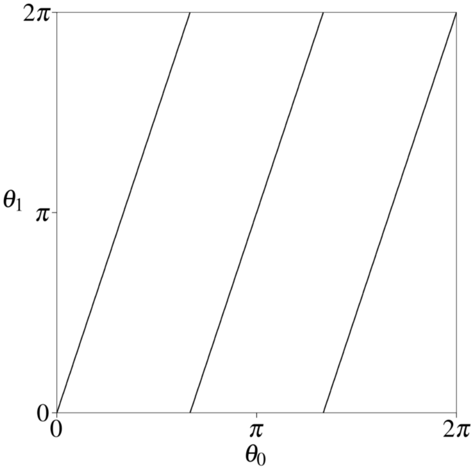


Диаграмма рассеяния траекторий. a) $m = 2$, b) $m = 3$.

Кусочная система

Необходимо возвращать траекторию к седлу. Мы пробуем сделать это в системе, склеенной из двух частей

В первой части фазового пространства происходит рассеяние траектории на седле:

$$\dot{z} = \mu z,$$
$$\dot{w} = -\rho w + \delta z^{m},$$

до достижения $|z| = b$

Во второй части фазового пространства происходит релаксация амплитуд переменных:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= -\alpha z + \varepsilon w, \\ \dot{w} &= -\beta w, \end{aligned} \tag{4}$$

до достижения $|w| = a$

Эта система негладкая, но проще при анализе, чем более релистичные системы гладких дифференциальных уравнений. В известных нам примерах уравнений с аттрактором типа Смейла – Вильямса обычно содержатся слагаемые вида $|z|^2 z$ и $|w|^2 z$, которые не влияют на аргументы комплексных переменных, но делают невозможным строгое точное решение уравнений на листке бумаги.
Так же нет необходимости делать предположения о малости каких-либо параметров.

Кусочная система

Эти уравнения можно решить. Отображение мы записываем так:

$$z_1 = e^{\mu\tau_1} z_0 = b\frac{z_0}{|z_0|}$$

$$w_1 = \frac{\delta}{m\mu+\rho}\left(e^{m\mu\tau_1} - e^{-\rho\tau_1}\right) z_0^m + e^{-\rho\tau_1} w_0$$

$$\tau_1 = \frac{1}{\mu}\ln\frac{b}{|z_0|}$$

$$z_2 = \frac{\varepsilon}{\alpha-\beta}\left(e^{-\beta\tau_2} - e^{-\alpha\tau_2}\right) w_1 + e^{-\alpha\tau_2} z_1$$

$$w_2 = e^{-\beta\tau_2} w_1 = a\frac{w_1}{|w_1|}$$

$$\tau_2 = -\frac{1}{\beta}\ln\frac{a}{|w_1|}$$

τ_1 и τ_2 – “времена полета” траекторий в области с рассеянием и в области с релаксацией. Они зависят от начальных условий для амплитуд $|z_0|$ и $|w_1|$ при попадании в соответствующие области, у каждой траектории свое “время полета”.

$$z_1 = \frac{b}{|z_0|} z_0$$

$$w_1 = \frac{\delta}{m\mu+\rho}\left(\left(\frac{b}{|z_0|}\right)^m - \left(\frac{b}{|z_0|}\right)^{-\frac{\rho}{\mu}}\right) z_0^m + \left(\frac{b}{|z_0|}\right)^{-\frac{\rho}{\mu}} w_0$$

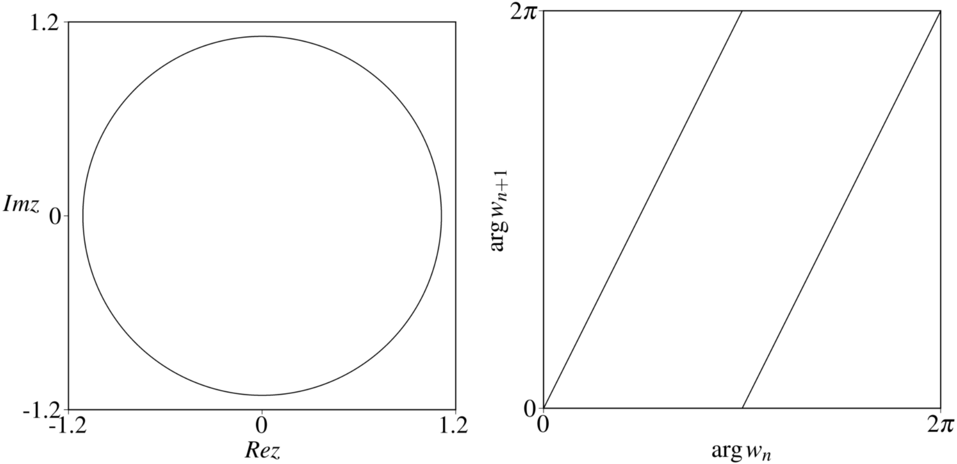
$$z_2 = \frac{\varepsilon}{\alpha-\beta}\left(\frac{a}{|w_1|} - \left(\frac{a}{|w_1|}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}}\right) w_1 + \left(\frac{a}{|w_1|}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}} z_1$$

$$w_2 = \frac{a}{|w_1|} w_1$$

“Времена полета”, известные в явном виде, можно подставить в формулы, тогда становится ясно, что отображения $z_0 \mapsto w_1$ и $w_1 \mapsto z_2$ не аналитические.

Кусочная система

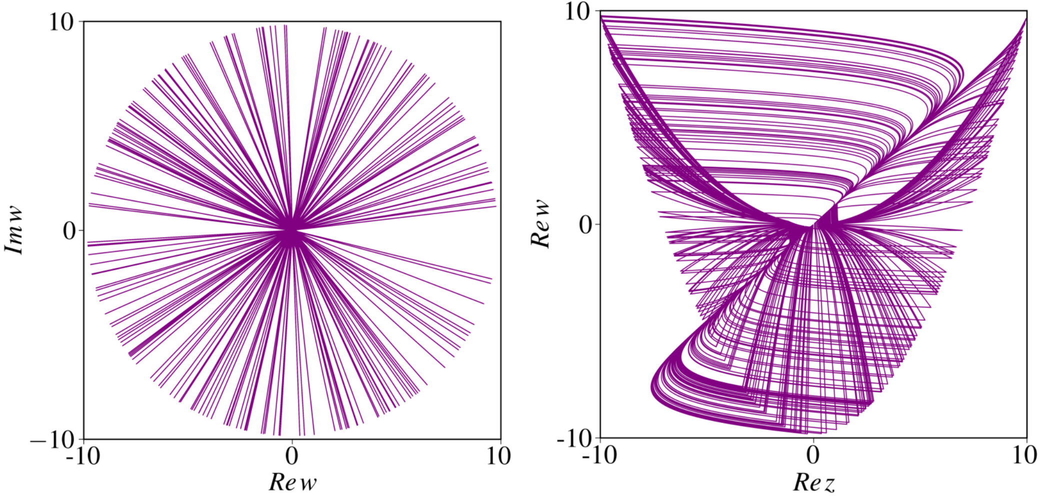
Отображение возврата Пуанкаре на поверхность $|w| = a$, сильное сжатие не позволяет различить петли на аттракторе, однако преобразование фазы соответствует отображению Бернулли.



$$\mu = 0.1,\ \rho = 10,\ \delta = 1,\ \alpha = 0.1,\ \beta = 1,\ \varepsilon = 1,\ a = 1,\ b = 10,\ m = 2.$$

Кусочная система

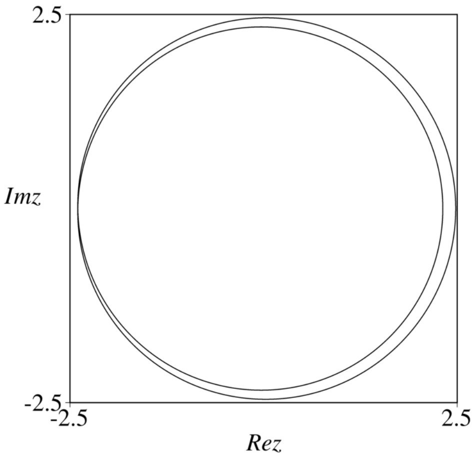
“Рассеяние на седле” проявляется как “ежик”.

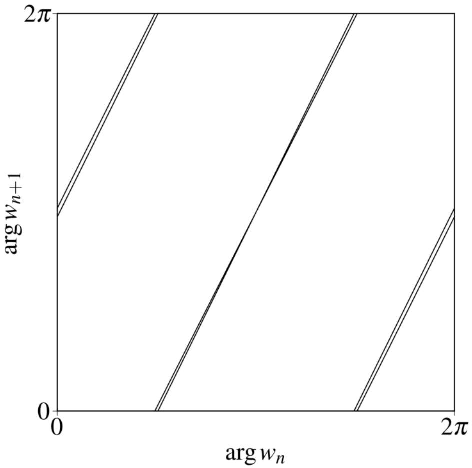


$\mu = 0.1,\ \rho = 10,\ \delta = 1,\ \alpha = 0.1,\ \beta = 1,\ \varepsilon = 1,\ a = 1,\ b = 10,\ m = 2.$

Кусочная система

Отображение возврата Пуанкаре на поверхность $|w| = a$, можно различить различить петли на аттракторе, преобразование фазы соответствует отображению Бернулли.

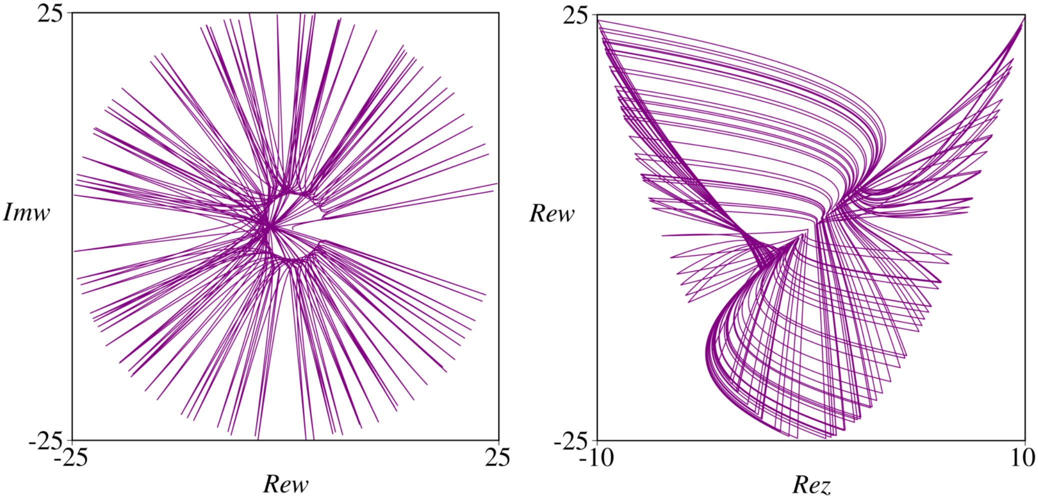




$$\mu = 1,\ \rho = 2,\ \delta = 1,\ \alpha = 1,\ \beta = 3,\ \varepsilon = 1,\ a = 5,\ b = 10,\ m = 2.$$

Кусочная система

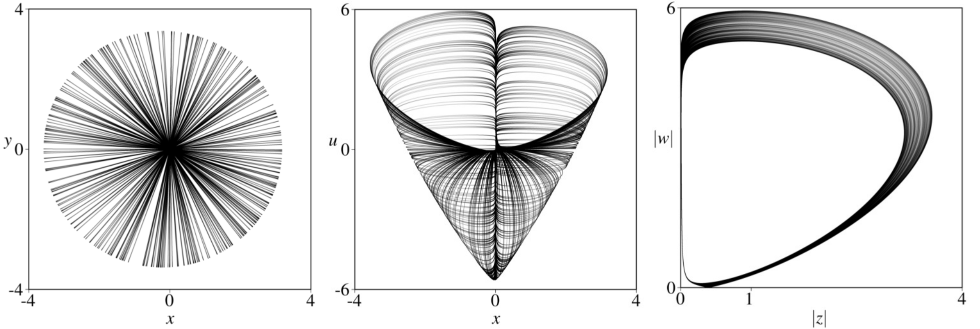
“Рассеяние” происходит на достаточно большом расстоянии от седла.



$\mu = 1,\ \rho = 2,\ \delta = 1,\ \alpha = 1,\ \beta = 3,\ \varepsilon = 1,\ a = 5,\ b = 10,\ m = 2.$

Кусочная система разрабатывалась как качественная аппроксимация гладкой системы уравнений

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \left(\mu + |z_1|^2 - |z_2|^2\right) z_1 + \varepsilon z_2, \\ \dot{z}_2 &= \left(|z_1|^2 - 1\right) z_2 + z_1^m, \end{aligned} \tag{5}$$



Портреты аттрактора потоковой системы в различных проекциях $\mu = 0.95$, $\varepsilon = 0.02$, $m = 2$.

показатели Ляпунова в сечении Пуанкаре $|z|^2 = 1$

$m = 2$:

$\Lambda_1 = 0.69314 \pm 0.00004$

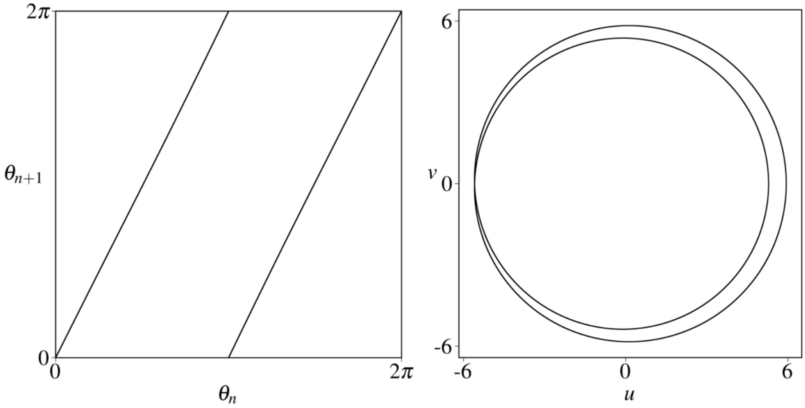
$\approx \ln 2$

$\Lambda_2 = -10.72 \pm 0.01$

$\Lambda_3 = -14.45 \pm 0.01$

$\langle T \rangle = 5.9546 \pm 0.003$

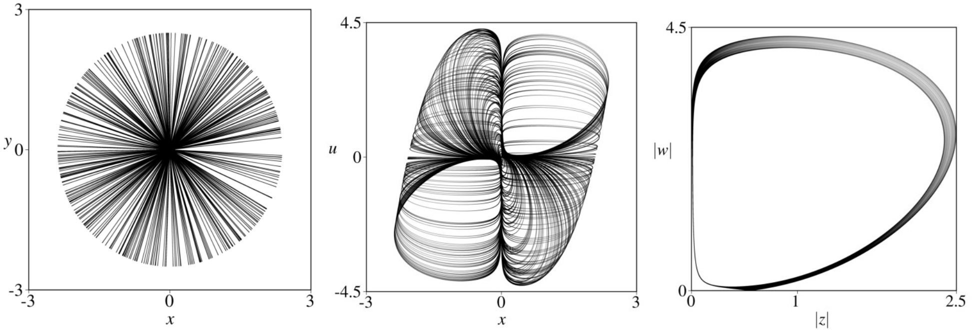
и средний период между сечениями Пуанкаре



Итерационная диаграмма для фазы и портрет аттрактора в сечении Пуанкаре $|z|^2 = 1$, $\mu = 0.95$, $\varepsilon = 0.02$, $m = 2$.

Гладкая система нелинейных уравнений

$$\dot{z}_1 = \left(\mu + |z_1|^2 - |z_2|^2\right) z_1 + \varepsilon z_2,$$
$$\dot{z}_2 = \left(|z_1|^2 - 1\right) z_2 + z_1^m,$$



Портреты аттрактора потоковой системы в различных проекциях $\mu = 0.95$, $\varepsilon = 0.02$, $m = 3$.

Гладкая система нелинейных уравнений

показатели Ляпунова в сечении Пуанкаре $|z|^2 = 1$

$m = 3$:

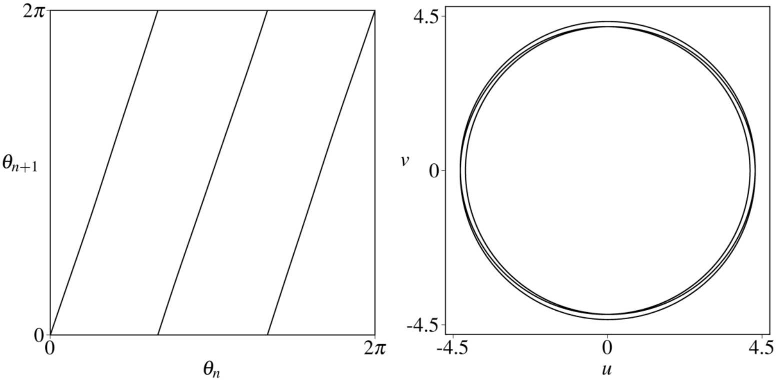
$\Lambda_1 = 1.0986 \pm 0.0001$

$\approx \ln 3$

$\Lambda_2 = -5.69 \pm 0.01$

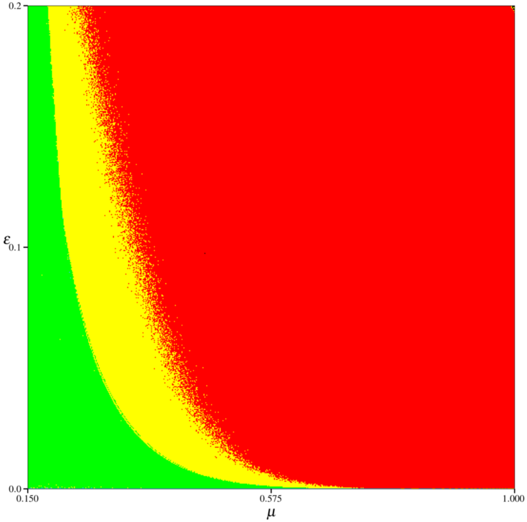
$\Lambda_3 = -8.69 \pm 0.01$

$\langle T \rangle = 5.6598 \pm 0.002$



Итерационная диаграмма для фазы и портрет аттрактора в сечении Пуанкаре $|z|^2 = 1$, $\mu = 0.95$, $\varepsilon = 0.02$, $m = 3$.

Карта режимов в случае $m = 2$, красная область соответствует хаотическому режиму с фактором растяжения угловой переменной 2, ассоциирующемуся с аттрактором типа Смейла – Вильямса. Желтая область соответствует хаотическим негиперболическим аттракторам. Зеленая область – периодические режимы.

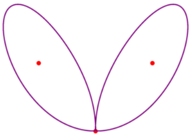


Карта режимов, $m = 2$.

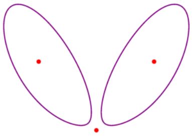
Уравнения Шимицу – Мориока

Уравнения ШИмицу – Мориока являются нормальной формой для бифуркаций, приводящих к возникновению аттрактора Лоренца, но также они демонстрируют и бифуркацию “устойчивая гомоклиническая бабочка” – предельные циклы “влипают” в петли сепаратрис седла.

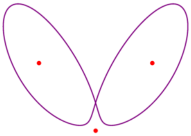
$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= u,\\
\dot{u} &= -\lambda u + (1-q)\,x,\\
\dot{q} &= -\alpha q + x^2
\end{aligned}
$$



$\lambda = 0.98695,\ \alpha = 0.7$



$\lambda = 1,\ \alpha = 0.7$



$\lambda = 0.95,\ \alpha = 0.7$

Комплексные уравнения Шимицу – Мориока

Комплексные уравнения Шимицу – Мориока можно получить, если заменить вещественные переменные x и u на комплексные z и w. Однако они естественно получаются из комплексных уравнений Лоренца, описывающих одномодовый лазер

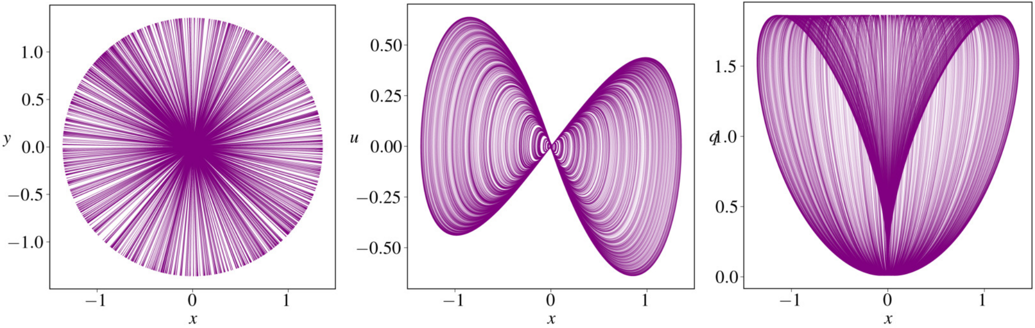
Vladimirov A. G., Toronov V. Y., Derbov V. L. The complex Lorenz model: Geometric structure, homoclinic bifurcation and one-dimensional map //International Journal of Bifurcation and Chaos. 1998. vol. 8. no. 04. p. 723-729.

Мы добавляем слагаемое εw^m для преобразования аргументов комплексных переменных

$$\begin{aligned} \dot{z} &= w, \\ \dot{w} &= -\lambda w + (1-q)\, z + \varepsilon w^m, \\ \dot{q} &= -\alpha q + |z|^2 \end{aligned} \tag{6}$$

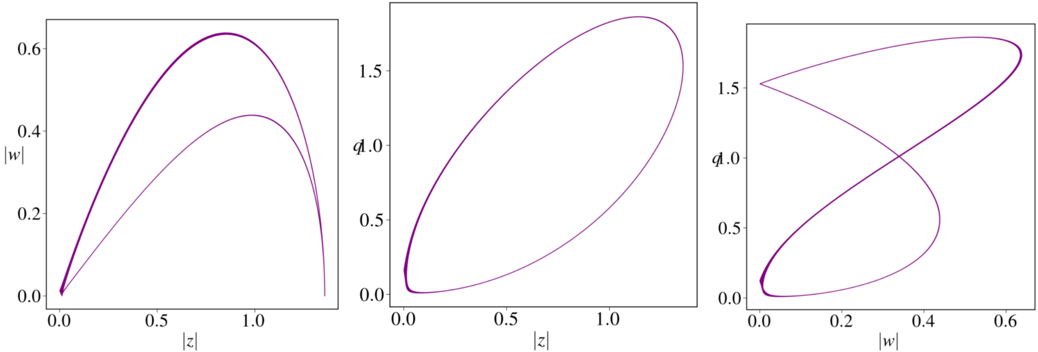
$z = x + iy$, $w = u + iv$, $q \in \mathbb{R}$, $m = 2, 3, \ldots$
Уравнения Шимицу – Мориока описывают осциллятор с инерционной нелинейностью. Мы ранее уже комплексифицировали уравнения осциллятора с гомоклинической бифуркацией: Kuznetsov S. P., Kruglov V. P., Sataev I. R. Smale–Williams solenoids in autonomous system with saddle equilibrium //Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2021. vol. 31. no. 1. p. 013140.

Комплексные уравнения Шимицу – Мориока



$\lambda = 0.98695,\ \alpha = 0.7,\ m = 3.$

Комплексные уравнения Шимицу – Мориока



$\lambda = 0.98695,\ \alpha = 0.7,\ m = 3.$

показатели Ляпунова в сечении Пуанкаре $|z|^2 = 1$

$m = 3$:

$\Lambda_1 = 1.084 \pm 0.002$

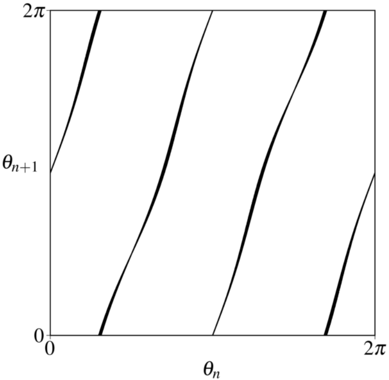
$\approx \ln 3$

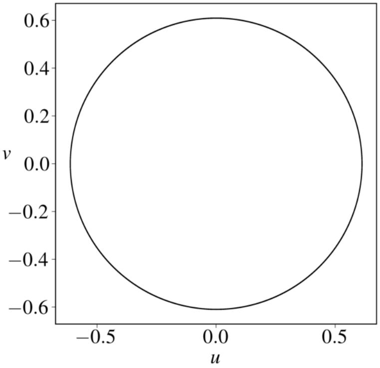
$\Lambda_2 = -1.76 \pm 0.01$

$\Lambda_3 = -15.725 \pm 0.005$

$\Lambda_4 = -23.786 \pm 0.007$

$\langle T \rangle = 15.031 \pm 0.003$

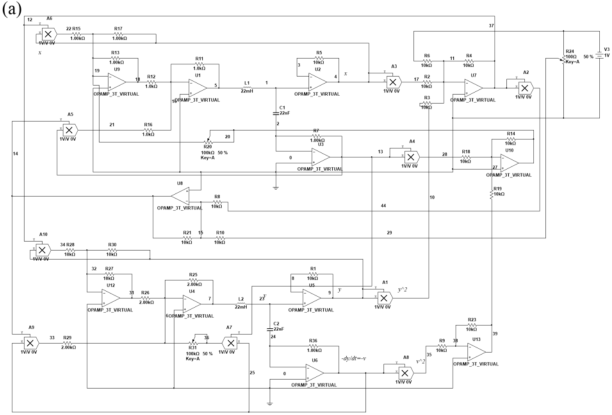


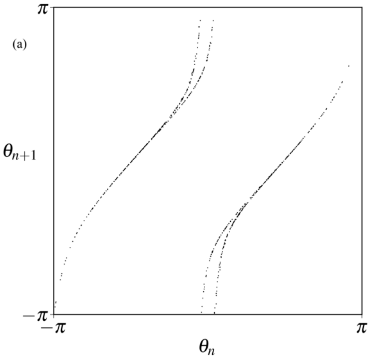


Итерационная диаграмма для фазы и портрет аттрактора в сечении Пуанкаре $|z|^2 = 1$, $\lambda = 0.98695$, $\alpha = 0.7$, $m = 3$.

Электронная схема

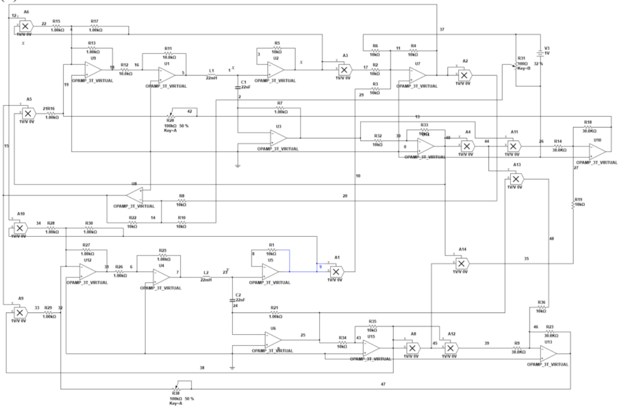
Разработана иследована в симуляторе Multisim электронная схема с аттрактором Смейла – Вильямса, на основе комплексифицированного уравнения осциллятора с гомоклинической бифуркацией “восьмерка”, модель была предложена нами ранее в статье
Kuznetsov S. P., Kruglov V. P., Sataev I. R. Smale–Williams solenoids in autonomous system with saddle equilibrium //Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2021. vol. 31. no. 1. p. 013140.



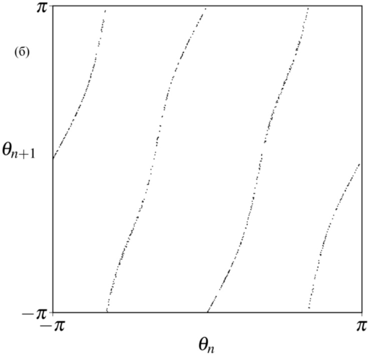


$m = 2$

(б)



(б)



$m = 3$