

## СЛОЖНАЯ ДИНАМИКА МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

С.П. Кузнецов<sup>1,2,3</sup><sup>1</sup>Удмуртский государственный университет, Ижевск<sup>2</sup>Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН<sup>3</sup>Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

E-mail: spkuz@yandex.ru

С точки зрения наглядности феноменов нелинейной динамики, выделяются системы механики, которые легко воспринимаются и трактуются благодаря нашему повседневному опыту. Многие из них имеют важное практическое значение в плане теории машин и механизмов, для робототехники. Обсудим несколько примеров сложной динамики механических систем.

Первый пример относится к задаче о кельтском камне – движении твердого тела выпуклой формы на плоской горизонтальной поверхности (рис.1). В частности, имеет место эффект реверса: при закручивании в одном из двух направлений, движение замедляется, переходит в колебания, а затем возобновляется в противоположном направлении. Описание эффекта достигается в рамках механической модели с неголономной связью, предполагающей, что скорость точки контакта всегда нулевая. Хотя система консервативная (сохранение механической энергии) и обладает симметрией к обращению времени, элементы фазового объема в ходе динамической эволюции не остаются постоянными, локально претерпевая сжатие в одних местах фазового пространства и растяжение в других. Благодаря этому возможны типы поведения, подобные аттракторам в диссипативных системах [1].

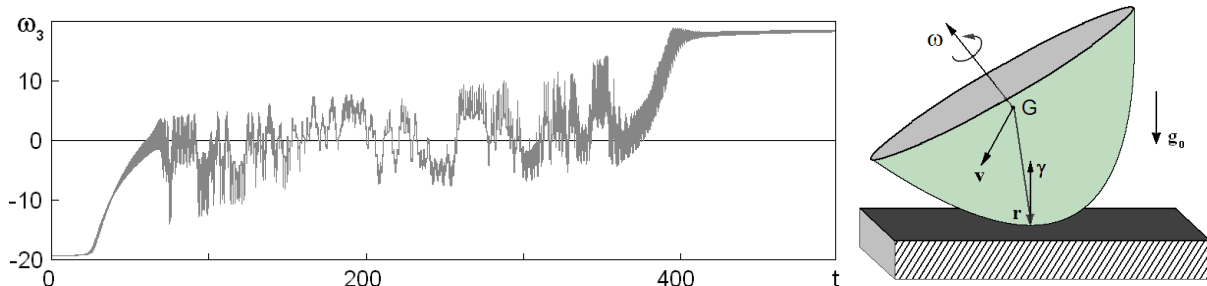


Рис.1. Зависимости вертикальной компоненты угловой скорости от времени (а), иллюстрирующие эффект реверса в неголономной модели кельтского камня (б).

Второй пример – восходящая к Максвеллу задача о падении пластины в жидкости. В зависимости от параметров, движение может сопровождаться колебаниями (флаттер) или кувырканиями (авторотация). Полное описание задачи подразумевает совместное решение уравнений движения и уравнений Навье – Стокса, описывающих движение жидкости в прилегающих областях. Возможно, однако, и приближенное конечномерное описание. На рис.2 показаны портрет аттрактора и пространственная траектория тела для одной частной модели в предположении линейно зависящего от обобщенных скоростей вязкого трения, нулевой плавучести и наличия постоянного вращающего момента, когда реализуется аттрактор типа Лоренца [2]. На рис.3 приводятся траектории падающего тела эллиптического профиля, полученные в рамках численного моделирования с помощью уравнений Навье – Стокса и с помощью конечно-

мерной модели, реконструированной на основе обработки данных численного моделирования [3].

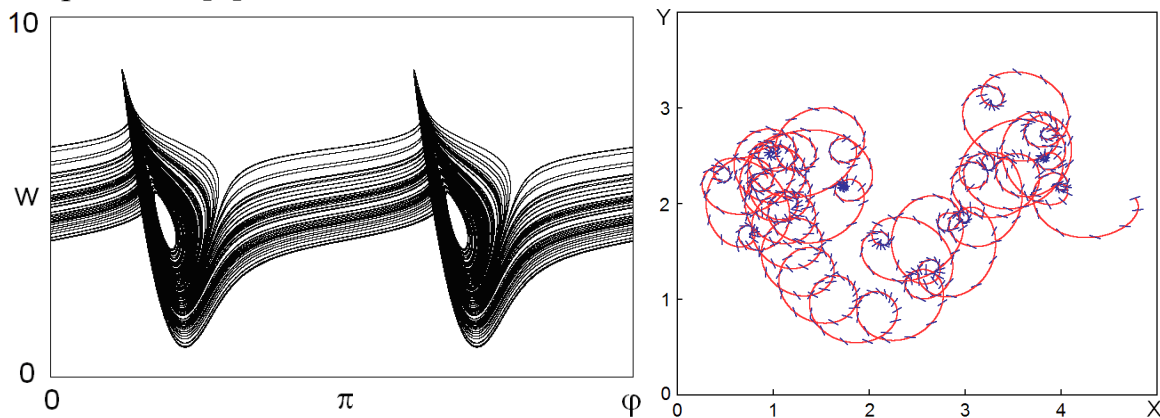


Рис.2. Портрет аттрактора типа Лоренца в координатах угол поворота – угловая скорость для конечномерной модели движения пластины в жидкости (а) и траектория в пространстве (б) в случае нулевой плавучести при наличии постоянного вращающего момента.

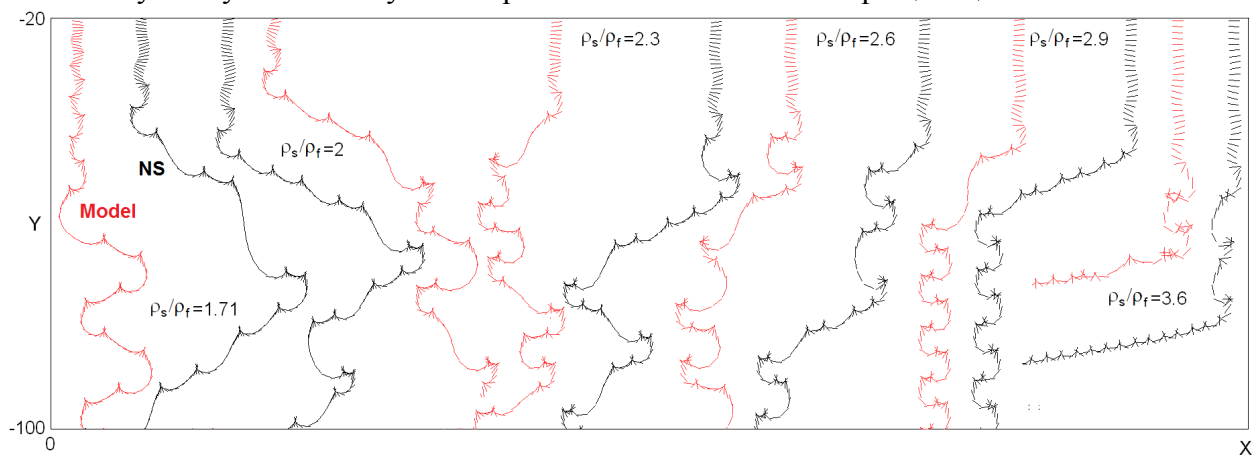


Рис.3. Траектории падающей в жидкости пластины в зависимости от параметра отношения плотностей, при описании уравнениями Навье – Стокса (NS) и в рамках реконструированной конечномерной модели

Один из парадигматических примеров неголономной механики – сани Чаплыгина. Была рассмотрена модификация задачи, делающая возможной сложную динамику в условиях сохранения механической энергии и приводящая к модельному отображению, которое может претендовать на роль неголономного аналога стандартного отображения Чирикова – Заславского [4]. А именно, исследуется движение саней Чаплыгина в ситуации, когда точка приложения неголономной связи, обеспечиваемой лезвием, допускающим движение точки контакта только вдоль своего направления, в течение определенного периода находится на санях по очереди в одной из трех опор. Считается, что в момент включения связи лезвие получает ориентацию вдоль вектора своей скорости, и мгновенно фиксируется относительно саней на период времени до следующего переключения.

На рис.4 показан вид траекторий на фазовой плоскости двумерного отображения, описывающего изменение состояния за период переключений. Подобно картине для стандартного отображения Чирикова – Заславского, здесь можно видеть инвариантные кривые, отвечающие квазипериодической дина-

мике, а также «хаотическое море» в нижней части рисунка. Помимо этого, однако, на фазовой плоскости присутствуют объекты иного типа, характерные для диссипативной динамики, в том числе аттрактор в виде неподвижной точки  $A$ , и точка  $R$ , являющаяся репеллером.

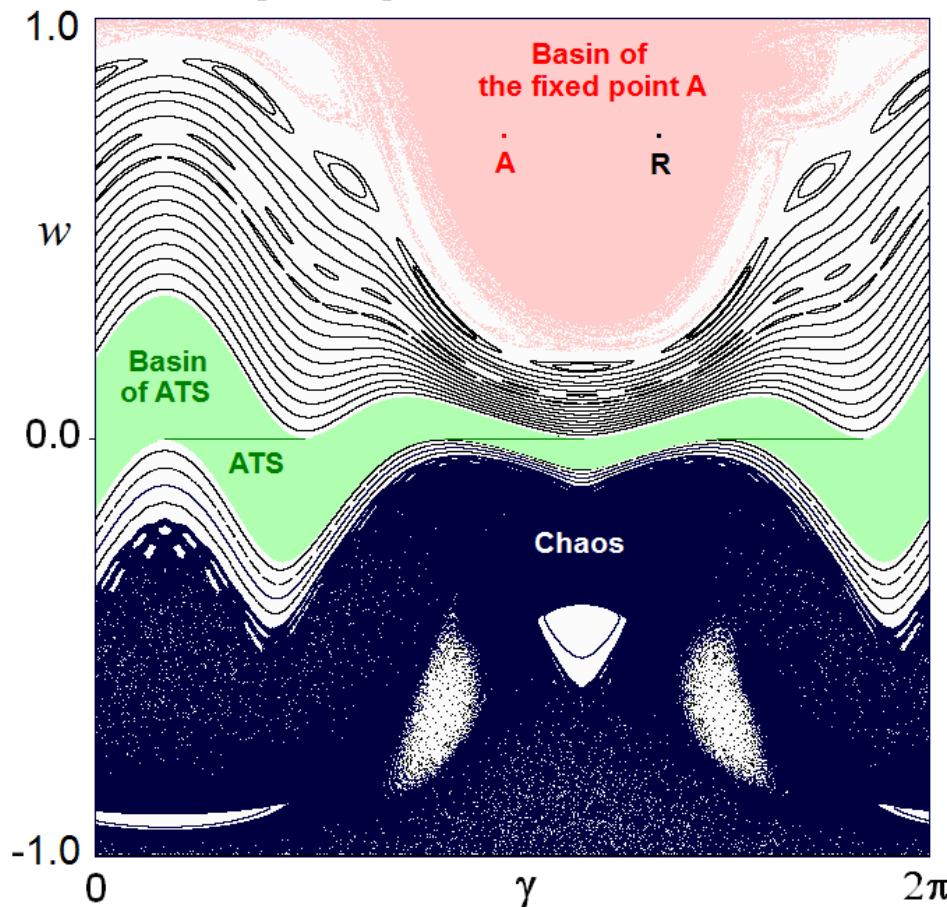


Рис.4. Типичный фазовый портрет двумерного отображения, описывающего сани Чапыгина с периодическим переключением положения неголономной связи. За динамические переменные в моменты переключений приняты угловая скорость, нормированная на ее максимально возможное значение  $w$ , и угол  $\gamma$  между направлением скорости центра масс и радиус-вектором точки, где в данный момент включается связь

*Работа выполнена при поддержке РФФ (проект № 15-12-20035).*

#### Библиографический список

1. Борисов А.В., Казаков А.О., Кузнецов С.П. // УФН. 2014. Т. 184, № 5. С. 493-500.
2. Kuznetsov S.P. // RCD. 2015. Vol.20, No 3. P. 345-382.
3. Борисов А.В., Кузнецов С.П., Мамаев И.С., Тенев В.А. // Письма в ЖТФ. 2016. Т. 42, № 17. С. 9-19.
4. Kuznetsov S.P. // EPL. 2017. Vol.118 (accepted).