

## АТТРАКТОР СМЕЙЛА-ВИЛЬЯМСА В СИСТЕМЕ СВЯЗАННЫХ МАЯТНИКОВ ФРУДА С ПОПЕРЕМЕННЫМ ТОРМОЖЕНИЕМ

В. П. Круглов<sup>1</sup>, С. П. Кузнецов<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Саратовский филиал ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН

<sup>2</sup>Удмуртский государственный университет, Ижевск

E-mail: [kruglovyacheslav@gmail.com](mailto:kruglovyacheslav@gmail.com)

Равномерно гиперболические аттракторы характеризуются грубостью или структурной устойчивостью, в силу чего сохраняет свои свойства при небольших вариациях параметров системы. Это свойство, несомненно, весьма желательно для приложений хаоса [1, 2]. Среди примеров гиперболического хаоса, своей наглядностью выделяются системы механической природы, поскольку они легко воспринимаются и интерпретируются в рамках нашего повседневного опыта [2]. Мы предлагаем рассмотреть механическую систему в виде двух маятников Фруда на общем валу, вращающемся с постоянной угловой скоростью, которые по очереди подвергаются торможению периодически приложением тормозных колодок, и слабо связаны вязким трением (рис.1). Обозначая угловую координату первого и второго маятника как  $x$  и  $y$ , запишем уравнения

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= [a - d(t - T_0) - b\dot{x}^2]\dot{x} - \sin x + \mu + \varepsilon(\dot{y} - \dot{x}), \\ \ddot{y} &= [a - d(t + T_0) - b\dot{y}^2]\dot{y} - \sin y + \mu + \varepsilon(\dot{x} - \dot{y}), \\ d(t) &= \begin{cases} 0, & t < T_0, \\ D, & T_0 < t < \frac{1}{2}T, \quad d(t+T) = d(t), \\ 0, & T/2 < t < \frac{1}{2}T, \end{cases} \quad (1)\end{aligned}$$

где примем  $a = 0.36$ ,  $b = 0.16$ ,  $\mu = 0.087$ ,  $\varepsilon = 0.0003$ ,  $D = 0.8$ ,  $T = 250$ ,  $T_0 = T/4$ .

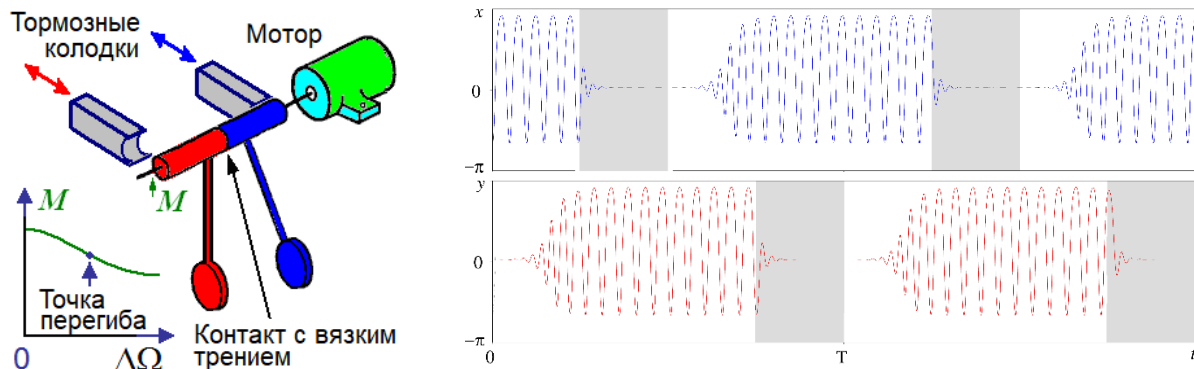


Рис.1. Система двух маятников Фруда, движение каждого из которых попеременно гасится путем присоединения тормозной колодки (слева) и реализация колебательного процесса одного и другого маятника, где серым цветом обозначены зоны торможения (справа).

Чтобы объяснить функционирование системы, начнем с ситуации, когда один маятник совершает автоколебания, а второй заторможен. Параметры выбраны так, что в конце стадии возбуждения основная частота развитых колебаний составляет половину частоты малых колебаний. Поэтому, когда торможение второго маятника прекращается, он начинает раскачиваться резонансным образом под действием второй гармоники от первого маятника, так что фаза возникающих колебаний будет соответствовать удвоенной фазе первого маятника. В

результате, когда второй маятник приходит к автоколебательному состоянию, его фаза оказывается удвоенной по сравнению с начальной фазой первого маятника. Затем, наоборот, первый маятник претерпевает торможение, а возобновление в нем колебаний будет стимулироваться второй гармоникой второго маятника и т. д. На рис. 2 слева показана диаграмма для фаз возбуждения одного из маятников для достаточно большого числа периодов модуляции. Как видно, отображение для фазы в топологическом смысле представляет собой четырехкратное расширяющееся отображение окружности. По остальным направлениям в пространстве состояний происходит сжатие фазового объема, так что это соответствует аттрактору отображения Пуанкаре в виде соленоида Смейла-Вильямса.

Согласно расчетам, показатели Ляпунова для аттрактора отображения Пуанкаре  $\Lambda_1 = 1.30$ ,  $\Lambda_2 = -11.8$ ,  $\Lambda_3 = -18.9$ ,  $\Lambda_4 = -41.5$ . Наличие положительного показателя указывает на хаотический характер динамики; он близок к  $\ln 4 = 1.386$  в согласии с растягивающим отображением окружности.

Гиперболичность хаотического аттрактора была проверена с помощью критерия, основанного на анализе углов пересечения устойчивых и неустойчивых инвариантных подпространств малых векторов возмущений с подтверждением отсутствия касания между этими подпространствами [1, 2].

На рис. 2 справа показан график старшего показателя Ляпунова в зависимости от параметра  $a$ . Как видно, в окрестности исходной точки  $a = 0.36$  имеется целый интервал, где показатель остается близким к  $\ln 4$ , а итерационные диаграммы для фаз, как можно проверить, соответствуют в топологическом смысле четырехкратно растягивающему отображению окружности. Появление значительных девиаций показателя от  $\ln 4$ , включая падения к отрицательным значениям («окна регулярности»), указывает на нарушение гиперболичности.

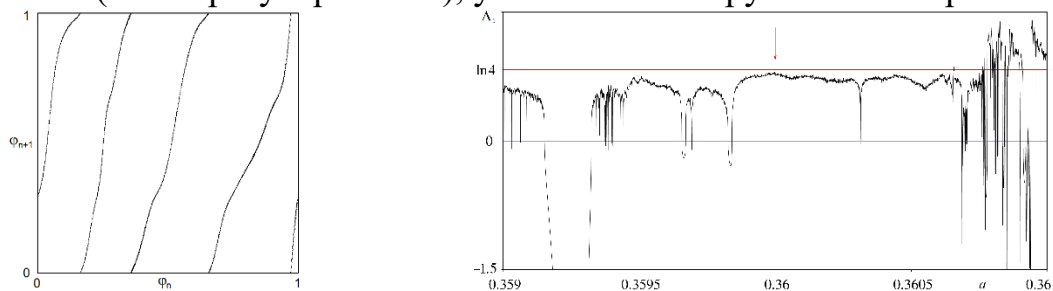


Рис. 2. Диаграмма, иллюстрирующая трансформацию фаз на последовательных стадиях активности одного из маятников и график наибольшего показателя Ляпунова отображения Пуанкаре в зависимости от параметра  $a$ . Стрелкой отмечена величина параметра  $a = 0.36$ , для которой гиперболичность проверена численно с помощью критерия углов.

*Работа выполнена при поддержке РФФ, грант № 15-12-20035.*

#### Библиографический список

1. Кузнецов С.П. Динамический хаос и однородно гиперболические аттракторы: от математики к физике. УФН, 2011, **181**, №2. С. 121-149.
2. Кузнецов С.П., Круглов В.П. О некоторых простых примерах механических систем с гиперболическим хаосом. Труды МИАН, 2017, **297**. С.232–259.