

Гиперболический хаос в связанных автоколебательных системах, функционирующих с возбуждением релаксационных автоколебаний

В.М. Дорошенко^{1,2}, В.П. Круглов³, С.П. Кузнецов^{3,4}

¹Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского

²Саратовский государственный медицинский университет имени В. И. Разумовского

³Саратовский филиал института радиотехники и электроники имени В.А. Котельникова РАН

⁴Удмуртский государственный университет
kruglovyacheslav@gmail.com

Однородно гиперболические аттракторы — это особый класс аттракторов, для которых строго обоснована хаотическая динамика [1,2]. Одно из важнейших их свойств — грубость (или структурная устойчивость), то есть устройство аттрактора и характер динамики не чувствительны к малым изменениям параметров и функций, входящих в описывающие динамику уравнения.

Мы предлагаем две новых модели с аттрактором типа Смейла-Вильямса. Модели построены из двух связанных идентичных автоколебательных подсистем с периодически модулируемым управляющим параметром, так что основные частоты колебаний подсистем поочередно изменяются в целое число раз.

Первая модель представляет собой два одинаковых слабо связанных маятника Фруда [3], движение каждого из них по очереди периодически тормозится присоединением колодки, обеспечивающей гашение автоколебаний благодаря включению достаточно сильного вязкого трения. Уравнения системы выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (a - bx^2)\dot{x} + \sin x &= \mu + \varepsilon(\dot{y} - \dot{x}) - d(t)\dot{x}, \\ \ddot{y} - (a - by^2)\dot{y} + \sin y &= \mu + \varepsilon(\dot{x} - \dot{y}) - d(t + T/2)\dot{y}, \end{aligned} \quad (1)$$
$$d(t) = \begin{cases} 0, & t < T_0, \\ D, & T_0 < t < T/2, \\ 0, & T/2 < t < T, \end{cases} \quad d(t+T) = d(t),$$

где a — управляющий параметр, ε — коэффициент связи, T — период модуляции.

Рассмотрим ситуацию, когда один маятник совершает автоколебания, а второй заторможен. Основная частота автоколебаний благодаря подбору параметров вдвое меньше, чем частота малых колебаний. Когда торможение второго маятника выключается, он начинает раскачиваться резонансным образом благодаря воздействию со стороны первого маятника на спектральной составляющей удвоенной частоты. Присутствие второй гармоники автоколебаний обеспечивается асимметрией потенциальной ямы осциллятора Фруда — наличием члена μ в правой части уравнения движения. Поэтому фаза этих колебаний отвечает удвоенной фазе основной составляющей колебаний первого маятника. В результате, когда возникшие колебания второго маятника приблизятся к установившемуся автоколебательному режиму с частотой вдвое меньшей, чем частота малых колебаний, фаза его будет удвоена в сравнении с начальной фазой первого маятника. Далее, процесс повторяется со сменой ролей одного и другого маятника раз за разом. Полный цикл, отвечающий периоду модуляции параметров T , сопровождается умножением исходной фазы колебательного процесса на фактор 4, т.е. для фазы реализуется четырехкратно растягивающее отображение окружности.

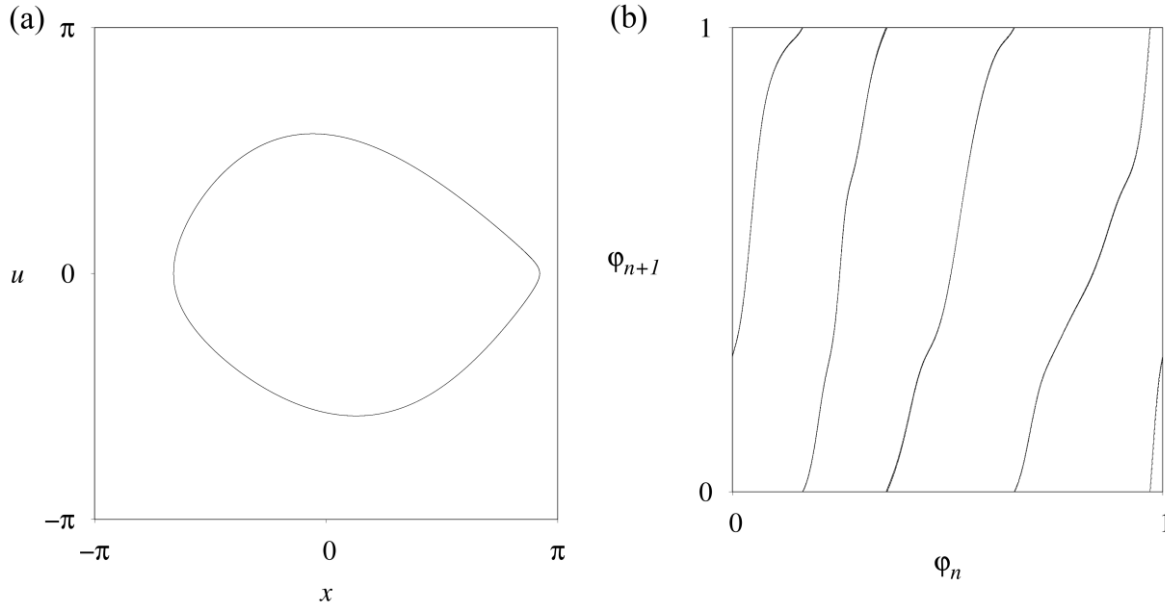


Рис. 1. (а) Портрет аттрактора отображения Пуанкаре за период модуляции в проекции на плоскость переменных первого маятника. (б) Итерационная диаграмма для фазы колебаний первого маятника.

Система уравнений (1) была решена численно. На рис. 1 (а) и (б) представлены портрет аттрактора отображения Пуанкаре за период модуляции в проекции на плоскость переменных первого маятника ($x, u = \dot{x}$) и итерационная диаграмма для фазы колебаний первого маятника при значениях параметров $a=0.36, b=0.16, \mu=0.087, \varepsilon=0.0003, D=0.8, T=250, T_0=T/4$. Итерационная диаграмма для фазы соответствует растягивающему отображению окружности с фактором 4.

При значениях параметров $a=0.36, b=0.16, \mu=0.087, \varepsilon=0.0003, D=0.8, T=250, T_0=T/4$ были вычислены показатели Ляпунова отображения Пуанкаре:

$$\Lambda_1 = 1.3 \pm 0.01, \quad \Lambda_2 = -11.78 \pm 0.04, \quad \Lambda_3 = -18.91 \pm 0.03, \quad \Lambda_4 = -41.46 \pm 0.05.$$

Старший показатель близок к $\ln 4$, показателю Ляпунова растягивающего отображения окружности. Остальные показатели отрицательные. Это соответствует построению соленоида Смейла-Вильямса с четырехкратным растяжением угловой переменной.

Вторая система состоит из двух одинаковых слабо связанных осцилляторов Бонхоффера – ван дер Поля [4,5], у которых управляющий параметр медленно изменяется во времени:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (f(t/T + 1/4) - x^2) \dot{x} + x &= K + \varepsilon(y - x), \\ \ddot{y} - (f(t/T - 1/4) - y^2) \dot{y} + y &= K + \varepsilon(x - y), \\ f(\tau) &= \begin{cases} a, & 0 < \tau \leq \tau_1; \\ \frac{(a-c)\tau + c\tau_1 - a\tau_2}{\tau_1 - \tau_2}, & \tau_1 < \tau \leq \tau_2; \\ \frac{(c-a)\tau + a\tau_2 - c}{\tau_2 - 1}, & \tau_2 < \tau \leq 1, \end{cases} \\ f(\tau + 1) &= f(\tau), \end{aligned} \quad (2)$$

где $f(\tau)$ – периодическая функция, описывающая модуляцию управляющего параметра, K – постоянная, ε — коэффициент связи.

С увеличением управляющего параметра осциллятора Бонхоффера – ван дер Поля основная частота автоколебаний уменьшается. Модулируя управляющий параметр,

можно получить периодическое переключение частоты подсистем с $\omega = 1$ для малых колебаний до $\omega = 1/M$ (M – целое) для колебаний с большой амплитудой.

Рассмотрим функционирование системы в режиме с гиперболическим аттрактором. Начнем с ситуации, когда один осциллятор совершает автоколебания, а второй заторможен. Основная частота автоколебания, благодаря упоминавшемуся выше подбору параметров, в $M = 2, 3, 4, \dots$ меньше, чем частота малых колебаний. Когда второй осциллятор в силу увеличения параметра приближается к порогу возбуждения и переходит его, он начинает раскачиваться резонансным образом благодаря воздействию со стороны первого осциллятора составляющей с частотой $\omega = 1$. Присутствие гармоник автоколебаний обеспечивается наличием членов $x^2\dot{x}$ и K в уравнениях. Поэтому фаза этих колебаний отвечает умноженной в M раз фазе основной составляющей колебаний первого осциллятора. В результате, когда возникшие колебания второго осциллятора приблизятся к установившемуся режиму релаксационных автоколебаний с частотой в M раз меньшей, чем частота малых колебаний, фаза его будет в M раз большей в сравнении с начальной фазой первого осциллятора. Далее, процесс повторяется со сменой ролей одного и другого осциллятора. Полный цикл, отвечающий периоду модуляции параметров T , сопровождается умножением исходной фазы колебательного процесса на фактор $M^2 = 4, 9, 16, \dots$, т.е. для нее реализуется растягивающее отображение окружности. При сжатии по остальным направлениям это соответствует построению соленоида Смейла-Вильямса. В отображении, построенном за полпериода модуляции $T/2$, фаза умножается на M .

Система уравнений (2) была решена численно. На рис. 2 (а) и (б) изображены портрет аттрактора отображения Пуанкаре за период модуляции в проекции на плоскость переменных первого осциллятора ($x, u = \dot{x}$) и итерационная диаграмма для фазы колебаний первого осциллятора при значениях параметров $a=5.49$, $K=0.5$, $c=-2$, $\varepsilon=0.01$, $T=200$, $\tau_1=0.4$, $\tau_2=0.5$. Итерационная диаграмма для фазы соответствует растягивающему отображению окружности с фактором 4.

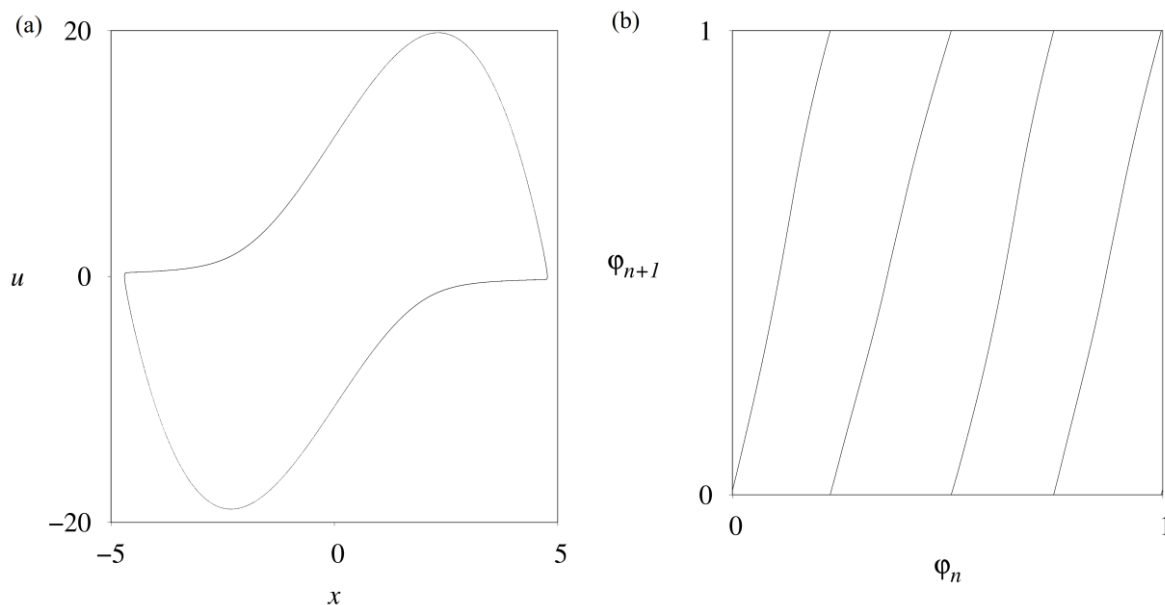


Рис. 2. (а) Портрет аттрактора отображения Пуанкаре за период модуляции в проекции на плоскость переменных первого осциллятора. (б) Итерационная диаграмма для фазы колебаний первого осциллятора.

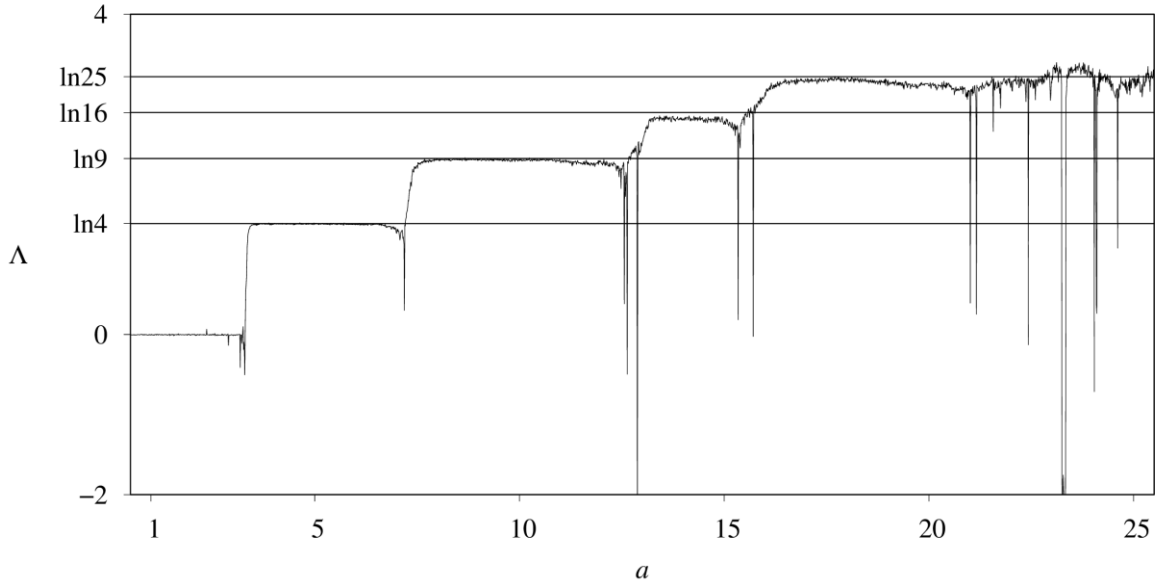


Рис. 3. Зависимость старшего показателя Ляпунова стробоскопического отображения за период модуляции при $a=5.49$, $K=0.5$, $c=-2$, $\varepsilon=0.01$, $T=400$, $\tau_1=0.4$, $\tau_2=0.5$.

При значениях параметров $a=5.49$, $K=0.5$, $c=-2$, $\varepsilon=0.01$, $T=200$, $\tau_1=0.4$, $\tau_2=0.5$ были вычислены показатели Ляпунова отображения Пуанкаре:

$$\Lambda_1 = 1.3791 \pm 0.004, \quad \Lambda_2 = -34.45 \pm 0.07, \quad \Lambda_3 = -396.3 \pm 0.2, \quad \Lambda_4 = -1604.7 \pm 0.3.$$

Старший показатель близок к $\ln 4$, показателю Ляпунова растягивающего отображения окружности. Остальные показатели отрицательные.

Подбором параметров можно реализовать режимы с различными факторами растяжения угловой переменной. На рис. 3 представлена зависимость старшего показателя Ляпунова от управляющего параметра a для отображения за период модуляции. При различных значениях параметра a возникают солениды Смейла-Вильямса с факторами $M^2 = 4, 9, 16, 25$. При этом старший показатель Ляпунова зависит от параметра плавно в широких интервалах, что говорит о структурной устойчивости аттракторов.

Система на основе маятников Фруда исследована при поддержке гранта РФФ №15-12-20035. Система на основе осцилляторов Бонхоффера – ван дер Поля исследована при поддержке гранта РФФ №17-12-01008.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.Б. Каток, Б. Хасселблат “Введение в современную теорию динамических систем” Москва: Факториал, 1999.
2. С.П. Кузнецов “Динамический хаос и гиперболические аттракторы: от математики к физике” Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2013.
3. С.П. Стрелков // ЖТФ. 1933. Т. 3. № 4. С. 563-573.
4. R. FitzHugh // Biophysical J. 1961. V. 1. No. 6. P. 445-466.
5. J. Nagumo et al. // Proc IRE. 1962 . V. 50. No. 10. P. 2061–2070.