

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЙ ХАОС В РЕШЕТОЧНЫХ МОДЕЛЯХ

С. П. Кузнецов^{1,2}

¹Саратовский филиал ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН

²Удмуртский государственный университет, Ижевск

E-mail: spkuz@yandex.ru

Один из подходов к построению физических систем с гиперболическим хаосом, ассоциирующимся с аттракторами типа Смейла – Вильямса, состоит в использовании активных сред, где реализовано попеременное возбуждение паттернов, скажем, структур Тьюринга или стоячих волн, с тем, чтобы пространственная фаза за определенный характерный период претерпевала отображение растяжения в целое число раз [1-3]. В лекции рассматривается применение этого подхода для организации гиперболического хаоса в решетках из ячеек, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Первая модель представляет собой дискретный аналог уравнения, предложенного в работе [1], как модификации уравнения Свифта – Хохенберга:

$$\dot{u}_j + 2\kappa^2(1 + 2\kappa^2)(u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}) + 4\kappa^4(u_{j-2} - 2u_j + u_{j+2}) = (A - 1 + \varepsilon\delta_j)u_j - u_j^3,$$

где u_j – значение переменной, относящееся к j -му пространственному узлу, и наложено краевое условие $u_j = u_{j+N}$, A , ε , параметры, величины δ_j задают пространственную неоднородность. Параметр κ считается изменяющимся во времени так, что в системе обеспечивается попеременное возбуждение паттернов с

одной или тремя волнами на длине системы: $\kappa(t) = \kappa(t + nT) = \begin{cases} \kappa_1, & 0 \leq t < T/2, \\ \kappa_3, & T/2 \leq t < T. \end{cases}$

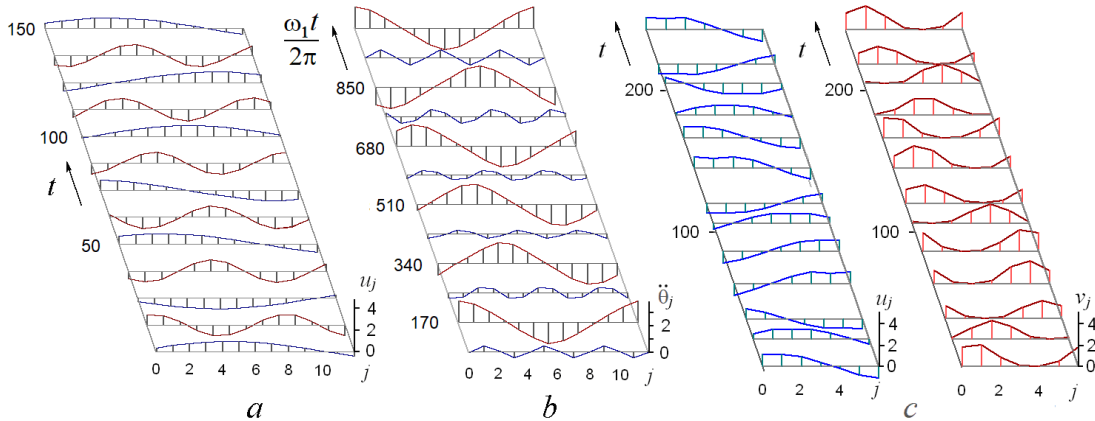


Рис.1. Пространственно-временные диаграммы решеточных систем. (а) Первая модель при $N=12$, $A=0.4$, $T=25$, $\varepsilon=0.03$, $\delta_j = \{0,1,1,0,-1,-1,0,1,1,0,-1,-1\}$. (б) Вторая модель при $N=12$, $D=1.19$, $\gamma=0.12$, $\varepsilon=0.01$, $\kappa_1=\kappa_2=0.6$, $\delta_j = \{0,1,1,0,-1,-1,0,1,1,0,-1,-1\}$; переключения частот накачки между $\omega_1=2.297$ и $\omega_2=3.675$ производятся через $N_1=85$ и $N_2=136$ периодов колебаний подвеса маятников. (с) Третья модель при $N=6$, $D=8$, $\alpha=2.2$, $\gamma=0.6$, $\mu=0.4$, $\varepsilon=0.25$, $\delta_j = \{1,-1,-1,1,1,-1\}$.

Вторая модель – кольцевая цепочка маятников, где благодаря вертикальным колебаниям подвеса попеременно реализуется параметрическое возбуждение стоячих волн, имеющих одну или три волны на длине цепочки [2]:

$$(1 + \varepsilon\delta_j)[\ddot{\theta}_j + (1 + a(t))\sin \theta_j] = -\gamma\dot{\theta}_j + D(\theta_{j-1} - 2\theta_j + \theta_{j+1}),$$

где
$$a(t) = \begin{cases} \kappa_2 \sin \omega_2 t, & 0 \leq t < \tau, \\ \kappa_1 \sin \omega_1 (t - \tau), & \tau \leq t < T, \end{cases} \quad a(t) = a(t + T), \quad \tau = 2\pi \frac{N_2}{\omega_2}, \quad T = 2\pi \left(\frac{N_2}{\omega_2} + \frac{N_1}{\omega_1} \right)$$

Третья модель автономная и получается дискретизацией уравнений [3]: $\dot{u}_j = D(u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}) + u_j^3 - u_j v_j^2 + \alpha u_j + \varepsilon \delta_j v_j, \dot{v}_j = (-\gamma + u_j^2) v_j + \mu u_j^2$

при наложении граничных условий $u_{-1} = -u_{N-1}, u_N = -u_0$.

Рис.1 иллюстрирует пространственно-временную динамику этих моделей. Можно наблюдать поочередное формирование коротковолновых и длинноволновых паттернов, у которых пространственная фаза претерпевает за характерный период растягивающее отображение окружности (рис.2). Наличие сжатия фазового объема по остальным направлениям в пространстве состояний обеспечивает присутствие аттракторов типа соленоида Смейла – Вильямса.

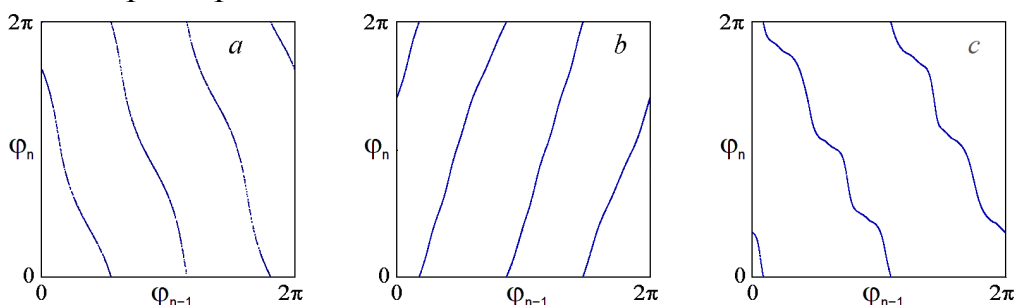


Рис.2. Диаграммы для первой (а), второй (b) и третьей (с) моделей, показывающие, что пространственные фазы преобразуются в соответствии с растягивающим отображением окружности.

На рис. 3 представлена схмотехническая реализация третьей системы; ее динамика была воспроизведена в среде Multisim.

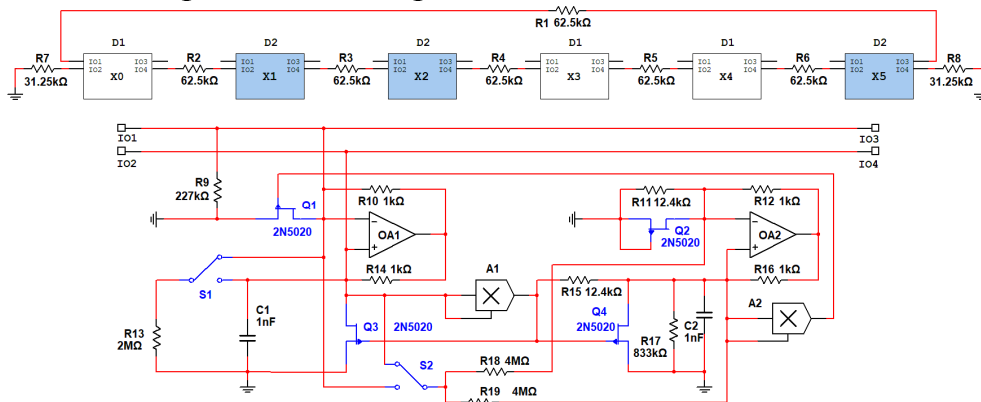


Рис.3. Схема электронного устройства, реализующего динамику третьей модели. Указанное положение переключателей на нижнем рисунке отвечает блоку D1, а противоположное – блоку D2.

Поддержано грантами РФФИ 17-12-01008 (модель 1) и 15-12-20035 (модель 2).

Библиографический список

1. Kuptsov P.V., Kuznetsov S.P., Pikovskiy A. Hyperbolic Chaos of Turing Patterns // Phys. Rev. Lett. 2012. Vol. 108. 194101.
2. Кузнецов С.П. Хаотическая динамика кольцевой цепочки маятников с вибрирующим подвесом. Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2019. Т. 27. № 2.
3. Kruglov V.P., Kuznetsov S.P., Pikovskiy A. Attractor of Smale-Williams type in an autonomous distributed system // Regular and Chaotic Dynamics. 2014. Vol. 19. No. 4. P. 483-494.